



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 16 за 1971 г.



Давыдов В.Л., Молчанов А.М.

Численные эксперименты в
задаче об эволюции
двухпланетной системы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Давыдов В.Л., Молчанов А.М. Численные эксперименты в задаче об эволюции двухпланетной системы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1971. № 16. 29 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1971-16>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

В. Л. Давыдов, А. М. Молчанов

**ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ЗАДАЧЕ
ОБ ЭВОЛЮЦИИ ДВУХПЛАНЕТНОЙ СИСТЕМЫ**

Препринт № 16

Москва
1971 г.

Давыдов, В. Л. Численные эксперименты в задаче об эволюции двухпланетной системы : препр. № 16 / В. Л. Давыдов, А. М. Молчанов ; ИПМ АН СССР. – М. : [б. и.], 1971. – 29 с. : 15 рис. – Библиогр.: с. 16 (4 назв.).

§ 1. Введение

Настоящая статья посвящена изучению эволюции планетных орбит, т.е. изучению изменения параметров орбит планет на временах, больших по сравнению с периодами обращения планет вокруг центрального тела. Мы будем рассматривать планеты и центральное тело как материальные точки, притягивающиеся по закону всемирного тяготения. В рамках принятого приближения, задача об эволюции планетной системы есть задача об изучении системы дифференциальных уравнений движения n гравитирующих материальных точек на эволюционных временах (т.е. на временах, больших по сравнению с периодами обращения планет вокруг центрального тела).

В реальной Солнечной системе эксцентриситеты и наклоны орбит больших планет малы. Со времен Ньютона астрономов интересует вопрос: «Солнечная система близка к плоской круговой потому что она получилась такой в процессе образования (начальные данные), или Солнечная система стала близка к плоской круговой в результате эволюции?»

В первом случае надо показать, что плоская круговая планетная система устойчива на эволюционных временах. Этот вопрос рассматривался в работе [2], в которой показано, что для большинства начальных данных решения системы дифференциальных уравнений, описывающей планетную систему, достаточно близкую к плоской круговой (т.е. эксцентриситеты и наклоны планетных орбит малы), все планеты которой вращаются в одну сторону и отношение (ϵ) общей массы планет к массе центрального тела достаточно мало, устойчивы на бесконечном интервале времени.

Однако, на основании этой теоремы нельзя сделать окончательных выводов о поведении реальной, близкой к плоской круговой, планетной системы ибо неизвестно, насколько малы должны быть эксцентриситеты и наклоны планетных орбит и ϵ для того, чтобы была применима теорема Арнольда. Кроме того, во всякой реальной планетной системе существуют диссипативные факторы, действие которых на эволюционных временах может заставить планетную систему общего положения, подчиняющуюся условиям теоремы Арнольда (ϵ , эксцентриситеты и наклоны орбит

достаточно малы) сместиться на множество исключительных начальных данных¹.

Из сказанного следует, что, основываясь на теореме Арнольда, нельзя сделать вывод о том, что реальная Солнечная система близка к плоской круговой, потому что она получилась такой в момент образования.

Во втором случае (Солнечная система стала близка к плоской круговой в результате эволюции), исследованию которого и посвящена эта статья, необходимо показать, что планетная система общего положения может проэволюционировать в плоскую круговую.

В результате изучения планетных систем, близких к плоским круговым, возникло убеждение, (по-видимому, ложное), что в рамках небесной механики (т.е. без учёта диссипативных факторов) невозможна необратимая эволюция планетных систем. Однако, следующая картина необратимой эволюции планетной системы возможна и в рамках небесной механики: часть тел переходит на гиперболические орбиты и покидает систему, а оставшиеся в системе планеты переходят на орбиты, близкие плоским круговым. Таким образом, планетная система могла бы оказаться близкой к плоской круговой в результате распада более обширной планетной системы общего положения.

Для подтверждения описанной гипотезы лучше всего было бы исследовать конкретную планетную систему, эволюционирующую описанным образом.

Однако исследование планетных систем общего положения наталкивается на значительные трудности. Аналитические методы исследования, в настоящее время, развиты только для планетных систем с малыми эксцентриситетами и наклонами орбит, т.е. для систем, близких к плоским круговым. Качественные методы, развитые в задаче трех тел, позволяют исследовать лишь финальные движения планет, т.е. поведение решений соответствующей системы дифференциальных уравнений при $t \rightarrow \pm \infty$. Эти методы неприменимы к исследованию эволюции реальных планетных систем, ибо реальная планетная система имеет конечное время жизни, а о том, как планетная система приближается к финальным движениям, качественные методы ничего не говорят. Поэтому при изучении планетных систем общего положения приходится прибегать к численным методам.

Основная трудность прямого численного интегрирования уравнений движения планетной системы связана с самим существом задачи – малостью отношения общей массы планет к массе центрального тела. В уравнениях движения, вследствие этого,

¹ В работах [3] и [4] одного из авторов приведены соображения в пользу гипотезы об эволюционном возникновении резонансных соотношений в Солнечной системе.

появляются малые члены $\sim \varepsilon$, которые и вызывают эволюционное изменение параметров планетных орбит. Такое сосуществование быстрых (фазы обращения планет по орбитам) и медленных (элементы орбит) переменных приводит к тому, что прямое численное интегрирование уравнений движения планет невозможно (из-за ошибок округления) уже на временах $\sim \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. как раз на эволюционных временах.

В настоящей статье двухпланетные системы общего положения (т.е. планетные системы, в которых эксцентриситеты и наклоны планетных орбит не малы) исследуются с помощью полуаналитического подхода, предложенного ранее в работе [1] одним из авторов. Подход состоит в аналитическом исключении быстрых переменных и численном интегрировании возникающей эволюционной системы. Можно надеяться, что численные эксперименты помогут найти быстрые переменные в эволюционной системе. Эти вновь найденные быстрые переменные в свою очередь могут быть исключены методом, развитым в [1]. В результате получится система дифференциальных уравнений меньшего порядка и т.д.

§ 2. Вывод эволюционных уравнений планетной системы

Рассмотрим n -планетную систему в инерциальной системе координат. Пусть m_0 – масса центрального тела, m_i – масса i -той планеты, \bar{r}_0' – радиус-вектор центрального тела, а \bar{r}_i' – радиус-вектор i -й планеты. В выбранной системе координат уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{\bar{r}}_i' = \gamma \sum_{k=0}^n m_k \frac{\bar{r}_k' - \bar{r}_i'}{|\bar{r}_k' - \bar{r}_i'|^3} \quad (1)$$

$$\ddot{\bar{r}}_0' = \gamma \sum_{k=1}^n m_k \frac{\bar{r}_k' - \bar{r}_0'}{|\bar{r}_k' - \bar{r}_0'|^3} \quad (2)$$

Здесь γ – постоянная закона всемирного тяготения, а штрих у знака суммы означает, что в сумме пропущен член, получающийся при $k = i$.

Перейдем теперь к астроцентрической системе координат и пусть \bar{r}_i радиус-вектор i -й планеты относительно центрального тела. Тогда

$$\bar{r}_i' = \bar{r}_i + \bar{r}_0' \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и используя (2), после простых преобразований получим:

$$\ddot{r}_i = -\gamma M \frac{\bar{r}_i}{r_i^3} + \varepsilon \gamma M \sum_{k=1}^n \mathfrak{G}_k \left(\frac{\bar{r}_k - \bar{r}_i}{|\bar{r}_k - \bar{r}_i|^3} - \frac{\bar{r}_k}{r_k^3} + \frac{\bar{r}_i}{r_i^3} \right) \quad (4)$$

Здесь введены обозначения: $M = m_0 + m_1 + \dots + m_n$ – полная масса системы, $\varepsilon = \frac{m_1 + \dots + m_n}{M}$ – отношение массы планет к массе всей системы, $\mathfrak{G}_i = \frac{m_i}{m_1 + \dots + m_n}$.

Для Солнечной системы $\varepsilon = 1,34 \cdot 10^{-3}$, а для системы спутников Юпитера $\varepsilon = 4,6 \cdot 10^{-5}$.

Выбирая систему единиц так, чтобы $\gamma M = 1$, напомним уравнение движения планетной системы в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_i &= \bar{u}_i \\ \ddot{u}_i &= -\frac{\bar{r}_i}{r_i^3} + \varepsilon \sum_{k=1}^n \mathfrak{G}_k \left(\frac{\bar{r}_k - \bar{r}_i}{|\bar{r}_k - \bar{r}_i|^3} - \frac{\bar{r}_k}{r_k^3} + \frac{\bar{r}_i}{r_i^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В системе (5) не зависящие от ε члены определяют быстрые движения (движение планет по орбитам), а члены порядка ε определяют медленные движения (вековые изменения элементов орбит).

Для того чтобы систему (5) можно было заменить осредненной системой (см. [1]), нужно в уравнениях (5) перейти к новым переменным. Эти новые переменные должны быть интегралами и фазами невозмущенной системы, т.е. системы, получающейся из системы (5) при $\varepsilon = 0$. В качестве таких новых переменных возьмем вектор удельного момента импульса

$$\bar{L}_i = \bar{r}_i \times \bar{u}_i \quad (6)$$

и удельный вектор Лапласа

$$\bar{a}_i = \left(u_i^2 - \frac{1}{r_i} \right) \bar{r}_i = (\bar{r}_i \bar{u}_i) \bar{u}_i \quad (7)$$

(вектор Лапласа направлен из фокуса в перицентр орбиты).

Векторы \bar{L}_i и \bar{a}_i связаны соотношением $\bar{L}_i \bar{a}_i = 0$, т.е. из шести компонент \bar{L}_i и \bar{a}_i можно выбрать только пять независимых. Дополним эти пять произвольно выбранных независимых величин еще одной независимой переменной – φ_i , фазой обращения i -й планеты по невозмущенной орбите. Фазу введем с помощью соотношения

$$\cos \varphi_i = \frac{\bar{r}_i \bar{a}_i}{r_i a_i}, \quad (8)$$

она отсчитывается от вектора $\overline{a_i}$ против часовой стрелки. Старые переменные связаны с новыми формулами (9–12):

$$r_i = \frac{L_i^2}{1 + a_i \cos \varphi_i} \quad (9)$$

$$\overline{\alpha}_i = \frac{\overline{a}_i}{a_i}; \overline{\beta}_i = \frac{\overline{L}_i \times \overline{a}_i}{L_i a_i} \quad (10)$$

$$\overline{r}_i = r_i (\overline{\alpha}_i \cos \varphi_i + \overline{\beta}_i \sin \varphi_i) \quad (11)$$

$$\overline{u}_i = \frac{1}{L_i} (-\overline{\alpha}_i \sin \varphi_i + (a_i + \cos \varphi_i) \beta_i) \quad (12)$$

Теперь мы можем написать дифференциальные уравнения движения планетной системы в новых переменных. Т.к. нас интересуют только эволюционные уравнения планетной системы, то уравнение для φ_i мы выписывать не будем. Дифференцируя (6) и (7) по t и учитывая (11) и (12) получим, после несложных вычислений

$$\dot{\overline{L}}_i = \varepsilon \overline{r}_i \times \overline{F}_i \quad (13)$$

$$\dot{\overline{a}}_i = \varepsilon (\overline{u}_i \times (\overline{r}_i \times \overline{F}_i) + \overline{F}_i \times \overline{L}_i) \quad (14)$$

Здесь введены обозначения:

$$\frac{\overline{r}_k - \overline{r}_i}{|\overline{r}_k - \overline{r}_i|^3} - \frac{\overline{r}_k}{r_k^3} + \frac{\overline{r}_i}{r_i^3} = \overline{F}_{ki} \quad (15)$$

$$\overline{F}_i = \sum_{k=1}^n \mathfrak{g}_k \overline{F}_{ki}$$

Для получения эволюционных уравнений нужно правые части уравнений (13) и (14) усреднить по инвариантной мере невозмущенной системы. Легко проверить, что в нашем случае инвариантная мера $d\mu$ имеет вид:

$$d\mu = r_1^2(\varphi_1) r_2^2(\varphi_2) \dots r_n^2(\varphi_n) d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n, \quad (16)$$

здесь все r_i должны быть выражены через $\overline{L}_i, \overline{a}_i, \varphi_i$ с помощью (9).

Выпишем теперь эволюционные уравнения планетной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\overline{L}_i}{dt} &= \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\mathfrak{g}_k}{\Omega_i \Omega_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{r}_i \times \overline{F}_{ki} r_i^2 r_k^2 d\varphi_i d\varphi_k \\ \frac{d\overline{a}_i}{dt} &= \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\mathfrak{g}_k}{\Omega_i \Omega_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\overline{u}_i \times (\overline{r}_i \times \overline{F}_{ki}) + \overline{F}_{ki} \times \overline{L}_i) r_i^2 r_k^2 d\varphi_i d\varphi_k \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

здесь $\Omega_i = \int_0^{2\pi} r_i^2 d\varphi_i = \frac{2\pi L_i^4}{(1-a_i^2)^{3/2}}$.

Подразумевается, что правые части уравнений системы (17) должны быть выражены через $\bar{L}_i, \bar{a}_i, \varphi_i$ с помощью (9) – (12).

Систему (17) можно упростить, заменив в правой части \bar{F}_{ki} на

$$\bar{F}_{ki}^* = \frac{\bar{r}_k - \bar{r}_i}{|\bar{r}_k - \bar{r}_i|^3}$$

В самом деле, будем интегрировать правые части системы (17) сначала по φ_i , а затем по φ_k . Тогда член \bar{r}_i/r_i^3 можно отбросить, т.к. учитывая (9), $\int_0^{2\pi} \frac{\bar{r}_i}{r_i} d\varphi_i = 0$. Изменяя

порядок интегрирования, получим, что член $\frac{\bar{r}_k}{r_k^3}$ также можно отбросить.

§ 3. Результаты численного интегрирования эволюционных систем уравнений некоторых двухпланетных систем общего положения

Ниже описываются результаты численного интегрирования эволюционных систем уравнений четырех двухпланетных систем общего положения. Массы планет, размеры и взаимное расположение орбит во всех четырех случаях совпадают. Эксцентриситеты орбит обеих планет в начальный момент ≈ 0.3 , а угол между плоскостями орбит в начальный момент $\approx 30^\circ$. Это во много раз больше соответствующих величин в реальной Солнечной системе. Исследуемые планетные системы различаются направлением вращения планет по орбитам и взаимным расположением тяжелой и легкой планет. В двух случаях (случаи 1 и 2) планеты вращаются по орбитам в одном направлении (нормальное вращение), причем в случае 1 тяжелая планета находится на внутренней орбите, а в случае 2 тяжелая планета находится на внешней орбите. В двух случаях (случаи 3 и 4) планеты вращаются по орбитам навстречу друг другу (противовращение), причем в случае 3 тяжелая планета находится на внутренней орбите, а в случае 4 тяжёлая планета находится на внешней орбите.

Массы планет и размеры орбит (но не форма!) выбраны так, чтобы в первом случае (ниже расположение планет в случаях 1 и 3 мы будем называть нормальным) наша планетная система общего положения максимально походила на Солнечную систему.

Реальная Солнечная система состоит из огромного числа тел. Однако, почти вся масса Солнечной системы сосредоточена в девяти больших планетах. На долю Юпитера и Сатурна приходится более 90% массы больших планет. Очевидно, что возмущения движений Юпитера и Сатурна из-за притяжений малых планет значительно меньше, чем возмущения движений Юпитера и Сатурна под действием их взаимного притяжения, т.е. вообще говоря, эволюцию орбит Юпитера и Сатурна можно с большой степенью точности рассматривать независимо от эволюции остальных планет Солнечной системы. В связи с изложенным, отношение масс легкой и тяжелой планет взято 1:3.

На рис. 1–7 приведены графики изменения со временем параметров орбит в случае 1. Из рис. 1, на котором показано изменение со временем угла между плоскостями орбит φ и эксцентриситета внутренней орбиты a_1 , видно, что эволюционная система уравнений, соответствующая планетной системе с нормальным вращением и нормальным расположением планет, имеет еще, по крайней мере, две фазы.

Из рис. 2–6 видно, что эксцентриситеты обеих орбит совершают колебания одной и той же амплитуды и что сумма эксцентриситетов обеих орбит меняется с амплитудой во много раз меньшей, чем амплитуда изменения самих эксцентриситетов. Отметим ещё, что среднее значение эксцентриситета внешней орбиты превосходит среднее значение эксцентриситета внутренней орбиты, т.е. в данном случае форма орбиты внутренней (тяжелой) планеты оказывается более устойчивой нежели форма орбиты внешней (лёгкой) планеты. Ниже мы еще вернемся к этому вопросу. Из рис. 1 также очевидна связь колебаний эксцентриситета с колебаниями угла между плоскостями орбит (φ). На рис. 7 показано движение проекции момента импульса внутренней планеты на неподвижную плоскость Лапласа в случае 1.

На рис. 8–11 показано изменение со временем параметров двухпланетной системы в случае 2. Из рис. 8–10, на которых приведены графики колебаний эксцентриситетов орбит, видно, что в случае 2, так же как и в случае 1, существуют еще, по меньшей мере, две фазы. Из этих же графиков видно, что в отличие от случая 1, среднее значение эксцентриситета орбиты внутренней планеты (теперь это легкая, а не тяжелая планета, как было в 1-м случае) больше, чем среднее значение эксцентриситета внешней планеты. На рис. 11 показано движение проекции момента импульса внутренней планеты на неподвижную плоскость Лапласа. Сравнение рис. 1–7 с рис. 8–11 показывает существенное отличие случая 1 от случая 2. Именно: амплитуда

колебаний эксцентриситетов внешней и внутренней орбит во втором случае существенно отличаются друг от друга; амплитуда колебаний эксцентриситета внутренней орбиты значительно больше амплитуды колебаний эксцентриситета внешней орбиты и разность средних значений эксцентриситетов внутренней и внешней орбит во 2-м случае значительно больше, чем в 1-м; форма орбиты внешней планеты оказывается устойчивее, чем форма орбиты внутренней планеты. Из сказанного видно, что случаи 1 и 2 существенно отличаются друг от друга. Отметим теперь общий для обоих случаев момент: в обоих случаях с нормальным вращением планет более устойчивой оказывается орбита тяжелой планеты.

Рассмотрим теперь двухпланетные системы с противовращением (случаи 3 и 4). Соответствующие этим случаям графики изменения параметров планетных орбит показаны на рис. 12 и 13 (случай 3) и рис. 14 и 15 (случай 4). Резкое отличие этих графиков от аналогичных графиков, соответствующих случаям 1 и 2, бросается в глаза. Эти графики, прежде всего, резко различаются в количественном отношении – амплитуды колебаний и максимальные значения эксцентриситетов орбит в случаях 3 и 4 много больше, чем в случаях 1 и 2. На рис. 12 показано изменение со временем эксцентриситетов обеих орбит в случае противовращения при нормальном расположении планет. Амплитуда колебаний эксцентриситета орбиты внутренней планеты и его среднее значение значительно превосходят соответствующие величины для внешней планеты. Эксцентриситет орбиты внутренней планеты достигает значений, близких к единице, но большая полуось при этом меняется очень мало, т.е. сильно меняется форма орбиты внутренней планеты.

Случай 4 (тяжелая планета на внешней орбите) отличается от случая 3. Эксцентриситет внутренней орбиты в случае 4 достигает значений лишь на 0.001 отличающихся от единицы, но большая полуось внутренней орбиты и в этом случае меняется мало, так что резкие изменения претерпевает только форма внутренней орбиты. Эксцентриситет внешней орбиты в случае 4 также испытывает значительно большие колебания, чем в случае 3. Большая полуось внешней орбиты при этом меняется мало, так что большие колебания эксцентриситета внешней орбиты сопровождаются только изменением её формы. Из сказанного следует, что и в случае противовращения взаимное расположение легкой и тяжелой планет оказывает заметное влияние на эволюцию планетной системы.

Случаи 1 и 2, с одной стороны, и 3 и 4 имеют ещё одно любопытное отличие. Из рис. 7 и 11 видно, что в случае нормального вращения планет векторы удельного

момента импульса обеих планет прецессируют вокруг некоторого, общего для обеих планет, среднего положения. В случаях же 3 и 4 (рис. 13 и 15) вектора удельного момента импульса прецессируют каждый вокруг собственного среднего положения.

Из всего вышесказанного следует, что в описанной планетной системе направление вращения планет сказывается на эволюции системы сильнее, чем взаимное расположение легкой и тяжелой планет.

Литература

1. А. М. Молчанов, Об эволюции планетных систем. Проблемы движения искусственных небесных тел. М., изд. АН СССР, 1963.
2. В. И. Арнольд, Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, УМН, 18, вып. 6 (1963),91-192.
3. А. М. Молчанов, Резонансы в многочастотных колебаниях, ДАН, 168, 284-287.
4. Molchanov A. M. (1968). The resonant structure of the solar system. The law of planetary distances. Icarus 8, 203-215.

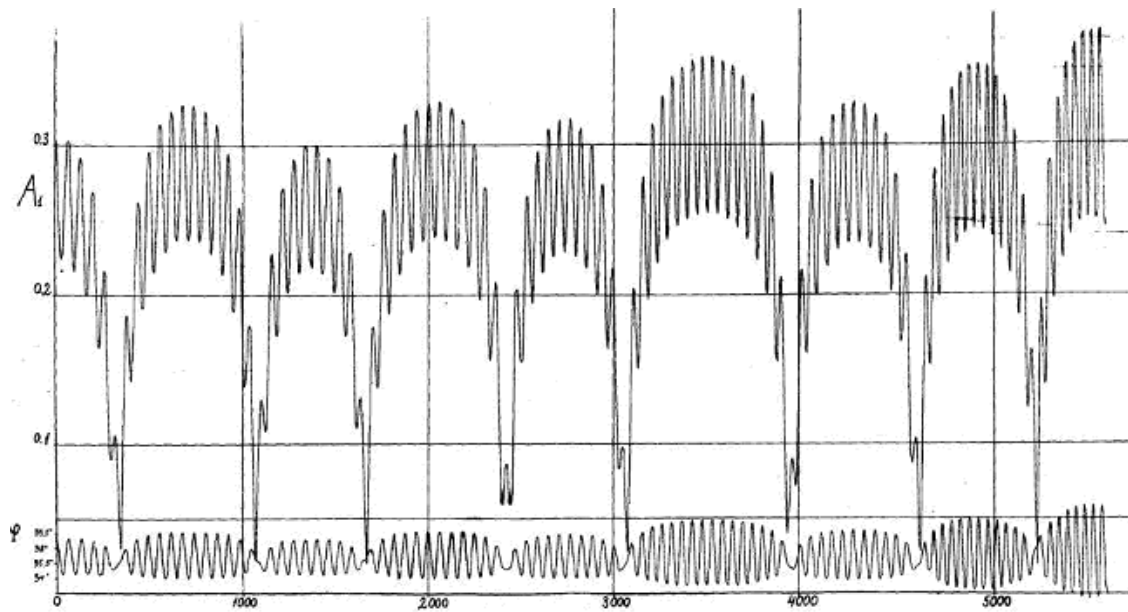


Рис. 1.

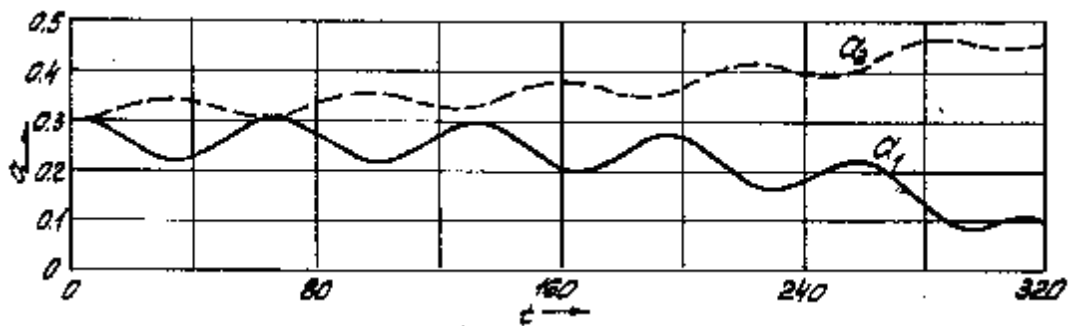


Рис. 2.

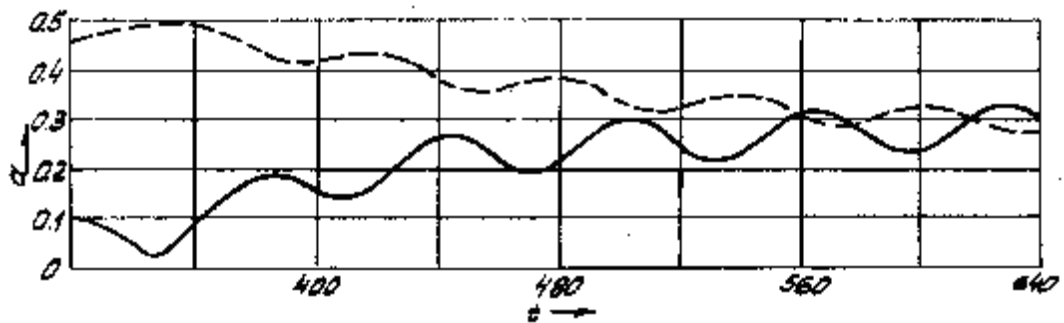


Рис. 3.

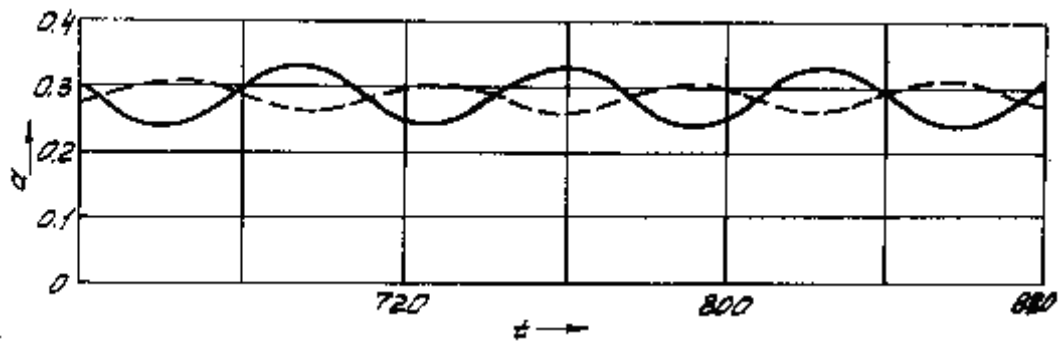


Рис. 4

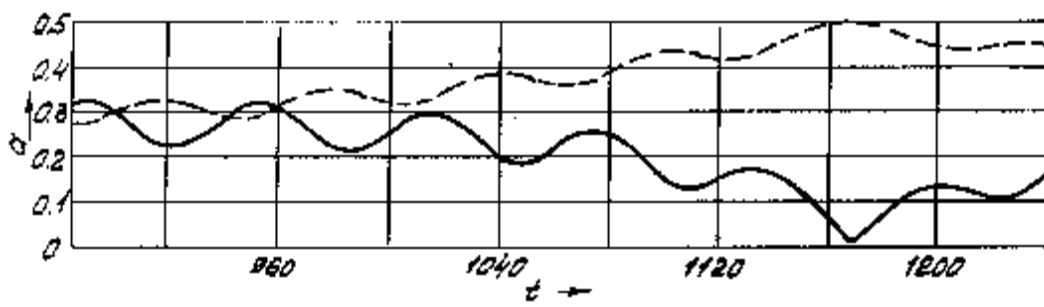


Рис. 5.

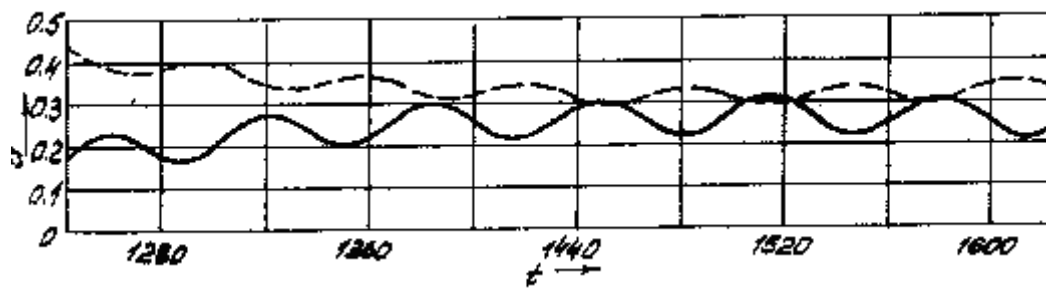


Рис. 6.

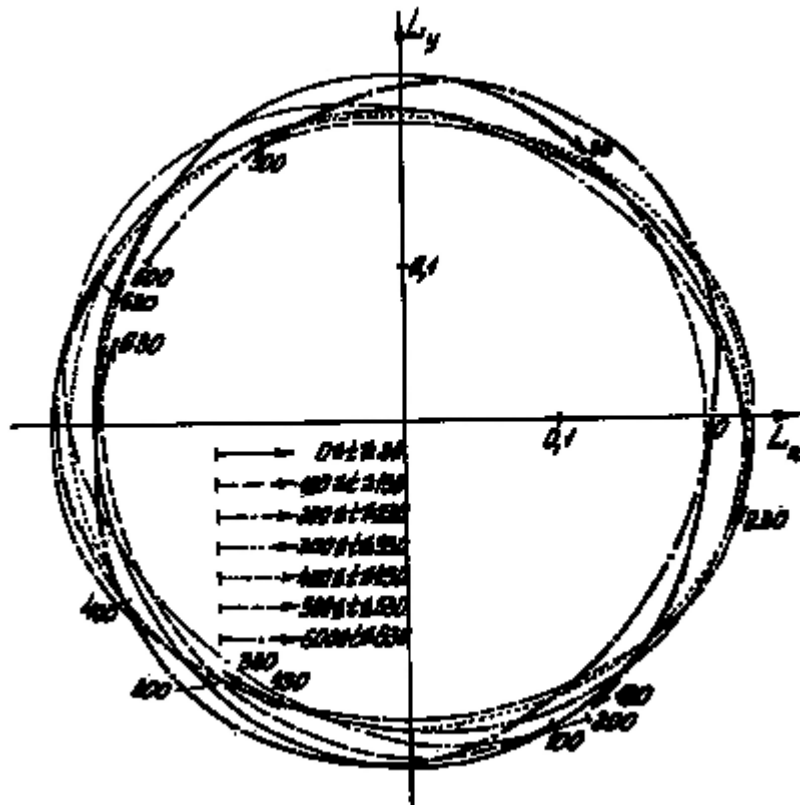


Рис. 7.

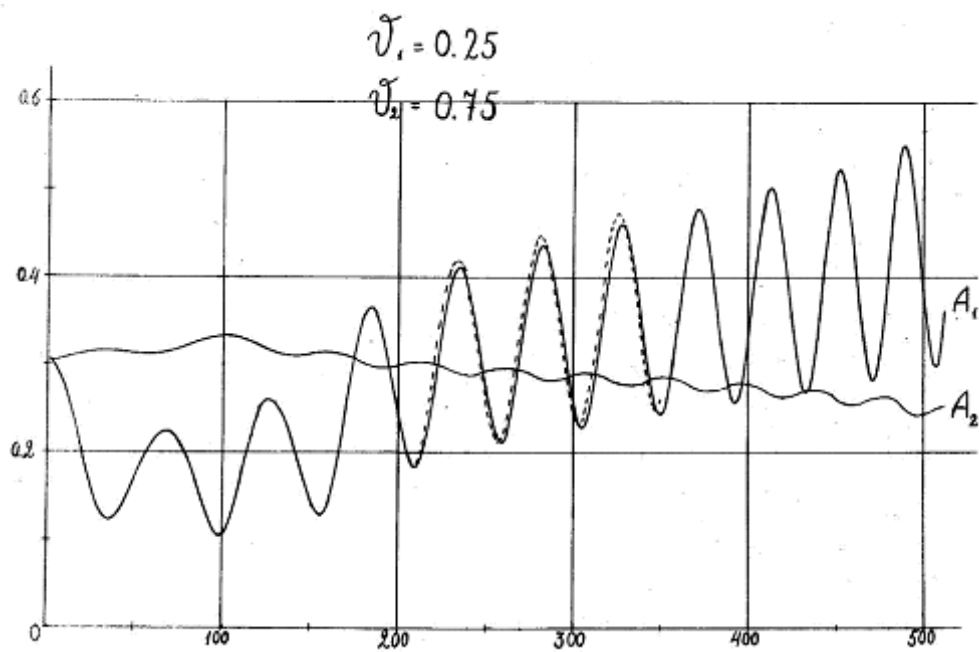


Рис. 8.

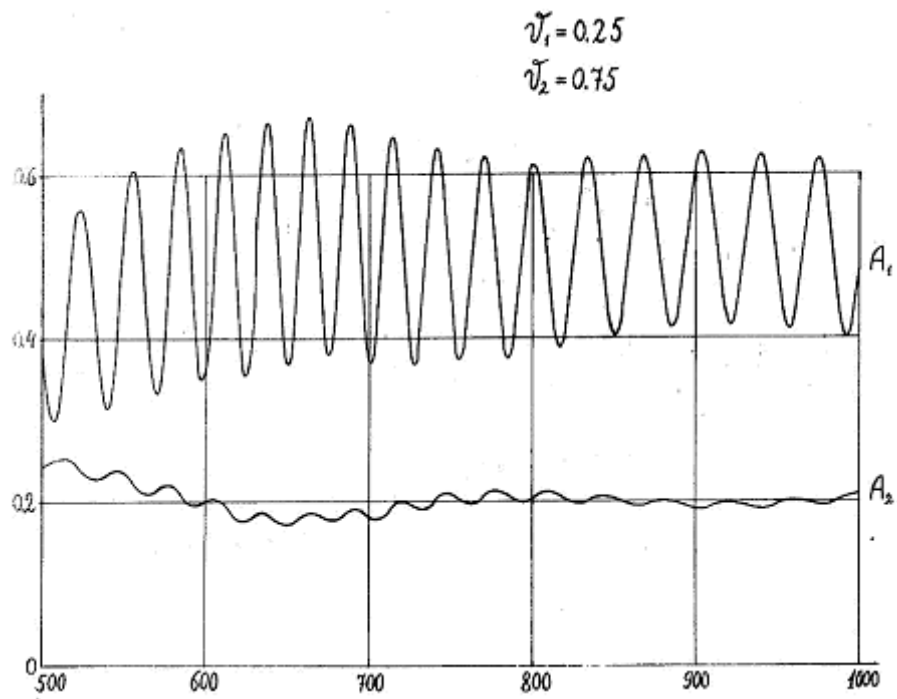


Рис. 9.

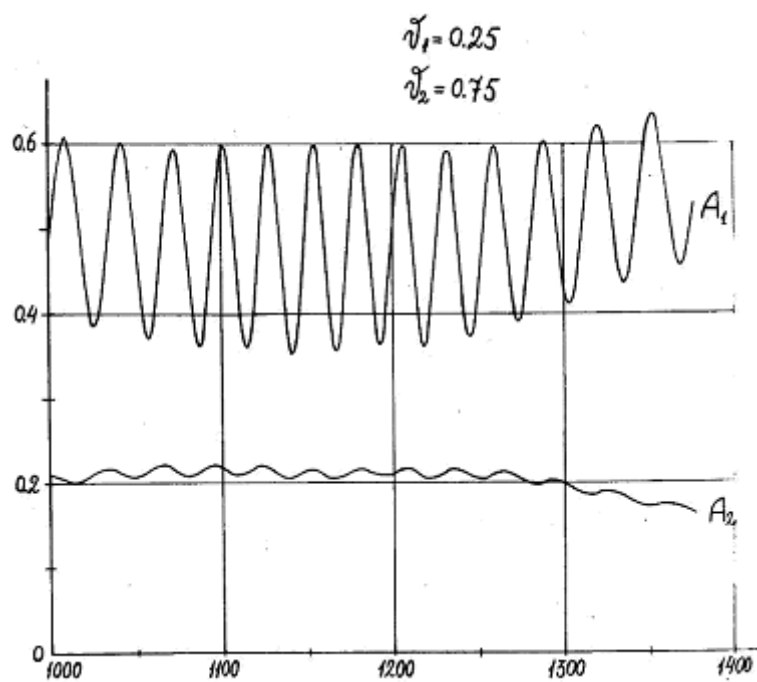


Рис. 10.

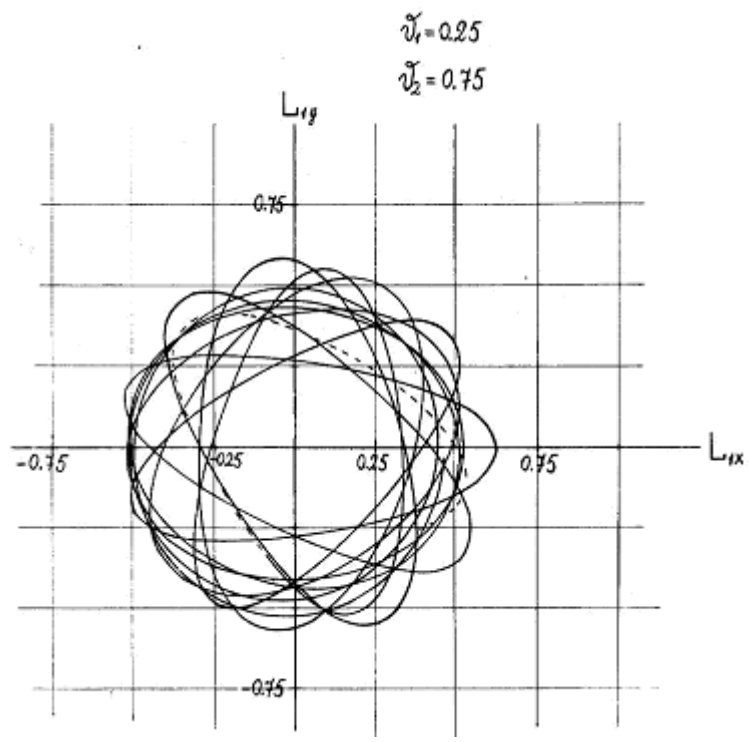


Рис. 11.

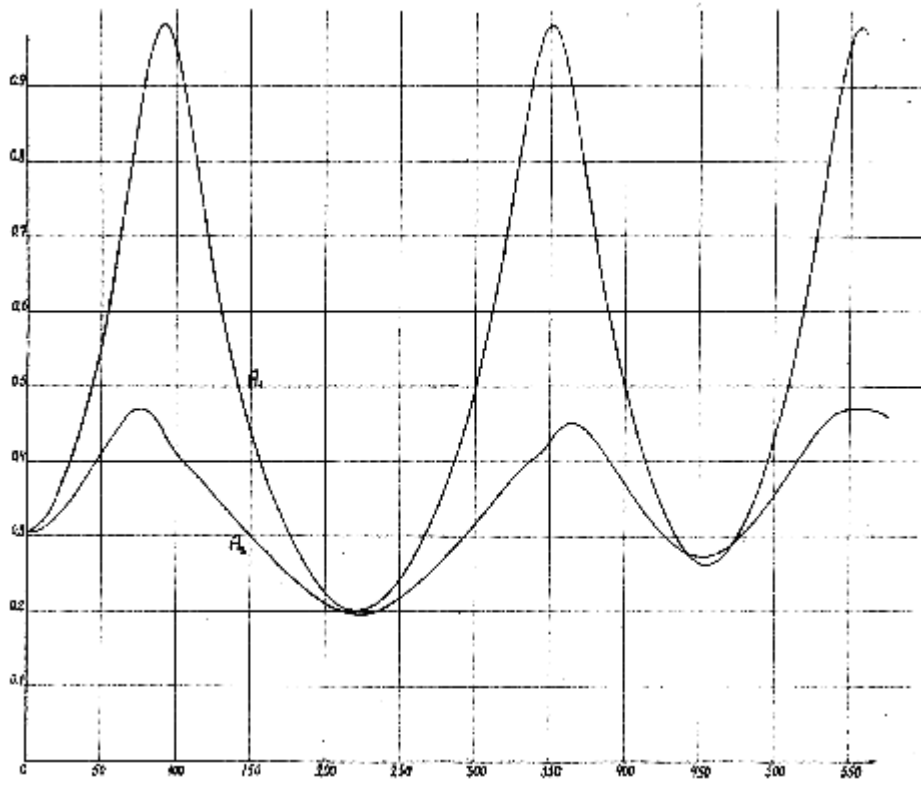


Рис. 12.

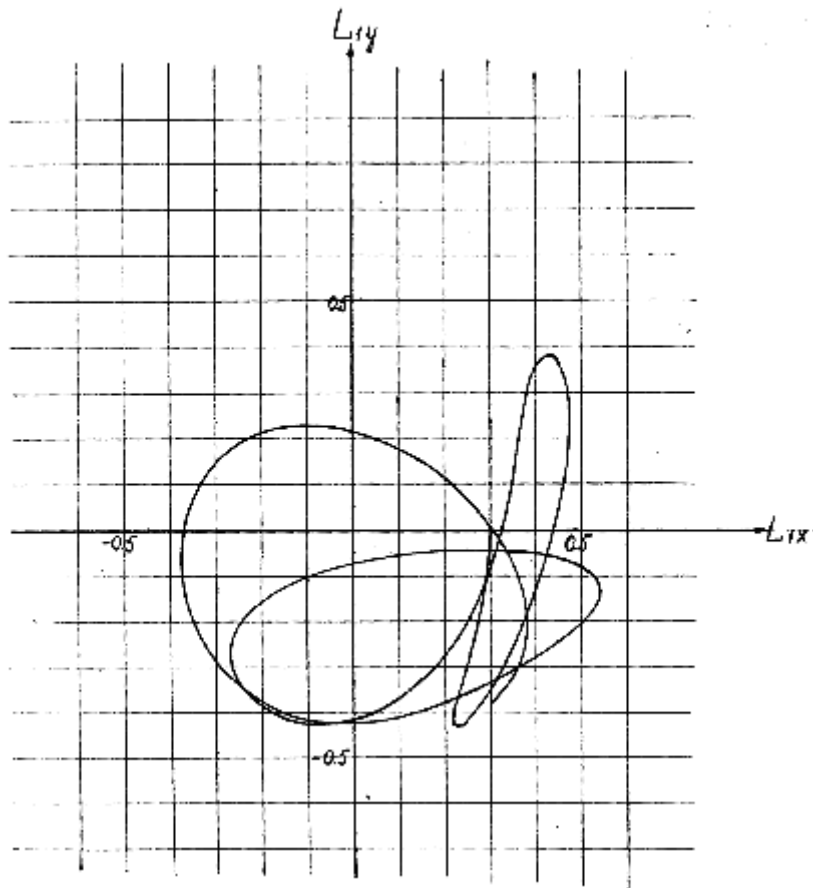


Рис. 13.

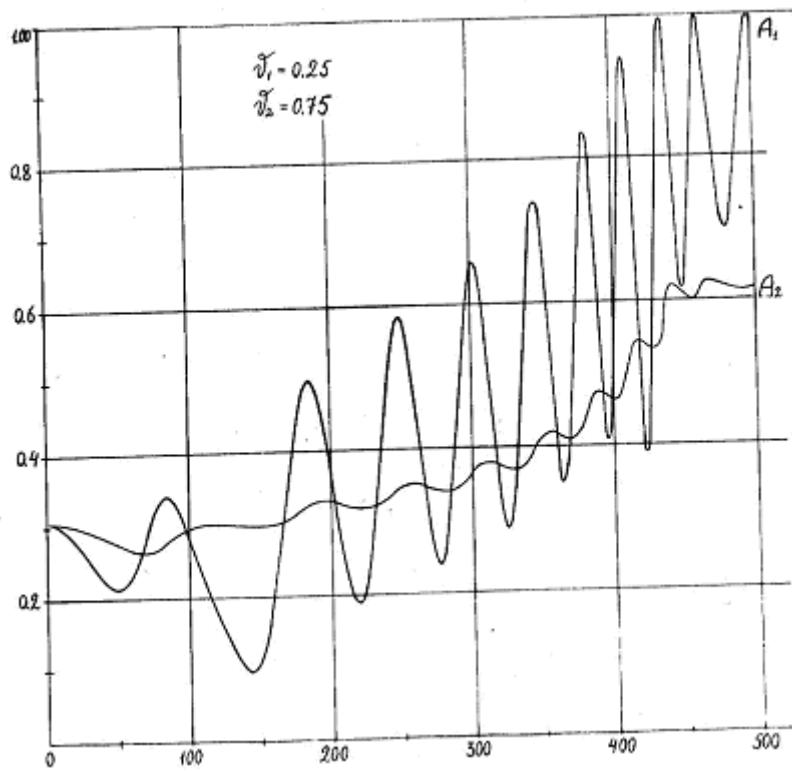


Рис. 14.

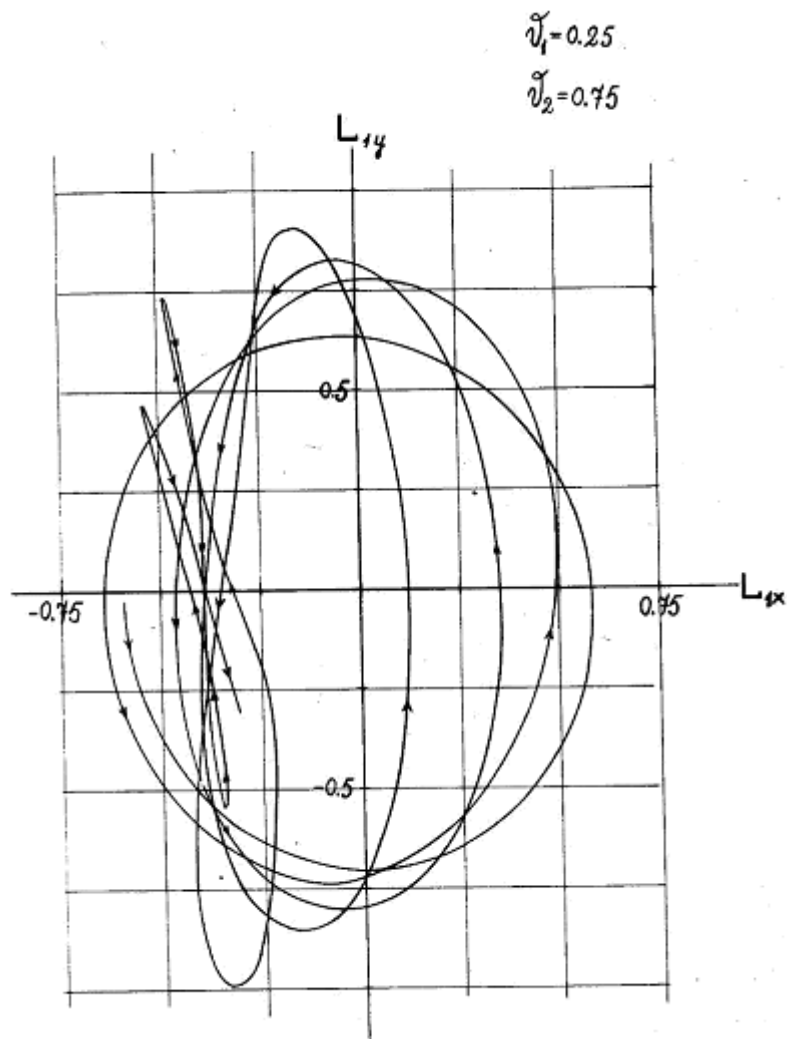


Рис. 15.

Электронную версию препринта подготовили:
 Н. В. Михайлова, Н. М. Панкратова, И. В. Флоринский
 (Институт математических проблем биологии РАН)

Проект «Электронные ИПМ-препринты А. М. Молчанова»
 Координатор проекта: И. В. Флоринский
 iflorinsky@yahoo.ca

Пущино
 2012