МОДИФИКАЦИЯ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ

И.Д. Кочурова[1], М.Е. Ладонкина[2]

[1]*МФТИ (НИУ), г. Долгопрудный*
[2]*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва*

idk157@mail.ru, ladonkina@imamod.ru

Численное моделирование классическим разрывным методом Галеркина [1] процессов, содержащих области высоких градиентов, требует применения дополнительных особых процедур монотонизации, которые в свою очередь, могут повлиять на точность полученного решения [2]. Возможная причина понижения точности аппроксимации следует из несоблюдения энтропийного неравенства. В качестве альтернативы процедуры лимитирования предлагается использование базисных функций, которые подстраиваются под решение задачи и, в случае нарушения энтропийного неравенства в ячейке, локально переводят исходный метод в метод первого порядка, но на измельченной вдвое сетке [3]. Для метода первого порядка энтропийное неравенство гарантировано выполнено.

Рассмотрим одномерную систему уравнений Эйлера:

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F(U)} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{U} = \left(\rho, \rho u, E\right)^T, \qquad \mathbf{F(U)} = \left(\rho u, \rho u^2 + p, (E+p)u\right)^T \tag{2}$$

где **U** – вектор консервативных переменных и **F**(**U**) – вектор потоковых функции.

В работах [4,5] показано, что для обобщенного решения системы уравнений Эйлера и для любой гладкой функции $\varphi(x,t)$ в областях с кусочно-гладкой границей выполнено соотношение:

$$\oint U(x,t)\varphi(x,t)n_t dS + \oint F_X\left(U(x,t)\right)n_X\varphi(x,t)dS - \\ -\int\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}F_X\left(U(x,t)\right)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}U(x,t)\right)dxdt=0 \quad (3)$$

Базис пространства выберем в виде ортогональных полиномов, где первая функция равна единице, вторая базисная функция, представляет собой функцию, вид которой зависит от времени и которая может содержать разрыв в центре ячейки.

$$\varphi_{0i}=1, \quad \varphi_{1i}(x,t)=\begin{cases}\left(x-x_i\right)\left(1-\alpha(t)\right)+\dfrac{\alpha(t)\Delta x}{2}, & x\in\left[x_i,x_{i+1/2}\right],\\ \left(x-x_i\right)\left(1-\alpha(t)\right)-\dfrac{\alpha(t)\Delta x}{2}, & x\in\left[x_{i-1/2},x_i\right].\end{cases} \quad (4)$$

Приближенное решение уравнений (1,2) будем находить в виде:

$$U_i(x,t)=U_{0i}(t)+U_{1i}(t)\varphi_{1i}(x,t), \quad (5)$$

Для определения коэффициентов $U_{pi}(t)$, p=0,1 будем использовать формулу (6)

$$\frac{d}{dt}\left(U_{pi}(t)\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\varphi_{pi}^2(x,t)dx\right)-\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\left(\frac{d\varphi_{pi}(x,t)}{dx}F\left(U(x,t)\right)+\frac{d\varphi_{pi}(x,t)}{dt}U(x,t)\right)dxdt+ \\ +\frac{1}{\Delta x}\Big[\varphi_{pi}\left(x_{i+1/2},t\right)F\left(U\left(x_{i+1/2},t\right)\right)+\left[\varphi_{pi}\left(x_i^+,t\right)-\varphi_{pi}\left(x_i^-,t\right)\right]F\left(U\left(x_i,t\right)\right)- \quad (6) \\ -\varphi_{pi}\left(x_{i-1/2},t\right)F\left(U\left(x_{i-1/2},t\right)\right)\Big]=0,$$

где $U\left(x_{i-1/2},t\right), U\left(x_{i+1/2},t\right)$ получаются в результате решения задачи Римана с данными $U_{i-1}\left(x_{i-1/2},t\right)$ и $U_i\left(x_{i-1/2},t\right), U_i\left(x_{i+1/2},t\right)$ и $U_{i+1}\left(x_{i+1/2},t\right)$ слева и справа от разрыва[6].

Подставляя в (6) базисные функции (4), получаем два уравнения. Для определения первого коэффициента для $\varphi_{0i}=1$ получим уравнение (7), которое полностью совпадает с первым уравнением в классическом разрывном методе Галеркина (7).

$$\frac{U_0\left(t+\Delta t\right)-U_0(t)}{\Delta t}+\frac{F\left(U_{i+1/2}\right)-F\left(U_{i-1/2}\right)}{\Delta x}=0. \quad (7)$$

Второе уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2}\left(U_0(t)+U_1(t)\varphi_1(x,t)\right)\varphi_1(x,t)dx+\int\limits_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2}\varphi_1(x,t)\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dx=$$

$$= \int_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2} \varphi_1(x,t)\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dx + \int_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2} \left(U_0(t)+U_1(t)\varphi_1(x,t)\right)\frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial t}dx + \quad (8)$$

$$+ \int_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2} \varphi_1(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(U_0(t)+U_1(t)\varphi_1(x,t)\right)dx = 0.$$

С учетом этого и того, что $\int_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2} \varphi_1^2(x,t)dx = \left(1+\alpha+\alpha^2\right)\frac{\Delta x^3}{12}$, получим итоговое уравнение для коэффициента при второй базисной функции.

$$\frac{\partial U_1(t)}{\partial t}\frac{\Delta x^3}{12}\left(1+\alpha+\alpha^2\right)+U_1(t)\frac{\partial \alpha}{\partial t}\left(1+2\alpha\right)\frac{\Delta x^3}{24} - \int_{x_c-\Delta x/2}^{x_c} F(x,t)\left(1-\alpha\right)dx -$$

$$- \int_{x_c}^{x_c+\Delta x/2} F(x,t)\left(1-\alpha\right)dx - F^*(x_c)\alpha\Delta x + F^*\left(x_{i-1/2}\right)\alpha\frac{\Delta x}{2} + F^*\left(x_{i+1/2}\right)\alpha\frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (9)$$

Для вычисления $\frac{\partial U_1(t)}{\partial t}$ в формуле (9) необходимо определить $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$. Приведем соответствующий алгоритм.

Для каждой конкретной задачи можем оценить границы интенсивности возникающих ударных волн. В процессе вычисления на каждом шаге по времени вычисляем конкретные максимальные числа Маха: $MMax_{i-1/2}$, $MMax_i$, $MMax_{i+1/2}$, образующиеся при решении задач распада произвольного разрыва на границах i-ой ячейки сетки и в точке x_i; определяем α, используя параметры $M1 < M2$:

$$\text{если } MMax_i < M1, \text{ то } \alpha_i^{n+1} = 0,$$

$$\text{если } MMax_i > M2, \text{ то } \alpha_i^{n+1} = 1,$$

$$\text{если } M1 < MMax_i < M2, \text{ то } \alpha_i^{n+1} = \frac{MMax_i - M1}{M2 - M1}.$$

Рассмотрим задачу Woodward–Colella blast waves [7]. Данная задача представляет собой модель взаимодействия двух ударных волн и является одним из общепринятых тестов для проверки работоспособности численных методов решения задач газовой динамики. Расчетное время *(T*=0.038, *M1*=1.1, *M2*=1.7.*)*

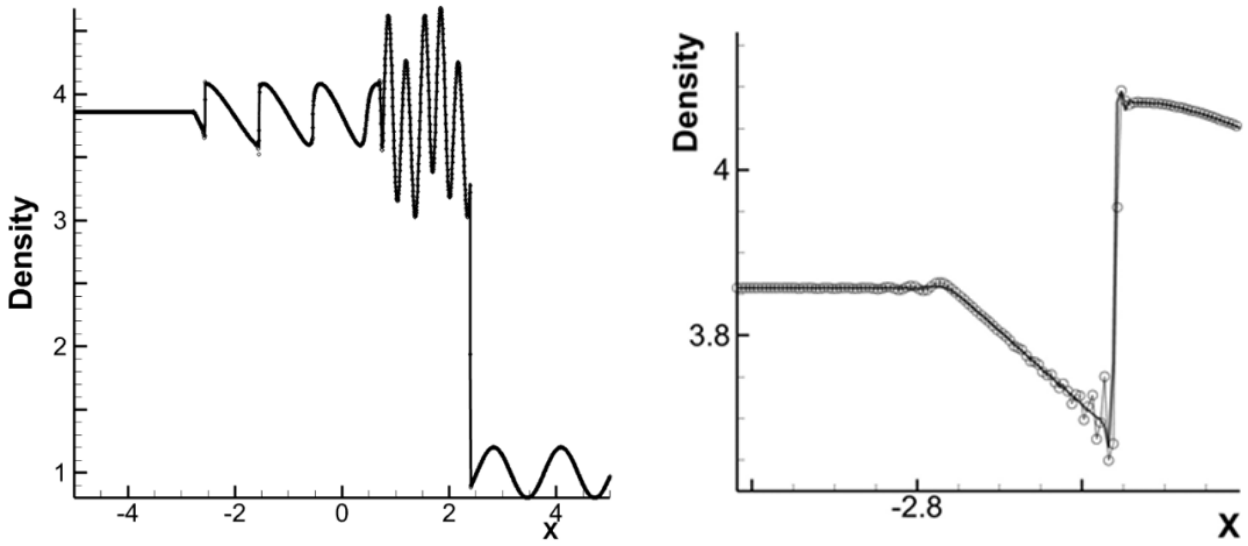

Рис. 1. Профили плотности (справа при сильном увеличении).

На рис. 1 слева представлен результат расчета модифицированным РМГ с параметрами *M1*=1.1, *M2*=1.7 (черные точки). Расчет, выполненный классическим РМГ с использованием лимитирующей функции Кокбурна, визуально не отличается от данного. Следует отметить, что без использования лимитеров, эту задачу разрывным методом Галеркина посчитать невозможно. На рис.1 справа показан фрагмент профилей плотности, расчетов, выполненных на сетке с 2000 ячеек: черная сплошная линия – модифицированным РМГ, кружки - классическим РМГ. Отметим, что при расчетах на мелких сетках, даже при использовании лимитеров, классический РМГ начинает осциллировать.

Предложенная модификация разрывного метода Галеркина, с использованием базисных функций, зависящих от времени, позволяет устойчиво рассчитывать сильные разрывные решения. Коэффициент α отвечает за точность определения положения разрывов численного решения и, соответственно, за качество вычислительной схемы.

Список литературы:

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection–Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics, 1998. V. 1697. Pp. 151–268.
2. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина. // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 12. С. 124–128.
3. Краснов М.М., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Обобщение метода Годунова, использующее кусочно-полиномиальные аппроксимации «Супервычисления и математическое моделирование», Труды XVI

Международной конференции, под ред. Р.М. Шагалиева, г. Саров, ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» 2017. С. 168–183.

4. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Обобщение метода Годунова, использующее кусочно-полиномиальные аппроксимации // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 899–907.
5. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. О методах типа Годунова высокого порядка точности // Доклады академии наук. 2015. Т. 461. № 4. С. 390–393.
6. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47(89) № 3. С. 271–306.
7. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Computational Physics. 1984. V. 54. Issue 1. Pp. 115–173. https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90142-6