



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 19 за 1969 г.](#)



Молчанов А.М.

Малые возмущения в
гидромеханике с
диссипацией

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Молчанов А.М. Малые возмущения в гидромеханике с диссипацией // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1969. № 19. 38 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1969-19>

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Молчанов А. М.

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ГИДРОМЕХАНИКЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

Препринт № 19

Москва
1969 г.

Молчанов, А. М. Малые возмущения в гидромеханике с диссипацией : препр. № 19 / Молчанов А. М. ; ИПМ АН СССР. – М. : [б. и.], 1969. – 38 с. : 11 рис. – Библиогр.: с. 38 (3 назв.).

Реферат

Изучается влияние диссипативных факторов – вязкости и теплопроводности на характер распространения и затухания малых возмущений в одномерной гидродинамике.

Показано, что основные термодинамические неравенства – это просто условия линейной устойчивости.

Разобран эффект вырождения звуковых волн, когда они превращаются в нераспространяющиеся («вмороженные») типы возмущений. Этот эффект возникает на очень коротких волнах порядка длины свободного пробега. Увлекательно истолковать это обстоятельство, как проявление атомистичности, еще остающееся в жестких рамках приближения сплошной среды.

Показано, что вязкость может оказывать дестабилизирующее влияние. Это связано с характерной «вырожденностью» уравнений гидромеханики – отсутствием диссипативных членов в уравнении неразрывности.

№ 1. Вековое уравнение

Уравнения гидромеханики в лагранжевой системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где $a = a(z)$, $b = b(z)$ – векторные функции векторного аргумента z , а $c = c(z)$ – матрицы диссипативных членов:

$$Z = \begin{pmatrix} U \\ V \\ T \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} U \\ V \\ \frac{U^2}{2} + E \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} P \\ -U \\ PU \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3}\eta U & 0 & k \end{pmatrix} \frac{1}{V} \quad (2)$$

В этих формулах E ,

$$E = E(V, T) \quad (3)$$

внутренняя энергия, давление задается уравнением состояния,

$$P = P(V, T) \quad (4)$$

а величины η и k – коэффициенты вязкости и теплопроводности – также зависят

только от V и T :

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta(V, T) \\ k &= k(V, T) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Рассмотрим константное решение

$$Z(x, t) \equiv Z_0 \quad (6)$$

системы (1) и исследуем его на устойчивость в линейном приближении. Полагая

$$Z = Z_0 + \varepsilon W \quad (7)$$

и отбрасывая члены с ε^2 в системе (1), получим линейную систему с постоянными коэффициентами:

$$A \frac{\partial W}{\partial t} + B \frac{\partial W}{\partial x} = C \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (8)$$

где матрицы A и B получаются дифференцированием векторов $a(Z)$ и $b(Z)$ с последующей подстановкой Z_0 вместо Z :

$$A = \frac{da}{dZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ U & E_V & E_T \end{pmatrix}; \quad B = \frac{db}{dZ} = \begin{pmatrix} 0 & P_V & P_T \\ -1 & 0 & 0 \\ P & UP_V & UP_T \end{pmatrix}, \quad (9)$$

а матрица C в системе (8) получается просто подстановкой $Z = Z_0$ в матрицу из системы (1) (индекс 0 в дальнейшем всюду опущен, так как рассматривается только одна точка Z):

$$C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\eta}{3V} & 0 & \frac{k}{V} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Решение системы (8) ищем, как обычно, методом Фурье:

$$W(x, t) = e^{\lambda t + iKx} W_0, \quad (11)$$

где K – волновое число, пробегающее всю действительную ось.

Подставляя это выражение в систему (8), получаем вековое уравнение

$$\det(\lambda A + iKB + K^2 C) = 0, \quad (12)$$

определяющее λ как функцию волнового числа K . В уравнение (12) входит «корень из минус единицы», однако матрицы A , B и C , определяемые формулами (9) и (10), устроены так, что мнимые коэффициенты автоматически взаимно уничтожаются и

окончательное уравнение оказывается уравнением с действительными коэффициентами. В этом можно убедиться, раскрывая определитель (12) по второй строке:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{4\eta}{3V} K^2 & iKP & iKP \\ -iK^2 & \lambda & 0 \\ \lambda U + K^2 U \frac{4\eta}{3V} + iKP & \lambda E_V + iKUP_V & \lambda E_V + K^2 \frac{k}{V} iKUP_T \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Получается следующее, кубичное относительно λ , уравнение:

$$E_T \lambda^3 + \left[K^2 \left(E_T \frac{4\eta}{3V} + \frac{k}{V} \right) \right] \lambda^2 + \left[\frac{4\eta}{3V} \frac{k}{V} K^4 + (PP_T + P_T E_V - P_V E_T) K^2 \right] \lambda + \left(-P_V \frac{k}{V} \right) K^4 = 0,$$

коэффициенты которого – биквадратные функции волнового числа K . Если бы это было не так, коэффициенты неминуемо были бы комплексными, так как в исходное уравнение волновое число входит только в комбинации iK . Это уравнение будет кубичным при условии

$$E_T \neq 0, \quad (14)$$

которое совпадает с условием разрешимости уравнения (8) относительно производной по времени. Всюду в дальнейшем предположено, что условие (14) выполнено. В этом случае уравнение относительно λ можно переписать следующим образом:

$$\lambda^3 + K^2 \left(\frac{4\eta}{3V} + \frac{k}{VE_T} \right) \lambda^2 + \left[\frac{4\eta}{3V} \frac{k}{VE_T} K^4 + \left(\frac{PP_T + P_T E_V - P_V E_T}{E_T} \right) K^2 \right] \lambda + \left(-P_V \frac{k}{VE_T} \right) K^4 = 0.$$

Уравнение выглядит очень громоздким, однако можно запись существенно упростить, если ввести обозначения

$$\begin{cases} U = \frac{4\eta}{3V}, \\ \kappa = \frac{k}{VE_T}, \\ A = \frac{PP_T + P_T E_V - P_V E_T}{E_T}, \\ B = -P_V \end{cases}. \quad (15)$$

В этих обозначениях уравнение для λ имеет вид:

$$\lambda^3 + (\kappa + U)K^2\lambda^2 + (\kappa UK^4 + AK^2)\lambda + B\kappa K^4 = 0. \quad (16)$$

п° 2. Условия устойчивости

Для того, чтобы корни многочлена третьего порядка,

$$\lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3 = 0,$$

лежали в левой полуплоскости, необходимо и достаточно, как известно, выполнение неравенств

$$a_3 > 0, a_1 > 0, a_1 a_2 > a_3.$$

Подставляя в эти неравенства коэффициенты многочлена (16) и сокращая на положительный множитель K^4 , получаем:

$$B\kappa > 0, \kappa + U > 0, (\kappa + U)[\kappa UK^2 + A] > B\kappa.$$

Последнее неравенство должно выполняться при любом K^2 и приводит к двум неравенствам:

$$(\kappa + U)\kappa U > 0, (\kappa + U)A > B\kappa.$$

Нетрудно проверить, что полученная серия неравенств равносильна следующей:

$$\kappa > 0, U > 0, \quad (17)$$

$$B > 0, \quad (18)$$

$$\frac{A}{B} > \frac{\kappa}{\kappa + U}. \quad (19)$$

Эти неравенства имеют весьма различное значение. Первые два означают почти очевидный факт – для устойчивости необходимо, чтобы коэффициенты диссипации были положительны. Стоит все же заметить, что κ положительно в двух случаях. Во-первых, когда $E_T > 0$ и $k > 0$. Есть однако и другой случай (отрицательные температуры), когда $E_T < 0$ и $k < 0$. Следовательно, для устойчивости нужно, чтобы «теплоемкость» и «тепловой поток» были одного знака.

Третье неравенство содержит только уравнение состояния и совпадает с условием гиперболичности системы (8) при отсутствии диссипативных факторов

$$-\frac{\partial P}{\partial V} > 0. \quad (20)$$

Наиболее интересно последнее условие устойчивости, связывающее диссипативные и термодинамические величины. Оно еще раз показывает с какой осторожностью следует «переходить» к пределу.

Если в системе (8) положить $\kappa = 0$, $U = 0$, то получится система первого порядка:

$$A \frac{\partial W}{\partial t} + B \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \quad (21)$$

Для устойчивости (точнее говоря нейтральности) этой системы необходимо и достаточно выполнение единственного условия $\frac{\partial P}{\partial V} < 0$. Однако уже при сколь угодно малых κ и U необходимо выполнение дополнительного условия, существенно зависящего от соотношения величин κ и U .

Возникающая ситуация весьма поучительна. Иногда считают, что «добавляя» диссипацию, мы улучшаем устойчивость. Неравенство (19) показывает, что это неверно. Если оно не выполнено, то добавление диссипативных членов к нейтральной системе приводит к неустойчивости.

Все нейтральные системы вида (21) можно разделить на три класса по характеру их «реакции на добавление диссипации».

Если $\frac{A}{B} < 0$, то добавление любой диссипации приводит к появлению неустойчивых частот.

Если $0 < \frac{A}{B} < 1$, то неустойчивость появляется или нет в зависимости от величины $\frac{\kappa}{\kappa + U}$.

Наконец, «самые хорошие» гиперболические системы характеризуются неравенством

$$\frac{A}{B} > 1. \quad (22)$$

Они превращаются из нейтральных в устойчивые при любом соотношении вязкости и теплопроводности.

Ясно, что параметр – безразмерный, как это видно из (15), определяющий столь глубокие свойства должен иметь простой физический смысл. Это ожидание оправдывается. Покажем, что величина $\frac{A}{B}$ совпадает с показателем адиабаты – отношением «теплоемкости при постоянном давлении» к «теплоемкости при постоянном объеме».

Выпишем определение теплоемкостей

$$C_P = \left. \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_P, \quad C_V = \left. \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_V$$

Символ δ означает, что величина δQ не является полным дифференциалом, а становится таковым – в этом, собственно, и состоит смысл второго начала термодинамики для обратимых процессов – после деление на температуру $\delta Q = TdS$.

Отсюда вытекает

$$C_P = T \left. \frac{\delta S}{\delta T} \right|_P, \quad C_V = T \left. \frac{\delta S}{\delta T} \right|_V.$$

Полная формулировка второго начала термодинамики

$$dE = TdS - PdV, \quad (23)$$

эквивалентна двум соотношениям для частных производных:

$$\begin{aligned} TS_T &= E_T; \\ TS_V &= E_V + P. \end{aligned}$$

Первое соотношение сразу дает

$$C_V = E_T. \quad (24)$$

Для вычисления C_P используем «метод якобиянов»

$$C_P = T \left. \frac{\delta S}{\delta T} \right|_P = T \frac{\partial(S, P)}{\partial(T, P)} = T \frac{\frac{\partial(S, P)}{\partial(T, V)}}{\frac{\partial(T, P)}{\partial(T, V)}} = \frac{T(S_T P_V - S_V P_T)}{P_V}$$

Следовательно

$$C_P = \frac{E_T P_V - E_V P_T - P P_T}{P_V}. \quad (25)$$

Вводя традиционное обозначение

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{E_T P_V - E_V P_T - P P_T}{E_T P_V}, \quad (26)$$

и сравнивая (15), (24) и (25) получаем:

$$\frac{A}{B} = \gamma. \quad (27)$$

Условия устойчивости могут быть, следовательно, записаны в виде

$$\kappa > 0, \quad U > 0, \quad -\frac{\partial P}{\partial V} > 0, \quad \gamma > \frac{\kappa}{\kappa + U}. \quad (28)$$

Если потребовать, чтобы устойчивость имела место независимо от соотношения коэффициентов вязкости и теплопроводности, то получится основное термодинамическое неравенство

$$\gamma > 1. \quad (29)$$

Итак основные термодинамические неравенства являются следствием устойчивости в линейном приближении. Неравенство $-\frac{\partial P}{\partial V} > 0$ более грубое – оно возникает уже при исследовании гиперболической системы, в то время как условие $\gamma > 1$ (относящееся также к гиперболической системе) требует учета диссипативных факторов. Отметим, что вывод этого неравенства в работе [1] неполон, так как автор ограничился рассмотрением одной лишь теплопроводности $U > 0$ и не заметил, поэтому, обширного класса условно-устойчивых систем с $0 < \gamma \leq 1$.

Чисто математически интересна более широкая постановка вопроса.

Пусть в системе (8) матрица диссипации C – произвольная действительная матрица с положительными собственными значениями. Какие условия нужно дополнительно наложить на матрицы A и B , чтобы система (8) была всегда устойчива?

Не исключено, что при дописывании произвольной диссипации система может становиться неустойчивой при любых A и B . Такой вывод вовсе не является тревожным – возможно, что именно он есть первый шаг на пути объяснения того странного факта, что природа употребляет в качестве диссипативной вырожденную матрицу C , чего никогда не делает ни один математик.

Еще более интересная задача связана с нелинейной устойчивостью. Хотя эта тема далеко выходит за рамки статьи, следует все же в порядке постановки проблемы упомянуть об увлекательной надежде получить в качестве условий устойчивости не только термодинамические неравенства, но и основное термодинамическое тождество. Эта надежда основана на качественном отличии устойчивости в линейном приближении и устойчивости в квадратичном приближении. Линейная устойчивость дает условия типа неравенства (действительные части собственных значений меньше нуля). Если же система нейтральна в линейном приближении (а именно так дело и обстоит в гиперболических системах), то исследование на устойчивость в следующих, квадратичных членах приводит к условиям типа равенства в качестве необходимых условий устойчивости (более точно эти условия являются условиями сохранения нейтральности в квадратичном приближении).

Построение термодинамики в целом, как частного примера общей теории устойчивости систем уравнений в частных производных, было бы важным этапом понимания термодинамических закономерностей.

№ 3. Параметризация корней векового уравнения

Приступая к систематическому изучению поведения корней векового уравнения, заметим, что эти корни можно найти двумя способами. Существуют, во-первых, общие формулы для корней кубического уравнения. Во-вторых, из векового уравнения – биквадратного относительно K – можно найти K в функции λ и обратившись к получившейся зависимости.

Однако наиболее удобным является третий метод, основанный на общей идее униформизации. Полагая

$$\lambda = ZK^2, \quad (30)$$

и подставляя это выражение в уравнение (16), имеем:

$$Z^3 K^6 + (\kappa + U)Z^2 K^6 + (\kappa UK^2 + A)ZK^4 + BK^4 = 0,$$

и после сокращения на K^4 получаем явное выражение для

$$K^2 = -\frac{AZ + BK}{Z[(Z^2 + (\kappa + U)Z + \kappa U)]}. \quad (31)$$

Формулы (30) и (31) дают принципиально решение вопроса, представляя λ и K в виде рациональных функций параметра. Однако технически удобнее перейти к безразмерным величинам, выбирая подходящие единицы измерения для каждой из величин λ , K и Z . Вводя новый параметр S вместо Z

$$Z = \frac{\kappa + U}{2}(S - 1),$$

получаем параметризацию действительных корней векового уравнения

$$\begin{aligned} \frac{K^2}{K_0^2} &= -\frac{S - S_0}{(S - 1)(S^2 - \beta^2)}, \\ \frac{\lambda}{\lambda_0} &= -\frac{S - S_0}{(S^2 - \beta^2)} = (1 - S) \frac{K^2}{K_0^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
K_0 &= \frac{2\sqrt{A}}{\kappa+U}, \\
\lambda_0 &= \frac{2A}{\kappa+U}, \\
\beta &= \frac{U-\kappa}{U+\kappa}, \\
S_0 &= 1 - \frac{1-\beta}{\gamma},
\end{aligned} \tag{33}$$

Формулы (32) дают полную параметризацию алгебраической кривой (16). Тем не менее для изучения комплексных корней λ они неудобны, так как по смыслу дела волновое число K действительно и пришлось бы, поэтому, искать кривую в комплексной плоскости параметра S , на которой функция

$$\frac{S-S_0}{(S-1)(S^2-\beta^2)}$$

принимает отрицательные действительные значения. Отметим, что по аналогичной причине неудобны указанные выше методы. Однако метод униформизации с небольшим видоизменением годится и для исследования комплексных корней. Нужно только, перед тем как применять его, записать уравнения в действительной форме, явно выделив действительную и мнимую части собственного значения λ

$$\lambda = p + i\omega. \tag{34}$$

Подставляя в (16), получаем:

$$\begin{aligned}
p^3 + 3ip^2\omega - 3p\omega^2 - i\omega^3 + (\kappa+U)K^2(p^2 - \omega^2 + 2ip\omega) + \\
+(\kappa UK^4 + AK^2)(p+i\omega) + B\kappa K^4 = 0.
\end{aligned}$$

Отделяя действительную и мнимую части, получаем два действительных уравнения:

$$\begin{cases} p^3 - 3p\omega^2 - (\kappa+U)K^2(p^2 - \omega^2) + \\ + (\kappa UK^4 + AK^2)p + B\kappa K^4 = 0 \\ \omega[-\omega^2 + 3p^2 + 2p(\kappa+U)K^2 + \kappa UK^4 + AK^2] = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Второе уравнение распадается на два: первое $\omega = 0$, возвращает нас к отысканию действительных корней, а второе дает возможность выразить ω^2 через p :

$$\omega^2 + 3p^2 + 2(\kappa+U)K^2p + \kappa UK^4 + AK^2. \tag{36}$$

Подставляя это выражение в первое из уравнений системы (35), получаем уравнение только для действительной части λ :

$$\begin{aligned}
& 8p^3 + 8(\kappa + U)K^2 p^2 + \\
& + 2K^2 [(\kappa + U)^2 K^2 + \kappa UK^2 + A] p + \\
& + [\kappa U(\kappa + U)K^2 + A(\kappa + U) - B\kappa] K^4 = 0.
\end{aligned} \tag{37}$$

Дальнейшие выкладки, проходящие совершенно так же, как для случая действительных корней, с той лишь разницей, что после отыскания выражения для p и K нужно не забыть подставить их значения в формулу для ω^2 , чтобы и частоту выразить через параметр. В процессе вычислений оказывается удобным¹ ввести вместо ω другую величину c по формуле:

$$\omega = Kc. \tag{38}$$

Любопытно, что параметр можно ввести так, чтобы выражение для K^2 было одинаково как в случае действительных, так и в случае комплексных корней. Изменяются только выражения для λ . Возможно, что это частное проявление весьма общего алгебраического факта. Опуская довольно громоздкие, хотя и элементарные, выкладки, приведем – в безразмерной форме, чтобы яснее была видна зависимость от параметра S – окончательный результат:

Волновое число K^2 (единое выражение для комплексных и действительных корней)

$$\tilde{K}^2 = \varphi(S), \tag{39}$$

где $\varphi(S)$ рациональная функция аргумента S , зависящая, кроме того, от безразмерных параметров β и γ :

$$\varphi(S) = \frac{S - S_0}{(S - 1)(S^2 - \beta^2)}. \tag{40}$$

Действительные корни (аномальная ветвь, «вмороженные» возмущения):

$$\tilde{\lambda} = -(1 - S)\varphi(S). \tag{41}$$

Комплексные корни (звуковая ветвь $\lambda = p + iKc$)

$$\tilde{p} = -\frac{S + 1}{2}\varphi(S), \tag{42}$$

$$\tilde{c} = \frac{1 - S_0}{1 - S} - \frac{(S + 1)^2}{2}\varphi(S). \tag{43}$$

Для того, чтобы получить размерные величины K, λ, p, c , нужно безразмерные \tilde{K} ,

¹ А затем выясняется, и это происходит гораздо чаще, чем принято думать – глубокий физический смысл такого «эстетства». В данном случае таким образом появляется скорость звука.

$\tilde{\lambda}$, \tilde{p} , \tilde{c} умножить на постоянные размерные множители:

$$K_0 = \frac{2\sqrt{A}}{\kappa + U}, \quad \lambda_0 = p_0 = \frac{2A}{\kappa + U}, \quad c_0 = \sqrt{A}. \quad (44)$$

п° 4. Структура области корректности

Выше выяснено, что системы вида (8), получающиеся линеаризацией уравнений гидромеханики образуют двухпараметрическое семейство. Безразмерные параметры β и γ , определяющие строение системы, имеют простой физический смысл.

Параметр γ есть показатель адиабаты (отношение теплоемкостей) и может быть вычислен по формуле, содержащей величины, относящиеся только к гиперболической системе:

$$\gamma = \frac{-P_V E_T + (P_V + E_V) P_T}{-P_V E_T}. \quad (45)$$

Величина β , напротив, характеризует относительное значение диссипативных факторов:

$$\beta = \frac{\frac{4}{3}\eta - \frac{k}{E_T}}{\frac{4}{3}\eta + \frac{k}{E_T}}. \quad (46)$$

Возрастанию β соответствует возрастание относительной роли вязкости. При $\beta = -1$ есть только теплопроводность и нет вязкости, а при $\beta = 1$ остается, наоборот, только вязкость.

Формально можно рассматривать системы, задаваемые любыми значениями параметров β и γ . Заранее, правда, ясно, что вне полосы $|\beta| < 1$ ничего хорошего ожидать не приходится, так как системы с $\beta > 1$ «обладают» отрицательной теплопроводностью, системы с $\beta < -1$ имеют отрицательную вязкость.

Такое ожидание вполне оправдывается, все эти системы оказываются некорректными. Оправдывается и другое естественное предположение, что внутри полосы все системы корректны.

Следовательно, требование корректности выделяет в плоскости параметров полосу К

$$-1 \leq \beta \leq 1. \quad (K)$$

Важно отметить, что свойства гиперболической системы, характеризующиеся

параметром γ , никак не влияют на корректность, которая целиком определяется величиной β , зависящей от матрицы диссипации.

С точки зрения корректности нет, поэтому, оснований предпочитать одни гиперболические системы другим. Понятие корректности слишком грубо не только для выделения систем с $\gamma > 1$, но оно не отличает даже системы с положительным показателем адиабаты от систем с отрицательным показателем.

Иное дело требование устойчивости. Оно разбивает ось γ (множество гиперболических систем) на три интервала: полупрямую $(-\infty < \gamma < 0)$ неустойчивых систем, интервал условно устойчивых систем и полупрямую $(1 < \gamma < +\infty)$ устойчивых систем.

Первый интервал порождает в плоскости параметров полуполосу Н:

$$-1 \leq \beta \leq 1, -\infty < \gamma < 0, \quad (\text{H})$$

каждая точка которой соответствует неустойчивой системе.

Следует особенно подчеркнуть, что при отсутствии диссипации все системы (с любым γ) гиперболически и, следовательно, устойчивы (нейтральны). Неустойчивыми их делает именно добавление диссипативных факторов, причем безразлично какой величины – сколь угодно больших или сколь угодно малых – и независимо от соотношения вязкости и теплопроводности. Это обстоятельство лишний раз подчеркивает, что параметр γ определяет не столько внутренние свойства линейной гиперболической системы, сколько характер ее взаимодействия, ее реакцию на данный² тип диссипации. Кроме того, оно указывает на опасность некритического употребления фраз типа «Из физических соображений ясно, что диссипация увеличивает устойчивость системы».

Интервал условно устойчивых систем порождает в плоскости параметров прямоугольник $0 \leq \gamma \leq 1, -1 \leq \beta \leq 1$, который диагональю $\beta + 2\gamma = 1$ делится на два треугольника: неустойчивый Н*

$$-1 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \gamma \leq \frac{1-\beta}{2}, \quad (\text{H}^*)$$

и устойчивый У*

$$-1 \leq \beta \leq 1, \frac{1-\beta}{2} \leq \gamma \leq 1. \quad (\text{У}^*)$$

² Если матрица C , оставаясь диссипативной (с положительными собственными значениями), будет иметь другую структуру, условия устойчивости могут стать совершенно другими. Этот интересный математический вопрос не только не решен, но даже и не поставлен правильно.

Гиперболические системы из интервала $0 < \gamma \leq 1$ названы условно-устойчивыми именно потому, что устойчивость систем, получающихся из них добавлением диссипации, решающим образом зависит от соотношения вязкости и теплопроводности (но совсем не зависит от абсолютной величины этих факторов).

Все эти системы становятся устойчивыми при «включении» одной только вязкости и, наоборот, становятся неустойчивым, если «включить» только теплопроводность. Если же, включив вязкость, постепенно увеличивать (от нуля, т.е. от $\beta=1$) теплопроводность, не меняя величины вязкости, то вопреки «здравому смыслу» система становится все менее устойчивой по мере «увеличения общей диссипации», пока не перейдет границу устойчивости при

$$\beta = 1 - 2\gamma.$$

Отсюда видно, что «запас устойчивости» тем больше, чем больше γ . При $\gamma=1$ теплопроводность уже не в состоянии сбить устойчивость, создаваемую вязкостью, а при $\gamma > 1$ сама теплопроводность становится фактором устойчивости и здравый смысл (в этом отношении) вступает в свои права.

Наконец, интервал устойчивых систем $\gamma > 1$ дает полуполосу U , определяемую неравенствами:

$$-1 \leq \beta \leq 1, 1 < \gamma < +\infty, \quad (Y)$$

в точках которой включение диссипативных факторов превращает нейтральную гиперболическую систему в асимптотически устойчивую. Строение области U более подробно будет изучено в следующем параграфе.

Доказательство всех высказанных утверждений не представляет труда и легко может быть получено анализом формул (39) – (43). Чтобы дать представление о характере рассуждений, приведем для примера анализ области H . В этой области $\gamma < 0$, поэтому, точка S_0 ,

$$S_0 = 1 - \frac{1 - \beta}{\gamma} = 1 + \frac{1 - \beta}{|\gamma|},$$

в которой функция $\varphi(S)$ обращается в нуль, расположена правее точки $S = 1$. Отсюда видно, что функция $\varphi(S)$ положительна на двух интервалах изменения S :

$$-|\beta| \leq S \leq |\beta|, 1 \leq S \leq S_0.$$

Так как $|\beta| < 1$, то всюду в области существования функции $K(S)$ имеет место неравенство

$$S + 1 > 0$$

из которого вытекает, как это видно из (42), что знак \tilde{p} противоположен знаку K^2 .

Следовательно, комплексные корни устойчивы всюду в области. Наоборот, действительный корень положителен, как это видно из формулы (41) при изменении S на интервале $(1, S_0)$. Так как из (40) и (41) вытекает, что

$$\tilde{\lambda} = -\frac{S - S_0}{S_2 - \beta^2}, \quad (47)$$

то находим, что экстремумы функции $\tilde{\lambda}$ лежат в точках:

$$\begin{aligned} S_+ &= S_0 + \sqrt{S_0^2 - \beta^2}, \\ S_- &= S_0 - \sqrt{S_0^2 - \beta^2}, \end{aligned} \quad (48)$$

расположенных вне интервала $(1, S_0)$.

Поэтому при изменении S в интервале $1 \leq S \leq S_0$ функция K^2 изменяется от нуля до бесконечности, а $\tilde{\lambda}$ монотонно растет (при уменьшении S) от нуля до максимального значения, асимптотического при $K \rightarrow \infty$

$$\tilde{\lambda}_\infty = -\frac{S_0 - 1}{1 - \beta^2} = \frac{1}{|\gamma|(1 + \beta)}, \quad (49)$$

что и доказывает корректность системы.

н° 5. Строение области устойчивости

Условие $\gamma > 0$ выделяет, как мы видели, гиперболические системы, устойчивые относительно диссипативных возмущений. Но это вовсе не означает, что возникающие устойчивые системе устроены одинаково. Они существенно различаются структурой корней векового уравнения, которая определяется поведением функции $\varphi(S)$, задающей униформизацию. Поведение $\varphi(S)$, в свою очередь зависит от взаимного расположения полюсов

$$S_1 = -|\beta|, S_2 = |\beta|, S_3 = 1$$

и нуля $S_0 = 1 - \frac{1 - \beta}{\gamma}$ этой функции. Ясно, что качественные изменения происходят при совпадении любых двух особых точек. Слияния полюсов дают две уже известные линии $\beta = 1$ и $\beta = -1$, а так же линию

$$\beta = 0. \quad (50)$$

Совпадение S_0 с третьим полюсом не дает ничего нового, зато прохождение S_0 через первый и второй полюса дает интересные линии,

$$\gamma = \frac{1-\beta}{1+|\beta|} \text{ и } \gamma = \frac{1-\beta}{1-|\beta|},$$

составленные из отрезков гиперболы

$$\gamma = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \beta = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (51)$$

и прямой

$$\gamma = 1.$$

Стоит отметить, что формальное, казалось бы, исследование расположения особых точек функции $\varphi(S)$ уже дало все ранее найденные линии, кроме диагонали прямоугольника условно устойчивых систем. Но и эту линию легко получить из условия совпадения точки S_0 с точкой $S=-1$, в которой происходит изменение знака действительной части корня. Уравнение $S_0=-1$ можно переписать в виде:

$$2\gamma + \beta = 1$$

Расположение всех этих линий в полосе корректности приведено на рис. 1.

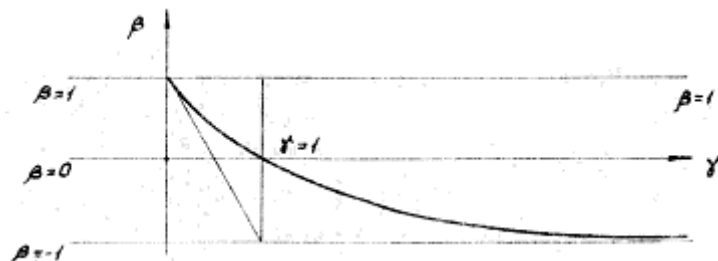


Рис. 1. Строеие области устойчивости.

Ограничимся изучением поведения корней³ в области устойчивости $\gamma > 1$.

В плоскости параметров (β, γ) гипербола (51) делит всю полосу устойчивости вдоль на две неравные части. Ширина нижней части стремится к нулю по мере продвижения вправо, так как нижняя сторона полосы ($\beta=-1$) является асимптотой гиперболы. Эта зона, где теплопроводность имеет большее значение, чем вязкость, обозначается буквой T

$$\gamma > 1, \quad -1 < \beta < -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (T)$$

³ Всюду в этом параграфе рассматриваются только безразмерные величины \tilde{K} и $\tilde{\lambda}$, а знак «тильда» всюду опущен, чтобы не загромождать формул.

Верхняя часть полосы, почти совпадающая со всей полосой при больших значениях γ , есть зона преимущественного влияния вязкости:

$$\gamma > 1, \quad -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} < \beta < 1. \quad (B)$$

Граница VT

При переходе через гиперболу происходит качественное изменение поведения корней. Это сказывается, в частности, в том, что для систем, лежащих на самой гиперболе, кривая действительных корней распадается на две линии.

Одна из этих кривых – парабола

$$\lambda = -\frac{2}{\gamma+1} K^2, \quad (52)$$

а вторая определяется формулами, получающимися при совпадении нуля S_0 с полюсом S_2 функции $\varphi(S)$,

$$S_0 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (53)$$

и задается параметрически:

$$\lambda = -\frac{1}{S+S_0}, \quad K^2 = \frac{1}{(1-S)(S+S_0)}. \quad (54)$$

Изучим взаимное расположение кривых (52) и (54). Кривая (54) лежит ниже прямой

$$\lambda = -\frac{\gamma+1}{2\gamma}, \quad (55)$$

являющейся для нее горизонтальной асимптотой, и правее вертикальной прямой

$$K = \frac{\gamma+1}{\gamma}, \quad (56)$$

причем касается этой вертикали в точке с ординатой

$$\lambda = -\frac{\gamma+1}{\gamma}, \quad (57)$$

лежащей, следовательно, в два раза ниже асимптоты. Отметим, что точка касания (независимо от γ) лежит на биссектрисе $K + \lambda = 0$. После точки касания кривая уходит направо и вниз вдоль параболы.

$$\lambda = -\frac{2\gamma}{\gamma+1} K^2 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}. \quad (58)$$

Значит асимптотически кривая (54) всегда лежит ниже параболы (52).

Очень важно, что кривые (52) и (54) пересекаются и, притом, в единственной точке:

$$\lambda = -\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}, K = \frac{\gamma+1}{2\sqrt{\gamma-1}}. \quad (59)$$

Сравнение с формулами (56) и (57) показывает, что точка пересечения лежит всегда правее точки касания, но может лежать и выше и ниже ее. Границей этих двух возможностей является кривая, на которой точка пересечения совпадает с точкой касания. Это происходит при

$$\gamma=2, \quad (60)$$

а возникающая кривая

$$\lambda = -\frac{1}{S+\frac{1}{3}}, K^2 = \frac{1}{(1-S)(S+\frac{1}{3})}, \quad (61)$$

изображена на рис. 3.

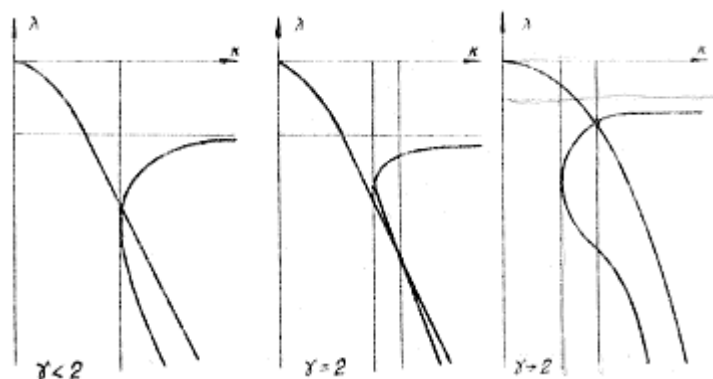


Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

Структура действительных корней в точке распада ветвей.

На рис. 2 изображена кривая (с $\gamma=1,4$), типичная для интервала $1 < \gamma < 2$, для которой точка пересечения лежит ниже точки касания и может (при $\gamma \rightarrow 1$) уходить сколь угодно далеко вниз. Наоборот, для значения $\gamma > 2$ характерно расположение, изображенное на рис. 4, когда точка пересечения поднимается и сдвигается вправо при увеличении γ . Не следует, однако, преувеличивать реальную степень «подвижности»

K . Даже если γ меняется в громадном диапазоне от $\frac{5}{4}$ до 18 (!), величина K изменяется всего лишь от $\sqrt{2}$ (при $\gamma = 3$) до 2,25 на обоих концах указанного

интервала:

$$1,41 \leq K \leq 2,25,$$

$$3 \leq \gamma \leq 18,$$

$$(3 \geq \gamma \geq 1,25).$$

Физически это обстоятельство означает весьма важный факт – все рассматриваемые явления имеют место в узком диапазоне длин волн – от четверти до двух третей длины свободного пробега.

Окрестность ВТ-гиперболы

Итак, все системы, лежащие на ВТ-границе имеют пересекающиеся ветви действительных корней, касательные к которым образуют пару прямых. При сколь угодно малом сдвиге с границы эта пара прямых распадается на две ветви гиперболы (в плоскости (K, λ) , не смешивать с плоскостью параметров), причем образуется, как можно показать, горизонтальный просвет, если сдвиг происходит внутрь области.

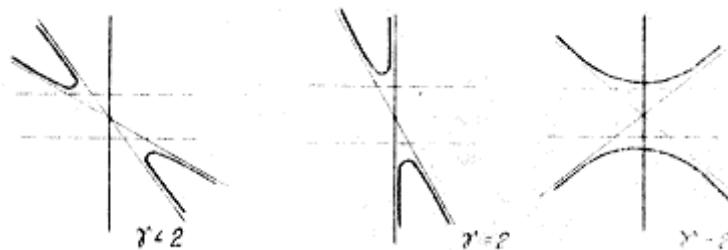


Рис. 5. Образование верхней и нижней ветви при сдвиге в область В.

Если же сдвинуться с границы внутрь области Т, то возникает наклонный просвет, отделяющий левую ветвь от правой.

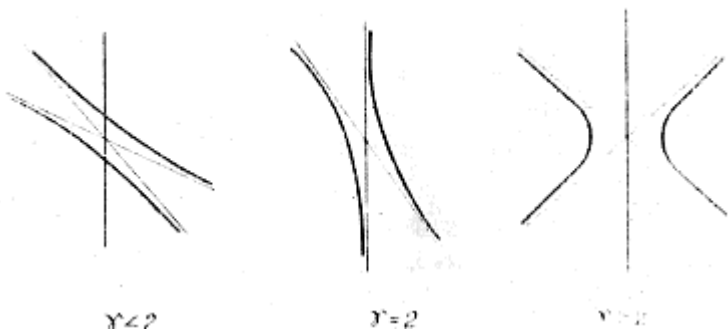


Рис. 6. Сдвиг в область Т. Образование левой и правой ветви.

Таким образом системы, лежащие выше ВТ-гиперболы, имеют кривую

действительных корней с непрерывной ветвью, выходящей из начала координат и уходящей вдоль горизонтальной асимптоты в бесконечность. Это поведение характерно для систем с преобладанием вязкости. Если же главную роль играет теплопроводность, то ветвь, выходящая из начала координат, уходит в бесконечность по параболе, расположенной асимптотически ниже двух других корней.

п° 6. Звуковые и «вмороженные» возмущения

Физический смысл действительной и мнимой части собственных значений $\lambda(K)$ можно понять, анализируя выражение

$$W_K(x, t) = e^{pt} e^{iK(x+ct)} W_{K0}, \quad (52)$$

которое вытекает из формул (11), (34) и (38).

Ясно, что величина $C(K)$ есть скорость распространения волны с данным волновым числом K , а величина $P(K)$ есть декремент затухания этой волны (если, конечно, $P < 0$). Из полученных выше результатов вытекает, в частности, что при достаточно больших волновых числах все корни действительны и, следовательно, все возмущения «вморожены» в газ – они затухают, не распространяясь вдоль массы газа. Самый факт существования таких возмущений не удивителен: в нормальных условиях такими свойствами обладают «энтропийные» возмущения. Любое малое возмущение оставляет «энтропийный след», медленно размываемый нелинейными эффектами. Однако выше показано, что для больших волновых чисел свойством «вмороженности» обладают все возмущения.

При рассмотрении задачи по поведению газа с учетом его атомистического строения это обстоятельство понятно. Столкновения атомов газа могут быть в основном упругими, и тогда энергия возмущения побежит по массе газа в виде энергии звука. Если же столкновения неупруги, то существенная часть энергии будет излучаться (или запасаться в возбуждении внутренних степеней свободы атомов) и колебания затухают «на местах». Длина волны колебаний, меньшая чем длина свободного пробега, означает, в сущности, возбуждение именно внутренних степеней свободы атомов и неупругий характер столкновений становится более вероятным.

Уравнения сплошной среды не претендуют, формально говоря, на применимость к размерам порядка длины свободного пробега. Если, тем не менее, качественно правильный результат получается за границами формальной применимости, то это означает, по-видимому, что уравнения оказываются «чутьку умнее» того, кто их

пишет – они верны до границ вывода «и еще немного дальше».

Возникает, поэтому, естественное желание найти реальные границы применимости. Может, конечно, оказаться, что указанное качественное согласие весьма далеко от количественного. Интересно, поэтому, проверить еще одно качественное предсказание, вытекающее из проведенного анализа. Речь идет о явлении, которое можно было бы назвать так – медленный суперультразвук (вторичный звук).

Если рассмотреть поведение корней, изображенное на рис. 4, то при сдвиге в область Γ возникает очень любопытная картина, показанная на рис. 7.

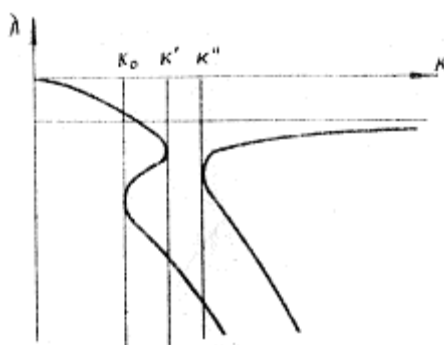


Рис. 7. Возникновение вторичного звука.

Из этого графика видно существование дополнительной области волновых чисел (интервал $K' \leq K \leq K''$), где корни λ снова комплексны. График скорости звука C состоит в этом случае из двух овалов.

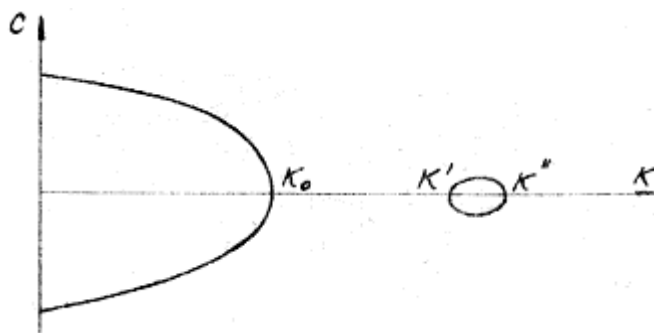


Рис. 8. Скорость звука как функция волнового числа.

При дальнейшем движении внутрь области Γ (β уменьшается при фиксированном $\gamma > 2$) эти два овала сближаются, превращаясь в восьмерку в тот момент, когда на графике действительных корней возникает точка перегиба, получающаяся при слиянии точек K и K' .

Возникает следующая критическая ситуация, изображенная на рис. 9.

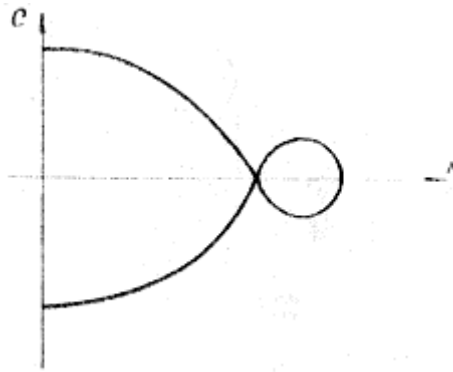


Рис. 9. Граница второго звука.

Если продолжить движение по области Т, самопересечение исчезает, оставляя на месте перешейка заниженную скорость звука.

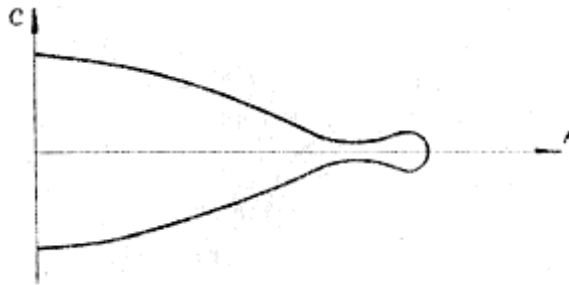


Рис. 10. Регулярный звук.

Нетрудно найти на плоскости параметров границу области существования медленного звука. Она совпадает с линией, на которой системы имеют точку перегиба в графике действительных корней. Несложные вычисления приводят к следующему результату.

Точка перегиба может быть только при $S = \frac{1}{3}$ и для систем, у которых параметры связаны соотношением

$$\gamma = \frac{27}{8}(1 - \beta)\left(\beta^2 + \frac{1}{3}\right), \quad (63)$$

Эта линия касается прямой $\gamma = 1$ в точке $\beta = \frac{1}{3}$ и пересекает гиперболу $\beta = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$ в точке $\gamma = 2$, а прямую $\beta = -1$ в точке $\gamma = 9$. Ее положение в полосе устойчивости приведено на рис. 11.

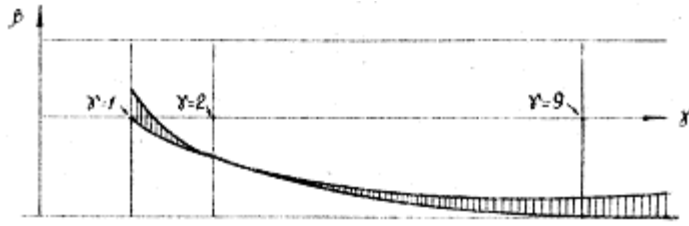


Рис. 11. Область существования медленного звука.

Из этого рисунка вытекает, что медленный звук существует также и в области В в узкой полосе, примыкающей к ВТ-границе. Это можно также усмотреть из рисунка 2, так как появление «щели» в действительных корнях происходит там именно при сдвиге в области В.

К сожалению, из рис. 11 вытекает также, что шансы на реальное существование медленного звука практически равны нулю. В самом деле, на интервале $1 \leq \gamma \leq 2$ этого звука, в сущности, нет, так как затухание происходит быстрее распространения, а там, где затухание могло бы стать приемлемым, необходимы фантастические значения показателя адиабаты (три и более), которые если и реализуются, то в совершенно уникальных условиях.

Чисто математически «вмороженность» всех высокочастотных колебаний имеет большое значение и связана со степенью гладкости решений. Так, например, ширина зоны ударной волны также имеет порядок длины свободного пробега.

№ 7. Наименее затухающие возмущения

Из полученных выше формул видно, что существует тип возмущений, затухание которого не увеличивается при увеличении волнового числа. Его собственное значение выходит на горизонтальную асимптоту при $K \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что это происходит при $S \rightarrow 1$ и предельное значение может быть легко найдено из формул (32) и (33)

$$\lambda_{\infty} = -\frac{1-S_0}{1-\beta^2} \lambda_0.$$

Этот результат можно представить в иной форме, введя обозначение C_T^2 для изотермической скорости звука:

$$C_T^2 = -\frac{\partial P}{\partial V} \Big|_T.$$

Тогда выражение для λ_{∞} может быть записано в виде:

$$\lambda_{\infty} = -\frac{C_T^2}{U},$$

где ν – вязкость. Из этой формулы вытекает⁴ весьма любопытный вывод: при вязкости, стремящейся к бесконечности, один из корней стремится к нулю (можно даже показать, прямо из уравнения (16), что стремление к нулю происходит равномерно по K).

То обстоятельство, что диссипативные факторы играют двойственную роль и значение их не сводится только к увеличению устойчивости системы, обсуждается [2] в литературе уже давно. Однако речь идет обычно о сравнительно тонких эффектах при малых значениях вязкости и теплопроводности. Здесь же мы имеем дело с дестабилизирующим действием диссипативного фактора как раз в противоположной ситуации, при очень больших значениях вязкости. Было бы очень интересно физически обследовать диапазон условий, в которых вязкость может проявлять дестабилизирующее влияние.

Что же касается математических моделей, то этот факт имеет первостепенное значение. Обычно при абстрактной постановке задачи матрицу диссипации C в уравнении (1) считают положительно определенной, между тем как в реальной (одномерной) гидромеханике она является всего лишь неотрицательной. Парадоксальное поведение вязкости объясняется, конечно, именно фактом наличия нулевого собственного значения у матрицы C . Это обстоятельство, кроме того, ставит систему уравнений гидромеханики с вязкостью и теплопроводностью за рамки математической классификации. Система эта не является ни параболической (нулевой корень у матрицы C), ни гиперболической (не все корни матрицы C равны нулю). Следовательно, она вырождена. Возможно, тем не менее, что это не дискредитирует уравнения гидромеханики. Однако более подробное обсуждение вопроса о дестабилизирующей роли вязкости выходит за рамки настоящей статьи.

Литература

1. Годунов С. К. УМН, 1962, т. 17, в. 3, с. 147-158.
2. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости, М. 1958.
3. Искандер-заде З. А. Журнал Вычислительной математики и математической физики, т. 6, в. 5, стр. 921, 1966 г.

⁴ Пользуюсь случаем выразить благодарность Искандер-заде З. А., обнаружившему это замечательное обстоятельство

Электронную версию препринта подготовили:
Н. В. Михайлова, Г. Р. Смирнова, И. В. Флоринский
(Институт математических проблем биологии РАН)

Редактирование не проводилось (за исключением опечаток)

Проект «Электронные ИПМ-препринты А. М. Молчанова»
Координатор проекта: И. В. Флоринский
iflorinsky@yahoo.ca

Пушино
2012