АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОПРЯЖЁННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ НЕКОМПЛАНАРНЫХ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЁТОВ

К.Р. Корнеев

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

kirill_rnd@mail.ru

Одной из проблем проектирования межпланетных перелётов малых космических аппаратов (МКА) с использованием электрореактивных двигательных установок (ЭРДУ) является выбор хорошего начального приближения для траектории. Данная работа посвящена проблеме выбора начального приближения параметров оптимального управления МКА с ЭРДУ при перелётах между некомпланарными круговыми орбитами.

Существуют две общепринятые модели работы ЭРДУ: модель идеально регулируемой двигательной установки с ограниченной мощностью (ИР-модель) [1] и модель двигательной установки с постоянной скоростью истечения (ПСИ-модель). ИР-модель даёт нижнюю оценку на расход рабочего тела, а также нередко используется в качестве начального приближения для ПСИ-модели. В случае ИР-модели с постоянной доступной электрической мощностью минимизация расхода рабочего тела эквивалентна минимизации функционала:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} a^2 dt \to \min, \tag{1}$$

где a – это величина реактивного ускорения, t_0 и t_f – это начальное и конечное время соответственно. Траектории, на которых минимизируется данный целевой функционал, называются энергетически оптимальными. В данной работе рассматриваются энергетически оптимальные перелёты между некомпланарными круговым орбитами в безразмерной задаче двух тел. С помощью принципа максимума Понтрягина (ПМП) [2] задача оптимизации сводится к двухточечной краевой задаче со следующей системой расширенных уравнений движения:

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v},\\
&\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{p}_v,\\
&\dot{\mathbf{p}}_r = \frac{\mu}{r^3}\mathbf{p}_v - \frac{3\mu}{r^5}\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}_v\right)\mathbf{r},\\
&\dot{\mathbf{p}}_v = -\mathbf{p}_r.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ – это положение и скорость КА соответственно, а $\boldsymbol{p}_r$ и $\boldsymbol{p}_v$ – это векторы, сопряжённые положению и скорости, μ – гравитационный параметр,

который в безразмерной задаче равен единице. Граничные условия задачи встречи задаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(t_0)-\mathbf{r}_0=0,\ \mathbf{v}(t_0)-\mathbf{v}_0=0,\\ &\mathbf{r}(t_f)-\mathbf{r}_f=0,\ \mathbf{v}(t_f)-\mathbf{v}_f=0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}_0$ – это необходимые положение и скорость КА в начальный момент времени, а $\boldsymbol{r}_f$ и $\boldsymbol{v}_f$ – это положение и скорость КА конечный момент времени. В данной работе эти величины выбраны соответствующими круговым орбитам. Легко убедиться, что при оптимизации времени перелёта задача встречи оказывается эквивалентна некоторой задаче перелёта с фиксированным временем. Однако в случае задачи встречи конечные положение и скорость можно контролировать в явном виде. Далее термин «задача перелёта» будет использоваться в смысле задачи встречи с оптимальным временем перелёта.

Известно, что система (2) является уравнениями Гамильтона, широко известными в теоретической механике. При преобразовании фазовых переменных, сопряжённые переменные необходимо преобразовать таким образом, чтобы система сохранила каноничность [3]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}'=\Phi(\mathbf{x}),\\ &\mathbf{p}=\left(\frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\mathbf{p}' \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ – это фазовый и сопряжённый векторы до преобразования Ф, а $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{p}'$ – это фазовый и сопряжённый векторы после преобразования. Такое преобразование называется каноническим. Канонические преобразования позволяют легко менять системы координат и переходить от одного набора фазовых переменных к другому. Несмотря на удобство использования, с помощью такого преобразования нельзя осуществить переход от компланарного перелёта к пространственному перелёту. Рассмотрим следующий класс аффинных преобразований сопряжённых переменных в начальный момент времени, который нарушает условия каноничности (фазовые переменные не подвергаются преобразованию), но при этом обладает определённым удобством в использовании:

$$\begin{aligned} &R=\begin{pmatrix}\rho_1 & \nu_1 & \eta_1\\ \rho_2 & \nu_2 & \eta_2\\ \rho_3 & \nu_3 & \eta_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{v},\\ &\mathbf{p}'_r(t_0)=\left(R^T\right)^{-1}\mathbf{p}_r(t_0),\\ &\mathbf{p}'_v(t_0)=\left(R^T\right)^{-1}\mathbf{p}_v(t_0). \end{aligned} \tag{5}$$

Данное преобразование определяется векторами $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{v}$, а вырождается в случае равенства нулю детерминанта

$$\det R = \eta^2, \tag{6}$$

что эквивалентно коллинеарности векторов **ρ** и **ν**. Если дополнить преобразование (5) соответствующим преобразованием фазовых переменных, а также взять единичные векторы **ρ** и **ν**, то получится преобразование поворота системы координат. В силу этой особенности будем называть аффинное преобразование (5) *R*-преобразованием (от слова rotation).

Для исследования предложенного класса преобразований был построен датасет компланарных многовитковых перелётов между круговыми орбитами, в которых угловая дальность была равна 40 виткам, а параметр κ (соотношение радиусов конечной орбиты к начальной) варьировался от 0.1 до 10. В датасете содержится 991 энергетически оптимальная траектория «задачи перелёта». Начальные и конечны граничные условия на всех траекториях этого датасета одинаковы и зависят от κ:

$$\begin{gathered}\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T,\ \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\\ \mathbf{r}_f = \begin{pmatrix}\kappa & 0 & 0\end{pmatrix}^T,\ \mathbf{v}_f = \begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{\sqrt{\kappa}} & 0\end{pmatrix}^T.\end{gathered} \tag{7}$$

Далее было поставлено условие на конечную орбиту после R-преобразования: эксцентриситет конечной орбиты и угол восходящего узла должны быть равны нулю. После чего был построен вспомогательный датасет, в котором варьировались 2 из 6 параметров R-преобразования (ν_2 и ν_3), а каждому преобразованию соответствовала некая конечная орбита с неизвестными заранее элементами орбиты. Вспомогательный датасет состоял из 14322 траекторий.

При помощи метода символьной регрессии [4] удалось обработать датасет и получить следующее преобразование, которое меняет наклонение конечной орбиты:

$$R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{j^2+1} & \dfrac{j}{j^2+1} \\ 0 & -\dfrac{j}{j^2+1} & \dfrac{1}{j^2+1} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где j – это коэффициент, квазилинейно связанный с наклонением конечной орбиты. Линейный коэффициент связи между ними является сильно нелинейной функцией, зависящей от других элементов начальной и конечной орбит.

Так как R-преобразование (8) выражено в форме матрицы, его можно преобразовывать с помощью подобных матриц:

$$R_{i\Omega} = R_\Omega^{-1} R_i R_\Omega. \tag{9}$$

Здесь R_Ω – это матрица поворота, которую можно записать в следующем виде:

$$R_\Omega = \begin{pmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где Ω – это угол восходящего узла орбиты. В этом преобразовании угол восходящего узла можно задавать явным образом.

Итоговое преобразование (9) позволяет контролировать наклонение и восходящий узел конечной орбиты без решения соответствующей краевой задачи пространственного перелёта, используя только решение задачи компланарного перелёта между круговыми орбитами. Отрицательной стороной этого преобразования является изменение радиуса конечной орбиты, что приходится компенсировать за счёт выбора другого соотношения радиусов до преобразования. Пример перелёта после преобразования представлен на рис. 1.

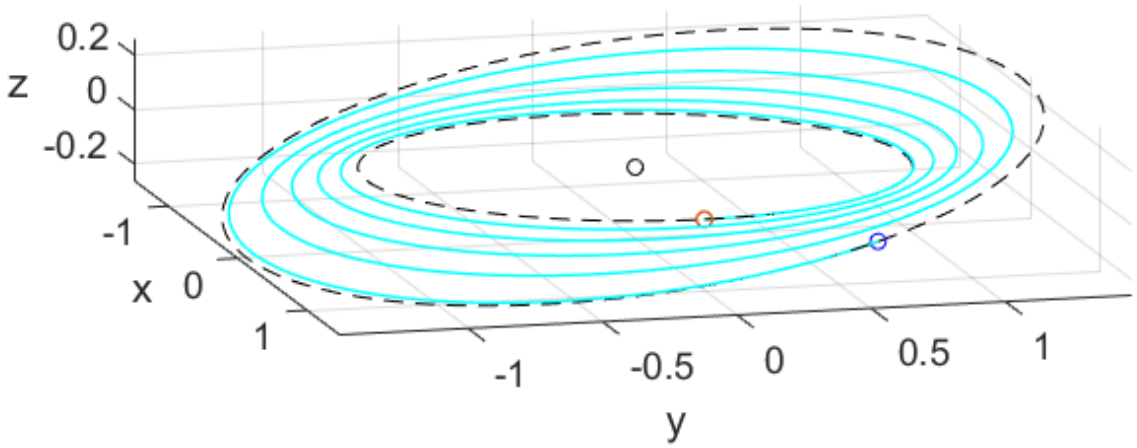

Рис. 1. Перелёт с наклонением 10˚, восходящим узлом 30˚ и радиусом конечной орбиты 1.5. Для получения этой траектории использовался плоский перелёт с κ=1.54, j=-1.21 и угловой дальностью 5 витков.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 24-11-00038 «Эффективные методы проектирования траекторий и управления движением малых космических аппаратов в дальнем космосе».

Список литературы:

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. – М.: Наука, 1966. 678 с.
2. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. 3-е изд. – М.: Наука, 1976. 392 с.
3. Powers W.F., Tapley B.D. Canonical transformation applications to optimal trajectory analysis. // AIAA Journal. 1969. Vol. 7. Issue 3. Pp. 394–399.
4. Cranmer M. Interpretable Machine Learning for Science with PySR and SymbolicRegression.jl. arXiv, 2023. https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.01582