

О ТОЧНОСТИ НЕМОНОТОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ ГАЗОДИНАМИКИ

М.Д. Брагин

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

МФТИ (НИУ), г. Долгопрудный

ИГиЛ СО РАН, г. Новосибирск

michael@bragin.cc

Согласно теореме Годунова, для линейного уравнения переноса не существует линейных монотонных разностных схем с порядком точности выше первого [1]. Из-за данного запрета разработка монотонных схем высокого порядка точности ведется в классе нелинейных схем.

Известно множество методов обеспечения монотонности: ограничители потоков и наклонов, ENO- и WENO-реконструкции, адаптивные искусственные вязкости, численные фильтры и так далее. Следуя терминологии из [2], будем собирательно называть их нелинейной коррекцией потоков (NFC, nonlinear flux correction).

В [3–9] было показано, что схемы с NFC имеют не более чем первый порядок точности в областях влияния ударных волн (УВ), независимо от номинального порядка аппроксимации на гладких решениях.

Чтобы решить проблему пониженной точности за УВ, в [2, 10–13] были предложены комбинированные схемы. Их идея заключается в следующем. Сперва задача рассчитывается целиком (от начального момента времени до конечного) без NFC. Затем к полученному высокоточному решению применяется та или иная корректирующая постобработка, в результате чего оно становится монотонным.

Существует два подхода к построению комбинированных схем. В первом подходе (см. [2, 10, 11]) полный расчет задачи осуществляется на одной сетке при помощи немонотонной схемы высокого порядка аппроксимации. Найденное решение используется для постановки внутренней начально-краевой задачи в подвижной окрестности УВ. Эта вспомогательная задача рассчитывается по NFC-схеме. В любой интересующий момент времени немонотонное решение исходной задачи заменяется в окрестности УВ монотонным решением внутренней задачи. Эта замена, в отличие от NFC, не является частью послойного перехода, а производится апостериори по уже готовым решениям обеих задач. Во втором подходе (см. [12, 13]) полный расчет задачи выполняется на двух-трех вложенных сетках по бикompактной схеме первого порядка аппроксимации по времени. По найденным решениям при помощи пассивной (глобальной) экстраполяции Ричардсона строится высокоточное немонотонное решение, которое корректируется посредством оригинальной гибридной схемы из [14].

В настоящем докладе теория комбинированных схем проверяется на задачах газодинамики. Рассматривается несколько немонотонных схем высокого порядка аппроксимации. Анализируется их реальная точность в областях влияния УВ. Показывается, что здесь их интегральный порядок сходимости понижается до первого, хотя ранее в задачах для уравнений мелкой воды те же схемы демонстрировали второй порядок. Тем не менее, погрешности решения у выбранных схем оказываются многократно (на два порядка) ниже, чем у их монотонных версий с NFC. Это говорит о перспективности развития класса комбинированных схем. Сравняются два подхода к построению комбинированных бикомпактных схем для многомерных уравнений Эйлера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-11-00060.

Список литературы:

1. Годунов С.К. // Мат. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517–522.
3. Остапенко В.В. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1201–1212.
4. Casper J., Carpenter M.H. // SIAM J. Sci. Comput. 1998. V. 19. № 1. P. 813–828.
5. Engquist B., Sjögreen B. // SIAM J. Numer. Anal. 1998. V. 35. P. 2464–2485.
6. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. // Матем. моделирование. 2013. Т. 25. № 9. С. 63–74.
7. Михайлов Н.А. // Матем. моделирование. 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138.
8. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 148–156.
9. Брагин М.Д., Рогов Б.В. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 5. С. 884–899.
10. Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643.
11. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. // Докл. АН. 2019. Т. 489. № 2. С. 119–124.
12. Брагин М.Д., Рогов Б.В. // Докл. АН. 2020. Т. 492. С. 79–84.
13. Брагин М.Д., Рогов Б.В. // Докл. АН. 2020. Т. 494. С. 9–13.
14. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 6. С. 98–110.