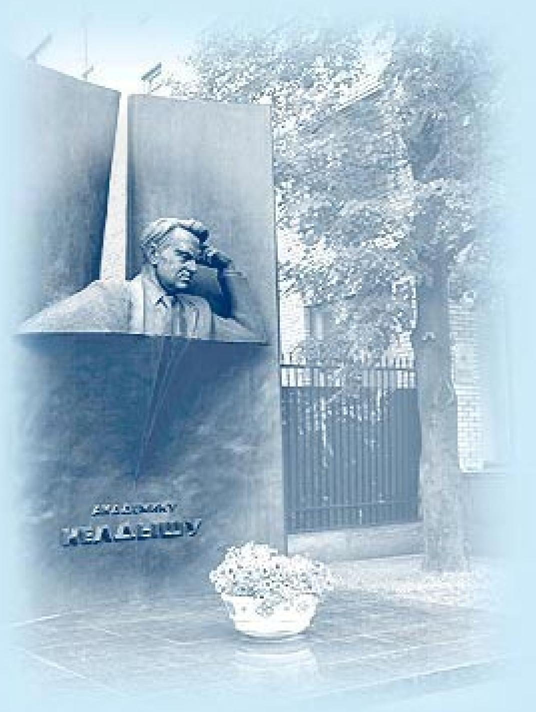
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 25 за 1968 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.А. Вашковьяк

Эволюция орбит спутников под действием нецентральности гравитационного поля

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Вашковьяк М. А. Эволюция орбит спутников под действием нецентральности гравитационного поля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1968. № 25. 14 с.
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1968-25

М.А.Вашковьяк

Эволюция орбит спутников под действием нецентральности гравитационного поля планеты

В работе М.Л.Лидова [I] получены формулы, описывающие эволюцию орбит спутников под действием гравитационных возмущений внешних тел, а также изложена методика расчета эволюции по этим формулам. В настоящей работе предлагаются аналогичные формулы для расчета эволюции под действием нецентральности гравитационного поля планеты.

Введем в рассмотрение планетоцентрическую экваториальную систему координат $Oxyz$. Пусть ось Oz направлена по оси вращения планеты, ось Ox есть линия пересечения экваториальной плоскости планеты с плоскостью ее нулевого меридиана в начальный момент времени t_0, а ось Oy дополняет систему координат до правой. Положение спутника P будет определяться моментом времени t и шестью общепринятыми элементами кеплеровской орбиты $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$. Уравнения Лагранжа, определяющие изменение этих элементов под действием возмущений, имеют следующий общий вид [2]

$$\frac{d\vartheta_i}{dt} = \sum_{j=1}^{6} A_{ij}(p, e, i)\frac{\partial R}{\partial \vartheta_j}, \qquad (i = 1, 2, \ldots 6) \tag{1}$$

где ϑ_i – любой из вышеуказанных элементов орбиты, A_{ij} – коэффициенты, зависящие только от p, e, i,

R – возмущающая функция всех переменных $Э_i$ и времени.

Полагая, что все элементы орбиты меняются мало в течение одного оборота спутника, мы получим формулы для приращений элементов $Э_i$ за период обращения спутника T

$$\Delta Э_i = \sum_{j=1}^{6} A_{ij}(p, e, i)\frac{\partial}{\partial Э_j}[R]; \quad (i=1,2,\dots 6) \qquad (2)$$

где $$[R] = \int_0^T R\,dt = \int_0^{2\pi} R\frac{dt}{d\vartheta}d\vartheta,$$

а ϑ – обозначает истинную аномалию. В первом приближении можно считать, что

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}},$$

где r – радиус-вектор спутника, а μ – произведение гравитационной постоянной на массу планеты. Рассматривая возмущения, вызванные лишь нецентральностью гравитационного поля планеты, мы можем записать возмущающую функцию R в виде [3]

$$R = \frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a_0}{r}\right)^n P_{nk}(\sin\varphi)(C_{nk}\cos k\lambda + d_{nk}\sin k\lambda).$$

где a_0 – средний экваториальный радиус планеты, φ, λ – соответственно широта и долгота спутника, P_{nk} – присоединенные функции Лежандра, C_{nk}, d_{nk} – безразмерные параметры, определяющие гравитационное поле планеты. Координаты r, φ, λ выражаются через элементы орбиты следующим образом

$$r = \frac{p}{1+e\cos\vartheta}; \quad \sin\varphi = \frac{z}{r}; \quad \cos\lambda = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}; \quad \sin\lambda = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}};$$

$$\xi = r(\cos u\cos\bar\Omega - \sin u\sin\bar\Omega\cos i);$$

$$\eta = r(\cos u\sin\bar\Omega + \sin u\cos\bar\Omega\cos i),$$

$$\zeta = z = r\sin u\sin i;$$

$$u = \vartheta + \omega; \quad \bar\Omega = \Omega - \varkappa_0(t-t_0); \quad \varkappa_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

где T_0 – период вращения планеты, а $O\xi\eta\zeta$ – прямоугольная, экваториальная, вращающаяся с угловой скоростью $\varkappa_0$ относительно оси Oz $(O\zeta)$ система координат, причем ось $O\xi$, лежащая в плоскости xOy, направлена в нулевой меридиан планеты (см.рис.I)

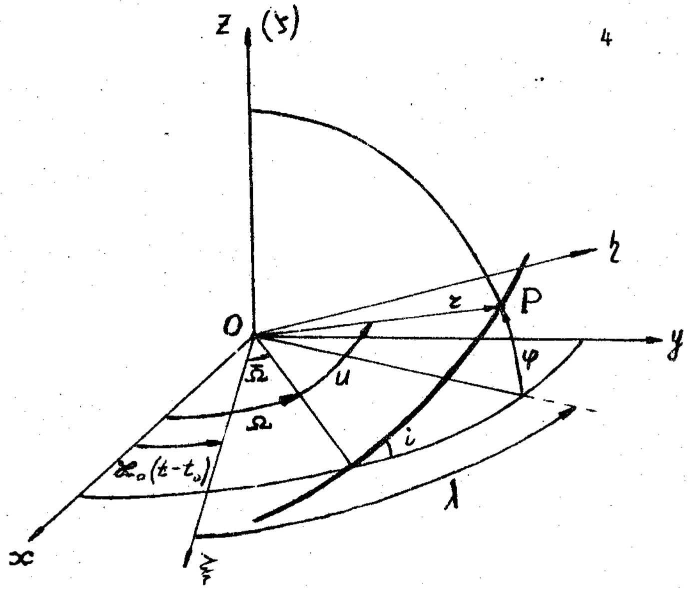


Рис.I

Мы ограничимся рассмотрением гармоник с индексами

$n = 2, 3, 4\ ;\quad 0 \le k \le n$ и

$n = 5, 6, 7, 8\ ;\quad k = 0\ ,$

причём возмущения от каждой из них будем изучать отдельно.

Для зональных гармоник ($k = 0$) возмущающая функция не зависит явно от времени, и операция интегрирования по v не вызывает никаких затруднений. При исследовании влияния тессеральных гармоник мы будем использовать, аналогично тому, как это сделано в [I] , предположение о разложимости функций $\sin\varkappa_0(t-t_0)$, $\cos\varkappa_0(t-t_0)$ в ряды по степеням $\Delta t = t - t^*$, где t^* - момент време-

ни, соответствующий середине оборота спутника, причем, ограничиваясь первыми членами этих рядов, мы будем иметь

$$\sin\bar{\Omega} = \sin\left(\Omega - \varkappa_0(t^* - t_0)\right);\ \cos\bar{\Omega} = \cos\left(\Omega - \varkappa_0(t^* - t_0)\right).$$

Очевидно, что подобное упрощение тем правомернее, чем меньше отношение периода обращения спутника T к периоду вращения планеты T_0 .

Расчёт эволюции орбиты от оборота к обороту производится по формулам

$$Э_i^{(\nu+1)} = Э_i^{(\nu)} + \sum_{n,k} \Delta_{nk}\, Э_i\left(Э_i^{(\nu)}\right);\quad (i = 1, 2, \dots 6)$$

где $Э_i^{(\nu)}$ - значение какого-нибудь из элементов на ν -м обороте. Выражения для $\Delta_{nk}\, Э_i$ содержат величины

$$\alpha_{nk} = c_{nk}\cos k\bar{\Omega}^{(\nu)} + d_{nk}\sin k\bar{\Omega}^{(\nu)};$$

$$\beta_{nk} = c_{nk}\sin k\bar{\Omega}^{(\nu)} - d_{nk}\cos k\bar{\Omega}^{(\nu)};$$

$$\bar{\Omega}^{(\nu)} = \Omega^{(\nu)} - \varkappa_0\left(t^{*(\nu)} - t_0\right),$$

где $t^{*(\nu)} = t^{*(\nu-1)} + T^{(\nu-1)}$ - момент времени, соответствующий середине ν -го оборота.

Ниже приводятся формулы, дающие приращения за оборот элементов $\Delta_{nk}\, p$, $\Delta_{nk}\, e$, $\Delta_{nk}\, i$, $\Delta_{nk}\,\Omega$,

$\Delta_{nk}\omega$, $\Delta_{nk}\tilde{\tau}$ отдельно для каждой из гармоник, причём $\Delta_{nk}e$, $\Delta_{nk}i$, $\Delta_{nk}\omega$ определяются следующими соотношениями

$$\Delta_{nk}e = -\frac{1-e^2}{2pe}\Delta_{nk}p;$$

$$\Delta_{nk}i = \frac{\mathrm{ctg}\, i}{2p}\Delta_{nk}p + (\Delta_{nk}i);$$

$$\Delta_{nk}\omega = -\cos i\,\Delta_{nk}\Omega + \frac{1-e^2}{p}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\Delta_{nk}\tilde{\tau} + (\Delta_{nk}\omega).$$

Отметим, что $\Delta_{nk}a = 0$ (a - большая полуось орбиты). Окончательные формулы для $\Delta_{nk}p$, $(\Delta_{nk}i)$, $\Delta_{nk}\Omega$, $(\Delta_{nk}\omega)$, $\Delta_{nk}\tilde{\tau}$, в которых положено $A_n = \pi\left(\frac{a_0}{p}\right)^n$, имеют следующий вид

$$\Delta_{20}p = 0;$$

$$(\Delta_{20}i) = 0;$$

$$\Delta_{20}\Omega = 3A_2 c_{20}\cos i;$$

$$(\Delta_{20}\omega) = \frac{3}{2}A_2 c_{20}(3\sin^2 i - 2);$$

$$\Delta_{20}\tilde{\tau} = 0;$$

$$\Delta_{30}p = \frac{3}{2}A_3 c_{30}\, p e \cos\omega \sin i(5\sin^2 i - 4);$$

$$(\Delta_{30}i) = 0;$$

$$\Delta_{30}\Omega = \frac{3}{4}A_3 c_{30}\, e \sin\omega\, \mathrm{ctg}\, i(15\sin^2 i - 4);$$

$$(\Delta_{30}\omega) = \frac{15}{4}A_3 c_{30}\, e\sin\omega\sin i(5\sin^2 i - 4);$$

$$\Delta_{30}\tilde{\tau} = \frac{3}{4}A_3 c_{30}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot\frac{p}{e}\sin\omega\sin i(5\sin^2 i - 4);$$

$$\Delta_{40}p = \frac{15}{4}A_4 c_{40}\, p e^2 \sin\omega\cos\omega\sin^2 i(7\sin^2 i - 6);$$

$$(\Delta_{40}i) = 0;$$

$$\Delta_{40}\Omega = \frac{15}{16}A_4 c_{40}\cos i\left\{7\sin^2 i\left[2 + e^2(1 + 4\sin^2\omega)\right] - 2\left[4 + 3e^2(1 + 2\sin^2\omega)\right]\right\};$$

$$(\Delta_{40}\omega) = \frac{21}{64}A_4 c_{40}\left\{35\sin^4 i\left[2 + e^2(1 + 4\sin^2\omega)\right] - 20\sin^2 i\left[4 + 3e^2(1 + 2\sin^2\omega)\right] + 8(2 + 3e^2)\right\};$$

$$\Delta_{40}\tilde{\tau} = \frac{3}{32}A_4 c_{40}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,p\left\{35\sin^4 i(1 + 4\sin^2\omega) - 60\sin^2 i(1 + 2\sin^2\omega) + 24\right\};$$

$$\Delta_{50}p = \frac{15}{64} A_5 c_{50}\, p e \cos\omega \sin i \left\{ 21 \sin^4 i \left[8 + 3e^2 (1 + 4\sin^2\omega) \right] - \right.$$

$$\left. - 112 \sin^2 i \left[2 + e^2 (1 + 2\sin^2\omega) \right] + 16 (4 + 3e^2) \right\};$$

$$(\Delta_{50} i) = 0;$$

$$\Delta_{50}\Omega = \frac{15}{128} A_5 c_{50}\, e \sin\omega \,\mathrm{ctg}\, i \left\{ 105 \sin^4 i \left[8 + e^2 (3 + 4\sin^2\omega) \right] - \right.$$

$$\left. - 112 \sin^2 i \left[6 + e^2 (3 + 2\sin^2\omega) \right] + 16 (4 + 3e^2) \right\};$$

$$(\Delta_{50}\omega) = \frac{45}{128} A_5 c_{50}\, e \sin\omega \sin i \left\{ 63 \sin^4 i \left[8 + e^2 (3 + 4\sin^2\omega) \right] - \right.$$

$$\left. - 112 \sin^2 i \left[6 + e^2 (3 + 2\sin^2\omega) \right] + 48 (4 + 3e^2) \right\};$$

$$\Delta_{50}\tau = \frac{15}{128} A_5 c_{50} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \frac{p}{e} \sin\omega \sin i \left\{ 21 \sin^4 i \left[8 + 3e^2 (3 + 4\sin^2\omega) \right] - \right.$$

$$\left. - 112 \sin^2 i \left[2 + e^2 (3 + 2\sin^2\omega) \right] + 16 (4 + 9e^2) \right\}.$$

$$\Delta_{60}p = \frac{15}{128} A_6 c_{60}\, p e^2 \sin\omega \cos\omega \sin^2 i \left\{ 231 \sin^4 i \left[10 + e^2 (3 + 4\sin^2\omega) \right] - \right.$$

$$\left. - 420 \sin^2 i \left[8 + e^2 (3 + 2\sin^2\omega) \right] + 560 (2 + e^2) \right\}.$$

$$(\Delta_{60} i) = 0;$$

$$\Delta_{60}\Omega = \frac{105}{1024} A_6 c_{60} \cos i \left\{ 33 \sin^4 i \left[16 + 20e^2 (1 + 6\sin^2\omega) + 3e^4 (1 + 12\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \right] \right.$$

$$- 12 \sin^2 i \left[48 + 80e^2 (1 + 4\sin^2\omega) + 5e^4 (3 + 24\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \right] +$$

$$\left. + 16 \left[8 + 20e^2 (1 + 2\sin^2\omega) + 5e^4 (1 + 4\sin^2\omega) \right] \right\};$$

$$(\Delta_{60}\omega) = \frac{55}{2048} A_6 c_{60} \left\{ 231 \sin^6 i \left[16 + 20e^2 (1 + 6\sin^2\omega) + 3e^4 (1 + 12\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \right] \right.$$

$$- 126 \sin^4 i \left[48 + 80e^2 (1 + 4\sin^2\omega) + 5e^4 (3 + 24\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \right] +$$

$$\left. + 336 \sin^2 i \left[8 + 20e^2 (1 + 2\sin^2\omega) + 5e^4 (1 + 4\sin^2\omega) \right] - 32 (8 + 40e^2 + 15e^4) \right\}.$$

$$\Delta_{60}\tau = \frac{5}{512} A_6 c_{60} \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, p \left\{ 231 \sin^6 i \left[10 (1 + 6\sin^2\omega) + 3e^2 (1 + 12\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \right] - \right.$$

$$- 630 \sin^4 i \left[8 (1 + 4\sin^2\omega) + e^2 (3 + 24\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \right] +$$

$$\left. + 1680 \sin^2 i \left[2 (1 + 2\sin^2\omega) + e^2 (1 + 4\sin^2\omega) \right] - 160 (4 + 3e^2) \right\};$$

$$\Delta_{70}p = \frac{105}{2048} A_7 c_{70}\, p e \cos\omega \sin i \left\{ 429 \sin^6 i \left[8 + 8e^2 (1 + 6\sin^2\omega) + \right. \right.$$

$$+ e^4 (1 + 12\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \Big] - 396 \sin^4 i \Big[16 + 20e^2 (1 + 4\sin^2\omega) +$$

$$+ e^4 (3 + 24\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \Big] + 72 \sin^2 i \Big[48 + 80e^2 (1 + 2\sin^2\omega) +$$

$$\left. \left. + 15e^4 (1 + 4\sin^2\omega) \right] - 64 (8 + 20e^2 + 5e^4) \right\};$$

$$(\Delta_{70} i) = 0;$$

$$\Delta_{70}\Omega = \frac{21}{4096} A_7 c_{70}\, e \sin\omega \,\mathrm{ctg}\, i \left\{ 3003 \sin^6 i \left[40 + 40e^2 (1 + 2\sin^2\omega) + \right. \right.$$

$$+ e^4 (5 + 20\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \Big] - 660 \sin^4 i \Big[240 + 100e^2 (3 + 4\sin^2\omega) +$$

$$+ 3e^4 (15 + 40\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \Big] + 360 \sin^2 i \Big[144 + 80e^2 (3 + 2\sin^2\omega) +$$

$$\left. \left. + 15e^4 (3 + 4\sin^2\omega) \right] - 320 (8 + 20e^2 + 5e^4) \right\};$$

$$(\Delta_{70}\omega) = \frac{273}{4096} A_7 c_{70}\, e \sin\omega \sin i \left\{ 429 \sin^6 i \left[40 + 40e^2 (1 + 2\sin^2\omega) + \right. \right.$$

$$+ e^4 (5 + 20\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \Big] - 132 \sin^4 i \Big[240 + 100e^2 (3 + 4\sin^2\omega) +$$

$$+ 3e^4 (15 + 40\sin^2\omega + 8\sin^4\omega) \Big] + 120 \sin^2 i \Big[144 + 80e^2 (3 + 2\sin^2\omega) +$$

$$\left. \left. + 15e^4 (3 + 4\sin^2\omega) \right] - 320 (8 + 20e^2 + 5e^4) \right\};$$

$$\Delta_{70}\tau = \frac{105}{4096} A_7 c_{70} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \frac{p}{e} \sin\omega \sin i \Big\{ 429 \sin^6 i \big[8 + 24 e^2 (1 + 2\sin^2\omega) + e^4 (5 + 20 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) \big] - 396 \sin^4 i \big[16 + 20 e^2 (3 + 4\sin^2\omega) + e^4 (15 + 40 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) \big] + 72 \sin^2 i \big[48 + 80 e^2 (3 + 2\sin^2\omega) + 25 e^4 (3 + 4\sin^2\omega) \big] - 64 (8 + 60 e^2 + 25 e^4) \Big\};$$

$$\Delta_{80} p = \frac{7}{8192} A_8 c_{80}\, p\, e^2 \sin\omega\cos\omega \sin^2 i \Big\{ 6435 \sin^6 i \big[336 + 280 e^2 (1 + 2\sin^2\omega) + 6 e^4 (5 + 20 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) \big] - 36036 \sin^4 i \big[120 + 40 e^2 (3 + 4\sin^2\omega) + e^4 (15 + 40\sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) \big] + 55440 \sin^2 i \big[48 + 20 e^2 (3 + 2\sin^2\omega) + 3 e^4 (3 + 4 \sin^2\omega) \big] - 10080 (48 + 80 e^2 + 15 e^4) \Big\};$$

$$(\Delta_{80} i) = 0,$$

$$\Delta_{80}\Omega = \frac{9}{16384} A_8 c_{80} \cos i \Big\{ 715 \sin^6 i \big[560 + 1176 e^2 (1 + 8\sin^2\omega) + 490 e^4 (1 + 16 \sin^2\omega + 16 \sin^4\omega) + 7 e^6 (5 + 120 \sin^2\omega + 240 \sin^4\omega + 64 \sin^6\omega) \big] - 2002 \sin^4 i \big[320 + 840 e^2 (1 + 6\sin^2\omega) + 420 e^4 (1 + 12 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) + 7 e^6 (5 + 90 \sin^2\omega + 120 \sin^4\omega + 16 \sin^6\omega) \big] + 3080 \sin^2 i \big[96 + 336 e^2 (1 + 4\sin^2\omega) + 70 e^4 (3 + 24 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) + 21 e^6 (1 + 12 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) \big] - 560 \big[64 + 336 e^2 (1 + 2\sin^2\omega) + 280 e^4 (1 + 4\sin^2\omega) + 35 e^6 (1 + 6 \sin^2\omega) \big] \Big\};$$

$$(\Delta_{80}\omega) = \frac{15}{131072} A_8 c_{80} \Big\{ 6435 \sin^8 i \big[560 + 1176 e^2 (1 + 8 \sin^2\omega) + 490 e^4 (1 + 16 \sin^2\omega + 16 \sin^4\omega) + 7 e^6 (5 + 120 \sin^2\omega + 240 \sin^4\omega + 64 \sin^6\omega) \big] - 24024 \sin^6 i \big[320 + 840 e^2 (1 + 6\sin^2\omega) + 420 e^4 (1 + 12 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) + 7 e^6 (5 + 90 \sin^2\omega + 120 \sin^4\omega + 16 \sin^6\omega) \big] + 55440 \sin^4 i \big[96 + 336 e^2 (1 + 4 \sin^2\omega) + 70 e^4 (3 + 24 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) + 21 e^6 (1 + 12 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) \big] - 20160 \sin^2 i \big[64 + 336 e^2 (1 + 2\sin^2\omega) + 280 e^4 (1 + 4 \sin^2\omega) + 35 e^6 (1 + 6 \sin^2\omega) \big] + 4480 (16 + 168 e^2 + 210 e^4 + 35 e^6) \Big\};$$

$$\Delta_{80}\tau = \frac{21}{65536} A_8 c_{80} \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, p \Big\{ 2145 \sin^8 i \big[168 (1 + 8 \sin^2\omega) + 140 e^2 (1 + 16 \sin^2\omega + 16 \sin^4\omega) + 3 e^4 (5 + 120 \sin^2\omega + 240 \sin^4\omega + 64 \sin^6\omega) \big] - 24024 \sin^6 i \big[40 (1 + 6 \sin^2\omega) + 40 e^2 (1 + 12 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) + e^4 (5 + 90 \sin^2\omega + 120 \sin^4\omega + 16 \sin^6\omega) \big] + 18480 \sin^4 i \big[48 (1 + 4 \sin^2\omega) + 20 e^2 (3 + 24 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) + 9 e^4 (1 + 12 \sin^2\omega + 8 \sin^4\omega) \big] - 6720 \sin^2 i \big[48 (1 + 2 \sin^2\omega) + 80 e^2 (1 + 4 \sin^2\omega) + 15 e^4 (1 + 6 \sin^2\omega) \big] + 4480 (8 + 20 e^2 + 5 e^4) \Big\},$$

$$\Delta_{21} p = 0;$$
$$(\Delta_{21} i) = 3A_2 \alpha_{21} \sin i \cos i;$$
$$\Delta_{21} \Omega = 3A_2 \beta_{21} \operatorname{cosec} i (1-2\cos^2 i);$$
$$(\Delta_{21} \omega) = -9A_2 \beta_{21} \sin i \cos i,$$
$$\Delta_{21} \tilde{\tau} = 0.$$

$$\Delta_{22} p = 0;$$
$$(\Delta_{22} i) = 6A_2 \beta_{22} \sin i;$$
$$\Delta_{22} \Omega = 6A_2 \alpha_{22} \cos i;$$
$$(\Delta_{22} \omega) = 9A_2 \alpha_{22} \sin^2 i;$$
$$\Delta_{22} \tilde{\tau} = 0;$$

$$\Delta_{31} p = -\frac{3}{2} A_3 p e \left[\alpha_{31} \sin\omega (1-5\cos^2 i) + \beta_{31} \cos\omega \cos i (11-15\cos^2 i)\right].$$
$$(\Delta_{31} i) = \frac{3}{4} A_3 e \operatorname{cosec} i \left[\beta_{31} \cos\omega (1-5\cos^2 i) + \alpha_{31} \sin\omega \cos i (11-15\cos^2 i)\right],$$
$$\Delta_{31} \Omega = \frac{3}{4} A_3 e \left[10\alpha_{31} \cos\omega \cos i + \beta_{31} \sin\omega (11-45\cos^2 i)\right];$$
$$(\Delta_{31} \omega) = \frac{15}{4} A_3 e \left[\alpha_{31} \cos\omega (1-5\cos^2 i) - \beta_{31} \sin\omega \cos i (11-15\cos^2 i)\right].$$
$$\Delta_{31} \tilde{\tau} = \frac{3}{4} A_3 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \frac{p}{e} \left[\alpha_{31} \cos\omega (1-5\cos^2 i) - \beta_{31} \sin\omega \cos i (11-15\cos^2 i)\right].$$

$$\Delta_{32} p = 15 A_3 p e \sin i \left[\alpha_{32} \cos\omega (1-3\cos^2 i) + 2\beta_{32} \sin\omega \cos i\right].$$
$$(\Delta_{32} i) = 15 A_3 e \left[\beta_{32} \sin\omega (1-3\cos^2 i) + 2\alpha_{32} \cos\omega \cos i\right];$$
$$\Delta_{32} \Omega = \frac{15}{2} A_3 e \operatorname{cosec} i \left[\alpha_{32} \sin\omega \cos i (7-9\cos^2 i) + 2\beta_{32} \cos\omega (1-2\cos^2 i)\right].$$

$$(\Delta_{32} \omega) = \frac{75}{2} A_3 e \sin i \left[\alpha_{32} \sin\omega (1-3\cos^2 i) - 2\beta_{32} \cos\omega \cos i\right].$$
$$\Delta_{32} \tilde{\tau} = \frac{15}{2} A_3 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{p}{e} \sin i \left[\alpha_{32} \sin\omega (1-3\cos^2 i) - 2\beta_{32} \cos\omega \cos i\right];$$

$$\Delta_{33} p = -45 A_3 p e \sin^2 i \left[\alpha_{33} \sin\omega + \beta_{33} \cos\omega \cos i\right];$$
$$(\Delta_{33} i) = \frac{135}{2} A_3 e \sin i \left[\beta_{33} \cos\omega + \alpha_{33} \sin\omega \cos i\right],$$
$$\Delta_{33} \Omega = \frac{45}{2} A_3 e \left[2\alpha_{33} \cos\omega \cos i + \beta_{33} \sin\omega (1-3\cos^2 i)\right].$$
$$(\Delta_{33} \omega) = \frac{225}{2} A_3 e \sin^2 i \left[\alpha_{33} \cos\omega - \beta_{33} \sin\omega \cos i\right],$$
$$\Delta_{33} \tilde{\tau} = \frac{45}{2} A_3 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{p}{e} \sin^2 i \left[\alpha_{33} \cos\omega - \beta_{33} \sin\omega \cos i\right].$$

$$\Delta_{41} p = \frac{15}{4} A_4 p e^2 \sin i \left[\alpha_{41} (1-2\sin^2\omega)(1-7\cos^2 i) - 4\beta_{41} \sin\omega \cos\omega \cos i (4-7\cos^2 i)\right];$$
$$(\Delta_{41} i) = \frac{15}{16} A_4 \Big\{2\beta_{41} e^2 \sin\omega \cos\omega (1-7\cos^2 i) + \alpha_{41} \cos i \Big[2(3-7\cos^2 i) +$$
$$+ e^2 \left(1+16\sin^2\omega - 7\cos^2 i (1+4\sin^2\omega)\right)\Big]\Big\}$$
$$\Delta_{41} \Omega = \frac{15}{16} A_4 \operatorname{cosec} i \Big\{6\alpha_{41} e^2 \sin\omega \cos\omega \cos i (5-7\cos^2 i) +$$
$$+ \beta_{41} \Big[2(3-27\cos^2 i + 28\cos^4 i) + e^2 \Big(1+16\sin^2\omega - \cos^2 i (23+116\sin^2\omega) +$$
$$+ 28\cos^4 i (1+4\sin^2\omega)\Big)\Big]\Big\};$$
$$(\Delta_{41} \omega) = \frac{105}{16} A_4 \sin i \Big\{2\alpha_{41} e^2 \sin\omega \cos\omega (1-7\cos^2 i) - \beta_{41} \cos i \Big[2(3-7\cos^2 i) +$$
$$+ e^2 \left(1+16\sin^2\omega - 7\cos^2 i (1+4\sin^2\omega)\right)\Big]\Big\};$$
$$\Delta_{41} \tilde{\tau} = \frac{15}{8} A_4 \sqrt{\frac{p}{\mu}} p \sin i \Big\{2\alpha_{41} \sin\omega \cos\omega (1-7\cos^2 i) -$$
$$- \beta_{41} \cos i \left[1+16\sin^2\omega - 7\cos^2 i (1+4\sin^2\omega)\right]\Big\}.$$

$$\Delta_{42}p = \frac{45}{2}A_4 p e^2\Big\{2\alpha_{42}\sin\omega\cos\omega(1-6\cos^2 i+7\cos^4 i) + \beta_{42}\cos i(1-2\sin^2\omega)(7\cos^2 i-5)\Big\};$$

$$(\Delta_{42} i) = \frac{45}{8}A_4 \operatorname{cosec} i\Big\{\beta_{42}\Big[2\sin^2 i(1-7\cos^2 i)+e^2\Big((1+4\sin^2\omega)(1+7\cos^4 i) - 12\cos^2 i(1+2\sin^2\omega)\Big)\Big] - 4\alpha_{42}e^2\cos i\sin\omega\cos\omega(7\cos^2 i-5)\Big\};$$

$$\Delta_{42}\Omega = -\frac{45}{4}A_4\Big\{\alpha_{42}\cos i\Big[2(7\cos^2 i-4)+e^2\Big(7\cos^2 i(1+4\sin^2\omega)-6(1+2\sin^2\omega)\Big)\Big] + \beta_{42}e^2\sin\omega\cos\omega(21\cos^2 i-5)\Big\};$$

$$(\Delta_{42}\omega) = \frac{315}{16}A_4\Big\{\alpha_{42}\Big[2\sin^2 i(1-7\cos^2 i)+e^2\Big((1+4\sin^2\omega)(1+7\cos^4 i)-12\cos^2 i(1+2\sin^2\omega)\Big)\Big] + 4\beta_{42}e^2\cos i\sin\omega\cos\omega(7\cos^2 i-5)\Big\},$$

$$\Delta_{42}\tau = \frac{45}{8}A_4\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,p\Big\{\alpha_{42}\Big[(1+4\sin^2\omega)(1+7\cos^4 i)-12\cos^2 i(1+2\sin^2\omega)\Big] + 4\beta_{42}\cos i\sin\omega\cos\omega(7\cos^2 i-5)\Big\}$$

$$\Delta_{43}p = \frac{315}{2}A_4 p e^2\sin i\Big\{\alpha_{43}(1-2\sin^2\omega)(1-3\cos^2 i)+4\beta_{43}\cos^3 i\sin\omega\cos\omega\Big\},$$

$$(\Delta_{43}i) = \frac{945}{8}A_4\Big\{2\beta_{43}e^2\sin\omega\cos\omega(1-3\cos^2 i)+\alpha_{43}\cos i\Big[2\sin^2 i + e^2\Big(3-\cos^2 i(1+4\sin^2\omega)\Big)\Big]\Big\};$$

$$\Delta_{43}\Omega = \frac{315}{8}A_4\operatorname{cosec} i\Big\{2\alpha_{43}e^2\cos i\sin\omega\cos\omega(7-9\cos^2 i) + \beta_{43}\Big[2\sin^2 i(1-4\cos^2 i)+e^2\Big(3-3(3+4\sin^2\omega)\cos^2 i+4(1+4\sin^2\omega)\cos^4 i\Big)\Big]\Big\};$$

$$(\Delta_{43}\omega) = \frac{2205}{8}A_4\sin i\Big\{2\alpha_{43}e^2\sin\omega\cos\omega(1-3\cos^2 i)-\beta_{43}\cos i\Big[2\sin^2 i+e^2\Big(3-\cos^2 i(1+4\sin^2\omega)\Big)\Big]\Big\};$$

$$\Delta_{43}\tau = \frac{315}{4}A_4\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,p\sin i\Big\{2\alpha_{43}\sin\omega\cos\omega(1-3\cos^2 i)-\beta_{43}\cos i\Big[3-\cos^2 i(1+4\sin^2\omega)\Big]\Big\}$$

$$\Delta_{44}p = -630A_4 p e^2\sin^2 i\Big\{\alpha_{44}\sin\omega\cos\omega(1+\cos^2 i)+\beta_{44}\cos i(1-2\sin \ldots$$

$$(\Delta_{44}i) = \frac{315}{2}A_4\sin i\Big\{\beta_{44}\Big[2\sin^2 i+e^2\Big(5-4\sin^2\omega-\cos^2 i(1+4\sin \ldots)\Big)\Big] + 8\alpha_{44}e^2\cos i\sin\omega\cos\omega\Big\};$$

$$\Delta_{44}\Omega = \frac{315}{2}A_4\Big\{\alpha_{44}\cos i\Big[2\sin^2 i+e^2\Big(3-\cos^2 i(1+4\sin^2\omega)\Big)\Big] + 2\beta_{44}e^2\sin\omega\cos\omega(1-3\cos^2 i)\Big\};$$

$$(\Delta_{44}\omega) = \frac{2205}{8}A_4\sin^2 i\Big\{\alpha_{44}\Big[2\sin^2 i+e^2\Big(5-4\sin^2\omega-\cos^2 i(1+4\sin \ldots - 8\beta_{44}e^2\cos i\sin\omega\cos\omega\Big\};$$

$$\Delta_{44}\tau = \frac{315}{4}A_4\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,p\sin^2 i\Big\{\alpha_{44}\Big[5-4\sin^2\omega-\cos^2 i(1+4\sin \ldots - 8\beta_{44}\cos i\sin\omega\cos\omega\Big\}.$$

Из вышеприведенных формул видно, что существуют два типа орбит, для которых они непосредственно неприменимы:

$$\sin i = 0 \quad \text{и} \quad e = 0.$$

Для выяснения характера указанных особенностей рассмотрим конкретную форму уравнений (2)

$$\Delta p = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,\frac{\partial[R]}{\partial\omega};$$

$$\Delta e = -\frac{1-e^2}{2pe}\,\Delta p;$$

$$\Delta i = \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu p}}\left(\frac{\partial[R]}{\partial\omega}\cos i - \frac{\partial[R]}{\partial\Omega}\right);$$

$$\Delta\Omega = \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu p}}\cdot\frac{\partial[R]}{\partial i};$$

$$\Delta\omega = -\cos i\,\Delta\Omega + \frac{1-e^2}{p}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\Delta\tau + (\Delta\omega);$$

$$\Delta\tau = \frac{p}{\mu e}\cdot\frac{\partial[R]}{\partial e};$$

где $$(\Delta\omega) = -2\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot\frac{\partial[R]}{\partial p}.$$

Легко показать, что в формулах для Δe и Δi указанных особенностей не существует, поскольку в выражениях

$$\frac{\partial[R]}{\partial\omega} \quad \text{и} \quad \frac{\partial[R]}{\partial\omega}\cos i - \frac{\partial[R]}{\partial\Omega},$$

где $[R]$ зависит лишь от координат спутника, при их непосредственном вычислении появляются множители e и $\sin i$ соответственно. Формулы же для $\Delta\Omega$ и $\Delta\tau$ имеют особенности типа $1/\sin i$ и $1/e$, связанные с неопределенностью этих элементов для случаев $\sin i = 0$ и $e = 0$. В формуле для $\Delta\omega$ указанные особенности содержатся посредством $\Delta\Omega$ и $\Delta\tau$.

Однако, этих особенностей в случае экваториальных и круговых орбит можно избежать, если вместо приращений элементов рассматривать приращения за оборот прямоугольных координат и компонент вектора скорости, которые связаны с элементами орбиты следующими соотношениями [2]

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = r\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{Vmatrix} = \varkappa\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix} + \sigma\begin{Vmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{Vmatrix};$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\sin\vartheta; \quad \sigma = \frac{\sqrt{\mu p}}{r};$$

$$\alpha = \cos U \cos\Omega - \sin U \sin\Omega \cos i \,;$$

$$\beta = \cos U \sin\Omega + \sin U \cos\Omega \cos i \,;$$

$$\gamma = \sin U \sin i \,;$$

$$\alpha' = -\sin U \cos\Omega - \cos U \sin\Omega \cos i \,;$$

$$\beta' = -\sin U \sin\Omega + \cos U \cos\Omega \cos i \,;$$

$$\gamma' = \cos U \sin i \,;$$

При выводе формул для $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta\dot{x}, \Delta\dot{y}, \Delta\dot{z}$ мы будем использовать также соотношения

$$(\Delta U) = -\frac{ctg\, i}{\sqrt{\mu p}}\cdot\frac{\partial[R]}{\partial i}\,;$$

$$(\Delta v) = -\frac{1-e^2}{\sqrt{\mu p}\, e}\cdot\frac{\partial[R]}{\partial e} + 2\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot\frac{\partial[R]}{\partial p}\,.$$

После несложных преобразований получим следующие формулы, определяющие приращения Δx, Δy, Δz, $\Delta\dot{x}$, $\Delta\dot{y}$, $\Delta\dot{z}$ за период обращения спутника, который будет постоянной величиной, т.к. $\Delta a = 0$

$$\begin{Vmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{Vmatrix} = r\begin{Vmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\beta\\ \Delta\gamma\end{Vmatrix} + \Delta r\begin{Vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{Vmatrix}\,;$$

$$\begin{Vmatrix}\Delta\dot{x}\\ \Delta\dot{y}\\ \Delta\dot{z}\end{Vmatrix} = \varkappa\begin{Vmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\beta\\ \Delta\gamma\end{Vmatrix} + \Delta\varkappa\begin{Vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{Vmatrix} + \sigma\begin{Vmatrix}\Delta\alpha'\\ \Delta\beta'\\ \Delta\gamma'\end{Vmatrix} + \Delta\sigma\begin{Vmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{Vmatrix}\,;$$

$$\Delta r = -\frac{r}{p}\Big[(2ae + r\cos v)\Delta e + re(\Delta\omega)\sin v + \frac{r}{a}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e\,\Delta\tau \sin v\Big]\,;$$

$$\Delta\varkappa = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\Big[\frac{\sin v}{1-e^2}\Delta e - e(\Delta\omega)\cos v - \frac{\cos v}{a}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e\,\Delta\tau\Big]\,;$$

$$\Delta\sigma = -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\Big(ae\Delta e + \frac{p}{r}\Delta r\Big)\,;$$

$$\begin{Vmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\beta\\ \Delta\gamma\end{Vmatrix} = (\sin U\cdot\Delta i - \cos U \sin i\cdot\Delta\Omega)\begin{Vmatrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{Vmatrix}\,;$$

$$\begin{Vmatrix}\Delta\alpha'\\ \Delta\beta'\\ \Delta\gamma'\end{Vmatrix} = (\sin U \sin i\cdot\Delta\Omega + \cos U\cdot\Delta i)\begin{Vmatrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{Vmatrix}\,;$$

$$\alpha'' = \sin i \sin\Omega\,;\quad \beta'' = -\sin i\cos\Omega\,;\quad \gamma'' = \cos i$$

Полученные формулы не имеют особенностей, имевшихся в формулах для приращений элементов. Действительно, величины $\sin i\,\Delta\Omega$ и $e\,\Delta\tau$ теряют особенности $1/\sin i$ и $1/e$, а величины Δe, Δi и $(\Delta\omega)$ не имели их и ранее.

Приведенные выше формулы для приращений элементов легко преобразовать к виду, нужному для вычисления приращений Δx, Δy, Δz, $\Delta\dot x$, $\Delta\dot y$, $\Delta\dot z$. Например, для гармоники 33 можно получить следующие выражения, не содержащие особенностей

$$\Delta_{33} e = \frac{45}{2} A_3 (1-e^2)\sin^2 i\,(\alpha_{33}\sin\omega + \beta_{33}\cos\omega\cos i);$$

$$\Delta_{33} i = \frac{45}{2} A_3 e\sin i\left[2\alpha_{33}\sin\omega\cos i + \beta_{33}\cos\omega(3-\cos^2 i)\right];$$

$$\sin i\;\Delta_{33}\Omega = \frac{45}{2} A_3 e\sin i\left[2\alpha_{33}\cos\omega\cos i + \beta_{33}\sin\omega(1-3\cos^2 i)\right];$$

$$(\Delta_{33}\omega) = \frac{225}{2} A_3 e\sin^2 i\,(\alpha_{33}\cos\omega - \beta_{33}\sin\omega\cos i);$$

$$e\,\Delta_{33}\tau = \frac{45}{2} A_3 \sqrt{\frac{p}{\mu}}\,p\sin^2 i\,(\alpha_{33}\cos\omega - \beta_{33}\sin\omega\cos i);$$

При необходимости вместо приращений Δx, Δy, Δz, $\Delta\dot x$, $\Delta\dot y$, $\Delta\dot z$ можно рассматривать смещения за оборот по радиусу-вектору Δr, по трансверсали Δm и по бинормали Δb относительно опорной орбиты, а также соответствующие приращения производных по времени $\Delta\dot r$, $\Delta\dot m$, $\Delta\dot b$. Связь между $\Delta x, \Delta y, \dots \Delta\dot z$ и $\Delta r, \Delta m, \dots \Delta\dot b$ дается формулами

$$\begin{Vmatrix}\Delta r\\ \Delta m\\ \Delta b\end{Vmatrix} = \|A\|\cdot\begin{Vmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{Vmatrix}; \qquad \begin{Vmatrix}\Delta\dot r\\ \Delta\dot m\\ \Delta\dot b\end{Vmatrix} = \|A\|\cdot\begin{Vmatrix}\Delta\dot x\\ \Delta\dot y\\ \Delta\dot z\end{Vmatrix}$$

$$\|A\| = \begin{Vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{Vmatrix}.$$

Другой известный способ исключения особенностей, связанных с малыми значениями $\sin i$ и e, состоит в замене системы элементов $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$ новой системой элементов

$$a = \frac{p}{1-e^2};\quad h = e\cos(\Omega+\omega);\quad k = e\sin(\Omega+\omega),$$

$$\tilde u = \sin i\cos\Omega;\quad \tilde v = \sin i\sin\Omega;\quad \varepsilon = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t_0-\tau)+\Omega+\omega,$$

Очевидно, будем иметь

$$\Delta a = 0,$$

$$\Delta h = \Delta e \cos(\Omega+\omega) - e\sin(\Omega+\omega)(\Delta\Omega+\Delta\omega);$$

$$\Delta k = \Delta e \sin(\Omega+\omega) + e\cos(\Omega+\omega)(\Delta\Omega+\Delta\omega);$$

$$\Delta\tilde{U} = \cos i \cos\Omega\,\Delta i - \sin i \sin\Omega\cdot\Delta\Omega,$$

$$\Delta\tilde{V} = \cos i \sin\Omega\,\Delta i + \sin i\cos\Omega\cdot\Delta\Omega;$$

$$\Delta\varepsilon = -\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}\Delta\tilde{\tau} + \Delta\Omega + \Delta\omega;$$

Путем несложных преобразований, например, для гармоники 22 можно получить следующие формулы

$$\Delta_{22} a = 0; \quad \Delta_{22} h = -k\,\Delta_{22}\varepsilon; \quad \Delta_{22} k = h\,\Delta_{22}\varepsilon;$$

$$\Delta_{22}\tilde{U} = 6A_2\sqrt{1-\tilde{U}^2-\tilde{V}^2}\,(\gamma_{22}\tilde{V}-\delta_{22}\tilde{U}),$$

$$\Delta_{22}\tilde{V} = 6A_2\sqrt{1-\tilde{U}^2-\tilde{V}^2}\,(\gamma_{22}\tilde{U}+\delta_{22}\tilde{V}),$$

$$\Delta_{22}\varepsilon = 3A_2\frac{3+5\sqrt{1-\tilde{U}^2-\tilde{V}^2}}{1+\sqrt{1-\tilde{U}^2-\tilde{V}^2}}\left[\gamma_{22}(\tilde{U}^2-\tilde{V}^2)+2\delta_{22}\tilde{U}\tilde{V}\right]$$

где

$$\gamma_{22} = c_{22}\cos 2\varkappa_0(t^*-t_0) - d_{22}\sin 2\varkappa_0(t^*-t_0);$$

$$\delta_{22} = c_{22}\sin 2\varkappa_0(t^*-t_0) + d_{22}\cos 2\varkappa_0(t^*-t_0).$$

В качестве численного примера рассмотрим приращения за один оборот элементов орбиты спутника Луны. За начальные элементы примем следующие

a =1828 км; e = 0.0[illegible] ; $i = 45^0$;
Ω = 0; $\omega = 45^0$; $\tau = t_0 = 0$

Для физических характеристик Луны приняты известные значения
μ = 4888.3001 км^3/сек^2; a_0 =17[illegible] км T_0 =2360591.5 сек

n, k	$c_{nk}\cdot 10^4$	$d_{nk}\cdot 10^4$	n, k	$c_{nk}\cdot 10^4$	$d_{nk}\cdot 10^4$
2,0	-2.048	0	4,1	0	0.403
2,1	0	0	4,2	-0.0[illegible]	0
2,2	0.230	0	4,3	0	0.0075
3,0	-0.863	0	4,4	0.0[illegible]	0
3,1	0	0.296	5,0	-0.[illegible]	0
3,2	-0.069	0	6,0	-0.[illegible]	0
3,3	0	0.0067	7,0	-0.7	0
4,0	2.628	0	8,0	-0.[illegible]	0

Табл. 1.

Коэффициенты гармоник, исключая C_{50}, C_{60}, C_{70}, C_{80}, которые задавались произвольно, взяты из работы [4]. В результате расчета по вышеприведенным формулам получены величины приращений элементов за один оборот, приведенные в табл.2.

Автор приносит свою благодарность М.Л.Лидову за полезные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Л.Лидов. Искусственные спутники Земли. 1961, вып.8.
2. Г.Н.Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. 1963. "ФМ".
3. П.Е.Эльясберг. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. 1965 "Наука".
4. C.L. Goudas „Icarus", 1964, 3, 375-409.

n,k	$\Delta_{nk} e$	$\Delta_{nk} i$ (рад)	$\Delta_{nk} \Omega$ (рад)	$\Delta_{nk} \omega$ (рад)	$\Delta_{nk} \tau$ (сек.)
2,0	-	-	$-0.124870457 \cdot 10^{-2}$	$0.131914784 \cdot 10^{-2}$	-
2,1	-	-	-	-	-
2,2	-	$-0.520041261 \cdot 10^{-5}$	$0.279299297 \cdot 10^{-3}$	$0.987472371 \cdot 10^{-4}$	-
3,0	$-0.182488269 \cdot 10^{-3}$	$0.472995027 \cdot 10^{-5}$	$-0.156080425 \cdot 10^{-4}$	$0.375047284 \cdot 10^{-2}$	$0.413383732 \cdot 10^{1}$
3,1	$-0.105428761 \cdot 10^{-3}$	$0.695857590 \cdot 10^{-5}$	$0.174882882 \cdot 10^{-4}$	$0.299709345 \cdot 10^{-2}$	$0.332686939 \cdot 10^{1}$
3,2	$-0.271628406 \cdot 10^{-4}$	$-0.882259666 \cdot 10^{-5}$	$-0.891216918 \cdot 10^{-5}$	$0.950258342 \cdot 10^{-3}$	$0.104351625 \cdot 10^{1}$
3,3	$-0.106880409 \cdot 10^{-4}$	$-0.186436139 \cdot 10^{-5}$	$0.478104053 \cdot 10^{-6}$	$0.278400161 \cdot 10^{-3}$	0.308136953
4,0	$0.286083656 \cdot 10^{-4}$	$-0.102134436 \cdot 10^{-5}$	$-0.455324575 \cdot 10^{-3}$	$-0.176880619 \cdot 10^{-2}$	-0.696247474
4,1	$-0.350949027 \cdot 10^{-5}$	$0.108847522 \cdot 10^{-5}$	$0.977479814 \cdot 10^{-3}$	$-0.118116321 \cdot 10^{-2}$	-0.160648192
4,2	$-0.215505151 \cdot 10^{-5}$	$-0.836764227 \cdot 10^{-5}$	$-0.171512517 \cdot 10^{-3}$	$0.163087030 \cdot 10^{-2}$	0.498995032
4,3	$0.274219825 \cdot 10^{-5}$	$-0.452277722 \cdot 10^{-5}$	$0.109103783 \cdot 10^{-3}$	$0.309775033 \cdot 10^{-3}$	0.130031172
4,4	$0.231371343 \cdot 10^{-4}$	$-0.214864015 \cdot 10^{-4}$	$0.613763426 \cdot 10^{-3}$	$0.672817794 \cdot 10^{-3}$	0.386311680
5,0	$-0.438719111 \cdot 10^{-4}$	$0.156626665 \cdot 10^{-5}$	$0.228286768 \cdot 10^{-4}$	$0.122431714 \cdot 10^{-2}$	$0.136439116 \cdot 10^{1}$
6,0	$0.651393773 \cdot 10^{-6}$	$-0.232553430 \cdot 10^{-7}$	$0.145696814 \cdot 10^{-3}$	$-0.242461442 \cdot 10^{-3}$	$-0.736484291 \cdot 10^{-1}$
7,0	$0.124694051 \cdot 10^{-3}$	$-0.445168969 \cdot 10^{-5}$	$0.251846701 \cdot 10^{-4}$	$-0.357981264 \cdot 10^{-2}$	$-0.389855501 \cdot 10^{1}$
8,0	$0.266835896 \cdot 10^{-4}$	$-0.952628126 \cdot 10^{-6}$	$-0.145030605 \cdot 10^{-3}$	$-0.104935091 \cdot 10^{-2}$	-0.743632713

Табл. 2.

Т03377 от 27 VI 196[illegible] г. Заказ № 587 тираж 100

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
МОСКВА, МИУССКАЯ ПЛ., 4