



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 30 за 1971 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Л.С. Туровцева, В.Ф. Турчин**

**Восстановление  
распределения частиц по  
размерам в мутных средах из  
опытов по рассеянию  
монохроматического света**

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Туровцева Л.С., Турчин В.Ф. Восстановление распределения частиц по размерам в мутных средах из опытов по рассеянию монохроматического света // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1971. № 30. с.  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1971-30>

Препринт Туровцева, Л.С.  
Т-88 и Турчин, В.Ф.

Восстановление распреде-  
ления частиц... 16/№

|      |           |  |
|------|-----------|--|
| 14/9 | Солдатов  |  |
|      | Росенский |  |
|      |           |  |
|      |           |  |
|      |           |  |

15/№

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Л.С.ТУРОВЦЕВА, В.Ф.ТУРЧИН

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО РАЗМЕРАМ  
В МУТНЫХ СРЕДАХ ИЗ ОПЫТОВ ПО РАССЕЯНИЮ МОНОХРО-  
МАТИЧЕСКОГО СВЕТА

15/№

БИБЛИОТЕКА  
ИН-ТА  
ПРИКЛАДН. МАТЕМАТИКИ  
АН СССР

г.Москва, 1971г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| 1. Постановка задачи . . . . .                        | 5  |
| 2. Метод статистической регуляризации . . . . .       | 7  |
| 3. Нахождение параметров $\alpha$ и $\beta$ . . . . . | 10 |
| 4. Сводка формул и обозначений . . . . .              | 15 |
| 5. Анализ результатов . . . . .                       | 17 |
| а) Восстановление при различных ошибках . . . . .     | 18 |
| б) Влияние случайных вариаций . . . . .               | 21 |
| в) Влияние уменьшения числа измерений . . . . .       | 21 |
| г) Влияние ошибки обрезания . . . . .                 | 23 |
| д) Восстановление негладкой функции . . . . .         | 24 |
| 6. Графики . . . . .                                  | 28 |
| Приложение . . . . .                                  | 41 |

# I. Постановка задачи.

В настоящей работе рассматривается задача восстановления распределения частиц (плотности вероятности), взвешенных в воздушной или жидкой среде, по размерам по измеренной индикатриссе рассеяния монохроматического света. Схема эксперимента изображена на рис. I. На изучаемый участок среды падает пучок монохроматического света от источника. Под некоторым углом  $\gamma$  к пучку поставлен приемник, в который попадает рассеянное излучение:

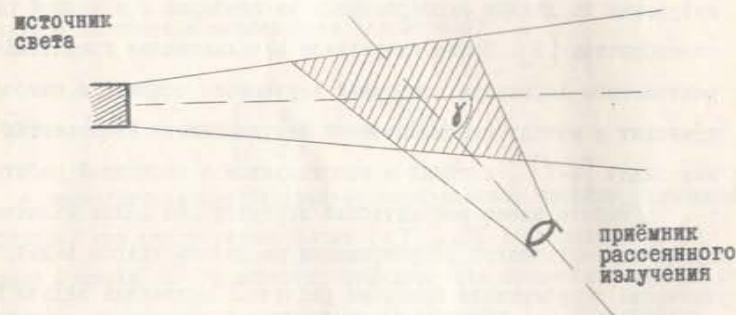


Рис. I

Математически задача сводится к решению уравнения Фредгольма I рода относительно неизвестной плотности распределения

$$f(\gamma) = \int_0^\infty \mathcal{I}(\gamma, a) \varphi(a) da \quad (I)$$

Здесь  $f(\gamma)$  — измеряемое рассеянное излучение, а  $\mathcal{I}(\gamma, a)$  — индикатрисса рассеяния монохроматического света на частицах размера  $a$ .

Физика рассеяния света в мутных средах рассматривается в мо-

нографии К.С.Шифрина [1]. В ряде работ К.С.Шифрина с сотрудниками (см. последнюю работу из этой серии [2]) разработан и применен на практике метод восстановления  $\varphi(a)$  путем аналитического обращения ядра  $J(x, a)$  для случая "мягких" частиц. Этот метод имеет ограниченную область применимости, поэтому желательна разработка общего метода для численного решения (I) при любом виде ядра  $J(x, a)$ .

Так как уравнение (I) является, вообще говоря, некорректным, оно требует "регуляризации". Понятие о регуляризации решения некорректно поставленных задач было введено в работе А.Н.Тихонова [3]. Оно легло в основу некоторых вычислительных методов, с помощью которых был решен ряд задач о восстановлении спектральных характеристик излучения по данным экспериментов на приборах с конечной разрешающей способностью [9]. Последовательное использование представлений о вероятностном характере состояний изучаемого объекта и ошибок измерения приводит к методу статистической регуляризации некорректно поставленных задач [4-7], который и используется в настоящей работе.

Работа имеет методический характер. Ее целью является проверка метода статистической регуляризации на данном классе задач, совершенствование и публикация программ расчета. Постановка задачи в ее физическом аспекте принадлежит К.С.Шифрину и В.А.Гашко (Ленинградский институт океанологии АН СССР), с которыми авторы поддерживали постоянный контакт. Им же были любезно предоставлены в наше распоряжение таблицы ядра  $J(x, a)$  и типичных функций  $\varphi(a)$  и  $f(a)$ . Анализируя результаты расчетов, мы рассматривали их исключительно с точки зрения математико-статистической. Предполагается, что эти и им подобные расчеты, будучи подкреплены в дальнейшем физическим анализом, дадут возможность использовать метод статистической регуляризации при обработке реальных физических экспериментов указанного типа.

## 2. Метод статистической регуляризации.

Сущность метода состоит в том, что априорная информация об искомой функции вносится в виде того или иного распределения вероятностей, иначе говоря, ищется решение системы уравнений

$$\sum_{i=1}^n K_{ji} \varphi_i = f_j \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

получающейся после алгебраизации исходного интегрального уравнения (I), в том или ином статистическом ансамбле. В частности, в работе [6] было получено общее решение системы уравнений (2) в статистическом ансамбле гладких функций с параметром гладкости  $\alpha$ . Этот ансамбль характеризуется плотностью вероятности (априорной):

$$P_{\alpha}(\bar{\varphi}) = C, \alpha^{\frac{n-r}{2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} (\bar{\varphi}, \Omega \bar{\varphi}) \right\}, \quad (3)$$

где  $\Omega$  - симметричная неотрицательно определенная матрица, вводимая таким образом, что квадратичная форма  $(\bar{\varphi}, \Omega \bar{\varphi})$  является нормой производной функции  $\bar{\varphi}$  некоторого порядка, или каким-либо другим регуляризатором, приводящим к устранению из ансамбля (3) негладких функций;  $C$ , - нормировочная константа, не зависящая от  $\alpha$ ;  $r$  - степень вырождения матрицы  $\Omega$ . Формула (3), строго говоря, имеет место внутри сферы радиуса  $R$  в  $n$ -мерном пространстве векторов  $\bar{\varphi}$ . Для  $\bar{\varphi}$ , лежащих вне этой сферы,  $P_{\alpha}(\bar{\varphi})$  обращается в нуль. Радиус  $R$  предполагается сколь угодно большим и на конечные результаты не влияет.

Условная вероятность  $P(\bar{f}/\bar{\varphi})$ , характеризующая процесс измере-

ния, бралась в виде нормального распределения:

$$P(\vec{f}|\vec{\varphi}) = \prod_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi S_j^2}} \exp \left\{ -\frac{(\vec{f}_j - \sum_{i=1}^n K_{ji} \varphi_i)^2}{2 S_j^2} \right\} \quad (4)$$

В качестве восстановленной функции  $\vec{\varphi}$  принималось математическое ожидание  $\vec{\varphi}$  по распределению

$$P(\vec{\varphi}|\vec{f}, \alpha) = C_2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{\varphi}, [B + \alpha \Omega] \vec{\varphi}) + (\vec{\varphi}, K^* W \vec{f}) - \frac{1}{2} (\vec{f}, W \vec{f}) \right\}, \quad (5)$$

полученному по формуле Байеса как апостериорное распределение для  $\vec{\varphi}$ . Вычисление математического ожидания даёт:

$$\langle \vec{\varphi} \rangle_\alpha = (B + \alpha \Omega)^{-1} K^* W \vec{f} \quad (6)$$

Ошибка восстановления определялась как корень из дисперсии  $\varphi_i$  по тому же распределению (4):

$$\sigma_i = \sqrt{\langle (\varphi_i - \langle \varphi_i \rangle_\alpha)^2 \rangle_\alpha} = \sqrt{([B + \alpha \Omega]^{-1})_{ii}} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

$$B = K^* W K, \quad W_{ij} = \frac{1}{S_j^2} \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

$S_j$  — среднеквадратичная ошибка измерения компоненты правой части  $f_j$ .

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

В той же работе было получено и приведено решение задачи для того случая, когда параметр  $\alpha$ , характеризующий гладкость функции  $\vec{\varphi}$ , априори неизвестен, но о самой функции  $\vec{\varphi}$  известно, что она изображает непрерывную физическую функцию. В этом случае априорной вероятностью  $P(\vec{\varphi})$ , несущей в себе дополнительную информацию об искомой функции, будет

$$P(\vec{\varphi}) = \int_0^\infty P(\alpha) P_\alpha(\vec{\varphi}) d\alpha. \quad (8)$$

где  $P(\alpha)$  — априорная вероятность  $\alpha$ , которую мы можем считать принимающей постоянное значение в любой сколь угодно большой области положительных  $\alpha$ . Тогда решение представится в виде:

$$\langle \vec{\varphi} \rangle = \int (B + \alpha \Omega)^{-1} K^* W \vec{f} P(\alpha / \vec{f}) d\alpha \quad (9)$$

$$\sigma_i^2 = \int [(B + \alpha \Omega)^{-1}]_{ii} P(\alpha / \vec{f}) d\alpha + \left[ \int \langle \varphi_i \rangle_\alpha^2 P(\alpha / \vec{f}) d\alpha - \left[ \int \langle \varphi_i \rangle_\alpha P(\alpha / \vec{f}) d\alpha \right]^2 \right], \quad (10)$$

где  $P(\alpha / \vec{f})$  — апостериорная плотность вероятности параметра гладкости  $\alpha$  при известном результате измерений  $\vec{f}$  — изображается формулой

$$P(\alpha / \vec{f}) = \frac{P(\alpha) \int P(\vec{f}|\vec{\varphi}) P_\alpha(\vec{\varphi}) d\vec{\varphi}}{\int \int P(\alpha) P(\vec{f}|\vec{\varphi}) P_\alpha(\vec{\varphi}) d\vec{\varphi} d\alpha} \quad (11)$$

Если измерение  $\vec{f}$  даёт достаточно большое количество информации о параметре  $\alpha$  (для этого необходимо, в частности, чтобы  $n$  было не слишком мало, скажем не меньше 10), то функция  $P(\alpha / \vec{f})$  будет

иметь резкий максимум при некотором значении  $\alpha = \alpha_0$ , и вместо интегрирования по  $\alpha$  в формулах (9) и (10) можно положить

$$\langle \bar{\psi} \rangle = \langle \psi \rangle_{\alpha_0}$$

и

$$\sigma_i^2 = \sigma_{i\alpha_0}^2$$

т.е. перейти к формулам (6) и (7) при  $\alpha = \alpha_0$ .

### 3. Нахождение параметров $\alpha$ и $\beta$ .

В работе [6] было получено явное выражение для функции  $P(\alpha/\bar{f})$  в предположении, что  $P(\alpha) = \text{Const}$  при  $0 \leq \alpha \leq A$ , где  $A$  - произвольно велико.

$$P(\alpha/\bar{f}) = C_3 \alpha^{\frac{n-r}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} (K^* W \bar{f} \cdot [B + \alpha \Omega]^{-1} K^* W \bar{f}) \right\} \cdot [Det(B + \alpha \Omega)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

( $C_3$  - не зависит от  $\alpha$ ) и разработан алгоритм решения задачи, основанный на формулах (6), (7) и нахождении численными методами максимума этой функции. Однако в формулу для  $P(\alpha/\bar{f})$  входит детерминант  $n$ -мерной матрицы, что увеличивает объём вычислений. Поэтому при дальнейшем развитии метода этот алгоритм был заменен на алгоритм нахождения  $\alpha$ , не требующий вычисления детерминантов, а довольствующийся лишь обычными операциями транспонирования, перемножения и обращения матриц. Он состоит в том, что поиск максимума функции  $P(\alpha/\bar{f})$  заменяется на поиск нуля её производной по  $\alpha$ . Полагая  $P(\alpha) = \text{Const}$ , находим из (3), (II)

$$\ln P(\alpha/\bar{f}) = \ln C_1 + \frac{n-r}{2} \ln \alpha + \ln \int P(\bar{f}|\bar{\psi}) \cdot \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} (\bar{\psi}, \Omega \bar{\psi}) \right\} d\bar{\psi}, \quad (13)$$

где  $C_1$  - константа, не зависящая от  $\alpha$ .

Дифференцируя по  $\alpha$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln P(\alpha/\bar{f}) &= \frac{n-r}{2\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\int P(\bar{f}|\bar{\psi}) \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} (\bar{\psi}, \Omega \bar{\psi}) \right\} (\bar{\psi}, \Omega \bar{\psi}) d\bar{\psi}}{\int P(\bar{f}|\bar{\psi}) \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} (\bar{\psi}, \Omega \bar{\psi}) \right\} d\bar{\psi}} \\ &= \frac{n-r}{2\alpha} - \frac{1}{2} \langle (\bar{\psi}, \Omega \bar{\psi}) \rangle_{\alpha} \end{aligned} \quad (14)$$

Это соотношение имеет простой смысл: логарифмическая производная апостериорной вероятности параметра  $\alpha$  равна полуразности величины  $\frac{n-r}{\alpha}$  и среднего значения функционала  $\Omega$  по апостериорному распределению при заданном  $\alpha$ . Но величина  $\frac{n-r}{\alpha}$  есть не что иное, как среднее значение функционала  $\Omega$  по чистому априорному ансамблю. Таким образом, при наименее вероятном  $\alpha$  среднее значение  $\Omega$  по апостериорному ансамблю должно быть равно среднему значению по априорному ансамблю.

Поведение логарифмической производной показано качественно на Рис. 2.

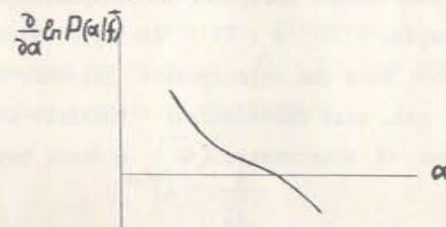


Рис. 2.

Заметим, что соотношение (13) выведено без каких бы то ни было предположений о виде функции  $P(\bar{f}/\bar{\varphi})$ , поэтому оно является универсально верным для любых задач (например, нелинейных) и при любой статистике ошибок.

Приняв условную вероятность  $P(\bar{f}/\bar{\varphi})$  в виде нормального распределения:

$$P(\bar{f}/\bar{\varphi}) = C_3 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\bar{\varphi}, B \bar{\varphi}) + (\bar{\varphi}, K^* W \bar{f}) - \frac{1}{2} (\bar{f}, W \bar{f}) \right\} \quad (15)$$

легко вычислить среднее:

$$\langle (\bar{\varphi}, \Omega \bar{\varphi}) \rangle_\alpha = Sp \left\{ \Omega (K^* W K + \alpha \Omega)^{-1} \right\} + (\langle \bar{\varphi} \rangle_\alpha, \Omega \langle \bar{\varphi} \rangle_\alpha) \quad (16)$$

Здесь  $\langle \bar{\varphi} \rangle_\alpha$  - регуляризованное решение при заданном  $\alpha$ .

Используя эти формулы и принимая во внимание поведение логарифмической производной (Рис. 2), нетрудно построить алгоритм нахождения  $\alpha_0$ .

Этот алгоритм состоит в следующем:

задаётся некоторое начальное значение  $\alpha$  и находится регуляризованное решение  $\langle \bar{\varphi} \rangle_\alpha$ ; вычисляется логарифмическая производная функции  $P(\alpha/\bar{f})$  по формулам (13) и (15); фиксируется знак этой производной, и в случае, если она отрицательна, значение  $\alpha$  уменьшается (см. Рис 2) в  $q$  раз, если положительна - значение  $\alpha$  увеличивается в  $q$  раз; с новым  $\alpha$  вычисляется  $\langle \bar{\varphi} \rangle_{\alpha_{нов}}$  и снова фиксируется знак производной;

если смены знака не произошло, то процедура повторяется, если же знак изменился, то новое  $\alpha$  берётся равным полусумме тех ближайших друг к другу значений  $\alpha$ , для которых производная имеет разные знаки; так делается до тех пор, пока два соседних  $\alpha$  будут отличаться друг от друга не более, чем на заданную величину.

Подобно тому, как параметр  $\alpha$  определяется апостериори, можно определить апостериори и параметр, характеризующий ошибку правой части в целом.

Обозначим этот параметр через  $\beta$  и будем считать, что заданные ошибки  $S_j$  являются истинными ошибками лишь сточностью до неизвестного множителя. Это означает, что условная вероятность  $P(\bar{f}/\bar{\varphi})$  должна быть взята, подобно априорной вероятности, в виде сложного ансамбля

$$P(\bar{f}/\bar{\varphi}) = \int_0^\infty \beta^{m/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \Delta(\bar{\varphi}) \right\} d\beta \quad (17)$$

где

$$\Delta(\bar{\varphi}) = \sum_{j=1}^m \frac{(K\bar{\varphi} - \bar{f})_j^2}{S_j^2 / S_a^2}$$

$$S_a = \prod_{j=1}^m S_j^{\frac{1}{m}}$$

Параметр  $\beta$  является, таким образом, обратным квадратом среднего геометрической ошибки измерения. Если известно, что  $S_j$  - истинные ошибки, то вместо интеграла по  $\beta$  (17) мы должны были бы взять подинтегральное выражение со значением

$$\beta = \frac{1}{S_a^2}$$

Определение  $\beta$  апостериори даёт апостериорное значение ошибкам измерения:

$$S_j^{\text{апост.}} = \frac{S_j}{S_a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta^{\text{апост.}}}}$$

Апостериорная оценка  $\beta$  производится аналогично оценке  $\alpha$ . Для логарифма апостериорной вероятности пары неизвестных параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  находим:

$$P(\alpha, \beta / \bar{f}) = \ln C + \frac{n-r}{2} \ln \alpha + \frac{m}{2} \ln \beta + \ln \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta \Delta(\bar{\varphi}) \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha (\bar{\varphi}, \Omega \bar{\varphi}) \right\} d\bar{\varphi} \quad (18)$$

где  $C$  - константа, не зависящая от  $\alpha$  и  $\beta$ .

Дифференцируя по  $\beta$ , получаем аналогично (14)

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln P(\alpha, \beta / \bar{f}) = \frac{m}{2\beta} - \frac{1}{2} \frac{\int P(\bar{f} / \bar{\varphi}) P_{\alpha}(\bar{\varphi}) \Delta(\bar{\varphi}) d\bar{\varphi}}{\int P(\bar{f} / \bar{\varphi}) P_{\alpha}(\bar{\varphi}) d\bar{\varphi}} = \frac{m}{2\beta} - \frac{1}{2} \langle \Delta(\bar{\varphi}) \rangle_{\alpha, \beta} \quad (19)$$

Для  $\langle \Delta(\bar{\varphi}) \rangle_{\alpha, \beta}$  легко получить

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\bar{\varphi}) \rangle_{\alpha, \beta} &= Sp(\bar{B} D) + \langle \bar{\varphi} \rangle_{\alpha, \beta} \bar{B} \langle \bar{\varphi} \rangle_{\alpha, \beta} - \\ &- 2(K \bar{W} \bar{f}, \langle \bar{\varphi} \rangle_{\alpha, \beta}) + (\bar{f}, \bar{W} \bar{f}) \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда видно, что для получения наиболее вероятного  $\beta$  (а следовательно величины  $S_j$ ) может быть использован тот же алгоритм, что и для получения наиболее вероятного параметра регуляризации.

#### 4. Сводка формул и обозначений.

Алгоритм статистической регуляризации и выбора наиболее вероятной среднеквадратичной ошибки измерения реализован в процедуре **streg**, написанной на алголе. Процедура **streg** и программа **ОБР-18**, использующая эту процедуру для расчетов, приведены в Приложении.

Формулы, используемые в счете, и обозначения (справа), под которыми соответствующие величины появляются в программах.

1.  $\langle \bar{\varphi} \rangle_{\alpha, \beta} = (\beta \bar{B} + \alpha \Omega)^{-1} \beta K^* \bar{W} \bar{f} = f_i$
2.  $\sigma_i = \sqrt{([\beta \bar{B} + \alpha \Omega]^{-1})_{ii}} = \text{sigma}_i$   
 $i = 1, \dots, n$
3.  $\bar{B} = K^* \bar{W} K = b \quad \bar{W} = W \cdot S_a^2$
4.  $K^* \bar{W} \bar{f} = 0$
5.  $(\beta \bar{B} + \alpha \Omega)^{-1} = d$

6. Элементы матрицы  $\Omega$  получаются при вычислении квадратичной формы  $(\bar{\varphi}, \Omega \bar{\varphi})$ ; в программе  $\Omega$  преобразована в ото.

$$(\bar{\varphi}, \Omega \bar{\varphi}) = \sum_{i=3}^n (aa_i \varphi_i + bb_i \varphi_{i-1} + cc_i \varphi_{i-2})^2 \Delta x x_i$$

$$\Delta x x_i = (x x_i - x x_{i-2}) \cdot 0.5 \quad x x_i \text{ — значения аргумента}$$

$$aa_i = \frac{1}{x x_i - x x_{i-1}} \quad \text{искомой функции.}$$

$$bb_i = -\frac{1}{x x_i - x x_{i-1}} - \frac{1}{x x_{i-1} - x x_{i-2}}$$

$$cc_i = \frac{1}{x x_{i-1} - x x_{i-2}}$$

$$7. \langle \Omega(\bar{\varphi}) \rangle = Sp(\Omega d) + (\bar{\varphi}, \Omega \bar{\varphi})$$

$$8. \frac{n-r}{\alpha} - \langle \Omega(\bar{\varphi}) \rangle_{\alpha, \beta} \equiv omega$$

$r=2$ , поскольку в программе в качестве  $\Omega(\bar{\varphi}) = (\bar{\varphi}, \Omega \bar{\varphi})$  взята норма второй производной.

$$9. \langle \Delta(\bar{\varphi}) \rangle = Sp(bd) + (\bar{\varphi}, b\bar{\varphi}) - 2(\bar{a}, \bar{\varphi}) +$$

$$+ (\bar{f}, \widetilde{W} \bar{f})$$

$$10. \frac{m}{\beta} - \langle \Delta(\bar{\varphi}) \rangle_{\alpha, \beta} \equiv delta$$

### 5. Анализ результатов.

По программе ОБР-18 было проведено несколько серий расчётов, представляющих из себя различные варианты математического эксперимента.

В понятие математического эксперимента вкладывается следующее:

задаются некоторая исходная функция  $\varphi_i$   $i=1, \dots, n$ , дисперсия случайной ошибки  $S_j^2$   $j=1, \dots, m$ , матрица рассеяния  $K_{ji}$   $j=1, \dots, m$ ,  $i=1, \dots, n$ ; по ним вычисляется правая часть

$$f_j = \sum_{i=1}^n K_{ji} \varphi_i + \xi_j \cdot S_j \quad (20)$$

где  $\xi_j$  — нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1;

с помощью вышеописанного алгоритма восстанавливается  $\langle \bar{\varphi} \rangle$  и сравнивается с исходной функцией  $\bar{\varphi}$ .

В качестве исходных ("истинных") функций в расчётах фигурировали две типичные для атмосферной оптики функции распределения, предоставленные в наше распоряжение Ленинградским институтом океанологии АН СССР. Эти функции представлены на рисунках 3 и 4.

В качестве матрицы рассеяния  $K_{ji}$  была использована матрица размерности  $37 \times 36$  и несколько матриц, получающихся из этой выбрасыванием некоторых строк. Подробнее об этом сказано в п. 5(в).

Шаг по  $i$  неравномерный; отношение шагов в интервалах по  $i$  от 1 до 12, от 12 до 26 и от 26 до 36 равно 1:2:4.

Индикатрисса рассеяния монохроматического света с длиной волны  $\lambda$   $J(\gamma, a)$  на частицах данного размера  $a$  зависит только от безразмерного параметра

$$\rho = \frac{2\pi}{\lambda} a$$

Изменению  $i$  от 1 до 36 соответствует изменение  $\rho$  от 0.5 до 40. Здесь  $a$  – размер частиц в микронах,  $\lambda$  – длина волны падающего излучения в микронах, принятая в расчётах равной  $0.714 \mu$ .

а) Восстановление при различных ошибках.

Первая серия расчётов содержит шесть вариантов математического эксперимента соответственно двум исходным функциям  $\varphi$  и трем дисперсиям ошибки измерения и имеет целью выяснить, какие ошибки измерения допустимы в типичных случаях.

Из рисунка 5(а,б,в)), где нанесены исходная функция  $\varphi_I$  и три восстановленных функции, соответствующих среднеквадратичной ошибке измерения  $S_j$ , равной 1%, 3% и 10% от правой части  $f_j$ , видно, что во всех случаях восстановленная функция хорошо передаёт исходную функцию с точностью до ошибки восстановления за исключением участка по  $\rho$  от 0.5 до 8, где она представляется совершенно точной линейной функцией. Отчётливо это видно и на рисунке 6, где исходная функция имеет максимум в области  $\rho \approx 6$ , и этот максимум вообще не передаётся при восстановлении. Чтобы понять это, достаточно взглянуть на поведение элементов матрицы  $K_{ji}$  по строкам (см. рисунки 7–10). Значение элементов матрицы для малых  $\rho$  в диапазоне от 0.5 до 4–6 при всех углах рассеяния относительно мало, а это означает, что информация о начальных точках очень невелика, и восстановление в них происходит только благодаря наличию дополнительной информации в виде регуляризующего функционала  $\Omega(\bar{\varphi})$ , представляющего в данной программе норму второй производной функции  $\bar{\varphi}$ . Практическое отсутствие информации о начальных точках в правой части (в функции  $f_j$ ) приводит к тому, что восстановленная функция определяется в этих точках только процессом регуляризации – то есть минимизацией функционала  $\Omega(\bar{\varphi})$ . Этот функционал принимает минимальное (нулевое) значение для линейной функции  $\varphi(a)$ .

Поэтому в области, где нет или очень мало информации, регуляризованное решение представляет линейную экстраполяцию из области, где информация есть.

Очень хорошо экстраполяция функции по её второй производной может быть проиллюстрирована на модельном примере с матрицей  $K_{ji}$  разностного типа, где  $j = 1, \dots, 15$ , а  $i = 1, \dots, 25$ .

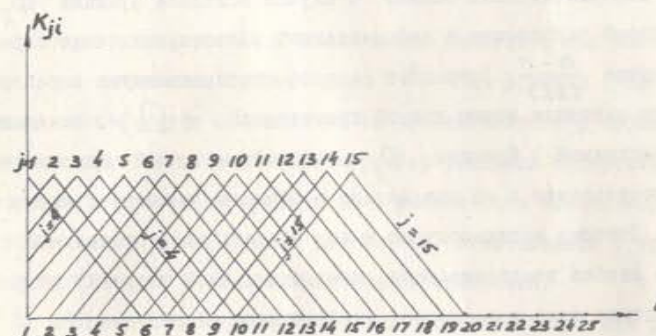


Рис. II.

Легко видеть, что такая матрица не несет никакой информации о точках с  $i = 20$  до 25 и имеет быстро убывающую информацию о точках с 15 по 20. В результате, начиная примерно с 17 точки, восстановленная функция представляет прямую линию с очень большой ошибкой восстановления (см. рисунок 12). Характерно, что как в этом модельном примере, так и в обсуждаемом расчете с исходной функцией  $\varphi_I$  область ошибки восстановления покрывает исходную функцию. Совсем другая картина при восстановлении исходной функции  $\varphi_{II}$  (рисунок 6). Здесь в начальных точках восстановленная функция также экстраполируется линейным образом, но ошибка восстановления в этой области значительно меньше, чем

в случае  $\varphi_I$ , так что сама исходная функция  $\varphi_{II}$  далеко не входит в область ошибки восстановления. Это можно объяснить следующим образом.

Значения регуляризующего функционала и параметра регуляризации  $\alpha$ , определяющие восстановление исходной функции на неинформативном участке, содержат в себе данные о поведении функции в точках, где информативность велика. В случае исходной функции  $\varphi_I$ , максимум которой расположен в информативной области, значение параметра  $\alpha$  (равное  $\frac{n-r}{\langle \Omega \rangle}$ ) отражает наличие этого максимума через оценку ожидаемого значения нормы второй производной  $\langle \Omega \rangle$ . Поведение истинной (исходной) функции  $\varphi_I$  в неинформативной области не вступает в противоречие с её поведением в области, о которой имеется информация. Поэтому экстраполяция в эту область даёт правильный (с точностью до ошибки восстановления, предсказываемой теорией) результат. Так же обстоит дело и в случае, изображенном на рисунке 12.

Другая ситуация имеет место в случае с исходной функцией  $\varphi_{II}$ . Здесь в информативной области функция  $\varphi_{II}$  не имеет максимума, и её вторая производная, оцениваемая по её ходу в этой области, оказывается маленькой — гораздо меньшей, чем если бы она оценивалась с учетом максимума в неинформативной области. Поэтому и экстраполяция в неинформативную область даёт заниженную теоретическую ошибку. Программа восстановления как бы не ожидает, что восстанавливаемая кривая вдруг резко изменит производную и пойдёт вниз; в той информации, которую содержат «экспериментальные» данные, ничто не указывает на возможность такого поведения.

Во всех последующих расчетах, результаты которых будут анализироваться, эффект плохого восстановления функции в начальных точках

имеет место поскольку его причина в плохой информативности используемой матрицы рассеяния  $K_{ji}$ ; следует все время иметь это в виду.

#### б). Влияние случайных вариаций.

Вторая серия расчетов имела целью показать, как выбор случайных чисел при вычислении правой части  $f_i$  по формуле (20) в математическом эксперименте сказывается на восстановлении функции. Эти расчеты моделируют статистический характер реальных измерений, когда один и тот же эксперимент проводится в практически одинаковых условиях несколько раз и имеет разные результаты, отличающиеся (при достаточной чистоте опыта) в пределах ошибки измерения.

На рисунке 13 представлены кривые восстановления для разных случайных чисел при среднеквадратичной ошибке измерения 10% от  $f_i$ . Несмотря на большое различие между ними все они совпадают с исходной функцией с точностью до ошибки восстановления (начальную область исключаем из рассмотрения).

#### в). Влияние уменьшения числа измерений.

Экспериментаторам, имеющим дело с измерительными задачами оптики атмосферы, важно знать не только влияние ошибки измерения на результат восстановления, но и — под какими углами измерения наиболее информативны. В связи с этим был осуществлен математический эксперимент, заключающийся в том, что в матрице рассеяния  $K_{ji}$  выбрасывались те или иные строки, соответствующие определенным углам измерения. Началь-

ные данные по вариантам этого эксперимента могут быть сведены в следующую таблицу:

Таблица I.

| №<br>вар. | j                       | m  | $\gamma$                                    |
|-----------|-------------------------|----|---------------------------------------------|
| 1         | 1, ..., 37              | 37 | $0^\circ - 180^\circ$                       |
| 2         | 1, ..., 20              | 20 | $0^\circ - 135.5^\circ$                     |
| 3         | 1, ..., 10              | 10 | $0^\circ - 50^\circ$                        |
| 4         | 1, ..., 6               | 6  | $0^\circ - 10^\circ$                        |
| 5         | 1, ..., 7, 29, ..., 37  | 16 | $0^\circ - 20^\circ, 140^\circ - 180^\circ$ |
| 6         | 1, ..., 14, 29, ..., 37 | 23 | $0^\circ - 90^\circ, 140^\circ - 180^\circ$ |
| 7         | 8, ..., 37              | 30 | $30^\circ - 180^\circ$                      |
| 8         | 3, ..., 37              | 35 | $1^\circ - 180^\circ$                       |

В качестве исходной функции бралась функция  $\varphi_I$ . Среднеквадратичная ошибка задавалась 1% или 10% от правой части. Результаты восстановления представлены на рисунках № I4-I7.

В вариантах со среднеквадратичной ошибкой измерения 1% от  $\bar{f}$  наблюдается увеличение ошибки восстановления при последовательном отбрасывании 17, 27 и 31 последних строк матрицы  $K_{ji}$  (это соответствует вариантам с  $m=20$ ,  $m=10$ ,  $m=6$ , то есть отбрасыванию углов  $\gamma = 136^\circ - 180^\circ$ ,  $50^\circ - 180^\circ$ ,  $10^\circ - 180^\circ$ ). Восстановленная функция во всех случаях в пределах ошибки восстановления тем не менее хорошо передает ход исходной функции  $\varphi_I$ . По сравнению с 1-м вариантом ошибка восстановления во 2-м варианте возрастает приблизительно на 20%, в 3-м - в 2 раза, в 4-м - в 4 раза (см. рисунки № I4a, б, в)). Выбрасывание промежуточных углов  $\gamma = 30^\circ - 150^\circ$  или  $\gamma = 90^\circ - 150^\circ$  практически приводит к одинаковому результату, который почти совпадает

с результатом варианта, где отбрасывались  $\gamma = 136^\circ - 180^\circ$ . То же самое можно сказать и относительно варианта с отбрасыванием малых углов  $\gamma = 0^\circ - 30^\circ$  (см. рисунок I5).

В вариантах со среднеквадратичной ошибкой 10% восстановление происходит значительно хуже, чем в случае 1%; различие между вариантами имеет тот же характер (см. рисунки I6 - I7).

#### г). Влияние ошибки обрезания.

Четвертая серия расчетов посвящена изучению влияния ошибки обрезания.

В нашем распоряжении имелись функции  $f_j$ , сосчитанные для математического эксперимента с матрицей  $K_{ji}$  более высокой размерности, чем мы могли воспользоваться в расчетах, то есть с числом точек по  $a$   $n=51$ , покрывающих область до  $a=11.4$  микрон. Все вычисления производились на машине "Восток", которая не позволяет использовать абсолютные величины большие, чем  $10^9$ , а величины, меньшие, чем  $10^{-9}$ , считает нулем. Элементы матрицы  $K_{ji}$  при  $i > 36$  для малых углов рассеяния становятся порядка  $10^6 - 10^7$ , поэтому мы могли восстанавливать функцию  $\bar{\varphi}$  только в пределах  $a < 4.5$  микрон.

Интересно было провести восстановление "обрезанной" функции  $\bar{\varphi}$  (то есть в пределах до  $a = 4.5$  микрона), используя в качестве "экспериментальных" данных функцию  $\bar{f}$ , рассчитанную с учетом "хвоста" функции  $\bar{\varphi}$  (с учетом вклада области  $a > 4.5$  микрона). Похожая ситуация возникает при обработке настоящих экспериментальных данных, где всегда приходится обрезать восстанавливаемую функцию  $\bar{\varphi}$ ,

а измеряемая функция  $f$  учитывает вклад всей оси  $a$ . Хотя значения  $\bar{\varphi}$  при  $a > 4.5$  микрона относительно малы, но поскольку  $K_{ji}$  в этих точках для некоторых  $j$  очень велики, то в  $\bar{f}$  они могут давать значительный вклад. С точки зрения статистической такой эксперимент есть оценка влияния систематической ошибки в  $\bar{f}$  на восстановление  $\bar{\varphi}$ .

Восстановление со среднеквадратичной ошибкой измерения 1% дает кривую, которая хотя и следует вдоль исходной функции, но её отклонения почти везде значительно больше ошибки восстановления, что свидетельствует об её стремлении передать ход иной функции, чем исходная. Та же картина наблюдается и в случае с 10%-ной среднеквадратичной ошибкой измерения. Результаты эксперимента представлены на рисунке 18.

Таким образом неучет вклада частиц больших размеров приводит к систематической ошибке в  $\bar{\varphi}$ , которая оказывается больше ошибки восстановления. Хорошо видно влияние обрезания при сравнении кривых этого эксперимента с соответствующими кривыми чистого эксперимента, где  $f_j$  рассчитывались с той же точно матрицей  $K_{ji}$ , с которой проводилось восстановление (сравните, например, кривые а) и в) на рисунке 18).

#### д). Восстановление негладкой функции.

Метод статистической регуляризации позволяет производить восстановление исходной функции  $\bar{\varphi}$  по некоторой измеренной в эксперименте функции  $f$  при помощи внесения априорной информации о гладкости исходной функции и тем самым выделяет среди множества функций  $\bar{\varphi}$ , удовлетворяющих уравнению (1) с заданной степенью точности, только

достаточно гладкие функции, входящие в класс, специфицированный априорной информацией. Поскольку регуляризующий функционал взят в виде нормы второй производной, а это означает, что априорная информация выделяет класс достаточно гладких функций, то восстановление негладкой функции должно приводить к сильно заглаженной функции по сравнению с исходной.

Этот результат можно наблюдать на рисунке 19, где в качестве исходной (рисунок 19 а) взята функция, содержащая разрыв непрерывности: в области  $\rho \leq 10$  она равна нулю, в области  $10 < \rho < 30$  функция передает распределение частиц по размерам типа Лнге<sup>\*)</sup>, в области  $\rho \geq 30$  она опять обращается в нуль. На рисунке 19 б) исходная функция несколько сглажена, и это значительно приблизило восстановленную функцию к исходной. Хорошее восстановление такой функции можно получить, ограничив область её определения той областью, где она отлична от нуля, то есть по  $\rho$  от 10 до 30. Соответственно должна быть изменена и матрица рассеяния. Результаты такого расчета приведены на рис. 19 а). Кривая восстановления отмечена крестиками.

\*) Распределение типа Лнге описывает распределение капель по размерам в облаках и частиц - в морской воде.

6. ГРАФИКИ.

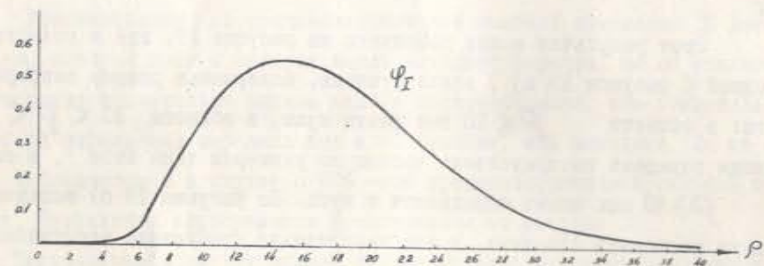


Рис. 3.

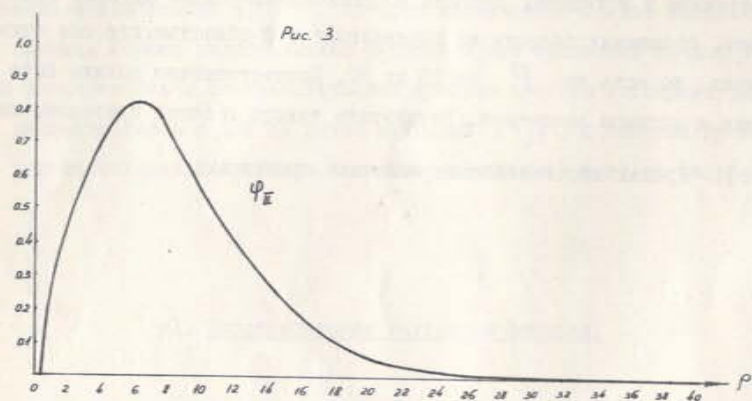


Рис. 4.

Функции  $\varphi_I$  и  $\varphi_{II}$ , использованные в математическом эксперименте как исходные.

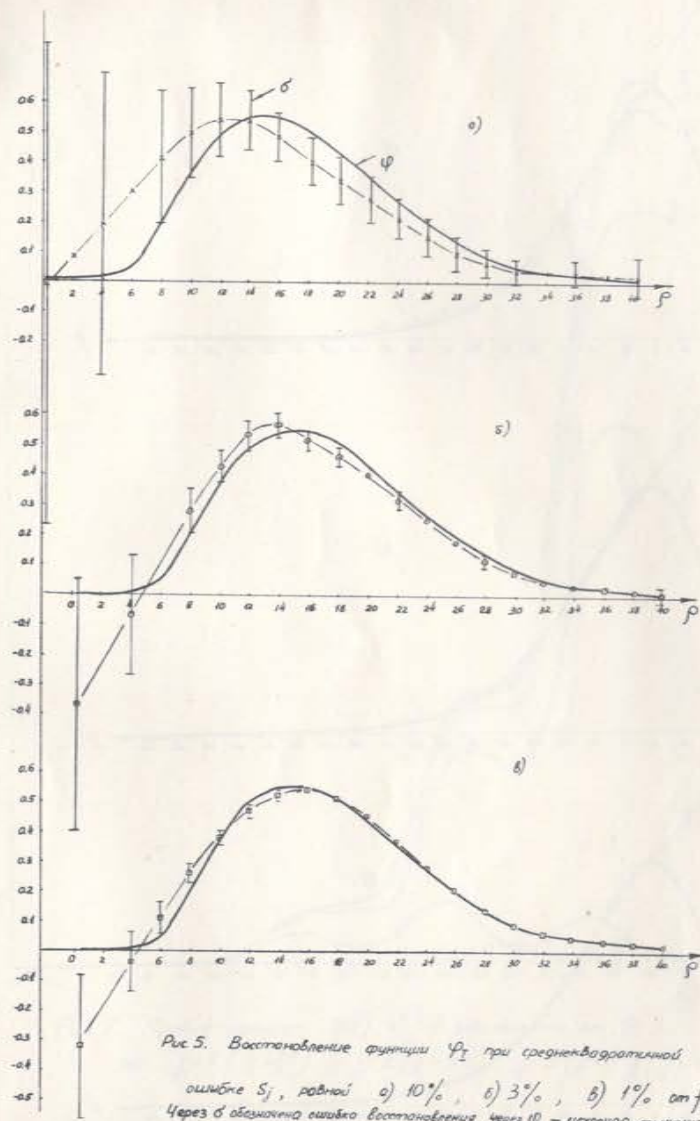


Рис. 5. Восстановление функции  $\varphi_I$  при среднеквадратичной ошибке  $S_f$ , равной а) 10%, б) 3%, в) 1% от  $f_2$ . Через  $\sigma$  обозначена ошибка восстановления, через  $\varphi$  — исходная функция.

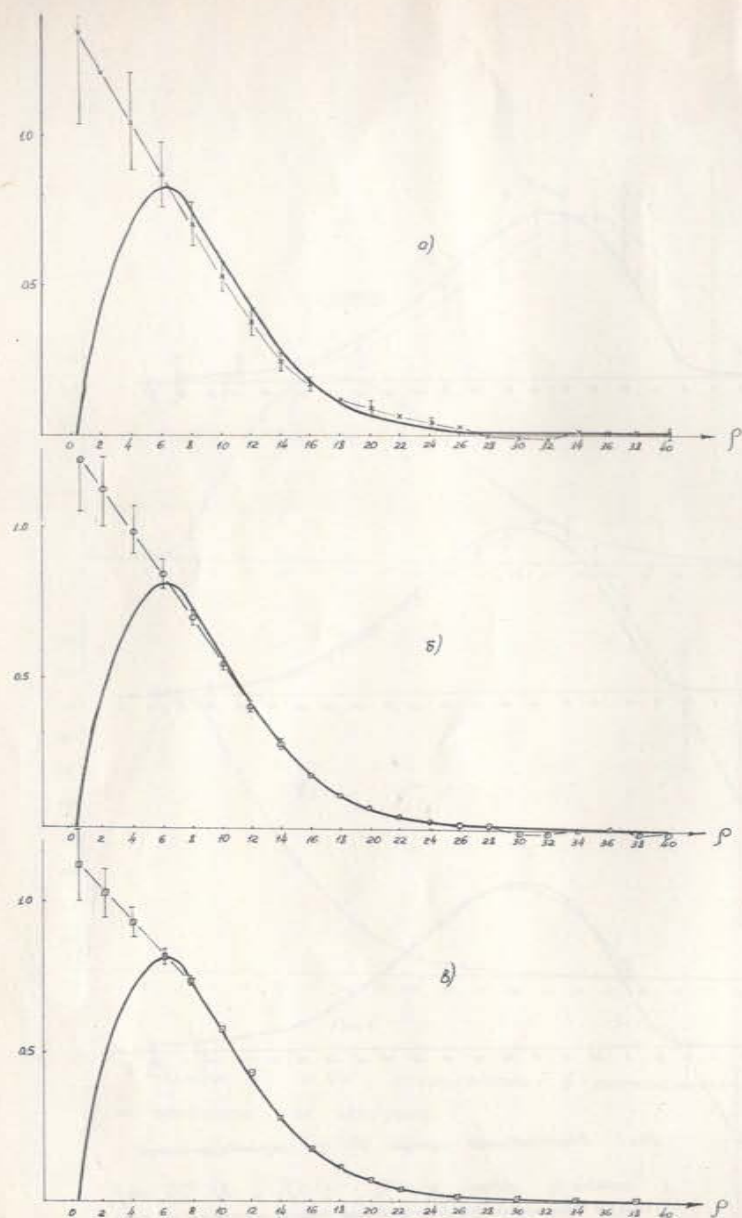


Рис. 6. Восстановление функции  $\varphi_f$  при процентной ошибке  $S$ , равной а) 10%, б) 3%, в) 1% от  $f$ .

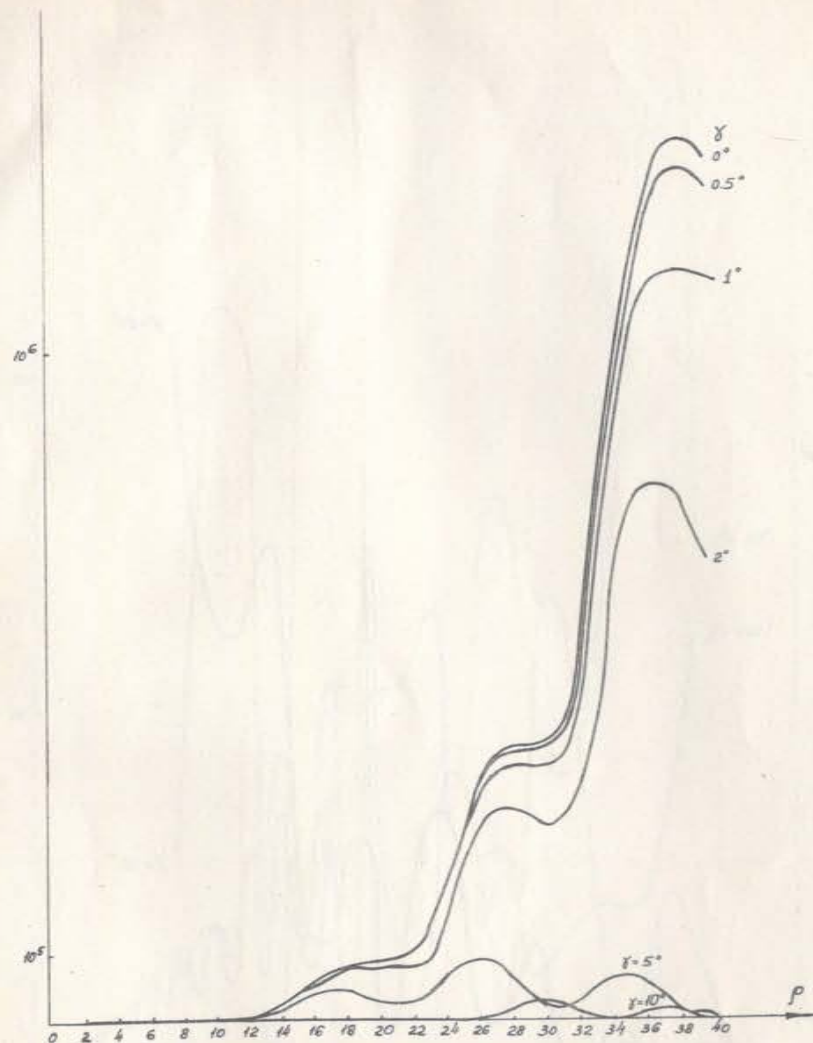


Рис. 7. Кривые функции  $K(j, i)$  в зависимости от  $\rho$  для  $j=1 (\gamma=0^\circ)$ ,  $j=2 (\gamma=0.5^\circ)$ ,  $j=3 (\gamma=1^\circ)$ ,  $j=4 (\gamma=2^\circ)$ .

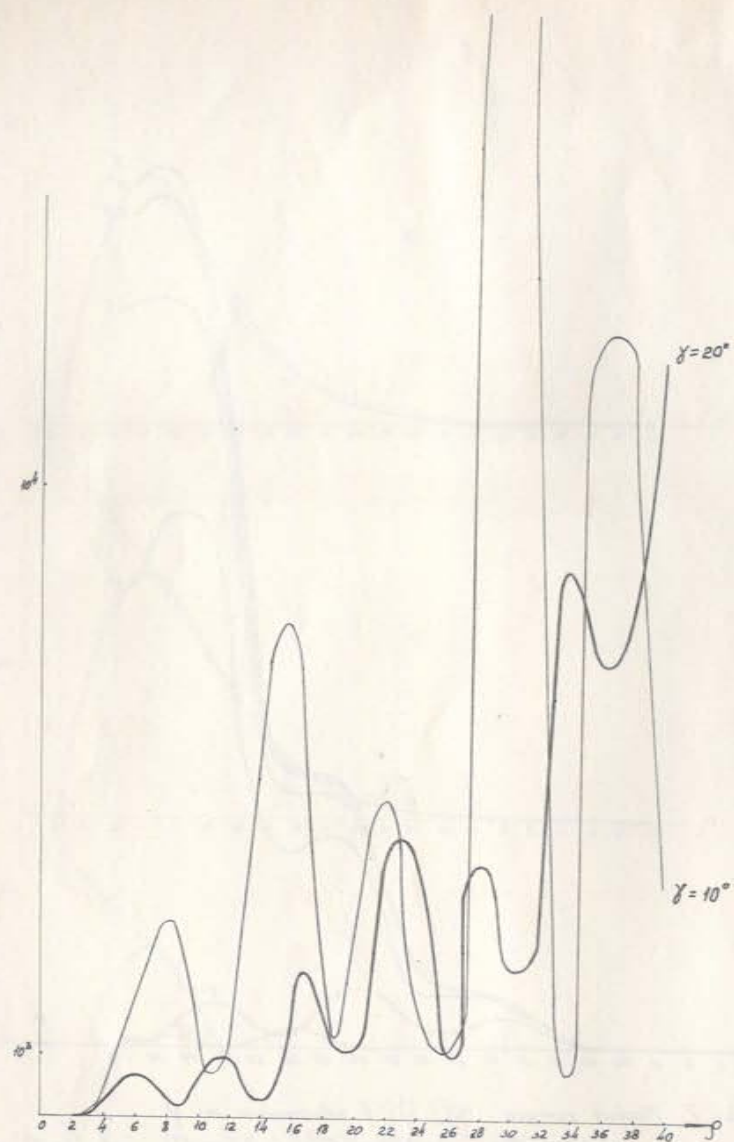


Рис. 8. Кривые функции  $K(j, i)$  в зависимости от  $\rho_i$  для  $j=6$  ( $\gamma=10^\circ$ ) и  $j=7$  ( $\gamma=20^\circ$ ).

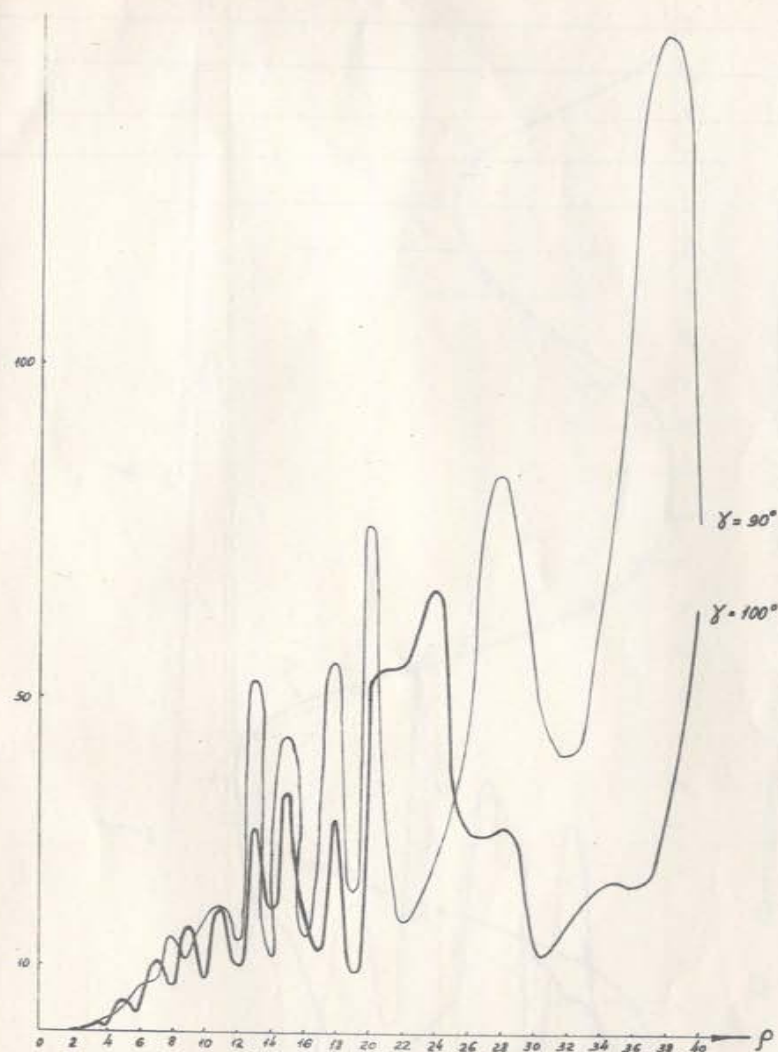


Рис. 9. Кривые функции  $K(j, i)$  в зависимости от  $\rho_i$  для  $j=14$  ( $\gamma=90^\circ$ ) и  $j=15$  ( $\gamma=100^\circ$ ).

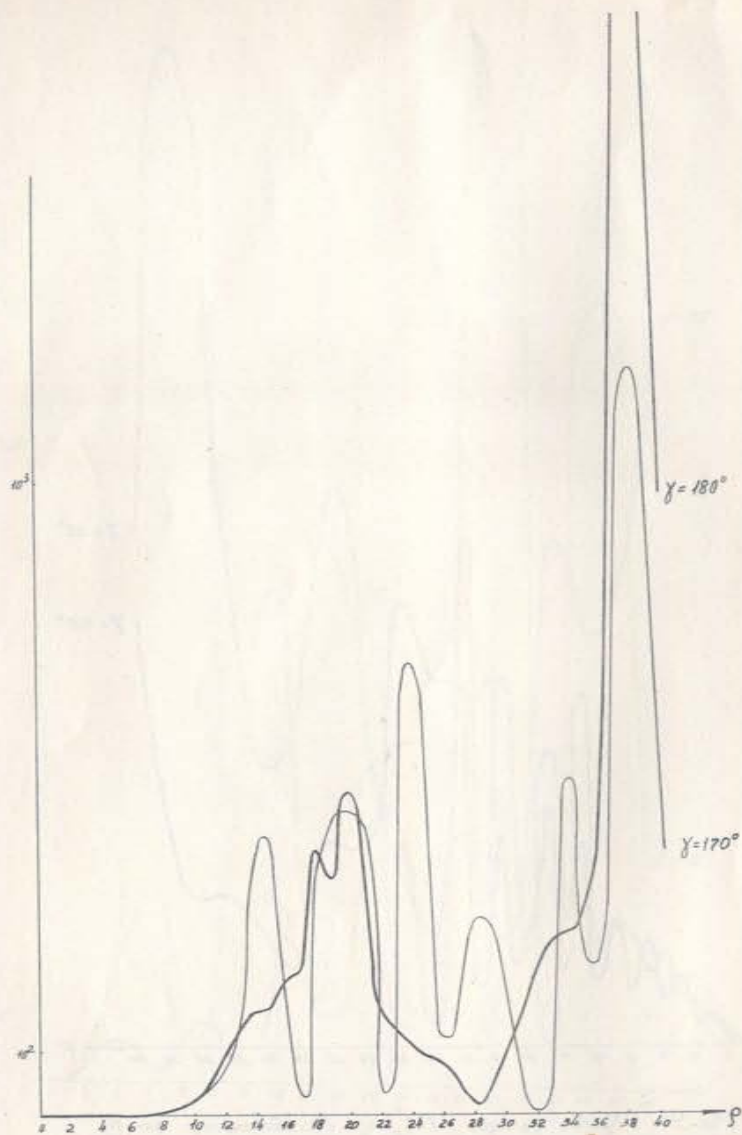


Рис. 10. Кривые функции  $K(j, i)$  в зависимости от  $\rho$ ; для  $j = 32$  ( $\gamma = 170^\circ$ ) и  $j = 37$  ( $\gamma = 180^\circ$ ).

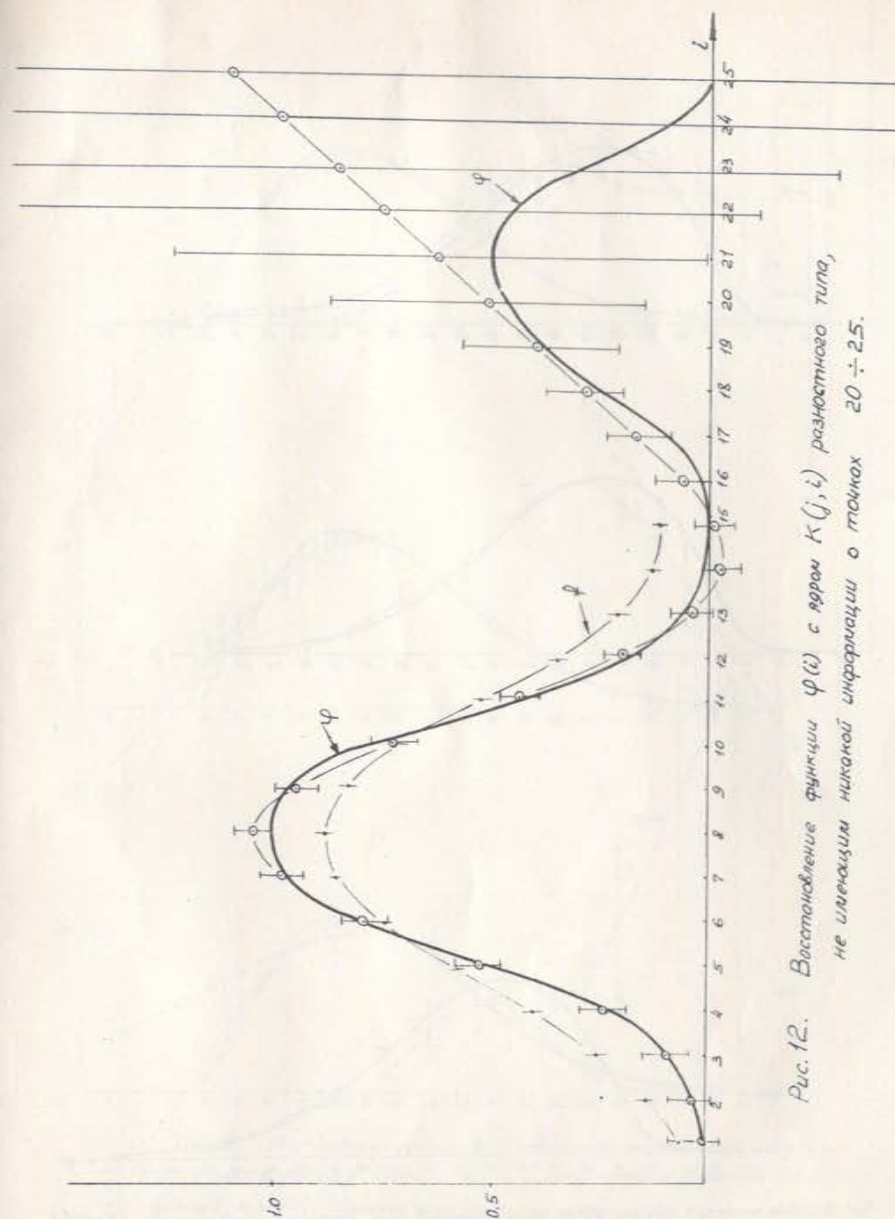


Рис. 12. Восстановление функции  $\varphi(i)$  с ядра  $K(j, i)$  различного типа, не имеющим никакой информации о точках  $20 \div 25$ .

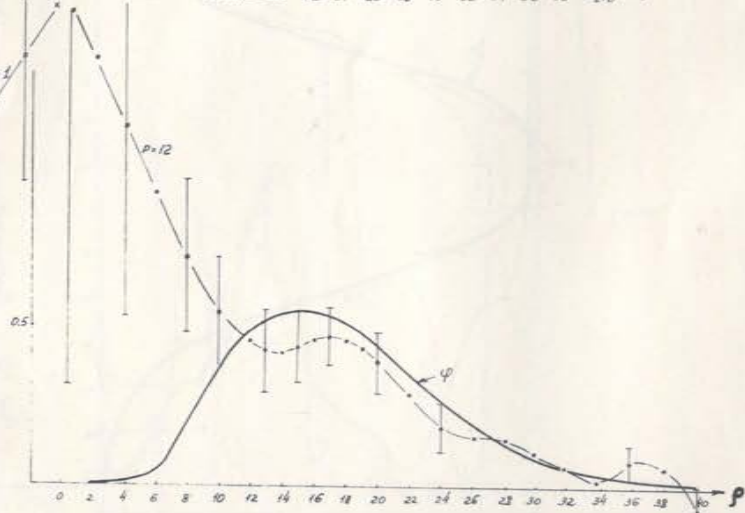
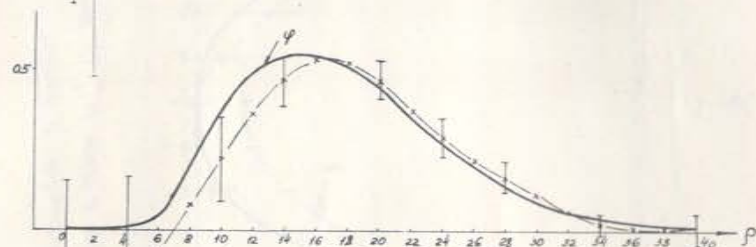
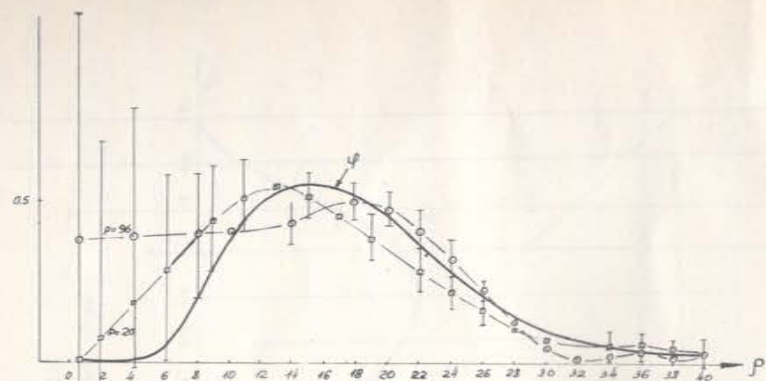


Рис. 13. Восстановление функции  $\varphi_1$  для разных случайных чисел, взятых при вычислении  $f$  ( $S=af$ )  
 $p$  — число, характеризующее серию случайных чисел.

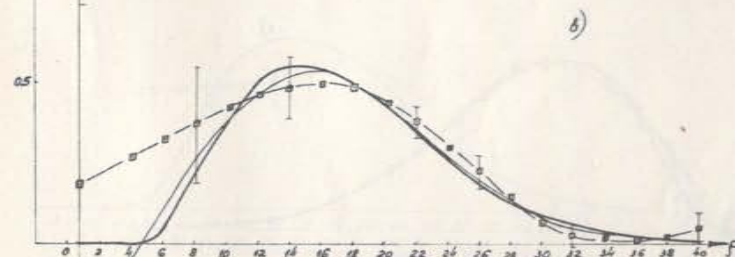
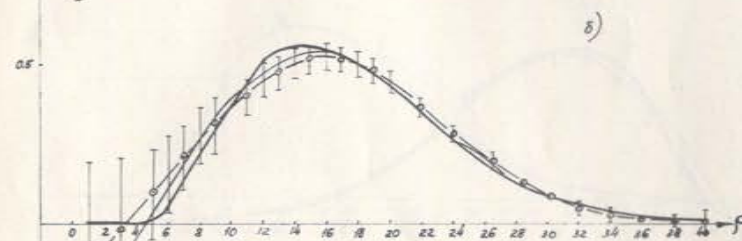
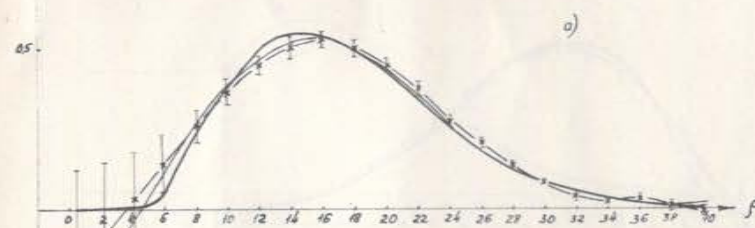


Рис. 14. Восстановление функции  $\varphi_1$  в зависимости от числа узлов, для которых рассчитывалась функция  $f$ . Графики а), б), в) соответствуют вариантам 2, 3, 4 (см. таблицу 1, пункт 5б)). Сплошной тонкой линией изображена восп. функция для вар. 1.  
 Среднеквадратичная ошибка  $S = 0.01 f$ .

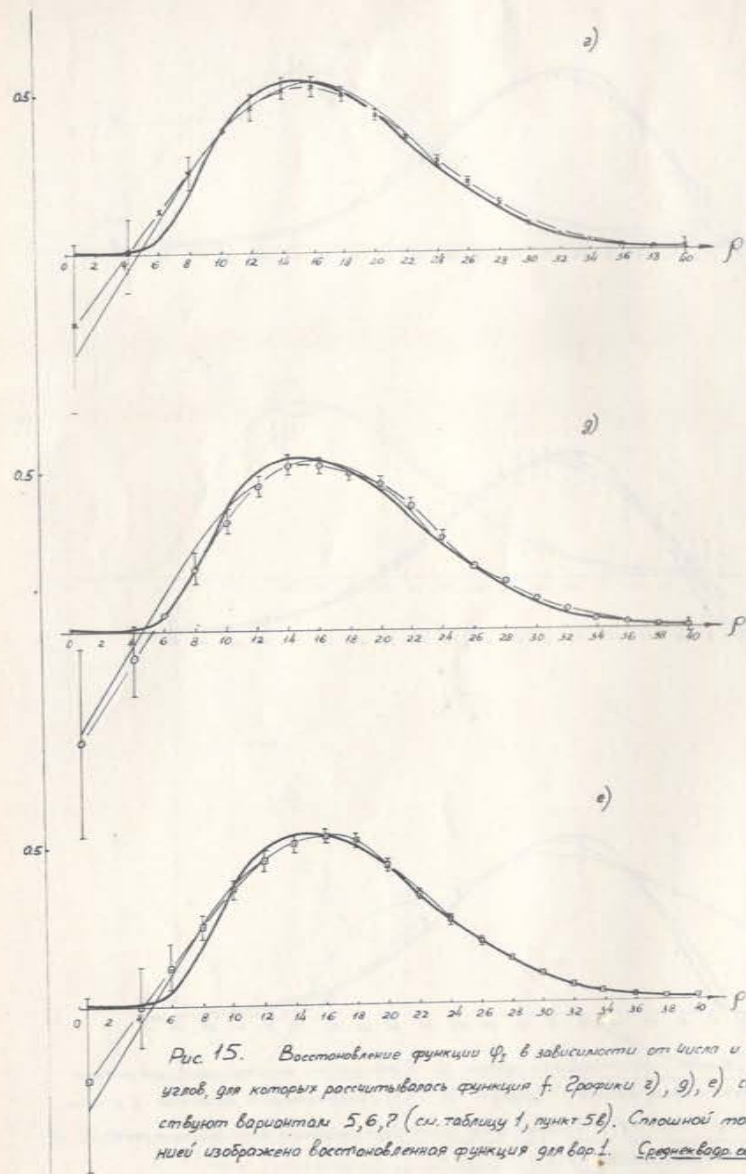


Рис. 15. Восстановление функции  $\varphi_2$  в зависимости от числа и области углов, для которых рассчитывалась функция  $f$ . Графики а), б), в) соответствуют вариантам 5, 6, 7 (см. таблицу 1, пункт 5б). Сплошной тонкой линией изображена восстановленная функция для вар. 1. Среднеквадр. ош.  $S = 0.01 f$ .

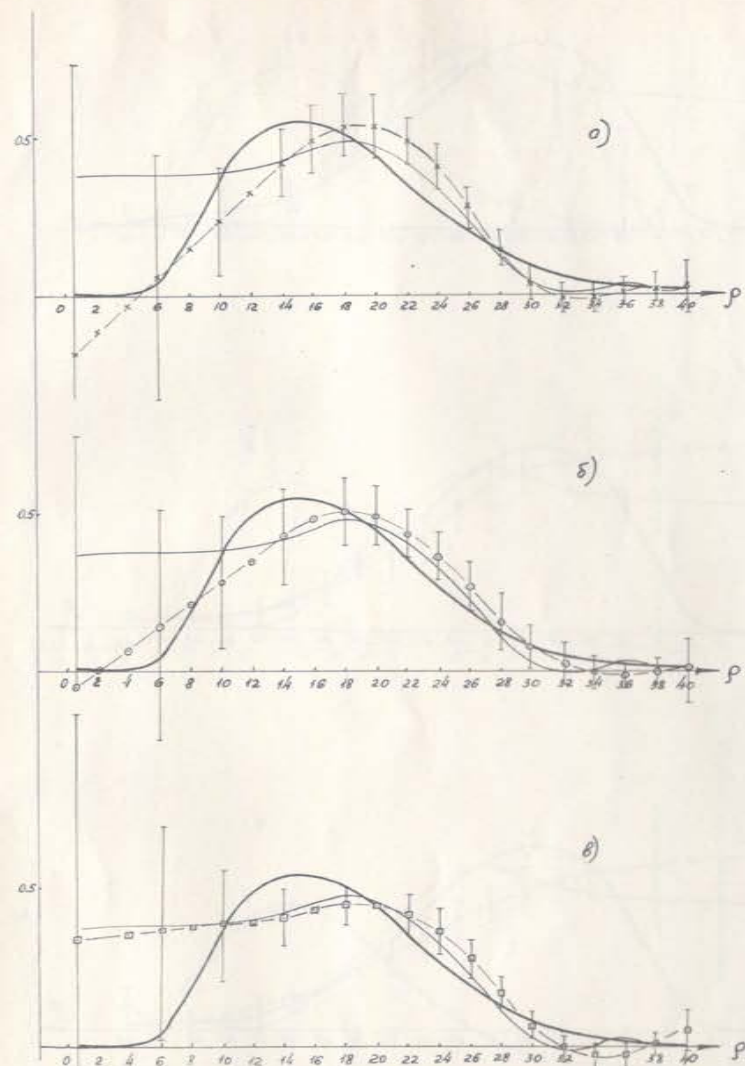


Рис. 16. Восстановление функции  $\varphi_2$  в зависимости от числа и области углов, для которых рассчитывалась функция  $f$ . Графики а), б), в) соответствуют вариантам 2, 3, 5 (см. таблицу 1, пункт 5б). Сплошной тонкой линией изображена восстановленная функция для вар. 1. Среднеквадр. ош.  $S = 0.1 f$ .

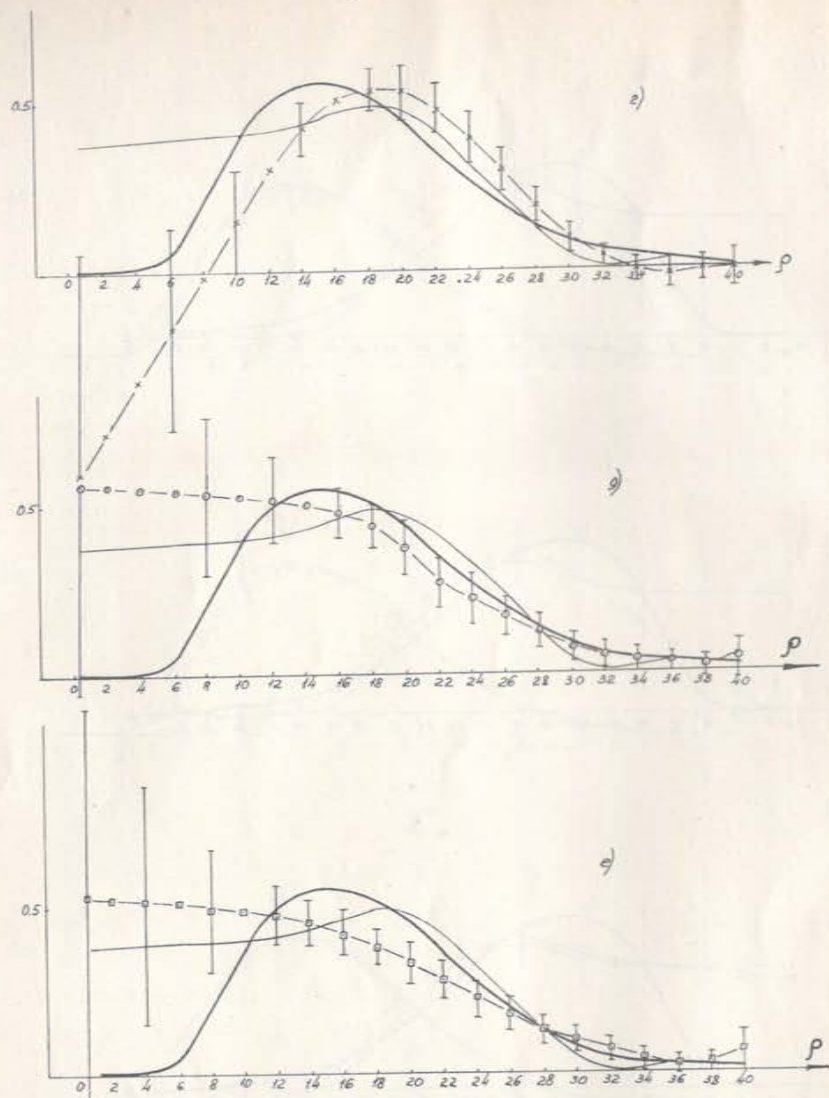


Рис. 17. Восстановление функции  $\varphi_1$  в зависимости от числа  $n$  области узлов, для которых рассчитывалась функция  $f$ . Графики а), б), в) соответствуют вариантам 6, 7, 8 (см. таблицу 1, пункт 5б). Сплошной тонкой линией везде изображена восстановленная функция для вар. 1. Среднеквадратичная ошибка  $S = 0.1 f$ .

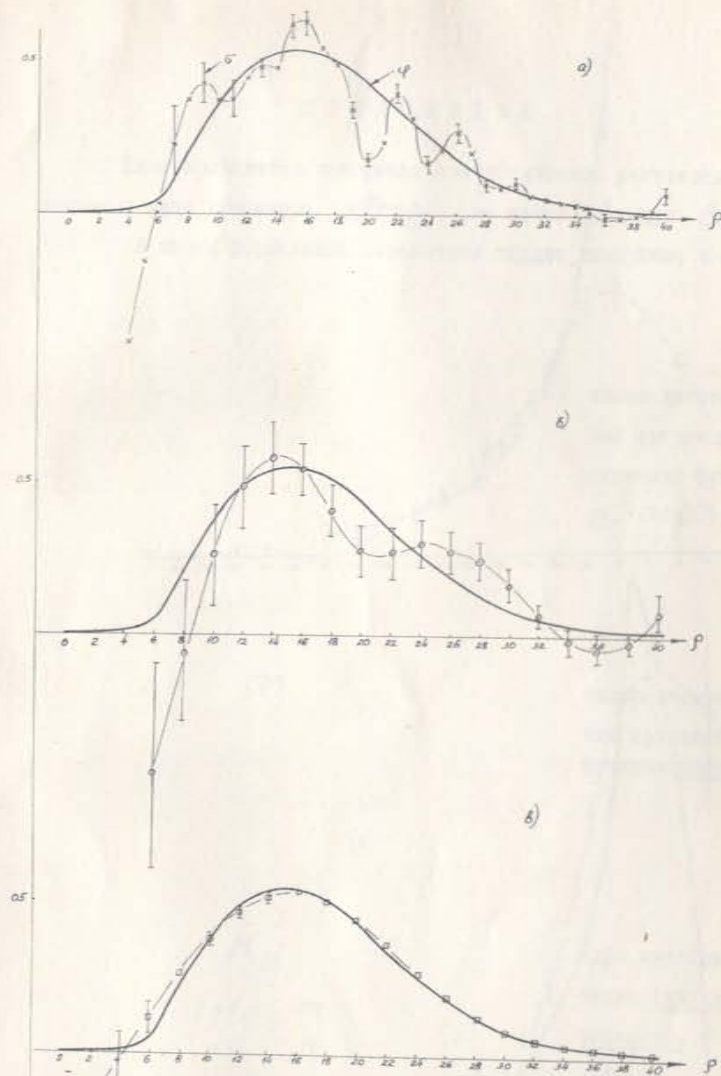


Рис. 18. Восстановление функции  $\varphi_1$  по функции  $f$ , рассчитанной с учетом ошибки функции  $\varphi_1$  при среднеквадратичной ошибке измерения а) 1%, б) 10% от  $f$ . На рис. б) восстановление  $\varphi_1$  в математическом эксперименте с  $S = 0.01 f$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ.

Ниже приводится программа статистической регуляризации, оформленная в виде процедуры *streg* на языке *Algol-60*.

В число формальных параметров входят следующие величины:

1.  $n$

число дискретных значений аргумента восстанавливаемой функции (вводится,  $n \leq 60$ ).

2.  $m$

число дискретных значений аргумента измеряемой функции (вводится,  $m \leq 60$ ).

3.  $K_{ji}$

$j = 1, \dots, m$

$i = 1, \dots, n$

ядро интегрального уравнения (вводится или вычисляется в процедуре *defik*).

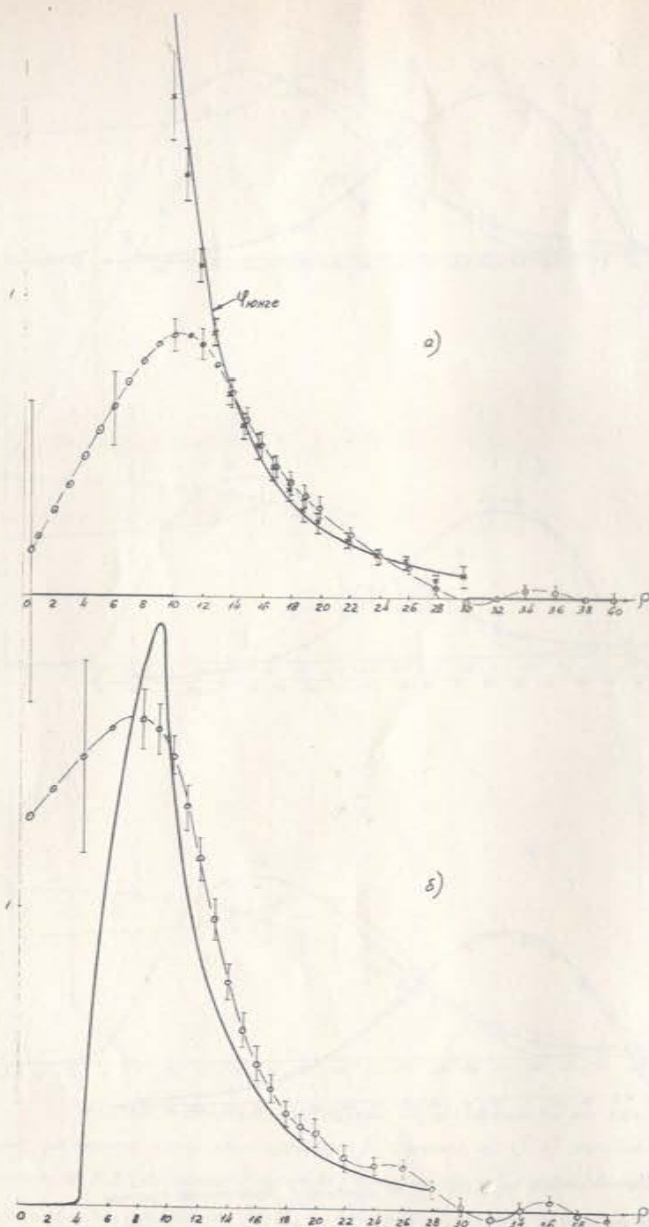


Рис. 19. Восстановление распределения частиц по размерам типа Юнге а) — б) — Восстановление сглаженной функции б).

4.  $XX_i$   
 $i = 1, \dots, n$

дискретные значения аргумента функции восстановления (вводятся).

$XX_i$  могут быть введены с точностью до константы, поскольку они входят только в выражение  $\Omega(\bar{\varphi})$  и влияют только на величину  $\alpha$ , но при алгебраизации  $XX_i$  учитываются в  $K_{ji}$ , и здесь их значения должны соответствовать физике задачи.

5.  $f_j$   
 $j = 1, \dots, m$

измеряемая функция, правая часть системы уравнений (2). (вычисляется или вводится в процедуру defif).

6.  $S_j$   
 $j = 1, \dots, m$

среднеквадратичная ошибка измерений (вычисляется или вводится процедурой defif или defis).

7.  $\alpha$

параметр регуляризации (вводится).

$\alpha > 0$  — счет с заданным  $\alpha$ , равным введенному (нужно иметь в виду, что величина реального  $\alpha$ , с которым будет производиться регуляризация, зависит от значений  $XX_i$ , поскольку они входят в выражение регуляризующего функционала  $\Omega(\bar{\varphi})$ ).

$\alpha < 0$  — счет с выбором  $\alpha$ ,  
 $\alpha_{\text{нач}} = -\alpha$ .

8.  $\beta$

обратный квадрат среднегеометрической ошибки измерения (вводится).

$\beta > 0$  — счет с заданным  $\beta = \frac{\beta_0}{S_a^2}$ .

$\beta < 0$  — счет с выбором  $\beta$ .

$\beta < 0$  может быть любым отрицательным числом, поскольку в программе есть присвоение

$$\beta_{\text{нач}} = \frac{1}{S_a^2}.$$

9.  $inf[1:3]$ 

( вводится )

$$inf[1] = 1 + \varepsilon_\alpha, \quad \varepsilon_\alpha = \frac{\%}{100}$$

$$inf[2] = 1 + \varepsilon_\beta, \quad \varepsilon_\beta = \frac{\%}{100}$$

$$inf[3] = \varepsilon_\rho$$

$\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$  точность вычисления  $\alpha$  и  $\beta$ .

10.  $fi_i$ 

$$i = 1, \dots, n$$

восстанавливаемая функция.

II.  $sigma_i$ 

$$i = 1, \dots, n$$

ошибка восстановления.

Процедура **streg** осуществляет процесс статистической регуляризации и выбор наиболее вероятной ошибки измерения.

В процедуре вычисляются следующие величины:

$$sa = \prod_{j=1}^m s_j^{\frac{1}{m}}$$

$$\bar{B} = K^* \bar{W} K$$

$$\bar{\sigma} = K^* \bar{W} \bar{f}$$

$(omo_{ij})$  — прямоугольная матрица, элементы которой являются элементами матрицы  $\Omega$ . Для удобства программирования  $omo$  преобразована и не совпадает с  $\Omega$ , которая является симметричной положительно определенной матрицей.

$aa_i$  }  
 $bb_i$  } — коэффициенты, входящие в выражение для нормы второй производной функции  $\bar{\varphi}$ .  
 $cc_i$  }

$alfa, beta, fi, sigma$

вычисляются при помощи обращения к процедурам **reg, om, delt, defalf, defbet**,

описанных внутри процедуры **streg**, а также к не описанной процедуре **invers** (см. [8], стр. 37, алгоритм 66а, «Обращение симметричной матрицы»).

Процедуры **reg, om, delt, defalf, defbet**, описанные в теле процедуры **streg**, имеют следующее содержание:

procedure reg

вычисляет величины

$$d = (\beta \bar{B} + \alpha \Omega)$$

$$d^{-1} = (\beta \bar{B} + \alpha \Omega)^{-1}$$

при помощи обращения к процедуре **invers**.

**fi**  
**sigma**.

procedure *Om*

вычисляет

$$\langle \Omega(\tilde{\varphi}) \rangle = Sp(\Omega d^{-1}) + (\tilde{\varphi}, \Omega \tilde{\varphi})$$

$$\omega = \frac{n-2}{\alpha} - \langle \Omega(\tilde{\varphi}) \rangle_{\alpha, \beta}$$

procedure *delt*

вычисляет

$$\langle \Delta(\tilde{\varphi}) \rangle = Sp(\tilde{B} d^{-1}) + (\tilde{\varphi}, \tilde{B} \tilde{\varphi}) -$$

$$- 2(\kappa^* \tilde{w} \tilde{f}, \tilde{\varphi}) + (\tilde{f}, \tilde{w} \tilde{f})$$

$$\delta = \frac{m}{\beta} - \langle \Delta(\tilde{\varphi}) \rangle_{\alpha, \beta}$$

procedure *defalf*вычисляет  $\alpha$ , соответствующее выполнению условия

$$\frac{dP(\alpha, \beta | \tilde{f})}{d\alpha} = 0.$$

procedure *defbet*вычисляет  $\beta$ , соответствующее выполнению условия

$$\frac{dP(\alpha, \beta | \tilde{f})}{d\beta} = 0.$$

procedure *streg* (*n, m, k, xx, f, s, inf, alfa, beta,*  
*fi, sigma*);

value *n, m*;integer *n, m*;real *alfa, beta*;array *k, xx, f, s, inf, fi, sigma*;begin real *omega, delta, bet, cors, sa*;integer *r, i, j*;array *a, aa, bb, cc[1:n+2], b, d[1:n, 1:n],*  
*omo[1:5, 1:n]*;comment do *a, aa, bb, cc, 62, b, d, 3600,*  
*omo, 300*;

procedure reg;

begin integer r, i, j;

for i:=1 step 1 until n do

for j:=1 step 1 until n do

d[i, j] := b[i, j] \* beta;

for i:=1 step 1 until n do

begin if i=n-1 then r:=i+1 else if i=n then

r:=i else r:=i+2; for j:=i step 1 until r do

begin d[i, j] := d[i, j] + amo[i-j+3, j] \* alfa;

if i≠j then d[j, i] := d[i, j]

end

end; invers(n, d);

for i:=1 step 1 until n do fi[i] := 0;

for j:=1 step 1 until n do

begin for i:=1 step 1 until n do

fi[j] := fi[j] + d[j, i] \* o[i] \* beta;

sigma[j] := sqrt(d[j, j])

end

end; comment proc. reg;

procedure am;

begin integer i, j, r, v;

omega := 0; for i:=1 step 1 until n do

begin if i=1 then r:=3 else if i=2 then r:=2 else r:=1;

if i=n-1 then begin v:=4; amo[4, i] := amo[2, i+1]

end else

if i=n then v:=3 else begin v:=5; amo[5, i] :=

amo[1, i+2]; amo[4, i] := amo[2, i+1]

end;

for j:=r step 1 until v do

omega := omega + amo[j, i] \* d[i+j-3, i];

omega := omega + amo[3, i] \* fi[i] \* 2;

if i≠n and i≠n-1 then

omega := omega + 2 \* fi[i] \* (amo[2, i+1] \* fi[i+1] + amo[1, i+2] \* fi[i+2]);

if i=n-1 then omega := omega + 2 \* fi[n-1] \* fi[n] \* amo[2, n]

end;

omega := (n-2) / alfa - omega

end; comment proc. am;

procedure delt;

begin integer  $i, j$ ; real  $v, w, dv$ ; array  $rt, t[1:n]$ ;

comment do  $rt, t, 60$ ;

$\text{delta} := 0$ ;  $v := 0$ ;  $w := 0$ ;  $dv := 0$ ;

for  $i := 1$  step 1 until  $n$  do begin  $rt[i] := 0$ ;  $t[i] := 0$ ;

for  $j := 1$  step 1 until  $n$  do begin

$rt[i] := rt[i] + b[i, j] * d[j, i]$ ;

$t[i] := t[i] + b[i, j] * fi[i] * fi[j]$

end;

$\text{delta} := \text{delta} + rt[i]$ ;  $v := v + t[i]$ ;  $w := w + o[i] * fi[i]$

end;

for  $i := 1$  step 1 until  $m$  do

$dv := dv + (f[i] / s[i])^{1/2}$ ;

$\text{delta} := \text{delta} + v - 2 * w + dv$ ;  $\text{delta} := m / \text{beta} - \text{delta}$

end; comment proc. delt;

procedure defalf;

begin real  $alm, aln, alk, als$ ;

$alm := 4 * \text{sign}(\text{omega})$ ;

$als := \text{omega}$ ;

$r1$ :  $alfa := alm * alfa$ ; reg; om;

if  $\text{omega} * als > 0$  then go to  $r1$ ;

$aln := (alfa + alfa / alm) / 5$ ;

$alk := 4 * aln$ ;

$r2$ :  $alfa := (aln + alk) * 0.5$ ; reg; om;

if  $\text{omega} < 0$  then

$alk := alfa$  else  $aln := alfa$ ;

if  $alk > aln * \text{inf}[1]$  then go to  $r2$

end; comment proc. defalf;

procedure defbet ;

begin real betm, betn, betk, bets ;

betm := 4 + sign(delta) ;

bets := delta ;

r3: beta := betm \* beta ; reg ; delt ;

if delta \* bets > 0 then go to r3 ;

betn := (beta + beta/betm) / 5 ;

betk := 4 \* betn ;

r4: beta := (betn + betk) \* 0.5 ; reg ; delt ;

if delta < 0 then

betk := beta else betn := beta ;

if betk > betn \* inf[2] then go to r4

end ; comment proc. defbet ;

sa := 0 ; for j := 1 step 1 until m do

sa := sa + ln(s[j]) ;

sa := exp(sa/m) ; inout("p2-10", sa) ;

for j := 1 step 1 until m do s[j] := s[j] / sa ;

for i := 1 step 1 until n do

for r := 1 step 1 until i do

begin b[i,r] := 0 ; for j := 1 step 1 until m do

b[i,r] := b[i,r] + kappa[j,i] \* kappa[j,r] / s[j] + 2 ;

if r ≠ i then b[r,i] := b[i,r]

end ;

for i := 1 step 1 until n do begin a[i] := 0 ;

for j := 1 step 1 until m do

a[i] := a[i] + kappa[j,i] \* f[j] / s[j] + 2

end ;

```

for i := 3 step 1 until n do begin
  aa[i] := 1/(xx[i] - xx[i-1]); bb[i] := -1/(xx[i] - xx[i-1]) -
  1/(xx[i-1] - xx[i-2]); cc[i] := 1/(xx[i-1] - xx[i-2])
end;

```

```

aa[1] := 0; aa[2] := 0; bb[2] := 0; bb[n+1] := 0;

```

```

cc[n+1] := 0; cc[n+2] := 0;

```

```

for i := 1 step 1 until n do begin

```

```

  omo[1, i] := aa[i] * cc[i];

```

```

  omo[2, i] := aa[i] * bb[i] + bb[i+1] * cc[i+1];

```

```

  omo[3, i] := aa[i] + 2 * bb[i+1] + 2 * cc[i+2] + 2

```

```

end;

```

```

if beta > 0 then begin beta := beta/sa + 2;

```

```

  if alfa > 0 then begin reg; go to m1

```

```

    end else begin alfa := -alfa;

```

```

    reg; om; defalf; go to m1

```

```

  end

```

```

end;

```

```

if beta < 0 then begin beta := 1/sa + 2;

```

```

  if alfa > 0 then begin reg; delt; defbet;

```

```

    go to m1 end else

```

```

    alfa := -alfa; bet := beta; reg; om;

```

```

m2: defalf; delt; defbet;

```

```

  if abs(bet - beta) < beta * inf[3]

```

```

  then go to m1 else begin om; bet :=

```

```

    beta; go to m2 end

```

```

end;

```

```

m1: cors := 1/(sqrt(beta) * sa);

```

```

sa := sa * cors;

```

```

for j := 1 step 1 until m do

```

```

  s[j] := s[j] * sa;

```

```

inout ("p2-10", cors, sa, s)

```

```

end; comment proc. streg;

```

ПРОГРАММА ОБР-18, использующая процедуру streg  
для реализации статистической регуляризации.

Содержание процедур, описанных в ОБР-18:

procedure defik

вычисление или ввод матри-  
цы  $K$ .

procedure defis

вычисление или ввод средне-  
квадратичной ошибки измере-  
ния  $\tilde{S}$ .

procedure defif

вычисление или ввод измеря-  
емой функции  $f$ .

begin integer  $ch, n, m$ ;

inout ("r10-2",  $ch, n, m$ );

begin integer  $z$ ;

real  $alfa, beta$ ;

array  $f, s [1:m]$ ,

$fi, sigma, xx [1:n]$ ,

$\kappa [1:m, 1:n], inf [1:3]$ ;

comment do  $f, s, fi, sigma, xx, 60, \kappa, 3600$ ;

procedure invers ( $n, al$ );

.....

procedure defik;

.....\*)

+) Тела процедур мы опускаем, поскольку содержание их может  
меняться в зависимости от того, вводится соответствующая данной  
процедуре величина или вычисляется по той или иной формуле.

Об invers см. [8].

procedure defis ;

procedure defif ;

procedure streg (n, m, k, xx, f, s, inf, alfa, beta, fi, sigma);

inout ("r10-2", xx); defik ;

for z:=1 step 1 until ch do begin

inout ("r10-2", alfa, beta, inf);

defis ; defif ;

streg (n, m, k, xx, f, s, inf, alfa, beta, fi, sigma);

inout ("p2-10", alfa, beta, fi, sigma) end ;

m4: end

end ;

# ЛИТЕРАТУРА

1. К.С.Шифрин, Рассеяние света в мутной среде, Гос. изд. тех.-теор. лит., 1951, Ленинград.
2. К.С.Шифрин, И.Б.Колмаков, О вычислении размеров честиц дисперсной системы по индикатриссе рассеяния, Изв.АН СССР сер.Физика атм. и океана, 7, 554(№5, 1971).
3. А.Н.Тихонов, О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. Докл. АН СССР, 151, №3, 1963.
4. В.Ф.Турчин, Решение уравнения Фредгольма I рода в статистическом ансамбле гладких функций, Ж.вычисл.матем.и математ. физ. 7, 1270(1967).
5. В.Ф.Турчин, Выбор ансамбля гладких функций при решении обратной задачи, Ж.вычисл.матем.и матем.физ. 8, 230(1968).
6. В.Ф.Турчин, В.З.Нозик, Статистическая регуляризация решения некорректных задач, Изв.АН СССР, сер."Физ.атм.и океана", 5, 29(1969).
7. В.Ф.Турчин, В.П.Козлов, М.С.Малкевич, Использование методов математической статистики для решения некорректных задач, Успехи физических наук, т.102, вып.3, ноябрь 1970.
8. Н.И.Агеев, В.П.Алик, Л.В.Малюк, Ю.И.Марков, Алгоритмы (51-100), вып.3, Вычисл.центр АН СССР, Москва, 1966.
9. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин, Л.А.Владимиров, Г.Г.Дорошенко и А.А.Думова, К вопросу об обработке спектров  $\gamma$ -квантов и быстрых нейтронов, измеренных с помощью однокристалльных сцинтилляционных спектрометров. Изв.АН СССР, т.29, №5, 1965, серия физическая.