О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ С ИНВАРИАНТНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ НАД ШАРОМ

Ю.О. Беляева[1,2], В.П. Бурский[2,3]

[1]РУДН, г. Москва
[2]ИПММ, г. Донецк
[3]МФТИ (НИУ), г. Долгопрудный

yilia-b@yandex.ru, bvp30@mail.ru

Групповым свойствам дифференциальных уравнений и их решений посвящена обширная литература ([1, 2] и др.). Однако, задачи с общими инвариантными граничными условиями изучены в гораздо меньшей степени. В этом направлении известными являются работы [3, 4]. Значительный вклад в изучение общих инвариантных граничных задач был сделан В.П. Бурским. Общей теории граничных задач, как и граничным задачам с эквивариантными граничными условиями посвящена его монография [5].

В работе мы рассматриваем смешанную задачу для волнового уравнения в цилиндре над шаром:

$$u_{tt} = \Delta u,\ x \in B, t \in (0, T), \tag{1}$$

где $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$, с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), \tag{2}$$

и граничным условием вида

$$u|_{\partial B} * \alpha + u_\nu|_{\partial B} * \beta = 0. \tag{3}$$

Здесь мы предполагаем, что функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ принадлежат пространству $L_2(\partial B)$ и $\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^{l} \alpha_l^k Y_l^k$, и $\beta = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^{l} \beta_l^k Y_l^k$ – их разложения в ряды Фурье по сферическим функциям Y_l^k. Пусть далее u_0, u_1– заданные функции, $u_0 \in H^1(B), u_1 \in L_2(B)$. Символ $*$ обозначает свертку на ∂B, она может быть записана в виде

$$\psi * \alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^{l} \psi_l^k \alpha_l^k Y_l^k.$$

Граничная задача с условиями вида (3) для оператора Лапласа в круге рассматривалась в [6] для уравнения Гельмгольца. В работе [7] рассматривалось стационарное уравнение Шредингера во внешности шара. Исследован спектр и получены точные формулы для собственных функций задачи с условием вида (3). Разрешимость задачи для уравнения теплопроводности в круге была рассмотрена в работе [8].

Условие (3), как известно, обладает свойством инвариантности относительно группы поворотов шара: для любых $V \in SO(\mathbb{R}^n)$, выполняется $T_V(\alpha * u) = \alpha * T_V u$, где $T_V(f(x)) = f(Vx)$. Рассматриваемая постановка

является наиболее общей поворотно-инвариантной постановкой граничной задачи в шаре, а первая, вторая и третья краевые задачи являются ее частными случаями. В докладе будут представлены результаты о разрешимости задачи (1)–(3). Будут доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи при определенных предположениях на граничные функции.

Список литературы:

1. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп, 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1991. 576 с.
2. Helgason S. Groups and geometric analysis: integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Orlando: Academic Press, 1984. 667 P.
3. Kochubei A.N. Symmetric operators commuting with a family of unitary operators // Funct. Anal. Appl. 1979. Vol. 13(4). Pp. 300–301.
4. Zan N.K. On a boundary problem for the Laplace equation in the disk // Ukr Math J. 1972. Vol. 24. Pp. 613–619. https://doi.org/10.1007/BF01085411
5. Бурский В.П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова думка, 2002. 315 с.
6. Бурский В.П. Об эквивариантных расширениях дифференциального оператора на примере оператора Лапласа в круге // Укр. матем. журнал. 1999. Т. 51. № 2. С.158–169.
7. Burskii V.P., Zaretskaya A.A. On the Spectrum and Eigenfunctions of the Equivariant General Boundary Value Problem Outside the Ball for the Schrödinger Operator with Coulomb Potential Laplace operator in a circle // Quant. Phys. Lett. 2016. V.5. Issue 2. Pp. 5–17.
8. Бурский В.П., Куракина И.И. Общая эквивариантная смешанная задача для уравнения теплопроводности в круговом цилиндре // Труды ИПММ. 2012. Т. 24. С. 260.