



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лидов М.Л., Лукьянов С.С.,
Тесленко Н.М.

Автоматическая станция в
окрестности лунной
либрационной точки L2. 1.
Предварительный анализ
схемы запуска и управления
на гало-орбите

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лидов М.Л., Лукьянов С.С., Тесленко Н.М. Автоматическая станция в окрестности лунной либрационной точки L2. 1. Предварительный анализ схемы запуска и управления на гало-орбите // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1974. № 116. 33 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1974-116>

Цена 20 коп.

055(02)2



М.Л. Лидов, С.С. Лукьянов, Н.М. Тесленко.
Автоматическая станция в окрестности лунной либрационной
точки L_2 .
Редактор М.А. Вашковьяк. Корректор Н.М. Тесленко.
№ Т - 18722 от 25.10.1974г. Заказ №2839 Тираж 100.
Формат бумаги 60X90, 1/16. Объем 4,1 п/л. 2,8 уч. изд л.
Цена 20 коп.

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики
АН СССР. Москва, Миусская пл. 4.



116

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

М.Л. Лидов, С.С. Лукьянов, Н.М. Тесленко.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ СТАНЦИЯ
В ОКРЕСТНОСТИ ЛУННОЙ ЛИБРАЦИОННОЙ ТОЧКИ L_2
1. Предварительный анализ схемы запуска и управления
на гало - орбите.

Препринт № 116 за 1974 г.

Москва.

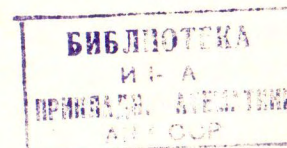
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

М.Л.Лидов, С.С.Лукьянов,
Н.М.Тесленко

УДК 629.78

АВТОМАТИЧЕСКАЯ СТАНЦИЯ
В ОКРЕСТНОСТИ ЛУННОЙ ЛИБРАЦИОННОЙ ТОЧКИ L_2

I Предварительный анализ схемы запуска и управления
на гало-орбите.



Москва, 1974

Содержание

	Стр.
Введение	5
I. О движении КА в окрестности L_2	8
1. Уравнения движения КА в окрестности L_2	8
2. Траектория движения КА в линеаризованной задаче	11
II. Выведение КА в окрестность L_2	16
1. Описание схемы выведения	16
2. Основные параметры задачи	18
3. О расчётных вариантах выведения	19
4. Системы координат	21
5. Метод приближенного решения краевой задачи	23
6. Точное решение краевой задачи	28
7. О точности приближённого расчёта	29
8. Численные примеры	32
III. Об управлении движением КА в окрестности L_2	36
1. Задача об удержании КА в окрестности L_2	36
2. Общая схема коррекции	37
3. Алгоритмы расчёта коррекции для задачи управления движением КА в плоскости xOy	39
4. О периодических движениях в плоскости yOz (идеальная задача)	41
5. Управление движением КА в окрестности заданной гало-орбиты	44
6. Численное решение задачи: статистические оценки энергетических затрат и устойчивости параметров орбиты	48
7. Дополнительные оценки	53

В последние годы появился ряд работ [1] - [9] американских авторов, посвященных задаче создания автоматической станции в окрестности лунной либрационной точки L_2 . Точка L_2 , которая является точкой неустойчивого равновесия в ограниченной эллиптической задаче трех тел, расположена на луче Земля-Луна за Луной примерно на расстоянии ≈ 65 тыс. км. Такую станцию предполагается в основном использовать как ретранслятор для связи наземного пункта с автоматической (или пилотируемой) станцией, находящейся на обратной стороне Луны или на орбите ИСД, когда станция находится за Луной. В связи с созданием такой станции возникает ряд задач динамики космического полёта. В частности:

1. Задача выбора энергетически экономной схемы выведения аппарата в окрестность L_2 и оценка потребных энергетических затрат.

2. Задача удержания аппарата в окрестности точки L_2 . Эта задача возникает в связи с тем, что L_2 - точка неустойчивого равновесия. При этом для проведения коррекции движения аппарата необходимо только, чтобы периодически была прямая видимость аппарата из наземного пункта.

3. Как следует из анализа, без специальных активных маневров нельзя обеспечить постоянную прямую видимость этого ретранслятора из наземных пунктов. Для обеспечения постоянной видимости предлагается [1] поддерживать движение аппарата в окрестности специальной, так называемой гало-орбиты. Все точки этой орбиты расположены на расстоянии нескольких тысяч километров от L_2 и видны из любого наземного пункта вместе с Луной (не экранируются Луной).

Для реализации такой орбиты необходимо примерно один или два раза в 14 дней осуществлять активный маневр, синхронизирующий естественное движение аппарата в плоскости лунной орбиты с

движением по нормали к ней.

Последние две задачи включают в себя задачу определения движения аппарата и задачу выбора схемы управления движением и оценки энергетических затрат.

В доступных нам американских работах [4] - [5] задача выведения в окрестность L_2 описана кратко с помощью схематических рисунков и указания затрат характеристической скорости на отдельные маневры. Одной из задач этой работы является анализ, разработка алгоритма и получение независимых предварительных оценок для задачи полёта Земля - точка L_2 . В работе описан метод, который использовался при решении этой задачи, и приведены оценки энергетических затрат. Предварительные расчёты показали заметную зависимость энергетических затрат от положения Луны на её орбите.

Хотя полная оптимизация решения не проводилась, полученное в результате наших расчётов значение характеристической скорости

$W = 346$ м/сек для случая, когда Луна находится в апоцентре её орбиты, близко к указанным в работе [5] значениям $W_1 = 332$ м/сек и $W_2 = 396$ м/сек.

При анализе задачи управления движением аппарата в окрестности L_2 в работе рассматриваются две указанных выше задачи. Эти задачи в некоторых постановках рассматривались в работах [1] - [3], [6] - [9]. Эти работы безусловно способствовали разработке анализируемых здесь схем управления. В данной работе рассматриваются импульсные коррекции. Так как в линейной постановке естественное движение описывается простыми формулами, то эффективным оказался метод статистических испытаний, который позволил очень просто включить в расчётную схему случайные параметры, моделирующие неточность определения траектории движения и

исполнения коррекции, и проводить оптимизацию по свободным параметрам.

При выборе схемы коррекции в случае движения, описываемого линейными уравнениями, мы стремились, чтобы эти схемы допускали аналогичное толкование для нелинейной задачи с учётом возмущений от Солнца. Так, при решении задачи синхронизации вместо синхронизации периодов [1], [7] в этой работе решается задача синхронизации фаз движения в плоскости лунной орбиты и по нормали к ней.

Полученные методом статистических испытаний потребные затраты на удержание аппарата в окрестности L_2 ($W = 37-47 \frac{\text{м/сек}}{\text{год}}$) и совместное решение задачи удержания и синхронизации движения ($W = 175 \frac{\text{м/сек}}{\text{год}}$) удовлетворительно согласуются с оценками, полученными для других схем управления в работах [1], [7].

Описанные результаты далеко не закрывают проблему баллистических исследований, связанных с рассматриваемой задачей. Большой круг вопросов относится к анализу нелинейной задачи с учётом возмущений от Солнца. Здесь возникает интересная проблема об удержании и синхронизации движения в окрестности выбранного почти-периодического движения и ряд других задач.

Авторы считают своим приятным долгом отметить, что их внимание к рассматриваемой задаче привлек Д.Е.Охотимский, а Д.Г.Сихарулидзе сообщил о некоторых работах в этой области.

Авторы благодарят М.А.Вашковьяка и Е.А.Сидорову за помощь при выполнении этой работы.

I. О движении КА в окрестности L_2

I. Уравнения движения КА в окрестности L_2

Движение космического аппарата (КА) в системе Земля-Луна-Солнце с достаточной степенью точности описывается уравнениями задачи четырех тел:

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{fM_\oplus \vec{R}}{R^3} + fM_\Delta \left\{ \frac{\vec{R}_\Delta - \vec{R}}{|\vec{R}_\Delta - \vec{R}|^3} - \frac{\vec{R}_\Delta}{R_\Delta^3} \right\} + fM_\odot \left\{ \frac{\vec{R}_\odot - \vec{R}}{|\vec{R}_\odot - \vec{R}|^3} - \frac{\vec{R}_\odot}{R_\odot^3} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь $\vec{R}, \vec{R}_\Delta, \vec{R}_\odot$ — геоцентрические радиусы-векторы КА, Луны и Солнца соответственно, f — гравитационная постоянная; $M_\oplus, M_\Delta, M_\odot$ — соответственно массы Земли, Луны и Солнца.

Вектор $\vec{R}_\Delta$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\vec{R}_\Delta} = -\frac{f(M_\oplus + M_\Delta)\vec{R}_\Delta}{R_\Delta^3} + fM_\odot \left\{ \frac{\vec{R}_\odot - \vec{R}_\Delta}{|\vec{R}_\odot - \vec{R}_\Delta|^3} - \frac{\vec{R}_\odot}{R_\odot^3} \right\} \quad (1.2)$$

а вектор $\vec{R}_\odot$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\vec{R}_\odot} = -\frac{f(M_\oplus + M_\odot)\vec{R}_\odot}{R_\odot^3} + fM_\Delta \left\{ \frac{\vec{R}_\Delta - \vec{R}_\odot}{|\vec{R}_\Delta - \vec{R}_\odot|^3} - \frac{\vec{R}_\Delta}{R_\Delta^3} \right\} \quad (1.3)$$

В ряде случаев для получения приближенных закономерностей движения КА оказывается возможным пренебречь влиянием одного или двух тел конечной массы. В данной задаче рассматривается движение КА, происходящее, в основном, под действием притяжения Земли и Луны. Поэтому на начальном этапе исследования будем пренебрегать влиянием Солнца, т.е. полагать $M_\odot = 0$. При этом получатся уравнения ограниченной задачи трех тел, имеющие известные Лагранжевы частные решения. Два из них, называемые треуголь-

ными, образуют с Землей и Луной равносторонние треугольники в плоскости лунной орбиты. Три остальных, называемые коллинеарными, лежат на прямой, соединяющей Землю и Луну. Следующее упрощение задачи связано с предположением, что эксцентриситет орбиты Луны равен нулю, т.е. $R_\Delta = a_\Delta = \text{const}$.

Тогда

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{fM_\oplus \vec{R}}{R^3} + fM_\Delta \left\{ \frac{\vec{R}_\Delta - \vec{R}}{|\vec{R}_\Delta - \vec{R}|^3} - \frac{\vec{R}_\Delta}{a_\Delta^3} \right\} \quad (1.4)$$

$$\ddot{\vec{R}_\Delta} = -\frac{f(M_\oplus + M_\Delta)\vec{R}_\Delta}{a_\Delta^3} \quad (1.5)$$

Пусть основная координатная плоскость совпадает с плоскостью орбиты Луны. Тогда $\vec{R}_\Delta = \{a_\Delta \cos \lambda_\Delta, a_\Delta \sin \lambda_\Delta, 0\}$, где

λ_Δ — долгота Луны. Уравнения (4) в координатной форме примут вид:

$$\ddot{X} = -\frac{fM_\oplus}{R^3}X + fM_\Delta \left\{ \frac{a_\Delta \cos \lambda_\Delta - X}{((a_\Delta \cos \lambda_\Delta - X)^2 + (a_\Delta \sin \lambda_\Delta - Y)^2 + Z^2)^{3/2}} - \frac{\cos \lambda_\Delta}{a_\Delta^2} \right\} \quad (1.6)$$

$$\ddot{Y} = -\frac{fM_\oplus}{R^3}Y + fM_\Delta \left\{ \frac{a_\Delta \sin \lambda_\Delta - Y}{((a_\Delta \cos \lambda_\Delta - X)^2 + (a_\Delta \sin \lambda_\Delta - Y)^2 + Z^2)^{3/2}} - \frac{\sin \lambda_\Delta}{a_\Delta^2} \right\}$$

$$\ddot{Z} = -\frac{fM_\oplus}{R^3}Z + fM_\Delta \frac{(-Z)}{((a_\Delta \cos \lambda_\Delta - X)^2 + (a_\Delta \sin \lambda_\Delta - Y)^2 + Z^2)^{3/2}}$$

Введем систему координат $O\xi\eta\zeta$, равномерно вращающуюся относительно оси OZ со средней угловой скоростью орбитального движения Луны $\dot{\lambda}_\Delta = n_\Delta = \sqrt{\frac{f(M_\oplus + M_\Delta)}{a_\Delta^3}}$. Пусть ось $O\xi$

направлена к Луне. Тогда

(1.7)

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2n_c \dot{\eta} &= n_c^2 \xi - fM_\oplus \frac{\xi}{R^3} + fM_c \left\{ \frac{a_c - \xi}{(a_c^2 - 2a_c \xi + R^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a_c^2} \right\} \\ \ddot{\eta} + 2n_c \dot{\xi} &= n_c^2 \eta - fM_\oplus \frac{\eta}{R^3} + fM_c \left\{ -\frac{\eta}{(a_c^2 - 2a_c \xi + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ \ddot{\zeta} &= -fM_\oplus \frac{\zeta}{R^3} + fM_c \left\{ -\frac{\zeta}{(a_c^2 - 2a_c \xi + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}\end{aligned}$$

Эти уравнения имеют известный интеграл Якоби

$$\begin{aligned}\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 &= n_c^2 (\xi^2 + \eta^2) + \frac{2fM_\oplus}{R} + \\ &+ 2fM_c \left\{ \frac{1}{(a_c^2 - 2a_c \xi + R^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\xi}{a_c^2} \right\} + C\end{aligned}\quad (1.8)$$

и пять стационарных решений (точек либрации), обозначаемых обычно $L_1, L_2, \dots, L_5$. Для всех пяти равновесных точек $\xi_i = 0$ ($i=1, 2, 3$). Координаты коллинеарных точек L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\eta_i &= 0 \\ n_c^2 \xi_i - fM_\oplus \frac{\xi_i}{|\xi_i|^3} + fM_c \left\{ \frac{a_c - \xi_i}{|a_c - \xi_i|^3} - \frac{1}{a_c^2} \right\} &= 0\end{aligned}\quad (i=1, 2, 3)\quad (1.9)$$

Приближенное решение уравнения (1.9) для трех коллинеарных точек в случае малого μ имеет вид

$$\begin{aligned}\xi_1 &\approx \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\mu\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\mu\right)^{\frac{2}{3}} \right\} a_c \\ \xi_2 &\approx \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3}\mu\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\mu\right)^{\frac{2}{3}} \right\} a_c \\ \xi_3 &\approx \left\{ -1 + \frac{7}{12}\mu \right\} a_c,\end{aligned}$$

где

$$\mu = \frac{M_c}{M_\oplus + M_c}$$

Координаты треугольных точек L_4, L_5 даются формулами

$$\xi_{4,5} = \frac{a_c}{2}, \quad \eta_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_c, \quad \eta_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} a_c$$

В дальнейшем мы будем рассматривать движение КА в окрестности точки L_2 . Для этого поместим начало подвижной системы координат $Oxyz$ в точку L_2 и введем безразмерные координаты

$$x = (\xi - \xi_2) \frac{1}{a_c}, \quad y = \eta \frac{1}{a_c}, \quad z = \zeta \frac{1}{a_c}$$

за единицу времени примем величину $\frac{1}{n_c}$ и линеаризуем уравнения (7) относительно x, y, z

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - (2B_L + 1)x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (B_L - 1)y &= 0 \\ \ddot{z} + B_L z &= 0\end{aligned}\quad (1.10)$$

$$\text{где } B_L = \left(\frac{1-\mu}{\xi_2^3} + \frac{\mu}{(\xi_2 - a_c)^3} \right) a_c^3$$

Последнее уравнение в (10) не зависит от x, y и определяет гармоническое колебание КА с частотой $\omega_z = \sqrt{B_L}$ вдоль нормали к плоскости лунной орбиты.

2. Траектория движения КА в линеаризованной задаче

Решение уравнений (10) для переменных x, y определяется корнями характеристического уравнения

$$s^4 - (B_L - 2)s^2 - (2B_L + 1)(B_L - 1) = 0$$

где $B_L > 1$. Это уравнение имеет два действительных корня $\pm \lambda$, равных по величине и противоположных по знаку

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}(B_L - 2 + \sqrt{9B_L^2 - 8B_L})}\quad (1.11)$$

Два другие корня - чисто мнимые $\pm i\omega_y$, где

$$\omega_y = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{9B_L^2 - 8B_L} - B_L + 2)} \quad (1.12)$$

Для случая движения в окрестности точки L_2 в системе Земля-Луна основные постоянные имеют следующие значения:

Таблица I

	α	ξ_2	n	T	μ	B_L
1	2	3	4	5	6	7
Безразмерная величина	1	1,16783	1	2π	0,012151	3,1904
Размерная величина	384405 км	448920 км	0,22997 $\frac{\text{рад}}{\text{сутки}}$	27,3 суток	-	-

λ	ω_y	ω_z
8	9	10
2,1587	1,8626	1,7862
0,49644 $\frac{\text{рад}}{\text{сутки}}$	0,42835 $\frac{\text{рад}}{\text{сутки}}$	0,41077 $\frac{\text{рад}}{\text{сутки}}$

Общее решение системы (10) имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin \omega_y \tau + A_2 \cos \omega_y \tau + A_3 \exp(\lambda \tau) + A_4 \exp(-\lambda \tau) \\ y &= -\kappa_2 (A_2 \sin \omega_y \tau - A_1 \cos \omega_y \tau) + \kappa_1 (A_3 \exp(\lambda \tau) - A_4 \exp(-\lambda \tau)) \\ z &= B_1 \sin \omega_z \tau + B_2 \cos \omega_z \tau \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_y (A_2 \sin \omega_y \tau - A_1 \cos \omega_y \tau) + \lambda (A_3 \exp(\lambda \tau) - A_4 \exp(-\lambda \tau)) \\ \dot{y} &= -\kappa_2 \omega_y (A_1 \sin \omega_y \tau + A_2 \cos \omega_y \tau) + \kappa_1 \lambda (A_3 \exp(\lambda \tau) + A_4 \exp(-\lambda \tau)) \\ \dot{z} &= -\omega_z (B_2 \sin \omega_z \tau - B_1 \cos \omega_z \tau) \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\tau = t - t_0$$

t_0 - произвольный начальный момент времени

$$\kappa_1 = \frac{1}{2\lambda} (\lambda^2 - 2B_L - 1)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2\omega_y} (\omega_y^2 + 2B_L + 1)$$

A_i, B_i - произвольные постоянные, значения которых определяются начальными данными $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ на момент времени t_0 :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\kappa_1 \dot{x}_0 - \lambda y_0}{\omega_y \kappa_1 - \lambda \kappa_2} \\ A_2 &= \frac{\kappa_1 \lambda x_0 - \dot{y}_0}{\lambda \kappa_1 + \omega_y \kappa_2} \\ A_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_2 \omega_y x_0 + \dot{y}_0}{\lambda \kappa_1 + \omega_y \kappa_2} - \frac{\kappa_2 \dot{x}_0 - \omega_y y_0}{\omega_y \kappa_1 - \lambda \kappa_2} \right) \\ A_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_2 \omega_y x_0 + \dot{y}_0}{\lambda \kappa_1 + \omega_y \kappa_2} + \frac{\kappa_2 \dot{x}_0 - \omega_y y_0}{\omega_y \kappa_1 - \lambda \kappa_2} \right) \\ B_1 &= \frac{\dot{z}_0}{\omega_z} \\ B_2 &= z_0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Для краткости обозначим зависимости (13) - (14)

$$\vec{f}(t-t_0, \vec{f}_0) = \{x(t, t_0), y(t, t_0), z(t, t_0), \dot{x}(t, t_0), \dot{y}(t, t_0), \dot{z}(t, t_0)\}$$

где $x(t, t_0), y(t, t_0), z(t, t_0), \dot{x}(t, t_0), \dot{y}(t, t_0), \dot{z}(t, t_0)$

определяются (I3), а произвольные постоянные согласно (I4). При этом $\vec{f}(0, \vec{f}_0) = \vec{f}_0 = \{x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\}$. Если начальные данные удовлетворяют условию $A_3 = A_4 = 0$, то в рассматриваемом приближении КА в плоскости xOy будет совершать периодическое движение по эллипсу, с центром в точке L_2 (см. рис. 1)

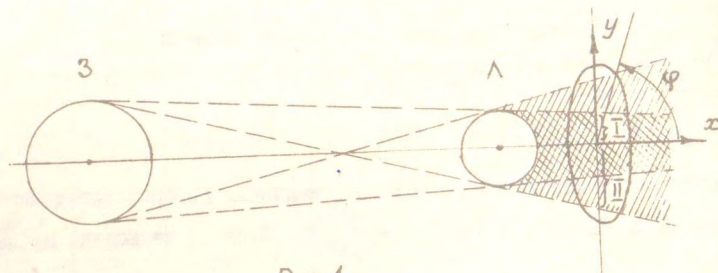


Рис. 1

При этом в зависимости от значения $A_x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ получаются различные по размерам эллипсы, у которых отношение малой полуоси

A_x , ориентированной по оси x , к большой полуоси, ориентированной по оси y , равно $\frac{1}{k_2} \approx \frac{1}{3}$.

Если определение траектории движения КА проводится по измерениям с Земли, то необходимо обеспечить, чтобы определенные участки орбиты были заведомо видны из наземных пунктов. Поэтому КА не может быть расположен в самой либрационной точке L_2 и в непосредственной близости от неё. В окрестности либрационной точки

L_2 существует зона полного затенения и зона частичного затенения КА Луной (для земного наблюдателя). На рис. 1 показаны траектория движения КА в плоскости xOy и проекции зон затенения на эту плоскость. При этом зоны затенения обозначены цифрами I и II соответственно. В проекции на плоскость yOz зоны затенения

представляют собой круги с радиусами примерно $R_1 = 960$ км, $R_{II} = 3100$ км. При этом, если КА находится в зоне полного затенения (зона I), то он не будет виден ни из одной точки земной поверхности, а вне зон затенения КА будет наблюдаться из любого наземного пункта одновременно с Луной. Если в плоскости xOy КА движется по эллипсу с малой полуосью $A_x \geq 1100$ км ($A_y > 3100$ км), то будут существовать участки траектории, находящиеся в зоне прямой видимости из любой точки земной поверхности, из которой видна Луна. На этих участках траектории могут проводиться траекторные измерения и управление движением КА.

II. Выведение космического аппарата в окрестность

точки L_2 .

I. Описание схемы выведения.

- I.1. Рассматривается следующая схема выведения КА в окрестность точки L_2 (рис. 2). После старта с Земли КА выводится на промежуточную околоземную орбиту, с которой в момент t_0 с помощью разгонного импульса $\Delta \vec{V}_0$ переводится на траекторию Земля-Луна с заданными параметрами подлёта к Луне. Параметры участка подлёта к Луне выбираются специальным образом. Перигей центр подлётной гиперболической орбиты выбирается близким к поверхности Луны и к плоскости лунной орбиты, а облёт совершается против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса Луны.
- I.2. С помощью тормозного импульса $\Delta \vec{V}_T$, сообщаемого в окрестности минимального расстояния от Луны, в момент t_T , аппарат переводится на сильно вытянутую промежуточную селеноцентрическую эллиптическую орбиту с временем полёта до апоцентра порядка 3-4 суток. Предварительные оценки показали, что для траекторий со временем полёта до Луны $\sim 4.5-5.5$ суток взаимное расположение точки Q_{min} и направления на Землю таково, что справедливо следующее.
- Если линия апсид оскулирующего эллипса в момент торможения совпадает с линией апсид подлётной гиперболической орбиты, то за время 3-4 суток либрационная точка L_2 оказывается в окрестности апоцентра промежуточной орбиты. Таким образом, момент времени прихода КА в окрестность апоцентра примерно совпадает с моментом времени, когда в окрестности апоцентра оказывается точка L_2 .
- Если линии апсид подлётной гиперболической орбиты и промежуточного эллипса почти совпадают, то тормозной импульс $\Delta \vec{V}_T$ может быть направ-

лен примерно против вектора скорости на минимальном расстоянии от Луны. Такая схема близка к локально оптимальной.

- I.3. На селеноцентрической орбите в момент времени t_K (примерно через сутки после торможения) осуществляется маневр-трехпараметрическая коррекция — с помощью импульса $\Delta \vec{V}_K$. Эта коррекция обеспечивает прохождение КА через заданную точку $\vec{r}_6$ в окрестности L_2 , в заданный момент времени t_6 .
- I.4. В момент времени t_6 аппарату сообщается импульс $\Delta \vec{V}_6$. Скорость КА после приложения импульса $\Delta \vec{V}_6$ обозначим $\vec{V}_6$. Таким образом, в момент времени t_6 в расчётном случае КА имеет радиус-вектор $\vec{r}_6$ и вектор скорости $\vec{V}_6$. Значения $\vec{r}_6, \vec{V}_6$ можно выбрать так, чтобы дальнейшее пассивное движение КА было заданным движением в окрестности L_2 .
- I.5. Предлагаемую схему иллюстрирует рис. 2. На рисунке в проекции на плоскость лунной орбиты схематично изображены положения Земли (Т), Луны (L), либрационной точки (L_2) и космического аппарата (КА) в моменты времени t_0, t_T, t_K, t_6 (соответствующие конфигурации обозначены буквами А, В, С, D). Геоцентрический участок движения аппарата изображен сплошной толстой линией, селеноцентрический — пунктирной толстой линией. Сплошная тонкая линия изображает орбиту Луны, пунктирная с точками — селеноцентрический промежуточный эллипс на момент оскуляции t_T . Точки (р), (т), (к), (в) обозначают места проведения маневров КА — разгона, торможения, коррекции и выведения. Стрелки, поставленные в этих местах, условно изображают направление и величину импульсов $\Delta \vec{V}_0, \Delta \vec{V}_T, \Delta \vec{V}_K, \Delta \vec{V}_6$.

2. Основные параметры задачи.

2.1. При старте в определённую дату с промежуточной орбиты ИСЗ перелётную траекторию Земля-Луна можно описать тремя параметрами: $T_{pmin}, \rho_{min}, \alpha$, где

ρ_{min} — минимальное расстояние КА от поверхности Луны в момент пролёта;

T_{pmin} — время движения от момента старта с промежуточной орбиты ИСЗ t_0 до момента времени t_{pmin} достижения минимального расстояния от поверхности Луны;

α — угол, определяющий ориентацию плоскости подлётной гиперболы вблизи Луны.

2.2. В импульсной постановке перевод космического аппарата с подлётной гиперболы на селеноцентрическую промежуточную орбиту определяется тормозным импульсом $\Delta \vec{V}_T$. Множество таких импульсов описывается моментом времени t_T приложения импульса и тремя его компонентами $\Delta V_{Tx}, \Delta V_{Ty}, \Delta V_{Tz}$.

2.3. Множество корректирующих импульсов $\Delta \vec{V}_K$ в импульсной постановке описывается моментом времени t_K приложения импульса и тремя его компонентами $\Delta V_{Kx}, \Delta V_{Ky}, \Delta V_{Kz}$. Множество импульсов выведения на гало-орбиту $\Delta \vec{V}_\delta$ в импульсной постановке описывается моментом времени t_δ приложения импульса и тремя его компонентами $\Delta V_{\delta x}, \Delta V_{\delta y}, \Delta V_{\delta z}$.

2.4. Таким образом, при решении полной задачи выведения можно располагаться пятнадцатью параметрами:

$$X = \{ T_{pmin}, \rho_{min}, \alpha, t_T, \Delta V_{Tx}, \Delta V_{Ty}, \Delta V_{Tz}, t_K, \Delta V_{Kx}, \Delta V_{Ky}, \Delta V_{Kz}, t_\delta, \Delta V_{\delta x}, \Delta V_{\delta y}, \Delta V_{\delta z} \}$$

В общем случае требуется решить следующую задачу.

Выбрать параметры X так, чтобы:

а) в момент времени t_δ космический аппарат имел заданные координаты и компоненты скорости $\vec{R}_\delta, \vec{V}_\delta$ (в окрестности L_2),

б) энергетические затраты были минимальны:

$$|\Delta \vec{V}_0| + |\Delta \vec{V}_T| + |\Delta \vec{V}_K| + |\Delta \vec{V}_\delta| = \min$$

В этой работе рассматривалась ограниченная постановка с целью упрощения задачи.

3. 0 расчётных вариантах выведения

3.1. Будем полагать:

$$T_{pmin} = T_{pmin \text{ зад}}$$

$$t_T = t_{T \text{ зад}}$$

$$t_K = t_{K \text{ зад}}$$

где $T_{pmin \text{ зад}}, t_{T \text{ зад}}, t_{K \text{ зад}}$ — заданные значения параметров.

В дальнейшем рассматриваются варианты, когда

$$T_{pmin \text{ зад}} = 4.5 \div 5.5$$

$$t_{T \text{ зад}} = t_{pmin}$$

$$t_{K \text{ зад}} = t_{pmin} + 1.0$$

Далее, будем считать, что импульс торможения $\Delta \vec{V}_T$ направлен прямо противоположно вектору скорости на подлётной гиперболе в момент t_{pmin} .

Таким образом, для выведения КА в окрестность L_2 в определённую дату старта свободными параметрами останутся:

$$X' = \{ \rho_{min}, \alpha, \Delta V_T, t_\delta, \Delta V_{Kx}, \Delta V_{Ky}, \Delta V_{Kz}, \Delta V_{\delta x}, \Delta V_{\delta y}, \Delta V_{\delta z} \},$$

где ΔV_T — величина импульса торможения.

Так как множество X' содержит 10 параметров, а число заданных параметров на конце $(\vec{R}_6, \vec{V}_6)$ равно 6, то можно получить четырехпараметрическое семейство решений задачи, зависящее от параметров $\varphi_{min}, \alpha, \Delta V_T, t_6$.

- 3.2. В данной работе не ставилась цель получить строго оптимальное решение задачи. Приближенно-оптимальное решение получено с помощью расчётов при различных значениях параметров $\varphi_{min}, \alpha, \Delta V_T, t_6$. Такой способ позволял не только получить решение, близкое к оптимальному, но и оценить его устойчивость к вариации отдельных параметров, что существенно для первого рассмотрения.

На основании предварительных оценок и расчётов были определены ориентировочные значения параметров, в окрестности которых следовало искать решение, близкое к оптимальному. Значения φ_{min} выбирались такими, чтобы пролётная траектория проходила близко от поверхности Луны, на расстоянии нескольких сотен километров. Угол α задавался из условия, чтобы перигейтр подлётной гиперболы лежал в плоскости лунной орбиты. Это гарантировало, что после торможения при наибольшем удалении КА от Луны он будет находиться близко к плоскости лунной орбиты, в которой лежит точка L_2 .

Значения ΔV_T выбирались вблизи такого значения $\Delta V_T = \Delta V_T^{(0)}$, при котором расстояние в апоцентре на невозмущённом эллипсе примерно равно расстоянию от центра Луны до точки L_2 . Значения ΔV_T принимались такими, чтобы время полета $T_6 = t_6 - t_T$ от момента торможения t_T до момента выведения t_6 аппарата в окрестность L_2 было порядка 3-4 суток. Кроме того, при выборе t_6 необходимо принимать

во внимание условия видимости маневра выведения из наземного пункта.

- 3.3. Если зафиксировать значения $\varphi_{min}, \alpha, \Delta V_T, t_6$, то необходимо решить следующую краевую задачу. При заданных начальных условиях в момент времени t_T после торможения выбрать импульсы $\vec{\Delta V}_K$ и $\vec{\Delta V}_6$ так, чтобы в момент времени t_6 КА имел заданные значения $\vec{R}_6, \vec{V}_6$.

Эта задача решается однозначно. Метод решения описан ниже, в разделах 4 и 5. В результате решения определяется значение функции $W(\varphi_{min}, \alpha, \Delta V_T, t_6) = |\vec{\Delta V}_T| + |\vec{\Delta V}_K| + |\vec{\Delta V}_6|$. Таким образом, решение оптимальной задачи сводится к выбору значений $\varphi_{min}, \alpha, \Delta V_T, t_6$ из условия минимальности W .

4. Системы координат.

- 4.1. Введем в рассмотрение две прямоугольные системы координат: $OXYZ$ и $O'xyz$.

Начало системы $OXYZ$ совпадает с центром масс Луны, а оси направлены параллельно осям экваториальной геоцентрической системы координат выбранной эпохи.

Начало вращающейся системы $O'xyz$ совпадает с точкой L_2 . ось x направлена по радиус-вектору Земля-Луна, ось y лежит в плоскости оскулирующей лунной орбиты под прямым углом к оси x в направлении движения Луны, ось z дополняет систему до правой.

- 4.2. Приведем формулы перехода от одной системы к другой в заданный момент времени t . Пусть $\vec{R}, \vec{V}, \vec{R}_e, \vec{V}_e$ - радиус-векторы и векторы скорости КА и Земли в системе координат $OXYZ$, в момент времени t , а $\vec{r}, \vec{u}$ - радиус-вектор и вектор скорости КА в системе координат $O'xyz$ в тот же момент.

Тогда нетрудно получить, что

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= A\vec{R} - \vec{L} \\ \vec{u} &= A\vec{V} + \omega B\vec{R} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \vec{R} &= A^T(\vec{r} + \vec{L}) \\ \vec{V} &= A^T\vec{u} + \omega B^T(\vec{r} + \vec{L}) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где $\omega = \frac{|\vec{R}_\Phi \times \vec{V}_\Phi|}{R_\Phi^2}$, $\vec{L}$ - вектор-столбец.
 $(\vec{L}^T = (L, 0, 0))^T$, L - расстояние от Луны до точки L_2 ,
а матрицы A , B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Элементы матриц образованы из компонент единичных ортов

$\vec{x}^0, \vec{y}^0, \vec{z}^0$ вращающейся системы $Ox_0y_0z_0$ в момент времени t относительно осей системы $OXYZ$,

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}^{0T} &= (x_1, x_2, x_3) & \vec{x}^0 &= -\frac{1}{R_\Phi} \vec{R}_\Phi \\ \vec{y}^{0T} &= (y_1, y_2, y_3) & \vec{y}^0 &= \frac{[\vec{R}_\Phi \times \vec{V}_\Phi]}{|\vec{R}_\Phi \times \vec{V}_\Phi|} \\ \vec{z}^{0T} &= (z_1, z_2, z_3) & \vec{z}^0 &= [\vec{z}^0 \times \vec{x}^0] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Обозначим через $\Delta\vec{V}_k$ и $\Delta\vec{u}_k$ проекции вектора коррекционного импульса на оси $OXYZ$ и $Ox_0y_0z_0$. Они связаны соотношениями:

$$\Delta\vec{u}_k = A(t)\Delta\vec{V}_k \quad (2.5)$$

$$\Delta\vec{V}_k = A^T(t)\Delta\vec{u}_k \quad (2.6)$$

$$|\Delta\vec{V}_k| = |\Delta\vec{u}_k| \quad (2.7)$$

5. Метод приближенного решения краевой задачи.

5.1. При решении краевой задачи оказалось эффективным применить следующий приближенный метод. В этом методе траектория движения КА после торможения разбивается на два участка: первый участок - от момента торможения t_T до момента коррекции t_k ; второй участок - от момента коррекции t_k до момента выведения t_v . Если принять $t_k - t_T \approx 1^d.0$, то за это время аппарат удаляется от Луны не более чем на 45 тыс. км, и его движение на этом первом участке можно аппроксимировать движением по эллипсу, элементы которого вычисляются по координатам и компонентам скорости в момент торможения. На втором участке, от коррекции до L_2 , аппарат не выходит за пределы сферы с центром в L_2 и радиусом, примерно равным 30 тыс. км.

На таких расстояниях движение КА относительно L_2 удовлетворительно описывается системой уравнений, линеаризованных в окрестности L_2 (см. (I.10) гл. I, разд. I). Согласно (I.13)-(I.14) (гл. I, разд. 2) значения радиус-вектора $\vec{r}$ и вектора скорости $\vec{u}$ на момент времени t по их значениям $\vec{r}_k, \vec{u}_k$ на момент времени t_k определяются линейными формулами:

$$\vec{r}(t) = P_r(t)\vec{r}_k + Q_r(t)\vec{u}_k \quad (2.8)$$

$$\vec{u}(t) = P_u(t)\vec{r}_k + Q_u(t)\vec{u}_k \quad (2.9)$$

где $P_r(t), Q_r(t), P_u(t), Q_u(t)$ - матрицы (3×3) , элементы которых зависят от времени и констант системы.

5.2. В приближенном расчёте в качестве исходных принимались параметры движения на момент t_T перед торможением: селеноцентрический радиус-вектор $\vec{R}_T$ и вектор скорости $\vec{V}_T^{(-)}$ в системе $OXYZ$.

Радиус-вектор и вектор скорости КА после торможения обозначим $\vec{R}_T, \vec{V}_T^{(+)}$:

$$\vec{V}_T^{(+)} = \vec{V}_T^{(-)} + \Delta \vec{V}_T,$$

где $\Delta \vec{V}_T = -\frac{\vec{V}_T^{(-)}}{|\vec{V}_T^{(-)}|} \Delta V_T$, ΔV_T - величина импульса

торможения. По начальным данным $\vec{R}_T, \vec{V}_T^{(+)}$, используя формулы конических сечений, определяют координаты и компоненты скорости перед коррекцией $\vec{R}_K, \vec{V}_K^{(-)}$ на момент t_K .

5.3. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\vec{R}_K, \vec{V}_K^{(-)}$ радиус-вектор и вектор скорости КА в системе OXYZ в момент времени t_K перед коррекцией. Требуется найти такой корректирующий импульс $\Delta \vec{V}_K$, чтобы в момент времени t_8 радиус-вектор $\vec{r}_8$ в системе Oxyz был равен заданному $\vec{r}_8^{(0)}$. В рамках линейного приближения (2.8.), (2.9) решение сводится к решению линейных алгебраических уравнений. По $\vec{R}_K$ и $\vec{V}_K^{(-)}$ определяются компоненты этих векторов во вращающейся системе координат $\vec{r}_K, \vec{u}_K^{(-)}$ (2.1). Подставляя в (2.8) $t=t_8$, $\vec{r}_K$ и $\vec{r}=\vec{r}_8$, находим $\vec{u}_K^{(+)}$:

$$\vec{u}_K^{(+)} = Q_r^T(t_8)(\vec{r}_8^{(0)} - P_r(t_8)\vec{r}_K) \quad (2.10)$$

где $\vec{u}_K^{(+)}$ - значение вектора скорости во вращающейся системе координат после коррекции.

Корректирующий импульс $\Delta \vec{u}_K$ в подвижных осях определится по формуле:

$$\Delta \vec{u}_K = \vec{u}_K^{(+)} - \vec{u}_K^{(-)} \quad (2.11)$$

Используя (2.6), можно найти компоненты импульса в системе координат OXYZ:

$$\Delta \vec{V}_K = A^T(t_K) \Delta \vec{u}_K \quad (2.12)$$

Для вычисления элементов матрицы $A(t_K)$ необходимо знать селеноцентрический радиус-вектор и вектор скорости Земли $\vec{R}_\oplus, \vec{V}_\oplus$. В приближенном расчёте эти величины могут быть найдены по формулам невозмущенного движения Луны.

5.4. Одновременно с решением задачи на попадание в заданную точку $\vec{r}_8^{(0)}$ находим из (2.9) $\vec{u}_8^{(0)}$:

$$\vec{u}_8^{(-)} = P_u(t_8)\vec{r}_K + Q_u(t_8)\vec{u}_K \quad (2.13)$$

где $\vec{u}_8^{(-)}$ - значение вектора скорости в момент t_8 во вращающейся системе координат до приложения импульса выведения $\Delta \vec{V}_8$.

Импульс $\Delta \vec{V}_8$ определится по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \vec{u}_8 &= \vec{u}_8^{(0)} - \vec{u}_8^{(-)} \\ \Delta \vec{V}_8 &= A^T(t_8) \Delta \vec{u}_8 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Таким образом, при фиксированных значениях параметров

$\rho_{min}, \alpha, \Delta V_T, t_8$ находится приближенное значение функции

$$W(\rho_{min}, \alpha, \Delta V_T, t_8) = |\Delta \vec{V}_T| + |\Delta \vec{V}_K| + |\Delta \vec{V}_8|$$

5.5. Ниже приведена блок-схема программы приближенного расчёта.

Входными данными служат:

- t_T - момент торможения КА (в расчётных вариантах $t_T = t_{\rho_{min}}$);
- $\vec{R}_T, \vec{V}_T^{(-)}$ - селеноцентрический радиус-вектор и вектор скорости КА до торможения в момент t_T в системе OXYZ;
- $\vec{R}_\oplus, \vec{V}_\oplus$ - селеноцентрический радиус-вектор и вектор скорости Земли в момент t_T в системе OXYZ;
- ΔV_T - модуль тормозного импульса;
- t_K, t_8 - заданные моменты времени коррекции и выведения в окрестность L_2 ;
- $\vec{r}_8^{(0)}, \vec{u}_8^{(0)}$ - заданные векторы положения и скорости КА в момент t_8 в системе Oxyz;

μ_T, μ_L - гравитационные константы Земли и Луны,
 L - среднее расстояние от центра Луны до точки
 L_2 .

Выходными данными являются:

$\Delta V_K, \Delta V_{Kx}, \Delta V_{Ky}, \Delta V_{Kz}$ - величина импульса коррекции и его составляющие в системе $OXYZ$;
 $\Delta V_\delta, \Delta V_{\delta x}, \Delta V_{\delta y}, \Delta V_{\delta z}$ - величина импульса выведения в L_2 и его составляющие в системе $OXYZ$;
 $W = \Delta V_T + \Delta V_K + \Delta V_\delta$ - величина суммарного импульса.

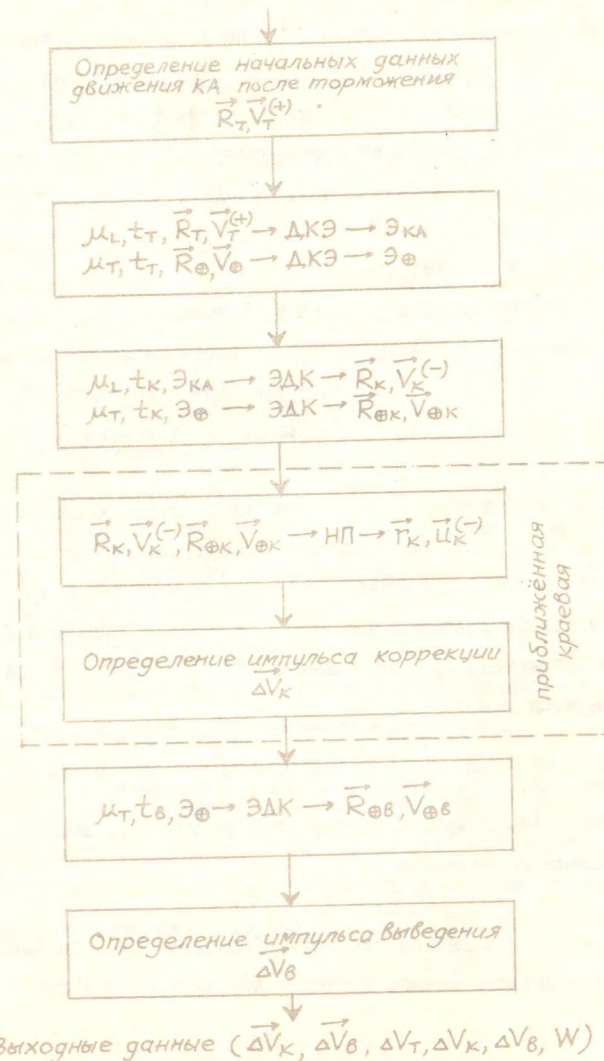
В программе используются следующие стандартные блоки:

- блок ДКЭ - блок пересчёта прямоугольных декартовых координат и компонент скорости $\vec{R}, \vec{V}$ в кеплеровские элементы $\mathcal{E}(p, e, \omega, i, \Omega, \tau)$ в момент времени t ;
- блок ЭДК - блок пересчёта кеплеровских элементов $\mathcal{E}(p, e, \omega, i, \Omega, \tau)$ в прямоугольные координаты и компоненты скорости $\vec{R}, \vec{V}$ в момент времени t ;
- блок НП - блок пересчёта прямоугольных координат и компонент скорости из системы $OXYZ$ в систему $O'xyz$;
- блок ПН - блок пересчёта прямоугольных координат и компонент скорости из системы $O'xyz$ в систему $OXYZ$.

Приближенный метод использовался для выявления основных закономерностей с помощью массовых расчётов и для определения первого приближения при точном решении задачи.

Блок-схема приближённого расчёта

Входные данные
 $(t_T, \vec{R}_T, \vec{V}_T^{(-)}, \vec{R}_\Phi, \vec{V}_\Phi, \Delta V_T, t_K, t_\delta, \vec{r}_\delta^{(0)}, \vec{u}_\delta^{(0)}, L, \mu_T, \mu_L)$



6. Точное решение краевой задачи

6.1. В точном расчёте движения КА на обоих участках определяется численным интегрированием с учётом влияния Луны, Земли и Солнца.

- а) При известных начальных данных после торможения $\vec{R}_T, \vec{V}_T^{(+)}$ с помощью численного интегрирования определяются параметры движения на t_K перед коррекцией: $\vec{R}_K, \vec{V}_K^{(-)}$
- б) По этим величинам и заданному $\vec{r}_g^{(0)}$ по приближенным формулам (2.10)-(2.12), определяется приближенное значение $\Delta \vec{V}_K$.
- в) При начальных данных $\vec{R}_K, \vec{V}_K^{(+)} = \vec{V}_K^{(-)} + \Delta \vec{V}_K$ проводится численное интегрирование до момента t_g и определяются параметры движения на t_g перед маневром выведения $\vec{R}_g, \vec{V}_g^{(-)}$. С помощью формулы перехода (2.1.) находят $\vec{r}_g, \vec{u}_g$ - параметры движения на момент t_g в системе $Oxyz$.

6.2. Так как импульс $\Delta \vec{V}_K$ найден из приближенного расчёта, то условие $\vec{r}_g = \vec{r}_g^{(0)}$, вообще говоря, не удовлетворяется. Уточнение решения краевой задачи проводится итерационно. На каждой итерации процедура, начиная с пункта 6.1.б), повторяется. При этом вместо $\vec{r}_g^{(0)}$ (см. п.6.1.б)) расчёт ведётся при

$$\vec{r}_g^{(0)'} = \vec{r}_g^{(0)} - \vec{\delta}_0$$

где $\vec{\delta}_0 = \vec{r}_g - \vec{r}_g^{(0)}$, а $\vec{r}_g$ - значение $\vec{r}_g$ на данной итерации. Итерации повторяются до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|\vec{\delta}_0| < \varepsilon$$

где ε - заданная точность. Значение $\Delta \vec{V}_K$ на последней итерации есть точное значение корректирующего импульса.

6.3. Точное значение $\Delta \vec{V}_g$ импульса выведения находится следующим образом:

- а) по заданным $\vec{r}_g^{(0)}, \vec{u}_g^{(0)}$ в момент t_g с помощью формулы перехода (2.2) определяется заданное значение скорости $\vec{V}_g^{(0)}$.
- б) На последней итерации точной краевой согласно п.6.1в) определяется значение скорости $\vec{V}_g^{(-)}$ в момент t_g .
- в) Точное значение $\Delta \vec{V}_g = \vec{V}_g^{(0)} - \vec{V}_g^{(-)}$ находится по формуле:

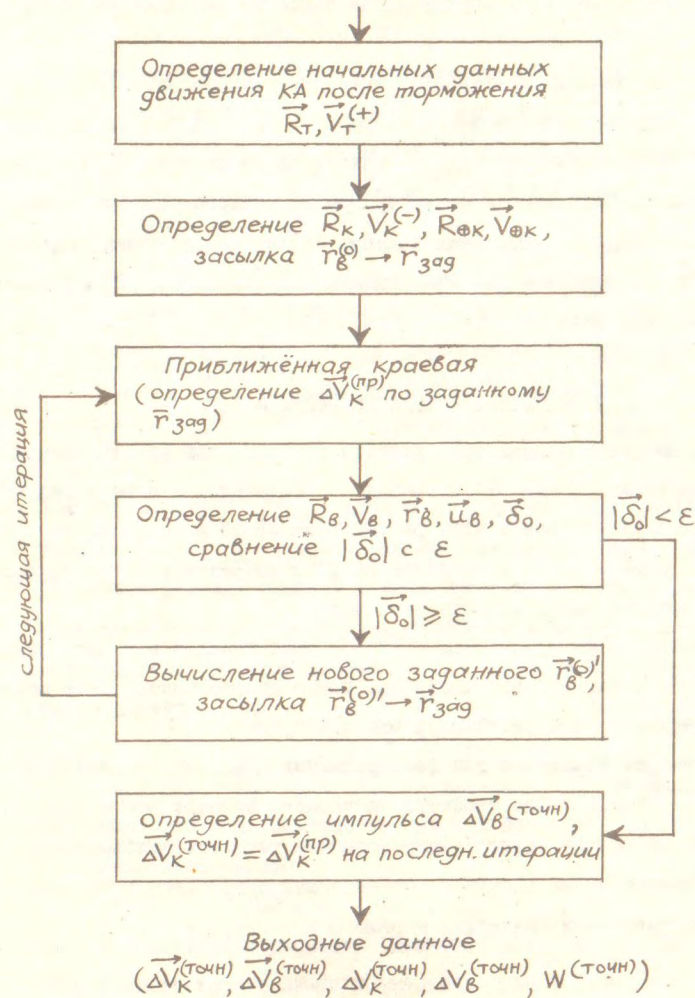
6.4. Ниже приведена блок-схема программы точного расчёта суммарного импульса. Входными данными служат те же параметры, что и в приближенном расчёте. Выходными данными являются точные значения величин $\Delta V_K, \Delta V_{Kx}, \Delta V_{Ky}, \Delta V_{Kz}, \Delta V_g, \Delta V_{gx}, \Delta V_{gy}, \Delta V_{gz}, W$.

7. 0 точности приближенного расчёта

7.1. Сравнение приближенного расчёта с точным при фиксированных значениях $\rho_{min}, \varepsilon, \Delta V_T, t_g$ показало, что величина W может отличаться в этих расчётах на 25-50 м/сек, причём основное отличие приходится на долю корректирующего импульса, а импульс выведения меняется мало. Пусть $\Delta \vec{V}_K^{(пр)}, \Delta \vec{V}_K^{(точн)}$ - приближенное и точное значения корректирующего импульса. Можно предположить (как и подтвердилось при расчётах), что вектор $\vec{\delta V}_K = \Delta \vec{V}_K^{(точн)} - \Delta \vec{V}_K^{(пр)}$ примерно постоянен для фиксированных ρ_{min}, ε и различных $\Delta V_T, t_g$. Это свойство позволяет, проведя всего один точный расчёт, существенно повысить точность одновременно большого числа расчётов, проведенных приближенным методом при различных значениях параметров $\Delta V_T, t_g$.

Блок-схема точного расчёта

Входные данные

 $(t_T, \vec{R}_T, \vec{V}_T^{(-)}, \vec{R}_\Phi, \vec{V}_\Phi, \Delta V_T, t_K, t_\delta, \vec{r}_\delta^{(0)}, \vec{u}_\delta^{(0)}, L, \mu_T, \mu_L)$


7.2. Для иллюстрации приведены рис. 3 и 4. На рис. 3 для трёх указанных значений ΔV_T приведены ΔV_K (сплошные линии) и ΔV_δ (пунктирные линии) в зависимости от d - времени полета (в сутках) от момента торможения t_T до момента t_δ . Значения ΔV_K и ΔV_δ находились приближенным методом. На рис. 4 в плоскости компонент ΔV_{Kx} и ΔV_{Ky} корректирующего импульса $\Delta \vec{V}_K$ изображены изолинии одинаковых значений ΔV_T (сплошные линии) и d (пунктирные линии) для одного из вариантов фиксированных ρ_{min}, φ . Эти изолинии построены также по приближенной методике. На рисунке специально отмечены кружками три точки, соответствующие определенным значениям ΔV_T и d , а крестиками в кружках указаны значения ΔV_{Kx} , ΔV_{Ky} , полученные с помощью точного расчёта при тех же значениях $\Delta V_T, d$. Соответствующие точки соединены направленными отрезками. Из рисунка видно, что они примерно постоянны. Как следует из рисунка 3, всегда можно подобрать такие параметры $\Delta V_T, t_\delta$, чтобы $\Delta V_{Kx}^{(точн)} = \Delta V_{Ky}^{(точн)} = 0$. При этом, вообще говоря, $\Delta V_{Kz}^{(точн)} \neq 0$. Тем не менее, нетрудно выбрать такие $\Delta V_T, t_\delta$; что $|\Delta \vec{V}_K| = \min$. Привлекая к рассмотрению аналогичные зависимости для импульса $\Delta \vec{V}_\delta$, можно выбрать значения $\Delta V_T, t_\delta$ дающие приблизительно-минимальное значение для суммарного импульса $W = |\Delta \vec{V}_T| + |\Delta \vec{V}_K| + |\Delta \vec{V}_\delta|$.

8. Численные примеры

8.1. Описанным методом с помощью точного расчёта были получены траектории выведения в окрестность L_2 , на которых сближение КА с Луной происходило в окрестности апогея α_L или перигея π_L лунной орбиты.

Как следует из приведенных ниже данных, суммарная характеристическая скорость существенно зависит от положения Луны на орбите. Во всех случаях свободные параметры траектории $\rho_{min}, \alpha, \Delta V_T, t_6$ выбирались такими, чтобы энергетические затраты были близки к оптимальным. Эта задача решалась с помощью расчётов при различных значениях указанных параметров и последующим их выбором. Так как строго оптимальная задача не решалась, то энергетические затраты могут быть несколько меньше.

Рассмотренные варианты отличались характеристиками передельного участка Земля-Луна ($T\rho_{min}, \rho_{min}, \alpha$), положением Луны на орбите и значениями параметров $\Delta V_T, d = t_6 - t_T$. Варианты занумерованы в следующей таблице 2.

Таблица 2

№ варианта	Положение Луны	$T\rho_{min}$ в сутк.	ρ_{min} в км	α в град	ΔV_T в м/сек	d в сутк.
1	апогей	5.350	2000	348	184,16	3,861
2	"	"	"	"	181,16	4,000
3	"	"	"	"	181,16	3,900
4	"	4.375	"	"	184,34	4,750
5	"	"	"	"	184,34	4,417
6	"	"	"	"	179,34	4,000
7	перигей	4.375	"	347	248,12	3,100
8	"	"	"	347	250,12	3,270
9	"	"	"	347	250,12	3,500

Для варианта I, который требует наименьших энергетических затрат, приведены его подробные характеристики в табл. 3. В таблицах 4-5 указаны параметры $\Delta V_T, \Delta V_K, \Delta V_6, W$ для вариантов I-9.

Таблица 3

Наименование параметров и обозначение	Размерность	Численное значение
Момент начала пассивного участка t_0	дата, часы, минуты, сек. московск. вр.	22 янв. 1973 г. 21 ^h 59 ^m 10 ^s ,43
Прямоугольные координаты и компоненты скорости в момент t_0 в геоцентрической экваториальной системе эпокхи 1960,0.		
x_0	км	+2572,03963
y_0	км	+5165,34526
z_0	км	+3166,67250
$\dot{x}_0$	км/сек	-8,26586497
$\dot{y}_0$	км/сек	+0.639298980
$\dot{z}_0$	км/сек	+7.10342748
Минимальное расстояние от Луны ρ_{min}	км	2000,26
Момент достижения ρ_{min} $t\rho_{min}$	дата, часы, мин., сек. моск. вр.	28 янв. 1973 г. 6 ^h 23 ^m 10 ^s ,86
Время полета до $t\rho_{min}$	сутки	5,350
Угол ориентации плоскости селеноцентрической орбиты α	град. мин. сек.	348° 18' 42"
Импульс торможения ΔV_T	м/сек	184,16
Импульс коррекции ΔV_K	м/сек	13,08
Импульс выведения ΔV_6	м/сек	148,87
Суммарный импульс W	м/сек	346,11
Время полета от $t\rho_{min}$ до точки L_2	сутки	3,861

Заданные координаты и компоненты скорости в момент выведения во вращающейся системе координат		
$X^{(c)}$	км	0
$Y^{(c)}$	км	+4000
$Z^{(c)}$	км	0
$\dot{X}^{(c)}$	м/сек	0
$\dot{Y}^{(c)}$	м/сек	0
$\dot{Z}^{(c)}$	м/сек	-20

Таблица 4

№ интервал	1	2	3	4	5	6
ΔV_T м/сек	184.16	181.16	181.16	184.34	184.34	179.34
ΔV_K м/сек	13.08	31.44	56.80	22.65	17.90	50.17
ΔV_6 м/сек	148.87	142.83	176.67	191.20	195.96	196.48
W м/сек	346.11	355.43	414.63	398.19	398.20	425.99

Таблица 5

№ интервал	7	8	9
ΔV_T м/сек	248.12	250.12	250.12
ΔV_K м/сек	12.27	18.78	25.71
ΔV_6 м/сек	192.95	189.88	182.88
W м/сек	453.34	458.78	458.71

III. Об управлении движением КА в окрестности L_2

I. Задача об удержании КА в окрестности L_2 .

Выше был рассмотрен случай периодического движения КА в окрестности либрационной точки L_2 . В линейном приближении этот случай возникает лишь тогда, когда начальные фазовые координаты КА удовлетворяют условию $A_3 = A_4 = 0$. Из решения (I.13) следует, что, если $A_3 \neq 0$, то КА с течением времени будет экспоненциально удаляться от точки L_2 . Так как обеспечить точное равенство нулю коэффициента A_3 практически невозможно, то для удержания КА в окрестности точки L_2 заведомо необходимо управление его движением. При этом управление должно осуществляться периодически на протяжении всего времени работы КА. Это связано с тем, что:

1. Определение начальных данных $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ обычно производится с ошибками;
2. Расчетное управление также реализуется с ошибками;
3. В общем (нелинейном) случае линейная модель лишь приближенно описывает реальное движение, т.е. в схеме управления появляются методические ошибки.

Если обеспечить выполнение условия $A_3 = 0$, то в решении (в расчетном решении, а не фактическом) не будет экспоненциально возрастающих членов. При этом, даже расчетная орбита не будет точно периодической, т.е., вообще говоря, коэффициент $A_4 \neq 0$. Однако, экспоненциально убывающие члены в решении (I.13) в рамках рассматриваемой модели не влияют на устойчивость движения КА в окрестности точки L_2 .

В отличие от задач управления на перелетных траекториях или удержания КА в окрестности устойчивой точки равновесия задача об удержании КА в окрестности точки L_2 является по существу

статистической. Идеальное приближение, которое, как обычно, предполагает отсутствие ошибок в определении траектории и реализации управления, для рассматриваемой задачи несодержательно.

В этой работе исследована одна схема импульсной коррекции траектории движения КА. В соответствии с этой схемой корректирующие импульсы прикладываются в моменты времени, когда по расчетным данным КА находится на луче $\varphi = \arctg \frac{y}{x} = \varphi_i \text{ заг}$ (см. рис. I), где $\varphi_i \text{ заг}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — некоторые фиксированные значения угла φ , которые в рассматриваемой схеме могут выбираться произвольно. При этом выбором $\varphi_i \text{ заг}$ можно удовлетворить при $\varphi = \varphi_i \text{ заг}$ условию видимости КА с Земли, а оставшимся произволом воспользоваться для уменьшения энергетических затрат. В дальнейшем, для краткости записи, будем называть луч $\varphi = \varphi_i \text{ заг}$ лучом коррекции.

2. Общая схема коррекции

1. Пусть в момент времени t_i проведена очередная коррекция. Обозначим через $\vec{f}_i$ фактическое значение вектора $\vec{f}$ непосредственно после этой коррекции.
2. Фактическое движение КА до следующей коррекции в момент времени t_{i+1} определяется формулами (I.13)–(I.14)

$$\vec{f} = \vec{f}(t - t_i, \vec{f}_i) \quad (3.1)$$
3. На основании обработки траекторных измерений на участке $[t_i, t_{i+1}]$ производится оценка $\hat{\vec{f}}_i$ вектора $\vec{f}_i$. При этом

$$\hat{\vec{f}}_i = \vec{f}_i + \delta \vec{f}_i,$$

где $\delta \vec{f}_i = \{\delta x, \delta y, \delta z, \delta \dot{x}, \delta \dot{y}, \delta \dot{z}\}$ — вектор ошибок в определении $\vec{f}_i$.

4. Прогнозирование движения КА производится согласно формулам

$$\vec{f}_n = \vec{f}(t - t_i, \hat{f}_i) = \vec{f}(t - t_i, \vec{f}_i + \vec{\delta f}_i) \quad (3.2)$$

где $\vec{f}_n = \{x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n\}$ - прогнозируемые значения фазовых переменных.

5. Предполагаются заданными значения углов $\varphi = \varphi_j$ ($j=1, 2, \dots, n$), в окрестности которых проводятся коррекции. Используя (2), определяется ближайший момент времени t_{i+1} , когда должна быть проведена следующая коррекция. Этот момент времени находится из решения следующего уравнения

$$\frac{y_n(t_{i+1} - t_i, \hat{f}_i)}{x_n(t_{i+1} - t_i, \hat{f}_i)} = \operatorname{tg} \varphi_k$$

при этом $t_{i+1}(\varphi_k) = \min_{1 \leq j \leq n} t_{i+1}(\varphi_j)$

6. Фактическое значение фазовых переменных $\vec{f}_{i+1}^-$ на момент времени t_{i+1} (перед коррекцией) определяется согласно (1) при $t = t_{i+1}$

$$\vec{f}_{i+1}^- = \vec{f}(t_{i+1} - t_i, \vec{f}_i)$$

7. На основании обработки траекторных измерений на интервале времени $[t_i, t_{i+1}]$ проводится оценка $\hat{\vec{f}}_{i+1}^-$

$$\hat{\vec{f}}_{i+1}^- = \vec{f}_{i+1}^- + \vec{\delta f}_{i+1}$$

где $\vec{\delta f}_{i+1}$ - вектор ошибок в определении $\vec{f}_{i+1}^-$ перед коррекцией.

8. Значения компонент вектора $\hat{\vec{f}}_{i+1}^-$ используются для расчета корректирующего импульса $\Delta \vec{f}_{p, i+1}$. Алгоритм расчета описан в следующем разделе.

9. Из-за ошибок исполнения фактически реализуется другая величина импульса

$$\vec{\Delta f}_{i+1} = \Delta \vec{f}_{p, i+1} (1 + \Delta_{i+1}), \quad (3.3)$$

где Δ_{i+1} - скалярная величина, моделирующая пропорциональные ошибки исполнения. Из (3) следует, что рассматриваются лишь ошибки по величине корректирующего импульса и не рассматриваются ошибки в его направлении. Из описаний схемы видно, что переход к более общему случаю не требует существенных изменений.

10. Фактический фазовый вектор КА после $(i+1)$ -ой коррекции

$$\vec{f}_{i+1} \text{ находится из формулы}$$

$$\vec{f}_{i+1} = \vec{f}_{i+1}^- + \vec{\Delta f}_{i+1}$$

3. Алгоритм расчета коррекции для задачи управления движением КА в плоскости xOy .

Для реализации движения КА в окрестности L_2 , близкого к заданному периодическому движению, необходимо добиться, чтобы среднее по времени значение коэффициента A_3 было близко к нулю. Это означает, что в решении (I.13) влияние экспоненциально возрастающих членов должно быть интегрально достаточно малым. При этом экспоненциально убывающие члены (когда $A_4 \neq 0$) со временем становятся пренебрежимо малыми, и траектория движения КА будет почти совпадать с описанными выше эллипсами.

В рассматриваемой ниже схеме коррекций величина и направление корректирующего импульса при каждой коррекции выбирается так, чтобы расчетное значение A_3 после коррекции было равно нулю. Коэффициент A_3 , согласно (I.14), линейно зависит от компонент скорости КА $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Поэтому добиться выполнения условия

$A_3 = 0$ с помощью импульсной коррекции можно тремя способами:

- (а) импульсным изменением лишь компоненты скорости $\dot{x}$;
- (б) импульсным изменением лишь компоненты скорости $\dot{y}$;
- (в) импульсным изменением компонент скорости $\dot{x}$ и $\dot{y}$ одновременно.

Эти три возможности порождают в задаче удержания три алгоритма импульсной коррекции.

В дальнейшем мы будем рассматривать только два из них, соответствующие случаям (а) и (с).

В случае (а) условие $A_3 = 0$ после коррекции однозначно определяет расчетный вектор корректирующего импульса $\vec{\Delta f}_{p,i+1}$

$$\vec{\Delta f}_{p,i+1} = w_{i+1} \vec{\xi}_x \quad (3.4)$$

где вектор $\vec{\xi}_x$ определяет направление корректирующего импульса

$$\vec{\xi}_x = \text{sign } A_3 \{0, 0, 0, 1, 0, 0\}$$

Величина импульса w_{i+1} в данном случае линейно зависит от модуля коэффициента A_3

$$w_{i+1} = \frac{2}{K_2} (\lambda K_2 - \omega_y K_1) |A_3|$$

Коэффициент A_3 , входящий в эти формулы, находится по формулам (I.I4), в которых фазовый вектор $\vec{f}_0$ заменен вектором $\vec{f}_{i+1}$.

В случае (с) имеется множество импульсов, реализующих условие $A_3 = 0$ после коррекции. В этом случае из всех корректирующих импульсов, реализующих $A_3 = 0$, выбирается минимальный по модулю импульс. Такой корректирующий импульс должен быть коллинеарен вектору $\text{grad}_{x,y} A_3$

$$\vec{\Delta f}_{p,i+1} = w_{i+1} \vec{\xi}_{x,y} \quad (3.5)$$

Направление корректирующего импульса определяется вектором

$$\vec{\xi}_{x,y} = -\text{sign } A_3 \left\{ 0, 0, 0, \frac{\frac{\partial A_3}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_3}{\partial y}\right)^2}}, \frac{\frac{\partial A_3}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_3}{\partial y}\right)^2}}, 0 \right\}$$

Коэффициент A_3 определяется из выражений (I.I4), с заменой вектора $\vec{f}_0$ на вектор $\vec{f}_{i+1}$. Производные $\frac{\partial A_3}{\partial x}$, $\frac{\partial A_3}{\partial y}$

также находятся из этих формул. При этом из линейности коэффициента A_3 по $\dot{x}$ и $\dot{y}$ следует, что эти производные постоянны и определяются выражениями

$$\frac{\partial A_3}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} \frac{K_2}{\lambda K_2 - \omega_y K_1}$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda K_1 + \omega_y K_2}$$

Величина w_{i+1} корректирующего импульса в случае (с) определяется по формуле:

$$w_{i+1} = \frac{|A_3|}{\sqrt{\left(\frac{\partial A_3}{\partial \dot{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_3}{\partial \dot{y}}\right)^2}}$$

Нижне будут приведены результаты численного решения задачи удержания КА в окрестности точки L_2 с использованием алгоритмов коррекции (а) и (с). При этом энергетические затраты для алгоритма коррекции (с) несколько меньше, чем для алгоритма коррекции (а). В тоже время алгоритм коррекции (а) возможно окажется более простым при реализации, т.к. направление импульсов в этом случае почти совпадает с направлением КА-Земля (или КА-Луна).

4. 0 периодических движениях в плоскости yOz (идеальная задача)

В линейном приближении движение КА в направлении перпендикулярном к плоскости орбиты Луны представляет собой гармоническое колебание с частотой $\omega_z = \sqrt{B_L}$. Колебание по оси z не связано с движением КА в плоскости xOy . Если в плоскости xOy КА также совершает периодическое движение с частотой $\omega_y \neq \omega_z$, то проекция траектории движения КА на плоскость, ортогональную к линии

Земля-Луна, представляет собой сложную кривую (рис. 5), заполняющую некоторую замкнутую область. Если частоты ω_y и ω_z соизмеримы, то эта кривая является фигурой Лиссажу. В этом случае будут существовать интервалы времени, в течение которых КА не будет виден из наземных пунктов, т.к. будет находиться за Луной. Для многих практических приложений это может оказаться нежелательным. Таким образом возникает вторая задача управления движением КА в окрестности точки L_2 : при помощи активной системы управления получить такую траекторию движения КА, чтобы он постоянно был виден из любого наземного пункта вместе с Луной (задача синхронизации). Вообще говоря, последнее требование может быть ослаблено. Например, можно потребовать видимости КА из одного или нескольких пунктов. Эту задачу можно решать, если выбрать орбиту с достаточно большими значениями амплитуды A_x , амплитуды A_z и добиться с помощью активных маневров синхронизации движения по осям y, z .

В работах [1], [2], [7] для решения задачи синхронизации используются управления периодом колебания вдоль оси z . Вообще говоря, эта задача может быть решена с помощью изменения периода колебания вдоль оси y и согласования его с естественным периодом движения КА вдоль оси z . Однако, как показали наш анализ, энергетические затраты в этом случае будут больше, чем при управлении периодом колебаний вдоль оси z .

Синхронизация периода движения КА по осям z и y достигается уменьшением периода колебания по оси z на величину

$$\Delta = 2\pi \left[\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_y} \right]$$

Для этого требуется периодически корректировать орбиту КА, сообщая импульсом в направлении, коллинеарном оси z .

При этом, если амплитуды колебаний по осям y и z равны, а разность фазовых углов этих колебаний равна 90° , то в плоскости yOz КА будет двигаться по почти круговой орбите (гало-орбите).

В работах [1], [7] рассматриваются два метода уменьшения периода движения КА по оси z . Первый метод заключается в однократной коррекции периода z -колебания за один оборот по орбите, а второй метод — в двукратной коррекции за один оборот. В полной задаче синхронизации движения в плоскости yOz и удержания КА на гало-орбите при применении обоих методов, как показали наши оценки, требуется практически одинаковый суммарный импульс. Поэтому в настоящей работе будет рассмотрен лишь второй метод, обладающий большими возможностями.

Рассмотрим вначале метод решения этой задачи в идеальном случае.

Закон движения КА вдоль оси z можно написать в виде

$$z = A_z \cos(\omega_z \tau + \varphi_z^0)$$

где $A_z = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ — амплитуда z -колебания (см. (I.13)),

$$\varphi_z^0 = \arctg \left(-\frac{\dot{z}_0}{z_0 \omega_z} \right) \quad - \text{начальный фазовый угол, } \tau = t - t_0.$$

Задача синхронизации ставится следующим образом: в течение интервала времени $T_y = \frac{2\pi}{\omega_y}$ провести две коррекции движения КА

вдоль оси z так, чтобы движение по оси z осталось периодическим, период его совпал бы с T_y , а суммарный импульс был бы минимальным. При этом движение вдоль оси z уже не будет гармоническим, а будет состоять из двух участков гармонических движений, непрерывно сопряженных по z и разрывных по $\dot{z}$. Поставленная таким образом задача имеет произвол, которым можно распорядиться так, чтобы максимальное отклонение КА от плоскости xOy (амплитуда колебания по оси z) было бы заданным.

Согласно [7], эта задача решается с помощью двух коррекций движения КА вдоль оси z , которые проводятся в моменты времени τ_1 и τ_2 (см. рис. 6), где

$$\begin{aligned}\tau_1 &= -\left(\frac{\Delta}{4} + \frac{\varphi_z^0}{\omega_z}\right) \\ \tau_2 &= -\left(\frac{\Delta}{4} + \frac{(\varphi_z^0 - \pi)}{\omega_z}\right)\end{aligned}\quad (3.6)$$

При этом моменты проведения коррекций τ_1 и τ_2 (6) выбраны таким образом, чтобы требуемый суммарный импульс ΔV_z был минимален.

$$\Delta V_z = 4\omega_z A_z \sin\left(\frac{\omega_z \Delta}{4}\right) \quad (3.7)$$

Следует обратить внимание на пропорциональность ΔV_z и A_z .

Максимальное отклонение z_0 КА от плоскости xOy в данном случае определяется выражением

$$z_0 = A_z \cos\left(\frac{\omega_z \Delta}{4}\right), \quad (3.8)$$

где A_z — амплитуда колебаний при отсутствии управления. Она может выбираться произвольно. Таким образом, в идеальном случае, когда отсутствуют ошибки определения траектории движения КА и исполнения коррекций, описанная выше схема коррекции решает задачу синхронизации движения КА вдоль осей y и z .

5. Управление движением в окрестности заданной гало-орбиты.

При моделировании реальной задачи синхронизации движения КА по осям y и z необходимо учитывать ошибки определения траектории движения и реализации корректирующих импульсов. Для того, чтобы КА находился на гало-орбите в течение заданного интервала времени, необходимо решать одновременно и задачу удержания КА в окрестности либрационной точки L_2 , и задачу синхрониза-

ции. Энергетические затраты для синхронизации движения КА по осям y и z значительно больше, чем только для удержания КА в окрестности точки L_2 . Поэтому, в настоящей работе исследован алгоритм управления движением КА, в которых две коррекции проводятся в моменты времени, близкие к энергетически оптимальным моментам времени τ_1 и τ_2 (3.6) в идеальной задаче синхронизации.

Решение задачи синхронизации одновременно с задачей удержания КА в окрестности L_2 допускает различные постановки. В настоящей работе исследована следующая схема. К моменту времени τ_1 , непосредственно перед коррекцией определена оценка вектора состояния КА $\vec{f}^-$. По значению этого вектора определялась составляющая корректирующего импульса $\Delta \vec{f} = \{0, 0, 0, \Delta V_x, \Delta V_y, 0\}$, решающая задачу удержания ($A_z^+ = 0$). Тем самым определялся расчетный вектор состояния $\vec{f}^+ = \vec{f}^- + \Delta \vec{f}$ для случая идеальной коррекции. Естественное движение КА с начальными данными $\vec{f}^+$ вдоль оси y

$$y = A_y \cos(\omega_y(\tau - \tau_1) + \varphi_y)$$

обладает некоторой амплитудой A_y и фазой φ_y (Здесь мы пренебрегаем экспоненциально убывающим членом, слабо влияющим на движение КА). Через период $T_y = \frac{2\pi}{\omega_y}$ в рамках линейной задачи в расчетном случае амплитуда A_y и фаза φ_y не изменятся.

Рассмотрим теперь движение КА вдоль оси z , когда КА сообщаются два корректирующих импульса вдоль оси z :

$$\text{в момент времени } \tau_1 \text{ импульс } \Delta \vec{f}_{z1} = (0, 0, 0, 0, 0, \Delta V_{z1})$$

$$\text{в момент времени } \tau_2 \text{ импульс } \Delta \vec{f}_{z2} = (0, 0, 0, 0, 0, \Delta V_{z2})$$

В этом случае через период T_y амплитуда A_z естественного колебания КА вдоль оси z и его фазовый угол φ_z определяются следующими формулами

$$A_z = A_z^0 \frac{\cos \varphi_z^0 \cos(\tilde{\varphi}_z + \Delta_1)}{\cos(\varphi_z^0 + \Delta_1) \cos(\tilde{\varphi}_z + \Delta)}$$

$$\varphi_z = \varphi_z^0 + \frac{\omega_z}{\omega_y} 2\pi + \Delta$$

где A_z^0 и φ_z^0 — амплитуда и фаза в момент времени τ_1 ,
 $\tilde{\varphi}_z$ — фаза в момент времени τ_2 без учета коррекции в
 момент времени τ_1 ($\tilde{\varphi}_z = \omega_z(\tau_2 - \tau_1) + \varphi_z^0$),
 Δ — изменение фазы за счет коррекций ($\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$) за
 период T_y . Величины Δ_1 и Δ_2 определяются
 из уравнений:

$$\frac{\Delta V_{z1}}{\omega_z} = A_z^0 \frac{\sin \Delta_1}{\cos(\varphi_z^0 + \Delta_1)}$$

$$\frac{\Delta V_{z2}}{\omega_z} = A_z^0 \frac{\cos \varphi_z^0 \sin \Delta_2}{\cos(\varphi_z^0 + \Delta_1) \cos(\tilde{\varphi}_z + \Delta)}$$

Задача коррекции состоит в выборе таких ΔV_{z1} и ΔV_{z2} , чтобы
 значения величин A_z и φ_z в момент времени $\tau_1 + T_y$ были
 заданными. В частности, для того, чтобы проекция траектории
 движения КА на плоскость yOz была близка к кругу, необходимо
 $A_z = A_z \text{ заг} \approx A_{y \text{ ном}}$ — номинальному значению амплитуды A_y ,
 а $\Delta \varphi = \varphi_z - \varphi_y = \Delta \varphi^* \approx 90^\circ$. В линейном приближении решение этой
 задачи определяется следующими формулами:

$$\frac{\Delta V_{z1}}{\omega_z} = A_z^0 \frac{A_1}{A_1 \sin \varphi_z^0 + B_1 \cos \varphi_z^0}$$

$$\frac{\Delta V_{z2}}{\omega_z} = A_z \text{ заг} \frac{A_1 \cos \Delta + B_1 \sin \Delta}{A_1 \sin \tilde{\varphi}_z + B_1 \cos \tilde{\varphi}_z}$$

где

$$\Delta = \varphi_z \text{ заг} - \varphi_z^0 - \frac{\omega_z}{\omega_y} 2\pi$$

$$A_1 = A_z^0 \cos \varphi_z^0 \cos \tilde{\varphi}_z - A_z \text{ заг} \cos(\tilde{\varphi}_z + \Delta) \cos \varphi_z^0$$

$$B_1 = A_z \text{ заг} \cos(\tilde{\varphi}_z + \Delta) \sin \varphi_z^0 - A_z^0 \cos \varphi_z^0 \sin \tilde{\varphi}_z$$

Выбор в нашем алгоритме коррекции в качестве корректируемого
 параметра разности фаз $\Delta \varphi$, а не периода колебания T_z , объяс-
 няется тем, что такое решение по существу и необходимо. При кор-
 ректировании величины T_z из-за случайных ошибок определения
 орбиты и управления движением КА разность фаз $\Delta \varphi$ со временем
 может значительно отличаться от заданной величины $\Delta \varphi^*$. В
 этом случае проекция траектории движения КА на плоскость yOz
 будет близка к эллипсу. Причем с уменьшением $\Delta \varphi$ эксцентриситет
 этого эллипса увеличивается, так что может возникнуть ситуация,
 когда коррекция периода колебания КА вдоль оси z не обеспечи-
 вает видимости КА из наземных пунктов. Алгоритм, в котором $\Delta \varphi$
 выбирается в качестве корректируемого параметра, не обладает этим
 недостатком. При этом, в идеальном случае (когда отсутствуют
 ошибки определения траектории и управления движением КА) коррек-
 тирование величины $\Delta \varphi$ приводит к выравниванию периодов колебаний
 КА вдоль осей y и z , т.е. решает идеальную задачу синхро-
 низации.

Хотя к моменту времени τ_2 можно получить новую информа-
 цию о параметрах движения, в нашей схеме составляющая импульса
 по оси z в момент времени τ_2 определяется величиной ΔV_{z2} ,
 вычисленной при решении задачи коррекции в момент времени τ_1 .
 Т.е. задача синхронизации решается один раз за T_y период.

Задача удержания решается независимо на каждом луче коррек-
 ций $\varphi = \varphi_i \text{ заг}$. Значения $\varphi_i \text{ заг}$, не связанные с момента-
 ми времени коррекций τ_1 и τ_2 , могут выбираться так, чтобы
 уменьшить суммарные энергетические затраты. При этом, никаких
 ограничений на расположение лучей коррекций $\varphi = \varphi_i \text{ заг}$ ($i=1,2,\dots,n$)
 нет, т.к. вся гало-орбита находится в зоне прямой видимости с

Земли.

6. Численное решение задачи : статистические оценки энергетических затрат и устойчивости параметров орбиты.

Рассмотренные выше задачи удержания КА в окрестности либрационной точки L_2 и сохранения гало-орбиты являются статистическими задачами. Для моделирования этих задач на ЭВМ использовался метод статистических испытаний. При этом, основной целью решения поставленных задач на ЭВМ было получение вероятностных оценок необходимых энергетических затрат и устойчивости получаемого решения. Ошибки определения траектории движения КА и исполнительные ошибки проведения коррекций считались независимыми, несмещенными, гауссовскими случайными величинами с известными среднеквадратическими отклонениями $\sigma_{\delta x}, \sigma_{\delta y}, \sigma_{\delta z}, \sigma_{\delta \dot{x}}, \sigma_{\delta \dot{y}}, \sigma_{\delta \dot{z}}, \sigma_{\Delta i}$, т.е.

$$M(\vec{\delta f}_i) = 0, \quad M(\vec{\delta f}_i, \vec{\delta f}_j^T) = \delta_{ij} \begin{vmatrix} \sigma_{\delta x}^2 & 0 & 0 \\ \sigma_{\delta y}^2 & \sigma_{\delta z}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta \dot{x}}^2 \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta \dot{y}}^2 \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta \dot{z}}^2 \end{vmatrix}$$

$$M(\Delta i) = 0, \quad M(\Delta i, \Delta j) = \sigma_{\Delta i}^2 \delta_{ij},$$

$$M(\Delta i, \vec{f}_j) = 0$$

где M — обозначает математическое ожидание, а δ_{ij} — символ Кронекера. Для получения оценок производились серии расчетов. Эти расчеты отличались друг от друга набором случайных чисел, входящих в расчет в качестве ошибок определения орбиты КА и исполнительных ошибок коррекций. Эти случайные числа моделировались на ЭВМ с помощью датчика псевдослучайных чисел.

Как показали предварительные расчеты, для задачи удержания КА в окрестности точки L_2 в случае только двух лучей коррекции ($n=2$) требуются энергетические затраты примерно в 10 раз больше, чем в случае четырех лучей коррекции ($n=4$). Более того, в случае двух лучей коррекции, даже при достаточно малых дисперсиях ошибок определения траектории КА и исполнения коррекций, наблюдается неустойчивость решения задачи удержания КА в окрестности точки L_2 . Поэтому в дальнейшем исследован лишь случай четырех лучей коррекции ($n=4$).

Для задачи удержания КА в окрестности точки L_2 во всех численных расчетах лучи коррекции $\varphi = \varphi_i \text{ заг}$ ($i=1, 2, \dots, n$) выбирались симметричными относительно осей x и y , т.е.

$$\varphi_1 \text{ заг} = \gamma, \quad \varphi_2 \text{ заг} = \pi - \gamma, \quad \varphi_3 \text{ заг} = \pi + \gamma, \quad \varphi_4 \text{ заг} = 2\pi - \gamma.$$

Условие видимости КА с Земли в моменты времени проведения коррекций накладывает ограничения на диапазон изменения угла γ . В дальнейшем будем считать, что угол γ лежит в пределах $\alpha \leq \gamma \leq \pi - \alpha$, где α зависит от размеров орбиты КА.

В задаче сохранения гало-орбиты нет ограничений на углы $\varphi_i \text{ заг}$. При численном решении этой задачи лучи коррекций $\varphi = \varphi_i \text{ заг}$ ($i=1, 2, 3, 4$) выбирались так, чтобы две коррекции проводились в моменты времени, близкие к оптимальным по энергетике для идеальной задачи синхронизации, а общие энергетические затраты, необходимые для совместного решения задач синхронизации и удержания КА в окрестности точки L_2 , были минимальны.

Все приведенные ниже результаты численного решения задачи удержания КА в окрестности точки L_2 и задачи сохранения гало-орбиты определялись моделированием движения КА в течение одного года. В дальнейшем будем считать, что КА выведен в заданное начальное положение $\vec{f}_0$ с абсолютной точностью. Естественно, при этом,

выбрать начальный фазовый вектор $\vec{f}_0$ из условия $A_3 = A_4 = 0$, т.е. предполагается, что на начальном участке КА движется в плоскости xOy по эллипсу с малой полуосью A_x и совершает гармоническое колебание вдоль оси z . Начальные значения малой полуоси эллипса A_x и амплитуды колебания по оси z A_z приняты равными 1600 км и 4800 км соответственно. При этом величина α должна быть больше 45° , т.е. $45^\circ < \alpha < 135^\circ$. Среднеквадратические отклонения случайных ошибок определения траектории КА и исполнения коррекций почти во всех расчетах имели следующие значения:

$$\begin{aligned}\sigma_{\delta x} &= 1 \text{ км} \\ \sigma_{\delta y} &= \sigma_{\delta z} = 30 \text{ км} \\ \sigma_{\delta \dot{x}} &= 3 \frac{\text{см}}{\text{сек}} \\ \sigma_{\delta \dot{y}} &= \sigma_{\delta \dot{z}} = 10 \frac{\text{см}}{\text{сек}} \\ \sigma_{\Delta i} &= 3\%\end{aligned} \quad (3.9)$$

В дальнейшем требуемый суммарный импульс для решения поставленных задач будем обозначать через W .

Моделирование задачи удержания КА в окрестности либрационной точки L_2

(а) Корректирующие импульсы направлены по оси x .

Для нахождения значения γ , соответствующего минимальным энергетическим затратам для этой задачи, было проведено по десять расчетов с различными γ . На рис. 7 приведены графики зависимостей от угла γ величин $\bar{A}_x, \bar{W}$ — усредненных по десяти расчетам величин A_x и W . При этом величины A_x и W определены в конце временного интервала (равного году) движения КА в окрестности точки L_2 . Как следует из графиков, минимальное значение $\bar{W}$ и минимальное отклонение $\bar{A}_x$ от заданного зна-

чения $A_x = 1600$ км достигаются при $\gamma \approx 70^\circ$. Для получения приближенных плотностей распределения случайных величин W и A_x , а также более точных средних значений $\bar{W}$ и $\bar{A}_x$ для $\gamma = 70^\circ$ и $\gamma = 75^\circ$ было сделано по 100 расчетов. Результаты осреднения по 100 расчетам приведены в табл. 6, а приближенные плотности распределения случайных величин A_x и W (для $\gamma = 70^\circ$) приведены на рисунке 8.

Таблица 6

γ	$\bar{A}_x$ (км)	$\bar{W}$ (м/сек)
70°	1616	47,4
75°	1620	47,7

Расчеты показали, что алгоритм коррекции (а) (импульсы направлены вдоль оси x) решает задачу удержания КА в окрестности точки либрации L_2 . При этом с большой вероятностью величина

A_x близка к начальному значению $A_x = 1600$ км. Максимальное отклонение величины A_x от 1600 км составляет ± 200 км. При этом из анализа промежуточных результатов следует, что изменение величины A_x в течение года также находится в этих пределах. Это означает, что максимальное отклонение КА по оси y от точки L_2 лежит в пределах $[4200 \text{ км}, 5400 \text{ км}]$. При этом суммарный импульс, требуемый для удержания КА в окрестности точки L_2 в течение года, не больше, чем 56 м/сек.

Интервалы времени между коррекциями при $\gamma \approx 70^\circ$ почти одинаковы и равны примерно 3,5 суткам.

(б) Корректирующие импульсы лежат в плоскости xOy .

Для алгоритма коррекции (с) минимальный импульс также получается при значениях $\varphi_{i\text{заг}}$, соответствующих $\gamma \approx 70^\circ$. При $\gamma = 70^\circ$ величины $\bar{A}_x = 1670$ км, $\bar{W} = 36,5$ м/сек в год. Разброс величины A_x несколько больше, чем при алгоритме коррекции (а) и составляет ± 300 км. Суммарный импульс W при этой схеме коррекции не больше 40 м/сек в год.

Для выяснения зависимости величин $\bar{A}_x$ и $\bar{W}$ от отдельных ошибок определения траектории и исполнительных ошибок были проведены расчеты с $\gamma = 70^\circ$, в которых дисперсии всех ошибок, кроме одной, были нулевыми. Полученные данные для обоих алгоритмов коррекции приведены в таблице 7.

Таблица 7

$\delta \neq 0$	Алгоритм коррекции (а)		Алгоритм коррекции (с)	
	$\bar{A}$ (км)	$\bar{W}$ (м/сек)	$\bar{A}$ (км)	$\bar{W}$ (м/сек)
δx	1607	4,9	1603	4,2
δy	1600	27,2	1596	13
δx	1582	15,4	1619	22,4
δy	1595	31	1618	26

Наибольший вклад в суммарный импульс вносят ошибки определения y и $\dot{y}$ в алгоритме коррекции (а), $\dot{x}$ и $\dot{y}$ в алгоритме коррекции (с).

Моделирование задачи сохранения гало-орбиты

Схема коррекции, которая использовалась для моделирования этой задачи на ЭВМ, была описана выше. По этой схеме за один

виток КА по гало-орбите проводятся две трехпараметрические коррекции (примерно через 7,3 суток $\varphi_{i\text{заг}} = 5^\circ, 185^\circ$), которые решают как задачу удержания, так и задачу синхронизации движения, и в промежутках между ними, две двумерные коррекции (в плоскости xOy). В случае идеальной задачи синхронизации движения КА вдоль осей y и z суммарный импульс равен 148 м/сек в год. При этом максимальное отклонение от плоскости xOy составляет $z_0 \approx 4750$ км.

Для задачи сохранения гало-орбиты, когда в расчете учитываются ошибки определения траектории движения и исполнения коррекций, минимальные энергетические затраты получаются при $\varphi_{i\text{заг}} = 5^\circ$.

$\varphi_{2\text{заг}} = 90^\circ, \varphi_{3\text{заг}} = 185^\circ, \varphi_{4\text{заг}} = 270^\circ$. Для этого варианта было проведено сто расчетов. Средние значения величин A_x и W по ста расчетам равны $\bar{A}_x = 1583$ км, $\bar{W} = 175$ м/сек в год. Гистограммы распределений величин A_x и W приведены на рис. 10. Из рисунков видно, что с большой вероятностью разброс величины A_x от начального значения 1600 км не превосходит ± 400 км. Суммарный импульс, требуемый для удержания КА на гало-орбите, не превышает в этих расчетах величины 188 м/сек в год. На рис. 9 приведены гистограммы распределений величин $A_z \min$ и $A_z \max$. В каждом расчете эти величины определяли минимальную и максимальную амплитуду A_z естественного колебания по оси z в течение года. Из рис. 9 следует, что в ста расчетах задачи сохранения гало-орбиты величина A_z изменялась в пределах $4690 \text{ км} < A_z < 4930 \text{ км}$.

7. Дополнительные оценки.

При решении задачи удержания КА в окрестности L_2 ошибки в определении параметров его движения предполагались независимыми, а их дисперсии задавались согласно (3.9). Влияние этих ошибок на величину энергетических затрат проявляется через их влияние на

ошибку в определении коэффициента A_3 в уравнениях (I.13).
 Была проанализирована точность определения коэффициента A_3 в случае, когда измеряются только параметры x и $\dot{x}$, а величина A_3 определяется через значение этих параметров в двух различных по времени точках траектории. Эта схема моделирует определения движения КА в плоскости xOy только по измерениям дальности и радиальной скорости из наземного пункта.

Если значения x и $\dot{x}$ определены непосредственно после i -й коррекции и перед $(i+1)$ -й коррекцией, то коэффициенты A_j определяются следующими выражениями:

$$A_1 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \lambda [-(\lambda \cos \omega_y \tau_{i+1} + \omega_y \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(\lambda \tau_{i+1}) + \right. \\
 + (\lambda \cos \omega_y \tau_{i+1} - \omega_y \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(-\lambda \tau_{i+1})] \hat{x}_{i+1}^- + \\
 + [(\lambda \cos \omega_y \tau_{i+1} + \omega_y \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(\lambda \tau_{i+1}) + \\
 + (\lambda \cos \omega_y \tau_{i+1} - \omega_y \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(-\lambda \tau_{i+1}) - \\
 - 2\lambda] \hat{x}_{i+1}^- - \\
 - \lambda [-\lambda \exp(\lambda \tau_{i+1}) + \lambda \exp(-\lambda \tau_{i+1}) - \\
 - 2\omega_y \sin \omega_y \tau_{i+1}] \hat{x}_i + \\
 \left. + [\lambda \exp(\lambda \tau_{i+1}) + \lambda \exp(-\lambda \tau_{i+1}) - 2\lambda \cos \omega_y \tau_{i+1}] \hat{x}_i \right\}$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \lambda [(\omega_y \cos \omega_y \tau_{i+1} - \lambda \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(\lambda \tau_{i+1}) + \right. \\
 + (\omega_y \cos \omega_y \tau_{i+1} + \lambda \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(-\lambda \tau_{i+1}) - 2\omega_y] \hat{x}_{i+1}^- + \\
 + [-(\omega_y \cos \omega_y \tau_{i+1} - \lambda \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(\lambda \tau_{i+1}) + \\
 + (\omega_y \cos \omega_y \tau_{i+1} + \lambda \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(-\lambda \tau_{i+1})] \hat{x}_{i+1}^- + \\
 + \lambda \omega_y [\exp(\lambda \tau_{i+1}) + \exp(-\lambda \tau_{i+1}) - 2 \cos \omega_y \tau_{i+1}] \hat{x}_i + \\
 \left. + [\omega_y (\exp(\lambda \tau_{i+1}) - \exp(-\lambda \tau_{i+1})) - 2\lambda \sin \omega_y \tau_{i+1}] \hat{x}_i \right\}$$

$$A_3 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \omega_y [(\lambda \cos \omega_y \tau_{i+1} + \omega_y \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(\lambda \tau_{i+1}) - \lambda] \hat{x}_{i+1}^- + \right. \\
 + [(\omega_y \cos \omega_y \tau_{i+1} - \lambda \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(\lambda \tau_{i+1}) - \omega_y] \hat{x}_{i+1}^- + \\
 + \omega_y [-\lambda \exp(\lambda \tau_{i+1}) - \omega_y \sin \omega_y \tau_{i+1} + \lambda \cos \omega_y \tau_{i+1}] \hat{x}_i + \\
 \left. + [-\omega_y \exp(\lambda \tau_{i+1}) + \lambda \sin \omega_y \tau_{i+1} + \omega_y \cos \omega_y \tau_{i+1}] \hat{x}_i \right\}$$

$$A_4 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \omega_y [(\lambda \cos \omega_y \tau_{i+1} - \omega_y \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(-\lambda \tau_{i+1}) - \lambda] \hat{x}_{i+1}^- + \right. \\
 + [-(\omega_y \cos \omega_y \tau_{i+1} + \lambda \sin \omega_y \tau_{i+1}) \exp(-\lambda \tau_{i+1}) + \omega_y] \hat{x}_{i+1}^- + \\
 + \omega_y [-\lambda \exp(-\lambda \tau_{i+1}) + \omega_y \sin \omega_y \tau_{i+1} + \lambda \cos \omega_y \tau_{i+1}] \hat{x}_i + \\
 \left. + [\omega_y \exp(-\lambda \tau_{i+1}) + \lambda \sin \omega_y \tau_{i+1} - \omega_y \cos \omega_y \tau_{i+1}] \hat{x}_i \right\}$$

$$\Delta = [(\lambda^2 - \omega_y^2) \sin \omega_y \tau_{i+1} + 2\lambda \omega_y \cos \omega_y \tau_{i+1}] \exp(-\lambda \tau_{i+1}) + \\ + [(\omega_y^2 - \lambda^2) \sin \omega_y \tau_{i+1} + 2\lambda \omega_y \cos \omega_y \tau_{i+1}] \exp(\lambda \tau_{i+1}) - \\ - 4\lambda \omega_y,$$

$$\tau_{i+1} = t_{i+1} - t_i$$

В этих формулах $\hat{x}_i$ и $\hat{\dot{x}}_i$ соответствуют вектору $\hat{f}_i$, а $\hat{x}_{i+1}$ и $\hat{\dot{x}}_{i+1}$ - вектору $\hat{f}_{i+1}$ (см. раздел 2 этой главы).

Численный анализ показал: если принять $\tau_{i+1} \approx 3,5$ суток и те же дисперсии ошибок для $\hat{x}$ и $\hat{\dot{x}}$, что в (3.9), то дисперсия ошибки коэффициента A_3 , определяемого по приведенной выше формуле, оказывается примерно такой же, как в случае, когда A_3 определяется по величинам $\hat{x}$, $\hat{\dot{x}}$, $\hat{y}$, $\hat{\dot{y}}$ при дисперсии их ошибок согласно (3.9).

Следует отметить, что для рассматриваемого в этом разделе варианта определения коэффициента A_3 точность его определения существенно зависит от точности определения $\hat{x}$ и ошибка в A_3 может быть уменьшена при уменьшении ошибки определения $\hat{x}$. При этом энергетические затраты на задачу удержания практически пропорционально изменяются с изменением ошибки в A_3 .

Литература.

1. Farquhar, R.W., "Station-Keeping in the Vicinity of Collinear Libration Points with an Application to a Lunar Communications Problem", Space Flight Mechanics (American Astronautical Society, New York, 1967) Science and Technology Series, Vol.II, pp 519-535
2. Farquhar, R.W., "Lunar Communications with Libration-Point Satellites", J. of Spacecraft and Rockets, Vol.4 №10(1967) pp 1383-1384.
3. Farquhar, R.W., "Future Missions for Libration-Point Satellites", Astronautics and Aeronautics, Vol.7 №5(1969) pp 52-56.
4. Farquhar, R.W., "A Halo-Orbit Lunar Station", Astronautics and Aeronautics, Vol.10 №6(1972), pp 59-63.
5. Gerding, R.B., "Rendezvous Equations in the Vicinity of the Second Libration Point", J. of Spacecraft and Rockets, Vol.8 №3(1971), pp 292-294.
6. Euler, E.A., Yu, E.Y., "Optimal Station-Keeping at Collinear Points", AIAA Paper, №906(1969), pp 1-7.
7. Heppenheimer, T.A., "Optimal Controls for Out-of-Plane Motion about the Translunar Libration Point", J. of Spacecraft and Rockets, Vol.7 №9(1970), pp 1088-1092

8. Farquhar, R.W., "Limit-Cycle Analysis of a Controlled Libration-Point Satellite", J. of the Astronautical Sciences, Vol.17 N 5(1970) pp 267-291.

9. Breakwell, J.V., Kamel, A.A., Ratner, M.J., "Station-Keeping for a Translunar Communication Station", AAS/AIAA Astrodynamics Conference Vail, Colorado July 16-18, 1973.

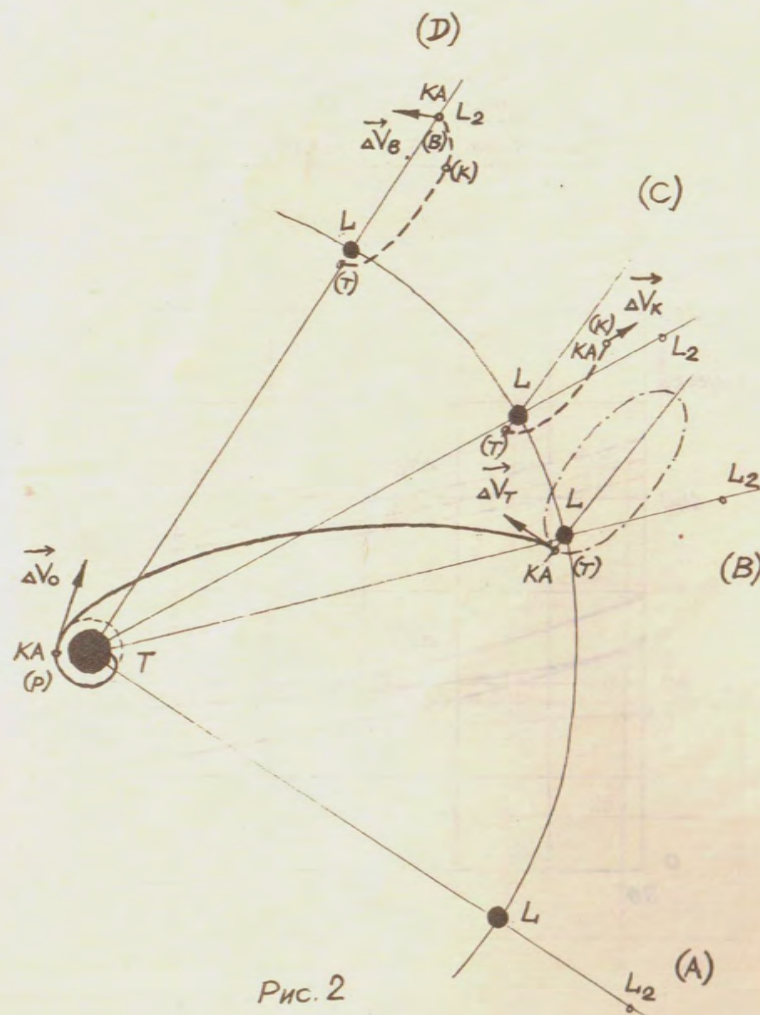


Рис. 2

№ кривой	(1)	(2)	(3)
ΔV_T м/сек	186,16	181,16	176,16

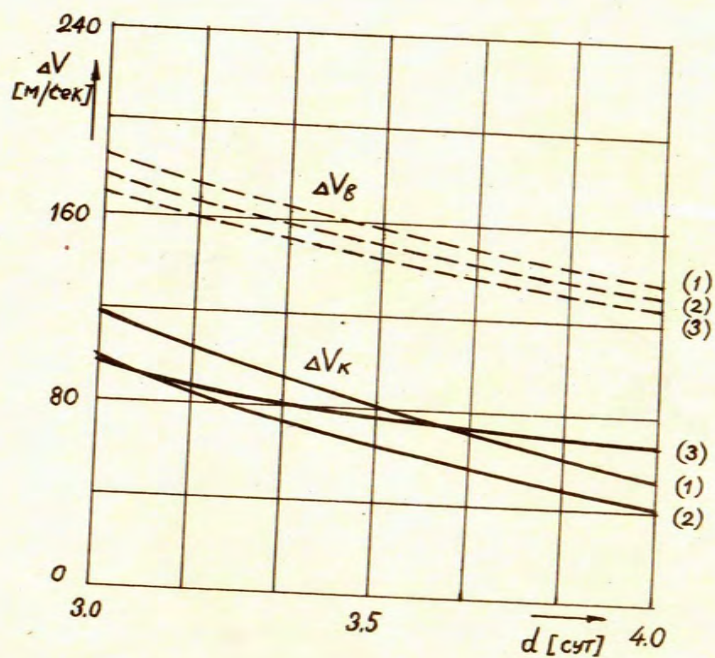


Рис. 3

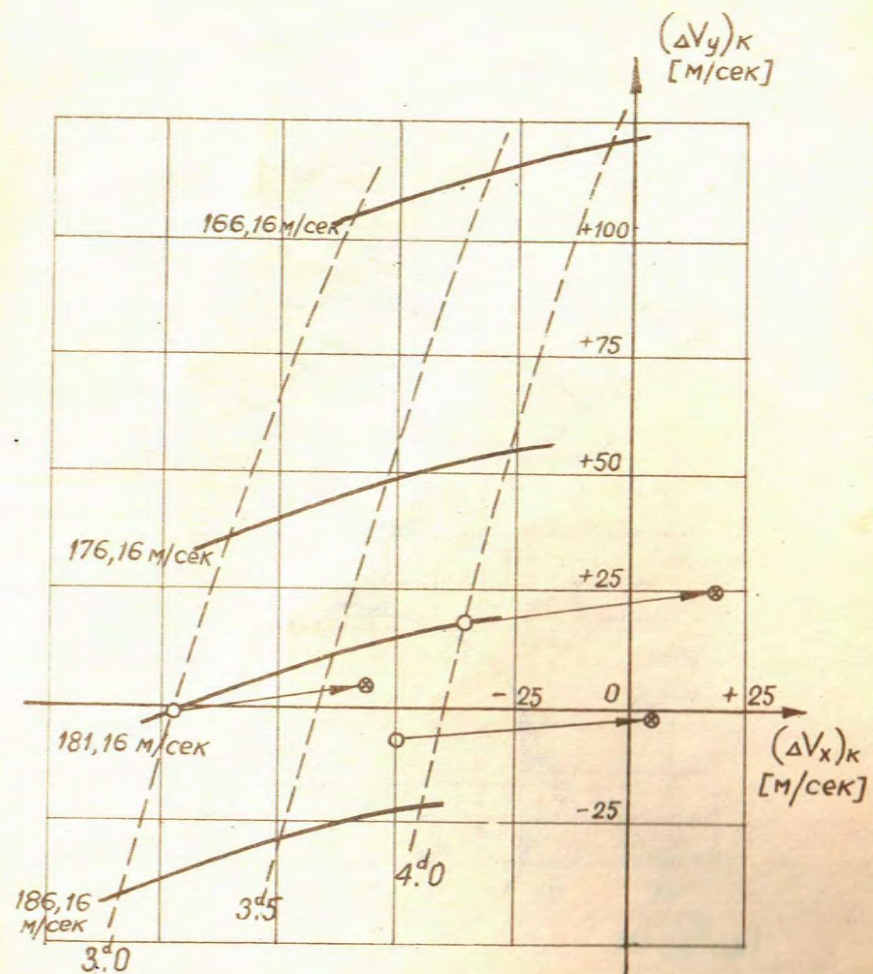


Рис. 4

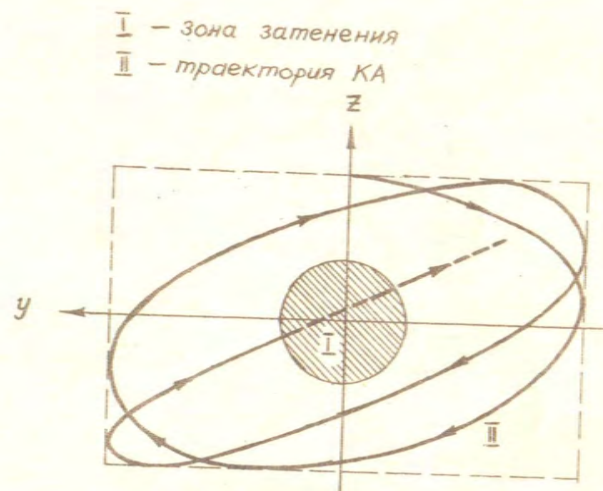


Рис. 5

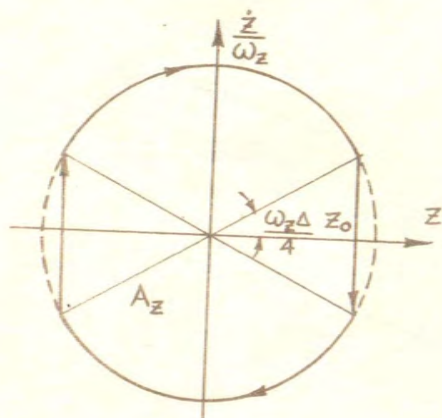


Рис. 6

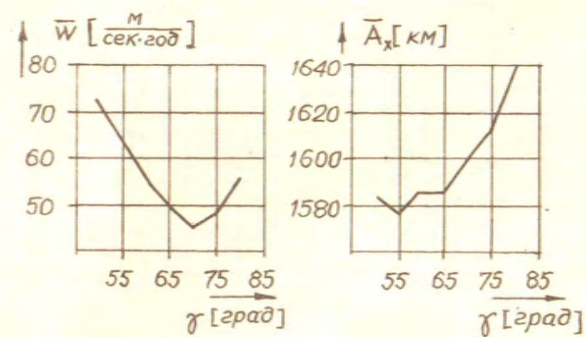


Рис. 7

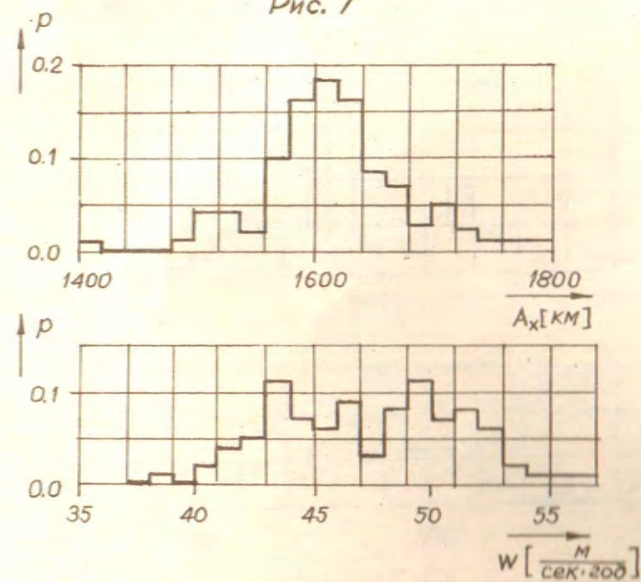


Рис. 8

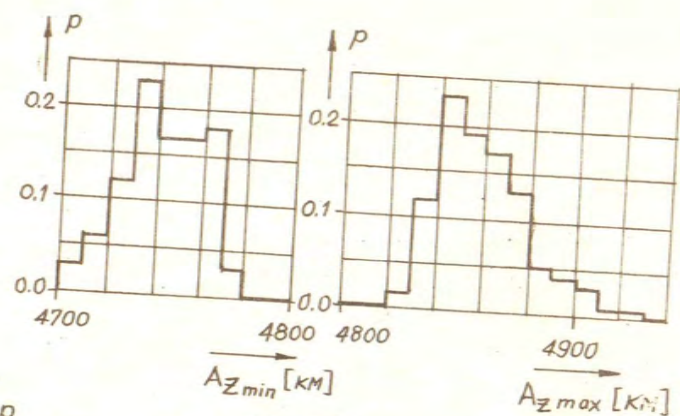


Рис. 9

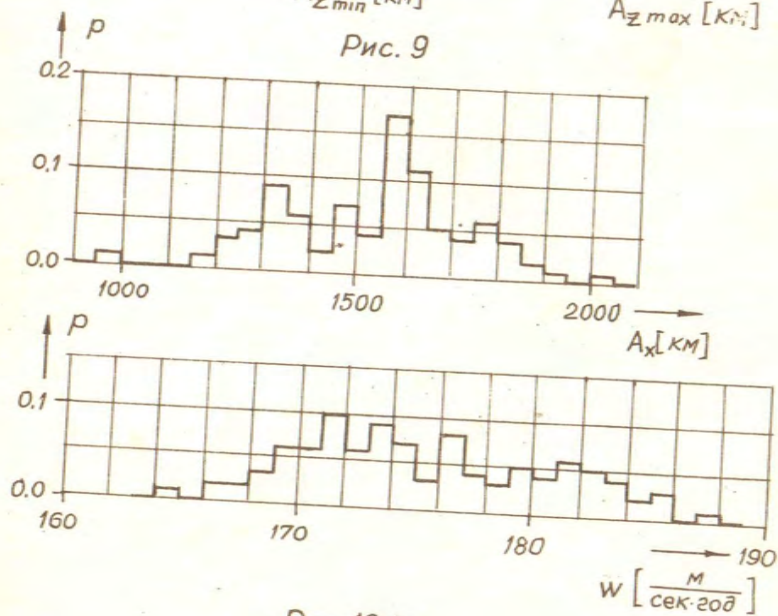


Рис. 10