КАК НАЙТИ ВСЕ БАРЬЕРЫ БУТЧЕРА? РИСУНКИ И ГИПОТЕЗЫ

С.А. Конев

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

skonev11@yandex.ru

Известно, что невозможно построить явный пятистадийный метод Рунге–Кутты с порядком сходимости 5. Эту особенность называют первым порядковый барьером Бутчера [1]. Существование барьера 60 лет назад доказал известный математик-вычислитель Дж. Бутчер. Позже он же обнаружил второй [2] и третий [3] порядковые барьеры.

С точки зрения математика-вычислителя это означает, что построение явных методов Рунге–Кутты (ЯМРК), – наиболее удобных и простых с точки зрения реализации – высокого порядка сопряжено с трудностями. Например, в 1978 Э. Хайрер [4] смог построить 17-стадийный ЯМРК 10 порядка. Полный набор условий на коэффициенты метода состоял из 1205 нелинейных уравнений, и, чтобы решить их, Хайреру пришлось использовать т.н. упрощающие предположения. По-видимому, с тех пор поиски ЯМРК высокого порядка (как и новых порядковых барьеров) остановились.

Однако за все эти 60 лет так и не было найдено объяснения, почему возникают порядковые барьеры, и можно ли найти их все сразу. В оригинальных работах Бутчера [1–3] существование порядковых барьеров доказывается с помощью громоздких алгебраических выкладок. Но объяснения, почему они возникают, нет.

Между тем, представляется интересным такой вопрос: можно ли найти все порядковые барьеры Бутчера? И, если можно, то как это сделать? Предполагается, что ответ на этот вопрос позволит лучше понять природу не только ЯМРК, но и других одношаговых многостадийных методов (например, неявных методов Рунге–Кутты, методов Розенброка и родственных им (m, k)-методов).

Формально на вопрос обо всех барьерах Бутчера ЯМРК отвечает функция

$$d(p) = s(p) - p,$$

равная разности между желаемым порядком сходимости p и минимальным числом стадий $s(p)$, необходимым для достижения желаемого порядка: если при p функция $d(p)$ испытывает скачок, значит при этом p существует барьер Бутчера.

Однако вид функции $d(p)$ неизвестен. Работы [1-3] фактически определили значения $d(p)$ при $p = 5, 7, 8$: $d(5) = 1$, $d(7) = 2$, $d(8) = 3$; а работа [4] дала оценку: $d(10) \le 7$. Если указанные результаты собрать в единую таблицу, получим следующее (результаты для $p = 9$ к настоящему времени неизвестны):

Таблица 1: Значения функций *s(p)* и *d(p)*.

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s(p)	1	2	3	4	6	7	9	11	—	≤ 17
d(p)	0	0	0	0	1	1	2	3	—	≤ 7

Объяснения, почему таблица выглядит именно так, упомянутые работы не дали. В 2019 г. автором настоящей работы была выдвинута гипотеза о виде функции *d(p)*. Кратко эта гипотеза формулируется в следующем виде: для определения *d(p)* достаточно построить все диаграммы Юнга, соответствующие разбиению числа *p*, и расположить их по особому правилу в вершинах некоторого графа. Затем вычислить одну специфическую характеристику графа. Гипотеза утверждает, что значение характеристики в точности равно *d(p)*. В следующей таблице собраны значения *d(p)*, полученные автором с помощью этой гипотезы.

Таблица 2: Значения функции *d(p)*, полученные автором.

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d(p) *(автор)*	0	0	0	0	1	1	2	3	5	6

Видно, что гипотеза согласуется с известными результатами при $1 \leq p \leq 8$. Более того, гипотеза согласуется с новыми результатами! Например, из неё следует, что $d(10) \leq 6$, т.е. ЯМРК порядка 10 может содержать 16 стадий. Коэффициенты такого метода построены численно в недавней работе [5].

К сожалению, к настоящему времени доказательство гипотезы в законченном виде построить не удалось. Тем не менее, в данной работе описан процесс вывода гипотезы и поставлен ряд вопросов, ответы на которые должны помочь найти доказательство.

Список литературы:

1. Butcher J.C. On Runge–Kutta Process of high order // J. Austral. Math. Soc. 1964. V. IV. Part 2. P. 179–194.
2. Butcher J.C. On the attainable order of Runge–Kutta methods // Math. Of Comp. 1965. V. 19. P. 408–417.
3. Butcher J.C. The non-existence of ten stage eight order explicit Runge–Kutta methods // BIT. 1985. V. 25. P. 521–540.
4. Hairer E. A Runge–Kutta method of order 10 // J. Inst. Maths. Applics. 1978. V. 21. P. 47–59.
5. Zhang D.K. An explicit 16-stage Runge–Kutta method of order 10 discovered by numerical search. // Numer Algor. 2024-03-01.