МИНИМАЛЬНАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕШЁТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

А.В. Березин

НИЯУ МИФИ, г. Москва

arsenbrs@mail.ru

Уравнения Максвелла – фундаментальные уравнения физики, описывающие динамику электромагнитных полей. Они являются необходимым элементом многих современных областей исследований, таких как оптика, магнитная гидродинамика (MHD), методы частиц в ячейках (PIC) и др. Наиболее распространённый инструмент для численного решения уравнений

Максвелла на текущий момент – методы конечных разностей во временной области (FDTD) [1]. В FDTD динамика электромагнитных полей моделируются с использованием конечно-разностной схемы, при этом компоненты полей относятся к сдвинутым во времени и пространстве решёткам. Точность схем FDTD главным образом ограничена численной дисперсией – фазовой ошибкой для решения в виде монохроматической волны. Для подавления численной дисперсии схемы FDTD требуют порядка 20 узлов на самую короткую длину волны в задаче [1].

В 2010 году появилась новая многообещающая численная схема для решения уравнений Максвелла [2]. Она возникла как адаптация метода решёточных уравнений Больцмана (LBM), широко применяемого для задач гидрогазодинамики. Такая схема, как и все схемы LBM-типа, принципиально отличается от схем FDTD. В частности, она не является конечно-разностной схемой, а вычисление полей происходит локально и по пространству, и по времени.

Мы построили и проанализировали простую схему метода решёточных уравнений Максвелла (LMM), описывающую динамику электромагнитных полей в вакууме. Исследуемая схема оказывается весьма компактной даже в сравнении со стандартными схемами LBM, поскольку, как и уравнения Максвелла в вакууме, является полностью линейной относительно своих переменных, а также, на языке гидрогазодинамики, отвечает нулевой вязкости. Вследствие указанных свойств нам удалось явно получить дисперсионные соотношения для характерных пространственных направлений схемы (Рис.1) и показать наличие двенадцати направлений, вдоль которых сигнал с определённой поляризацией может распространяться без дисперсии (светло-зелёные линии на правом графике рисунка 1).

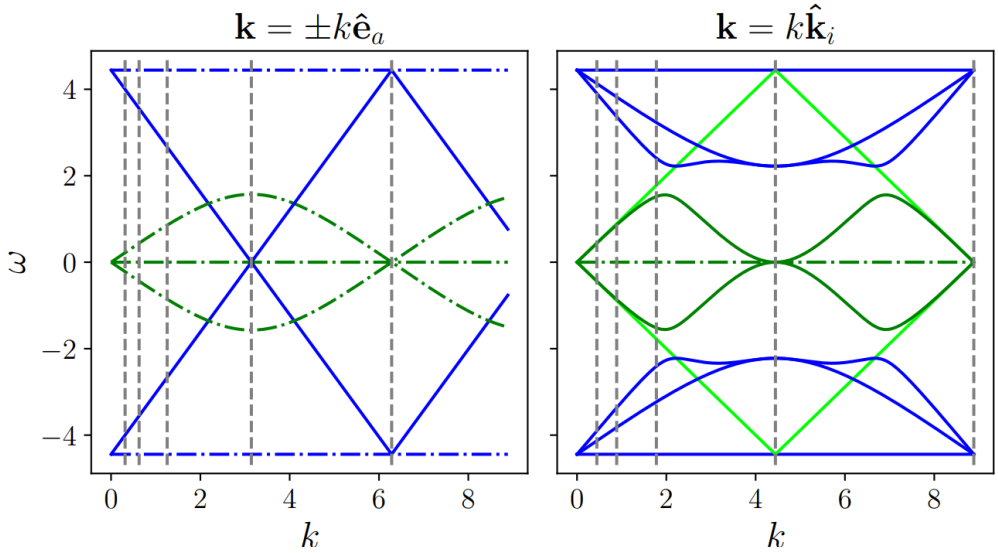

Рис. 1. Двенадцать дисперсионных ветвей схемы LMM в направлениях осей декартовой системы координат $\pm\boldsymbol{e}_a$(слева) и в направлениях переноса функций распределения $\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$ (справа). Зелёным цветом обозначены основные ветви, синим – побочные. Штрихпунктирные линии отвечают дублирующимся ветвям. Серые штрихованные линии соответствуют (слева направо) 20/10/5/2/1 узлам на длину волны.

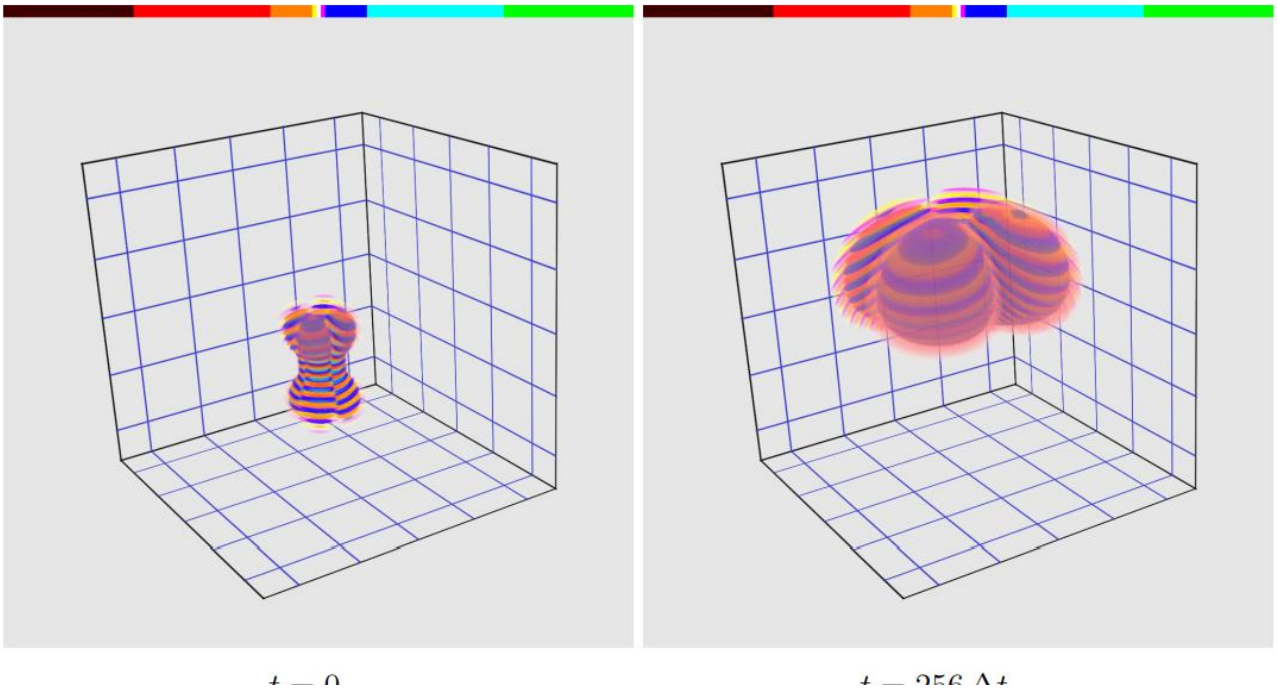

Рис. 2. Эволюция продольной компоненты магнитного поля H_z фокусированного лазерного импульса. Амплитуда поля равна 1, пределы цветовой палитры: ±0.14.

Также мы сформулировали корректный способ задания начальных условий для переменных схемы, необходимый для точного выполнения закона сохранения энергии. Это может быть важно для описания эволюции сложной пространственной структуры полей, к примеру продольной компоненты поля фокусированного лазерного импульса (рисунок 2).

Список литературы:

1. Taflove A., Oskooi A., Johnson S.G. Advances in FDTD computational electrodynamics: photonics and nanotechnology. Artech house, 2013. 670 P.
2. The lattice Boltzmann method: principles and practice / K. Timm, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin et al. // Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG. 2016. 690 P.
3. Mendoza M., Muñoz J.D. Three-dimensional lattice Boltzmann model for electrodynamics // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2010. Vol. 82. Issue 5. P. 056708. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.056708