



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 22 за 1970 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Садов Ю.А.](#)

Переменные действия - угол
в задаче Эйлера-Пуансо

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Садов Ю.А. Переменные действия -
угол в задаче Эйлера-Пуансо // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1970. № 22. 29 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1970-22>



ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Ю. А. Садов

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ—УГОЛ
В ЗАДАЧЕ ЭЙЛЕРА—ПУАНСО

ПРЕПРИНТ № 22
за 1970г

Москва

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

САДОВ Ю.А.

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ В ЗАДАЧЕ
ЭЙЛЕРА-ПУАНСО

Москва, 1970г.

АННОТАЦИЯ

Выведены явные формулы для перехода к переменным действие – угол в задаче о свободном вращении твердого тела относительно неподвижной точки. В качестве примера приведены разложения направляющих косинусов в ряды Фурье по этим переменным.

Выводятся явные формулы для перехода к переменным действие-угол в задаче о свободном вращении твердого тела относительно неподвижной точки. В качестве примера приведены выражения направляющих косинусов через эти переменные.

I. Исследование динамических систем методами теории возмущений, в том числе методом усреднения, значительно упрощается, если невозмущенная система записана в переменных действие-угол. При этом более наглядными становятся принципиальные основы методов и упрощаются технические выкладки, особенно при получении высших приближений.

Переменные действие - угол I_κ, ω_κ ($\kappa = 1, \dots, n$, где n - число степеней свободы) (см., например, [1, 2]) для автономных гамильтоновых систем являются каноническими переменными со следующими свойствами: 1) фазовое пространство системы периодически по всем углам ω_κ с одним и тем же периодом 2π ; 2) все угловые переменные - циклические, так что гамильтониан

$$H = H(I_1, \dots, I_n) \quad (1.1)$$

не зависит от ω_κ . Уравнения движения имеют вид

$$\dot{\omega}_\kappa = \frac{\partial H}{\partial I_\kappa} = f_\kappa(I), \quad \dot{I}_\kappa = 0 \quad (\kappa = 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

В силу уравнений (1.2) все действия I_κ являются интегралами движения, а полный набор таких интегралов $I_\kappa = C_\kappa$ определяет в фазовом пространстве инвариантное многообразие, которое по свойству 1) представляет собой n -мерный тор. Траектории

системы обматывают тор, причем каждый из углов w_k изменяется равномерно. Совокупность таких торов заполняет некоторую область фазового пространства.

В.И. Арнольд доказал [2, 3], что подобная структура фазового пространства типична для интегрируемых гамильтоновых систем, интегральные многообразия которых ограничены и замкнуты. Переменные действие - угол в таком случае вводятся следующим образом. Пусть $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ - исходные канонические переменные. Прежде всего требуется найти набор n независимых первых интегралов в инволюции.

$$J_k(q, p) = c_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.3)$$

В некоторой области изменения постоянных интегрирования c_k совокупность этих интегралов выделяет в фазовом пространстве n -мерный тор. Как известно, такой тор представляет собой прямое произведение n окружностей, образы которых на торе называются базисными циклами. Величины

$$I_k(c_1, \dots, c_n) = \frac{1}{2\pi} \oint_{L_k} \sum_{i=1}^n p_i dq_i, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (1.4)$$

где интегрирование производится по k -ому базисному циклу, и представляют собой переменные "действие". Предположим, что из выражений (1.3), (1.4) можно исключить c и разрешить полученные уравнения относительно p . При этом импульсы оказываются функциями от q и I

$$p_i = p_i(q, I). \quad (1.5)$$

Тогда производящая функция искомого канонического преобразования к переменным действие - угол находится квадратурой

$$S(q, I) = \int \sum_{i=1}^n p_i(q, I) dq_i, \quad (1.6)$$

а угловые переменные последующим дифференцированием

$$w_\kappa(q, I) = \frac{\partial S}{\partial I_\kappa} \quad (\kappa = 1, \dots, n) \quad (1.7)$$

Нетрудно проверить, что определенные таким образом переменные I_κ, w_κ действительно обладают свойствами 1), 2).

Поскольку базисные циклы тора можно выбирать по-разному, переменные "действие" определяются формулой (1.4) неоднозначно. Базисные циклы образуют одномерную базу гомологий на торе, поэтому переход к другой системе базисных циклов соответствует переходу к другой базе гомологий и осуществляется целочисленным унимодулярным преобразованием [4]. Таким же образом преобразуются при этом и переменные "действие". Другими словами, пусть $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ — некоторый набор переменных "действие", рассматриваемый как вектор в n -мерном векторном пространстве. Тогда:

а) каждый вектор $I' = \{I'_1, I'_2, \dots, I'_n\}$, представимый в форме

$$I' = T I, \quad (1.8)$$

где T — целочисленная матрица и $\det T = \pm 1$, также определяет переменные "действие" и б) любая совокупность таких переменных представляется в виде (1.8) с матрицей T , принадлежащей указанной группе.

Преобразование частот $\omega = \frac{\partial H(I)}{\partial I}$ задается транспонированной обратной матрицей

$$\omega' = (T')^{-1} \omega.$$

При этом преобразовании арифметическая зависимость частот, то есть условие резонанса, сохраняется.

В определении угловых переменных имеется еще дополнительная неопределенность, связанная с выбором начальной точки пути интегрирования в формуле (1.6). Указанную неоднозначность следует иметь в виду при нахождении и использовании переменных действие - угол.

2. Воспользуемся описанной процедурой для вычисления переменных действие - угол в задаче о движении твердого тела относительно неподвижной точки при отсутствии внешних моментов. Некоторые особенности этой задачи отмечены в [5]. В качестве исходных канонических переменных будем употреблять (в других обозначениях) переменные, описанные, например, в [6]. Такие же переменные, с точностью до постоянной в определении углов, используются в [7]. Смысл этих переменных поясняется на рис. I. Здесь $Oxyz$ - абсолютная декартова система координат, $O\xi\eta\zeta$ - связанная система, оси которой направлены по главным осям инерции тела, плоскость OMN перпендикулярна вектору кинетического момента G . В качестве обобщенных координат выбираются углы h , ψ , φ , смысл которых ясен из рисунка. Тогда канонически сопряженными с ними импульсами оказываются переменные L , G , G_ζ , где G - модуль кинетического момента, L и G_ζ - проекции кинетического момента на оси Oz и $O\xi$. Введем еще вспомогательные переменные δ и ϑ , которые связаны с основными посредством формул

$$L = G \cos \delta, \quad G_\zeta = G \cos \vartheta \quad (2.1)$$

и представляют собой углы, образованные вектором кинетического момента с осями Oz и $O\xi$. Заметим еще, что ψ , ϑ , φ образуют обычный набор эйлеровых углов (прецессия, нутация, чистое вращение), если в качестве абсолютной системы координат выбрать систему, две оси которой направлены соответственно по OM и по G .

В описанных переменных движение Эйлера—Пуансо определяется системой канонических уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \frac{G^2 - G_\zeta^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{G_\zeta^2}{2C}, \quad (2.2)$$

где A, B, C — моменты инерции тела относительно осей $O\xi, O\eta, O\zeta$. Эта система имеет 4 однозначных первых интеграла

$$H = c_1, \quad G = c_2, \quad L = c_3, \quad h = c_4 \quad (2.3)$$

причем первые три из них находятся в инволюции. Согласно сказанному выше, при тех значениях c_1, c_2, c_3 , при которых эти интегралы функционально независимы, выделяемое ими многообразие представляет собой трехмерный тор.

Фактически, из-за наличия четвертого интеграла трехмерные торы распадаются на инвариантные двумерные торы [5], то есть, по терминологии [2] имеет место собственное вырождение. Для введения новых переменных это обстоятельство несущественно, хотя его и можно использовать для понижения размерности.

Заметим, что в первые три уравнения (2.3) не входят углы h и φ . Поэтому определяемое ими множество является прямым произведением двух окружностей, получающихся, когда h или φ пробегает значения от 0 до 2π при фиксированных значениях остальных переменных, и кривой $\Gamma: H = c_1, G = c_2, L = c_3, h = 0, \varphi = 0$. Уравнение кривых Γ в пространстве двух переменных G_ζ и φ

$$G_\zeta^2 = G^2 \frac{\gamma^{-1} - \alpha^{-1} \sin^2 \varphi - \beta^{-1} \cos^2 \varphi}{1 - \alpha^{-1} \sin^2 \varphi - \beta^{-1} \cos^2 \varphi} \quad (2.4)$$

легко получается из (2.2). Здесь

$$\alpha = \frac{A}{C}; \quad \beta = \frac{B}{C}; \quad \gamma = \frac{G^2}{2CH} \quad (2.5)$$

а G и H рассматриваются как постоянные.

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что момент инерции B соответствует средней оси эллипсоида инерции, то есть имеет место одна из систем неравенств

$$1 < \beta < \alpha, \quad 1 \leq \gamma \leq \alpha$$

или

$$\alpha < \beta < 1, \quad \alpha \leq \gamma \leq 1. \quad (2.6)$$

Вид кривых Γ в пространстве G_ζ , φ показан на рис.2. Этот рисунок фактически представляет собой развертку сферы, так как точки, в которых φ отличаются на 2π , тождественны, а при $G_\zeta = \pm G$ происходит вырождение, в результате чего окружности $G_\zeta = \pm G$ стягиваются в точку. Таким образом, на сфере (G_ζ, φ) имеются четыре области, разделенные сепаратрисой $\gamma = \beta$, в каждой из которых кривые Γ топологически эквивалентны окружностям. Эти области обозначены на рисунке римскими цифрами I, II, III, IV. В областях I и II значение γ лежит между 1 и β , в областях III, IV оно расположено между β и α .

Указанное разбиение сферы порождает соответствующее разбиение всего фазового пространства на четыре области. В каждой из этих областей можно ввести переменные действие - угол. В качестве базисных циклов, согласно сказанному выше, можно выбрать две координатные окружности

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 : G = c_2, \quad \mathcal{L} = c_3, \quad G_\zeta = const, \quad \varphi = const, \quad \psi = const \\ \mathcal{L}_2 : G = c_2, \quad \mathcal{L} = c_3, \quad G_\zeta = const, \quad h = const, \quad \varphi = const \end{aligned}$$

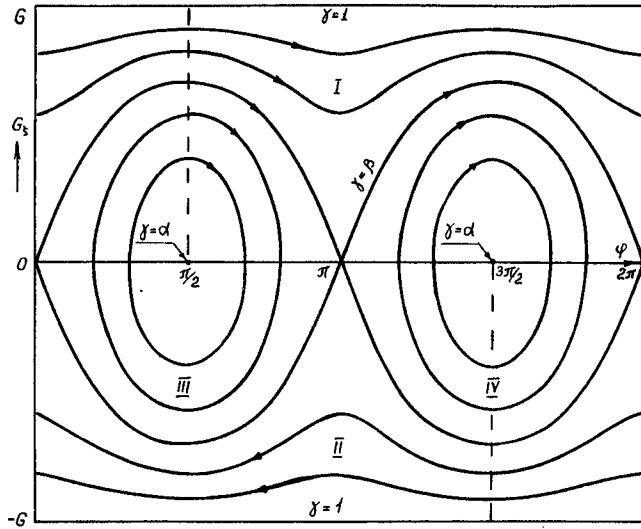


Рис.2. Фазовые траектории на плоскости G_z, φ .

и кривую Γ

$$L_3: H = c_1, \quad G = c_2, \quad L = c_3, \quad h = \text{const}, \quad \varphi = \text{const}.$$

По контурам L_1 , L_2 будем интегрировать в направлении возрастания углов h и φ , направления обхода контуров L_3 показаны стрелками на рис.2. В качестве начальной точки пути интегрирования удобно выбирать в областях I и III точку тора, где $h = 0$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $G_\zeta > 0$, а в областях II и IV точку с $h = 0$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ и $G_\zeta < 0$. Штриховые линии на рис.2 изображают геометрическое место определенных таким образом начальных точек в сечении $h = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$.

После таких предварительных построений вычисление переменных действие - угол производится уже однозначно. Формула (I.4) дает

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L dh = L \quad (2.7)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G d\varphi = G$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} G_\zeta d\varphi = \frac{G}{2\pi} \oint_{\Gamma} \sqrt{\frac{\gamma^{-1} \alpha^{-1} \sin^2 \varphi - \beta^{-1} \cos^2 \varphi}{1 - \alpha^{-1} \sin^2 \varphi - \beta^{-1} \cos^2 \varphi}} d\varphi. \quad (2.8)$$

Формулы (2.7) показывают, что две из переменных "действие" совпадают со старыми переменными L , G . Поэтому мы будем использовать эти обозначения вместо I_1 , I_2 . Третью переменную I_3 будем обозначать просто I . Для ее вычисления вместо α , β , γ удобно ввести положительные параметры \mathcal{X} и λ по формулам

$$x^2 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha(1 - \beta)} = \frac{C(B-A)}{A(C-B)}; \quad \lambda^2 = \frac{(\beta - \alpha)(1 - \gamma)}{(1 - \beta)(\gamma - \alpha)} = \frac{C(B-A)(2CH - G^2)}{A(C-B)(G^2 - 2AH)}. \quad (2.9)$$

Здесь x зависит лишь от моментов инерции рассматриваемого тела, а величина λ изменяется от тора к тору, причем внутри областей I и II $\lambda < 1$, а внутри областей III и IV $\lambda > 1$. При использовании новых обозначений формулы (2.4), (2.8) приводятся к виду

$$G_{\zeta}^2 = G^2 \frac{x^2}{x^2 + \lambda^2} \frac{1 - \lambda^2 + (x^2 + \lambda^2) \sin^2 \varphi}{1 + x^2 \sin^2 \varphi} \quad (2.10)$$

$$I = \frac{G}{2\pi} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \oint_{\Gamma} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 + (x^2 + \lambda^2) \sin^2 \varphi}{1 + x^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad (2.11)$$

Дальнейшие выкладки проводятся по-разному для разных областей.

Рассмотрим два случая:

А. В областях I и II интеграл в (2.11) подстановкой

$$\operatorname{ctg} \varphi = -\sqrt{1 + x^2} \operatorname{tg} \xi \quad (2.12)$$

приводится к эллиптическому интегралу

$$\begin{aligned} I(G, \lambda) &= \frac{2G}{\pi} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{\lambda^2+x^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \xi}}{1+x^2 \sin^2 \xi} d\xi = \\ &= \frac{2G}{\pi x} \sqrt{\frac{1+x^2}{\lambda^2+x^2}} [(\lambda^2+x^2) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, x^2, \lambda\right) - \lambda^2 K(\lambda)]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Обозначения и формулы преобразования эллиптических интегралов, а также эллиптических и связанных с ними функций приведены, например, в [8, 9].

Вычисляя производную

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = -\frac{2G}{\pi} \frac{x\lambda\sqrt{1+x^2}}{(\lambda^2+x^2)^{3/2}} K(\lambda) < 0 \quad (0 < \lambda < 1) \quad (2.14)$$

находим, что $I(G, \lambda)$ при всех G, x монотонно убывает, когда λ изменяется от 0 до 1, причем

$$I(G, 0) = G, \quad I(G, 1) = \frac{2G}{\pi} \operatorname{arctg} x. \quad (2.15)$$

Поэтому соотношение (2.13) можно разрешить относительно λ , так что

$$\lambda = \Phi_1(I/G), \quad (2.16)$$

где $\Phi_1(z)$ - аналитическая на интервале вещественной оси $(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x, 1)$ функция $z = I/G$.

Согласно (1.6) производящая функция преобразования к переменным действие - угол имеет вид:

$$S(h, \varphi, \varphi, L, G, I) = Lh + G\varphi + \int_{\xi} G_1(G, I, \varphi) d\varphi, \quad (2.17)$$

где функция $G_1(G, I, \varphi)$ получается подстановкой (2.16) в (2.10).

Выбор начальной точки интегрирования был описан выше. Угловые переменные получаются из (2.17) дифференцированием

$$h = \frac{\partial S}{\partial L}$$

$$v = \frac{\partial S}{\partial G} = \varphi \pm \frac{\sqrt{(1+x^2)(\lambda^2+x^2)}}{x} \left[\Pi(\xi, x^2, \lambda) - \Pi\left(\frac{\pi}{2}, x^2, \lambda\right) \frac{F(\xi, \lambda)}{K(\lambda)} \right] \quad (2.18)$$

$$f = \frac{\partial S}{\partial I} = \pm \frac{\pi}{2} \frac{F(\xi, \lambda)}{K(\lambda)}.$$

Верхний знак соответствует области I, нижний - области II.

Переменная h совпадает со старой переменной и имеет то же обозначение. Вспомогательная переменная ξ связана с φ соотношением (2.12), причем для области I будем считать, что $\xi = 0$ при $\varphi = \pi/2$, а для области II $\xi = 0$ при $\varphi = 3\pi/2$.

Формулы (2.8), (2.13), (2.18), где $\lambda = \lambda(G, G_\xi, \varphi)$ дают выражение переменных действие - угол через исходные переменные.

Разрешая их относительно старых переменных, получаем формулы обратного перехода

$$\xi = \pm \operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi} f, \lambda\right)$$

$$\varphi = \nu + \frac{\sqrt{(1+x^2)(\lambda^2+x^2)}}{x} \left[\frac{2}{\pi} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, x^2, \lambda\right) f - \Pi\left(\operatorname{am}\frac{2K}{\pi} f, x^2, \lambda\right) \right] \quad (2.19)$$

$$G_\xi = \pm \frac{Gx}{\sqrt{\lambda^2+x^2}} \operatorname{dn}\left(\frac{2K}{\pi} f, \lambda\right).$$

Здесь λ нужно уже считать функцией G и I , согласно (2.16).

Гамильтониан в новых переменных принимает вид

$$H = \frac{G^2}{2A} \left(1 - \frac{C-A}{C} \frac{x^2}{\lambda^2+x^2} \right). \quad (2.20)$$

Частоты движения Эйлера-Пуансо

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\pi G}{2K(\lambda)} \frac{A-C}{AC} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)(\lambda^2+x^2)}} \\ \dot{\nu} &= \frac{\partial H}{\partial G} = \frac{G}{C} \left[1 - \frac{A-C}{A} \frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, x^2, \lambda\right)}{K(\lambda)} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Б. В областях III и IV приведение интеграла (2.11) к эллиптическим интегралам осуществляется подстановкой

$$\cos \varphi = - \frac{\sqrt{1+x^2}}{\lambda} \frac{\sin \eta}{\sqrt{1+x^2\lambda^2 \sin^2 \eta}} \quad (2.22)$$

причем в области III $\varphi = \pi/2$ при $\eta = 0$, а в области IV при $\eta = 0$, $\varphi = 3\pi/2$. В результате такой подстановки находим

$$\begin{aligned} I(G, \lambda) &= \frac{2G}{\pi} \frac{x}{\lambda} \sqrt{\frac{1+x^2}{\lambda^2+x^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \eta d\eta}{(1+x^2\lambda^2 \sin^2 \eta) \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \eta}} = \\ &= \frac{2G}{\pi x \lambda} \sqrt{\frac{1+x^2}{\lambda^2+x^2}} \left[(\lambda^2+x^2) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{x^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right) - \lambda^2 K\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Из (2.23) следует

$$I(G, 1) = \frac{2G}{\pi} \operatorname{arctg} x \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(G, \lambda) = 0 \quad (2.24)$$

При этом, если λ увеличивается от 1 до ∞ , то $I(G, \lambda)$ монотонно убывает, как видно из выражения для производной

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = - \frac{2G}{\pi} \frac{x \sqrt{1+x^2}}{(\lambda^2+x^2)^{3/2}} K\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (2.25)$$

Поэтому уравнение (2.23) можно разрешить относительно λ и получить

$$\lambda = \Phi_2(I/G) \quad (2.26)$$

$\Phi_2(z)$ — функция, аналитическая на интервале вещественной оси от 0 до $\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x$.

Производящая функция имеет вид (2.17). Дифференцированием находим угловые переменные

$$v = \varphi + \frac{\sqrt{(1+x^2)(\lambda^2+x^2)}}{x\lambda} \left[\Pi\left(\eta, \frac{x^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right) - \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{x^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right) \frac{F(\eta, \lambda')}{K(\lambda')} \right]$$

$$f = \frac{\pi}{2} \frac{E(\eta, \lambda^{-1})}{K(\lambda^{-1})} \quad (2.27)$$

Новые переменные выражаются через старые по формулам

$$\begin{aligned} \eta &= am\left(\frac{2K}{\pi} f, \frac{1}{\lambda}\right) \\ \varphi &= \vartheta + \frac{\sqrt{(1+x^2)(\lambda^2+x^2)}}{x\lambda} \left[\frac{2}{\pi} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{x^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right) f - \Pi\left(am \frac{2K}{\pi} f, \frac{x^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right) \right] \\ G_\zeta &= \pm \frac{Gx}{\sqrt{\lambda^2+x^2}} \operatorname{cn}\left(\frac{2K}{\pi} f, \frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Гамильтониан имеет вид (2.20), где $\lambda = \lambda(G, I)$ по (2.26).

Для частот получаем выражения

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{A-C}{AC} \frac{\pi G}{2K(\lambda^{-1})} \frac{x\lambda}{\sqrt{(1+x^2)(\lambda^2+x^2)}} \\ \dot{\vartheta} &= \frac{G}{C} \left[1 - \frac{A-C}{A} \frac{\Pi(\pi/2, x^2\lambda^{-2}, \lambda^{-1})}{K(\lambda^{-1})} \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

3. Формулы (2.19), (2.28) позволяют в принципе найти явное выражение через переменные действие – угол любой известной функции исходных переменных. Однако при этом могут получаться громоздкие выражения, которыми трудно очертить. С другой стороны, в ряде случаев требуется иметь представления рассматриваемых функций в виде рядов Фурье. В данном разделе мы покажем, как получить такие представления для направляющих косинусов.

Матрицу S направляющих косинусов системы $O\xi\eta\zeta$ в системе $Oxyz$ можно записать в виде

$$S = S_1 S_2 \quad (3.1)$$

где

$$S_1 = \begin{pmatrix} \cosh h & -\sinh h \cos \delta & \sinh h \sin \delta \\ \sinh h & \cosh h \cos \delta & -\cosh h \sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta & -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Вид матрицы S_1 сохраняется и в переменных действие - угол, так что требуется записать в этих переменных лишь матрицу S_2 . Вспоминая определение ϑ из (2.1) и пользуясь формулами (2.19), (2.28), нетрудно найти искомые выражения для элементов третьей строки матрицы S_2 (эти элементы представляют собой направляющие косинусы вектора кинетического момента в связанной системе координат). Так, например, в областях I, II имеем

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{G_z}{G} = \pm \frac{x}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}}, \quad \operatorname{dn} u \\ \sin \varphi \sin \vartheta &= \pm \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \operatorname{cn} u \\ \cos \varphi \sin \vartheta &= -\frac{\lambda \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}} \operatorname{sn} u \end{aligned} \quad (3.3)$$

Верхний знак соответствует области I, нижний - области II.

Здесь и в дальнейшем

$$u = \frac{2K}{\pi} f \quad (3.4)$$

Всюду, где в обозначениях эллиптических интегралов и функций

отсутствует явное указание на модуль, считается, что он равен λ при $\lambda < 1$ и $1/\lambda$ при $\lambda > 1$.

Из (3.3), используя известные разложения для эллиптических функций, находим представления трех направляющих косинусов в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \pm \frac{2\pi}{K} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \left(\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos 2nf \right) \\ \sin \varphi \sin \vartheta &= \pm \frac{2\pi}{K} \frac{2\pi}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 + q^{2n-1}} \cos(2n-1)f \\ \cos \varphi \sin \vartheta &= -\frac{2\pi}{K} \sqrt{\frac{1+x^2}{\lambda^2+x^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} \sin(2n-1)f. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогичные вычисления для областей III, IV дают

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \pm \frac{2\pi}{K} \frac{x\lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 + q^{2n-1}} \cos(2n-1)f \\ \sin \varphi \sin \vartheta &= \pm \frac{2\pi}{K} \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \left(\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos 2nf \right) \\ \cos \varphi \sin \vartheta &= -\frac{2\pi\lambda}{K} \sqrt{\frac{1+x^2}{\lambda^2+x^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} \sin(2n-1)f \end{aligned} \quad (3.6)$$

Остальные элементы матрицы S_2 зависят от φ и вычислять их значительно труднее.*) Заметим прежде всего, что

$$\varphi = \nu - \Delta(G, I, f) \quad (3.7)$$

и запишем матрицу S_2 в виде

*) Аналогичные вычисления проведены Якоби при нахождении явной зависимости направляющих косинусов от времени [10].

$$S_2 = \begin{pmatrix} \cos \nu & -\sin \nu & 0 \\ \sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot S_3 \quad (3.8)$$

где

$$S_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \Delta + \sin \varphi \sin \Delta \cos \vartheta & -\sin \varphi \cos \Delta + \cos \varphi \sin \Delta \cos \vartheta & -\sin \Delta \sin \vartheta \\ -\cos \varphi \sin \Delta + \sin \varphi \cos \Delta \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \Delta + \cos \varphi \cos \Delta \cos \vartheta & -\cos \Delta \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы S_3 зависят лишь от одной из угловых переменных f и разлагаются в однократные ряды Фурье. Для того, чтобы получить такие разложения элементов первых двух строк матрицы S_3 , воспользуемся представлением эллиптических интегралов III-го рода, входящих в формулы (2.19), (2.28) через ϑ -функции

$$\Pi(am u, n, \kappa) = Mu + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha} \varrho_n \frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi}{2\kappa}(u-\alpha)\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2\kappa}(u+\alpha)\right)}. \quad (3.9)$$

Через M для краткости обозначен коэффициент при линейном члене. Величина α в формуле (3.9) определяется через n и κ , согласно уравнению

$$\operatorname{sn}^2 \alpha = -\frac{n}{\kappa^2}. \quad (3.10)$$

Из (3.9) следует

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, \kappa\right) = MK \quad (3.11)$$

и

$$\Pi(am u, n, \kappa) - \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, \kappa\right) \frac{u}{K} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha} \varrho_n \frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi}{2\kappa}(u-\alpha)\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2\kappa}(u+\alpha)\right)}.$$

Дальнейший ход вычислений покажем для областей I и II.

В областях III и IV выкладки проводятся аналогично и окончательные результаты будут приведены без вывода.

В областях I и II $\lambda < 1$, $\kappa = \lambda$, $n = x^2$ и согласно формулам (3.7), (2.19), (3.11) имеем

$$\Delta(G, I, f) = \frac{\sqrt{(1+x^2)(\lambda^2+x^2)}}{2x} \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha} \varrho_n \frac{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K}(u-\alpha)\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K}(u+\alpha)\right)} \quad (3.12)$$

где α - корень уравнения

$$\operatorname{sn}^2 \alpha = -\frac{x^2}{\lambda} \quad (3.13)$$

Положим

$$\alpha = \frac{2K}{\pi} \zeta i \quad (3.14)$$

где ζ - новый (вещественный) параметр. Тогда из (3.13) находим

$$\zeta = \frac{\pi}{2K} F(\alpha \operatorname{ctg} \frac{x}{\lambda}, \lambda') \quad (3.15)$$

Здесь $F(\varphi, \kappa)$ - эллиптический интеграл I-го рода, λ' - дополнительный модуль

$$\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2} \quad (3.16)$$

Из (3.15) следует

$$0 \leq \zeta \leq \frac{\pi}{2} \frac{K'}{K}$$

и

$$\operatorname{sn} \alpha = i \frac{x}{\lambda}, \quad \operatorname{cn} \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + \lambda^2}}{\lambda}, \quad \operatorname{dn} \alpha = \sqrt{1+x^2} \quad (3.17)$$

Поэтому согласно (3.12) имеем

$$\Delta = \frac{i}{2} \ln \frac{\vartheta_4(f - i\sigma)}{\vartheta_4(f + i\sigma)} \quad (3.18)$$

и

$$\sin \Delta = \frac{e^{i\Delta} - e^{-i\Delta}}{2i} = \frac{\vartheta_4(f + i\sigma) - \vartheta_4(f - i\sigma)}{2i \sqrt{\vartheta_4(f + i\sigma) \vartheta_4(f - i\sigma)}} \quad (3.19)$$

$$\cos \Delta = \frac{e^{i\Delta} + e^{-i\Delta}}{2} = \frac{\vartheta_4(f + i\sigma) + \vartheta_4(f - i\sigma)}{2 \sqrt{\vartheta_4(f + i\sigma) \vartheta_4(f - i\sigma)}}.$$

Используя формулу (см. [9], § 2I, 2I)

$$\begin{aligned} \vartheta_4(y+z) \vartheta_4(y-z) \vartheta_4^2(0) &= \vartheta_4^2(y) \vartheta_4^2(z) - \vartheta_4^2(y) \vartheta_4^2(z) = \\ &= \vartheta_4^2(y) \vartheta_4^2(z) \left(1 - \kappa^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{\pi} y \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{\pi} z \right) \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \vartheta_4(f+i\sigma) \vartheta_4(f-i\sigma) &= \frac{\vartheta_4^2(f) \vartheta_4^2(i\sigma)}{\vartheta_4^2(0)} (1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 u) = \\ &= \frac{\vartheta_4^2(f) \vartheta_4^2(i\sigma)}{\vartheta_4^2(0)} (1 + \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Пользуясь соотношениями (3.19), (3.20), после некоторых преобразований приходим к следующим выражениям для элементов матрицы

$$S_3 = \|s_{ij}\|:$$

$$s_{11} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_4(0)}{2i \vartheta_4(i\sigma)} \left(\frac{\vartheta_4(f+i\sigma)}{\vartheta_4(f)} + \frac{\vartheta_4(f-i\sigma)}{\vartheta_4(f)} \right)$$

$$s_{21} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_4(0)}{2\vartheta_4(i\sigma)} \left(\frac{\vartheta_4(f+i\sigma)}{\vartheta_4(f)} - \frac{\vartheta_4(f-i\sigma)}{\vartheta_4(f)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 S_{12} &= \mp \frac{\vartheta_4(0)}{2\vartheta_2(i\sigma)} \left(\frac{\vartheta_2(f+i\sigma)}{\vartheta_4(f)} + \frac{\vartheta_2(f-i\sigma)}{\vartheta_4(f)} \right) \\
 S_{22} &= \pm \frac{\vartheta_4(0)}{2i\vartheta_2(i\sigma)} \left(\frac{\vartheta_2(f+i\sigma)}{\vartheta_4(f)} - \frac{\vartheta_2(f-i\sigma)}{\vartheta_4(f)} \right) \\
 S_{13} &= -\frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_4(0)}{2i\vartheta_4(i\sigma)} \left(\frac{\vartheta_4(f+i\sigma)}{\vartheta_4(f)} - \frac{\vartheta_4(f-i\sigma)}{\vartheta_4(f)} \right) \\
 S_{23} &= -\frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_4(0)}{2\vartheta_4(i\sigma)} \left(\frac{\vartheta_4(f+i\sigma)}{\vartheta_4(f)} + \frac{\vartheta_4(f-i\sigma)}{\vartheta_4(f)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Таким образом, разложение направляющих косинусов в ряды Фурье сводится к разложению функций

$$\frac{\vartheta_\kappa(f \pm i\sigma)}{\vartheta_\kappa(f)} \quad (\kappa = 1, 2, 4)$$

Для примера найдем ряд Фурье функции

$$R(f) = \frac{\vartheta_4(f+i\sigma)}{\vartheta_4(f)} \tag{3.22}$$

Так как период этой функции равен π , то искомое разложение имеет вид

$$R(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2in\pi f}, \tag{3.23}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi R(z) e^{-2in\pi z} dz. \tag{3.24}$$

Из свойств ϑ -функций вытекает, что $R(f)$ — мероморфная, квазидвоякопериодическая функция с квазипериодами π и $\pi\tau$, где $\tau = iK'/K$. Точнее

$$R(f+\pi) = R(f), \quad R(f+\pi\tau) = e^{2\sigma} R(f). \tag{3.25}$$

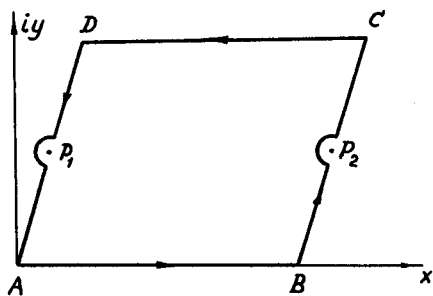


Рис. 3. Контур интегрирования.

Вычислим интеграл от функции $R(z)e^{-2inz}$ по замкнутому контуру ABCDA, изображенному на рис. 3. В точках A, B, C, D, z равно, соответственно, 0, π , $\pi + \pi\tau$, $\pi\tau$.

P_1 и P_2 - нули $\vartheta_4(z)$, расположенные при $z = \frac{1}{2}\pi\tau$ и $z = \frac{1}{2}\pi\tau + \pi$.

Внутри указанного контура подынтегральная функция $R(z)e^{-2inz}$ имеет единственный простой полюс в точке P_1 с вычетом

$$\operatorname{res}\left[R(z)e^{-2inz}\right]_{z=\frac{1}{2}\pi\tau} = q^{-n} e^{\sigma} \frac{\vartheta_4(i\sigma)}{\vartheta_4'(0)}. \quad (3.26)$$

Поэтому

$$\oint_{\text{ABCDA}} R(z)e^{-2inz} dz = 2\pi i q^{-n} e^{\sigma} \frac{\vartheta_4(i\sigma)}{\vartheta_4'(0)}. \quad (3.27)$$

ABCDA

С другой стороны, используя квазипериодические свойства подынтегральной функции, которые следуют из (3.25), находим

$$\begin{aligned} \oint_{\text{ABCDA}} R(z)e^{-2inz} dz &= \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A = \int_A^B - \int_D^C = \\ &= \int_0^{\pi} R(z)e^{-2inz} dz - \int_0^{\pi} R(z+\pi\tau)e^{-2i\pi(z+\pi\tau)} dz = (1-q^{-2n}e^{2\sigma}) \int_0^{\pi} R(z)e^{-2inz} dz. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Сопоставляя (3.27) и (3.28), приходим к формуле

$$\int_0^{\pi} \frac{\vartheta_4(z+i\sigma)}{\vartheta_4(z)} e^{-2inz} dz = -\frac{2\pi i q^n e^{-\sigma}}{1-q^{2n} e^{-2\sigma}} \frac{\vartheta_4(i\sigma)}{\vartheta_4'(0)}. \quad (3.29)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_4(f+i\sigma)}{\vartheta_4(f)} &= -2i \frac{\vartheta_4(i\sigma)}{\vartheta_4'(0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{q^n e^{-\sigma}}{1-q^{2n} e^{-2\sigma}} e^{2inf} = \\ &= \frac{\vartheta_4(i\sigma)}{\vartheta_4'(0)} \left\{ -\frac{i}{\operatorname{sh} \sigma} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{q^n (1-q^{2n}) \operatorname{ch} \sigma}{1-2q^{2n} \operatorname{ch} 2\sigma + q^{4n}} \sin 2nf + \right. \right. \\ &\left. \left. + i \frac{q^n (1+q^{2n}) \operatorname{sh} \sigma}{1-2q^{2n} \operatorname{ch} 2\sigma + q^{4n}} \cos 2nf \right] \right\} \quad (|\operatorname{Im} f| < \operatorname{Im}(\frac{1}{2} \pi \tau)). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Точно так же получаются разложения и всех остальных отношений ϑ -функций, входящих в (3.21). Результатом таких вычислений являются формулы

$$\begin{aligned} S_{11} &= -\frac{2\pi}{K} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} (1-q^{2n+1}) \operatorname{ch} \sigma}{1-2q^{2n+1} \operatorname{ch} 2\sigma + q^{4n+2}} \sin(2n+1)f \\ S_{21} &= \frac{2\pi}{K} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} (1+q^{2n+1}) \operatorname{sh} \sigma}{1-2q^{2n+1} \operatorname{ch} 2\sigma + q^{4n+2}} \cos(2n+1)f \\ S_{12} &= \frac{2\pi}{K} \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\lambda^2 + \alpha^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} (1+q^{2n+1}) \operatorname{ch} \sigma}{1+2q^{2n+1} \operatorname{ch} 2\sigma + q^{4n+2}} \cos(2n+1)f \\ S_{22} &= \frac{2\pi}{K} \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\lambda^2 + \alpha^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} (1-q^{2n+1}) \operatorname{sh} \sigma}{1+2q^{2n+1} \operatorname{ch} 2\sigma + q^{4n+2}} \sin(2n+1)f \\ S_{13} &= -\frac{2\pi}{K} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n (1-q^{2n}) \operatorname{ch} \sigma}{1-2q^{2n} \operatorname{ch} 2\sigma + q^{4n}} \sin 2nf \\ S_{23} &= \frac{2\pi}{K} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \left\{ -\frac{1}{4 \operatorname{sh} \sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n (1+q^{2n}) \operatorname{sh} \sigma}{1-2q^{2n} \operatorname{ch} 2\sigma + q^{4n}} \cos 2nf \right\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Аналогичные расчеты для областей III, IV дают

$$\begin{aligned}
 S_{13} &= -\frac{2\pi}{K} \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n(1-q^{2n})\text{ch}\beta}{1-2q^{2n}\text{ch}2\beta+q^{4n}} \sin 2nf \\
 S_{23} &= \frac{2\pi}{K} \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \left\{ -\frac{1}{4\text{sh}\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n(1+q^{2n})\text{sh}\beta}{1-2q^{2n}\text{ch}2\beta+q^{4n}} \cos 2nf \right\} \\
 S_{1\pi} &= -\frac{2\pi}{K} \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}(1-q^{2n+1})\text{ch}\beta}{1-2q^{2n+1}\text{ch}2\beta+q^{4n+2}} \sin(2n+1)f \\
 S_{21} &= \frac{2\pi}{K} \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}(1+q^{2n+1})\text{sh}\beta}{1-2q^{2n+1}\text{ch}2\beta+q^{4n+2}} \cos(2n+1)f \\
 S_{12} &= \frac{2\pi\lambda}{K} \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\lambda^2+\alpha^2}} \left\{ \frac{1}{4\text{ch}\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n(1+q^{2n})\text{ch}\beta}{1+2q^{2n}\text{ch}2\beta+q^{4n}} \cos 2nf \right\} \\
 S_{22} &= \frac{2\pi\lambda}{K} \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\lambda^2+\alpha^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n(1-q^{2n})\text{sh}\beta}{1+2q^{2n}\text{ch}2\beta+q^{4n}} \sin 2nf.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Напомним, что модуль эллиптических функций в этих формулах равен $1/\lambda$. Верхний знак берется в области III, нижний — в области IV. В формулах (3.32) β представляет собой следующую величину

$$\beta = \frac{\pi}{2K(1/\lambda)} F(\text{arctg } \alpha, \lambda'') \quad (\lambda'' = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - 1}) \tag{3.33}$$

Формулы (3.5), (3.6), (3.31), (3.32) определяют искомые разложения элементов матрицы S_3 . Отсюда с помощью (3.1), (3.8) легко получить и выражения направляющих косинусов.

Литература

- 1 Голдстейн Г. Классическая механика. Гостехиздат, М.1957.
- 2 Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. УМН, т.ХУШ, вып.6, (1963), 91 - 192.
- 3 Арнольд В.И. Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики. Сиб.матем.журнал, т.IV, № 2 (1963), 471 - 474.
- 4 Зейферт Г., Трельфаль В., Топология, М., Гостехиздат, 1938.
- 5 Арнольд В.И. Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. УМН, т.ХУШ, вып.5 (1963), 13 - 39 .
- 6 Дебри А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. Механика, сб. переводов, № 2 (1968), 3 - 9.
- 7 Торжевский А.П. Быстрое вращение искусственного спутника вокруг центра масс в резонансном режиме. Космич.исслед., т.УІ, вып.І (1968), 58 - 70.
- 8 Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. т.ІІ, Физматгиз, М. 1963 г.
- 9 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962 г.
- 10 C.G.J.Jacobi's *Gesammelte Werke*. В.2. S.289-352. Berlin, 1882.

Подписано к печати ' 5 ' \bar{V} 1970 г.
№ 7-08545 от ' 22 ' \bar{V} 1970 г. Заказ № 231 Тираж 100 экз.

Орденa Ленина институт прикладной математики
Москва, Миусская пл., 4