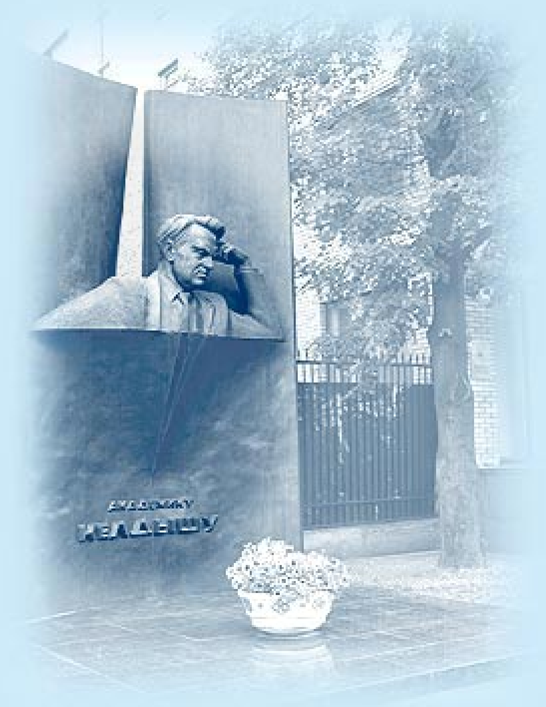

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.С. Рябенький

Локальные формулы гладкого восполнения и гладкой интерполяции функций по их значениям в узлах неравномерной прямоугольной сетки

21

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

В.С. Рябенький

ЛОКАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ГЛАДКОГО ВОСПОЛНЕНИЯ И ГЛАДКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ В УЗЛАХ НЕРАВНОМЕРНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЕТКИ

Препринт № 21 за 1974 г

Москва

Пусть на сетке

$$\left(x_{k_1}^{(1)},\dots,x_{k_m}^{(m)},\dots,x_{k_M}^{(M)}\right),\ \Delta x_{k_m}^{(m)}=x_{k_m+1}^{(m)}-x_{k_m}^{(m)}>0$$

$$k_m=0,\pm1,\dots;\qquad m=1,2,\dots,M;$$

задана функция $f^{(h)}\left(x_{k_1}^{(1)},\dots,x_{k_m}^{(m)},\dots,x_{k_M}^{(M)}\right)$.

Задача гладкого восполнения функции при заданном целом $P\geqslant 0$ состоит в том, чтобы доопределить сеточную функцию во всем пространстве до некоторой кусочно-многочленной функции, имеющей всевозможные непрерывные производные до порядка P включительно, причем модули этих производных не должны превосходить максимумов модулей соответствующих разностных отношений исходной сеточной функции более чем в конечное число раз, не зависящее от шагов сетки.

Задача гладкой интерполяции состоит в том, чтобы по таблице $f^{(h)}\left(x_{k_1}^{(1)},\dots,x_{k_m}^{(m)},\dots,x_{k_M}^{(M)}\right)$ значений равномерно-непрерывной вместе со всеми своими производными до некоторого порядка $P\geqslant 0$ функции $f\left(x^{(1)},\dots,x^{(m)},\dots,x^{(M)}\right)$ построить кусочно-многочленную гладкую функцию, которая при измельчении сетки вместе со всеми своими производными до порядка P сходится и к функции $f\left(x^{(1)},\dots,x^{(M)}\right)$ и ее соответствующим производным.

Задачи гладкого восполнения и интерполяции функций были поставлены (по-видимому, впервые даже применительно к одномерному случаю $M = 1$) и решены мною при постоянном шаге $\Delta x_{\kappa}^{(m)} = C_m = const$ сетки соответственно в работах [I] и [2], причем формулы восполнения [I] воспроизведены в [2].

Здесь формулы гладкого восполнения и интерполяции [I], [2] приводятся в более развернутом и удобном для вычислительной практики виде, несколько уточняются оценки, причем все результаты обобщаются на случай сеток с переменными шагами.

Отметим, что скорость сходимости построенной интерполяционной функции и ее производных соответственно к интерполируемой функции из заданного класса гладких функций и к ее производным при стремлении максимального шага сетки к нулю принципиально неулучшаема по порядку в силу информационных соображений.

Построенные формулы локальны: для восполнения или интерполяции функции в ячейке

$$x_{\kappa_m}^{(m)} \leqslant x^{(m)} \leqslant x_{\kappa_m+1}^{(m)}, \quad m = 1, 2, \ldots, M;$$

привлекаются значения сеточной функции лишь в нескольких соседних с этой ячейкой узлах сетки, причем в одномерном случае число используемых узлов нельзя уменьшить.

Существует большая литература о нелокальной гладкой интерполяции, в ее современном виде берущая начало от работы Шёнберга [3]. В работе [3] для функций одного переменного построены интерполяционные функции - сплайны - непрерывные со своими производными до некоторого порядка и являющиеся при этом многочленами наименьшей возможной степени между каждыми двумя соседними узлами интерполяции. Коэффициенты каждого многочлена зависят от всей таблицы значений интерполируемой функции. В работе Шёнберга [3] не ставится вопрос о поведении сплайна при измельчении сетки. Первые результаты о сходимости одномерных сплайнов Шёнберга получены Албергом, Нильсоном и Уолшем [4].

Первые обобщения теории сплайнов на многомерный случай относятся к 60-ым годам. (См., напр., [5]).

В отличие от явно выписываемых нами формул локальной гладкой интерполяции, фактическое вычисление коэффициентов многочленов, образующих нелокальные сплайны, требует решения систем линейных уравнений высокого порядка. В одномерном случае структура этих систем позволяет воспользоваться для их решения алгоритмом прогонки. В многомерном случае трудности возрастают.

Отметим, что нелокальные сплайны обладают экстремальными свойствами, существенными для некоторых задач.

§ I. Обозначения и результаты.

В этом параграфе мы введем необходимые определения (пп.I-5), приведем формулы восполнения и интерполяции функций и сформулируем теоремы о свойствах полученных по этим формулам гладких функций (п.п.6-8) в случае неограниченной сетки. В п.9 рассмотрены примеры.

I. Определения величин $\Delta x_{\kappa_m}^{(m)}, X^{(m,\kappa)}, X_i^{(m,\kappa)}$.

Пусть функция $M \geqslant 1$ аргументов

$$f^{(h)}(x_{\kappa_1}^{(1)}, \ldots, x_{\kappa_m}^{(m)}, \ldots, x_{\kappa_M}^{(M)}), \quad m = 1, 2, \ldots, M; \tag{1}$$

задана на сетке

$$x_{\kappa_1}^{(1)}, \ldots, x_{\kappa_m}^{(m)}, \ldots, x_{\kappa_M}^{(M)}; \qquad \kappa_m = 0, \pm 1, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots, M; \tag{2}$$

в пространстве переменных $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$, причем

$$\Delta x_{\kappa_m}^{(m)} \equiv x_{\kappa_m+1}^{(m)} - x_{\kappa_m}^{(m)} > 0, \qquad \kappa_m = 0, \pm 1, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{3}$$

Положим

$$\mathcal{X}^{(m,\kappa)} \equiv \frac{x^{(m)} - x^{(m)}_{\kappa}}{\Delta x^{(m)}_{\kappa_m}}, \quad m = 1, 2, \ldots, M; \qquad (4)$$

$$\mathcal{X}^{(m,\kappa)}_{i} \equiv \frac{x^{(m)}_{i+\kappa} - x^{(m)}_{\kappa}}{\Delta x^{(m)}_{\kappa_m}}, \qquad i = 0, \pm 1, \ldots \qquad (5)$$

2. Определение многочленов $q_i(\mathcal{X}^{(m,\kappa)})$. Фиксируем целые $P \geq 0$, $1 \leq m \leq M$, $0 \leq s \leq P$ и $-\infty < x < \infty$ и введем многочлены

$$q_i(\mathcal{X}^{(m,\kappa)}) = q_i(\mathcal{X}^{(m,\kappa)}, m, s, \kappa, P), \qquad i = 0, 1, \ldots, P+1; \qquad (6)$$

одного аргумента $\mathcal{X}^{(m,\kappa)}$, определив эти многочлены следующими равенствами:

$$q_0(\mathcal{X}^{(m,\kappa)}) \equiv 1; \qquad (7)$$

$$q_i(\mathcal{X}^{(m,\kappa)}) = \prod_{j=0}^{i-1} (\mathcal{X}^{(m,\kappa)} - \mathcal{X}^{(m,\kappa)}_{j-s}), \qquad i = 1, 2, \ldots, P; \qquad (8)$$

$$q_{P+1}(\mathcal{X}^{(m,\kappa)}) = (\mathcal{X}^{(m,\kappa)}_{P+1-s} - \mathcal{X}^{(m,\kappa)}_{s}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\tau=0}^{P} \left\{ \left[\prod_{j=1}^{P} (\mathcal{X}^{(m,\kappa)} - \mathcal{X}^{(m,\kappa)}_{j-s}) \right]^{(\tau)}_{\mathcal{X}^{(m,\kappa)}=1} \right\} \ell_{\tau}(\mathcal{X}^{(m,\kappa)}); \qquad (9)$$

где

$$\ell_{\tau}(v) \equiv \frac{v^{P+1}(v-1)^{\tau}}{\tau!\, P!} \times \sum_{j=0}^{P-\tau} (-1)^{j} \frac{(P+j)!}{j!} (v-1)^{j}; \qquad (10)$$

а через $[\ldots]^{(\tau)}_{\mathcal{X}^{(m,\kappa)}=1}$ обозначено значение τ -ой производной от содержимого скобок по аргументу $\mathcal{X}^{(m,\kappa)}$, вычисленное при $\mathcal{X}^{(m,\kappa)} = 1$.

Отметим, что в случае постоянного шага $\Delta x^{(m)}_{\kappa}$, не зависящего от κ, многочлены (7)-(9) не зависят от m и κ.

3. Определение разделенных разностей. Напомним известное определение разделенных разностей от функции на сетке с переменным шагом:

$$\Delta^{0}_{x^{(m)}} f^{(h)}(x^{(1)}_{\kappa_1}, \ldots, x^{(m)}_{\kappa_m}, \ldots, x^{(M)}_{\kappa_M}) \equiv f^{(h)}(x^{(1)}_{\kappa_1}, \ldots, x^{(m)}_{\kappa_m}, \ldots, x^{(M)}_{\kappa_M});$$

$$\Delta^{\tau}_{x^{(m)}} f^{(h)}(x^{(1)}_{\kappa_1}, \ldots, x^{(m)}_{\kappa_m}, \ldots, x^{(M)}_{\kappa_M}) \equiv \frac{\tau}{x^{(m)}_{\kappa_m+\tau} - x^{(m)}_{\kappa_m}} \cdot$$

$$\cdot \left[\Delta^{\tau-1}_{x^{(m)}} f^{(h)}(x^{(1)}_{\kappa_1}, \ldots, x^{(m)}_{\kappa_m+1}, \ldots, x^{(M)}_{\kappa_M}) - \right.$$

$$\left. \Delta^{\tau-1}_{x^{(m)}} f^{(h)}(x^{(1)}_{\kappa_1}, \ldots, x^{(m)}_{\kappa_m}, \ldots, x^{(M)}_{\kappa_M}) \right],$$

$$\tau = 1, 2, \ldots$$

4. Определение оператора $L_m^{(j_m)}$. Фиксируем m, $m=1,2,\dots,M$; и будем рассматривать функцию

$$\varphi(x^{(1)},\dots,x^{(m)},\dots,x^{(M)}) \qquad (11)$$

на одномерной бесконечной сетке

$$\dots,\ x_{-1}^{(m)},\ x_0^{(m)},\ x_1^{(m)},\ \dots$$

а остальные аргументы $x^{(1)},\dots,x^{(m-1)},x^{(m+1)},\dots,x^{(M)}$ будем считать фиксированными параметрами. Определим оператор $L_m^{(j_m)}$, который сопоставляет сеточной функции (II) аргумента $x^{(m)}$ функцию $\Phi_m^{(j_m)}(x^{(1)},\dots,x^{(m)},\dots,x^{(M)}) \equiv L_m^{(j_m)}\varphi$, определенную при всех $x^{(m)}$, $-\infty < x^{(m)} < \infty$, равенствами

$$\Phi_m^{(j_m)}(x^{(1)},\dots,x^{(m)},\dots,x^{(M)}) \equiv \sum_{i=0}^{P+1} (\Delta x_{K_m}^{(m)})^{i-j_m} \cdot \qquad (12)$$

$$\cdot \frac{q_i^{(j_m)}(X^{(m,K)}, m, s, K, P)}{i!} \Delta^i_{x^{(m)}} \varphi(x^{(1)},\dots,x^{(m)}_{K_m-s},\dots,x^{(M)}),$$

где при заданном $x^{(m)}$ число K_m выбирается так, чтобы выполнялись неравенства

$$x_{K_m}^{(m)} \leq x^{(m)} \leq x_{K_m+1}^{(m)}.$$

Здесь через $q_i^{(j_m)}(X^{(m,K)}, m, s, K, P)$ обозначена производная от многочлена $q_i(X^{(m,K)}, m, s, K, P)$ порядка j_m

по аргументу $X^{(m,K)}$.

Заметим, что на каждом интервале $x_{K_m}^{(m)} < x^{(m)} < x_{K_m+1}^{(m)}$ функция (II) есть некоторый многочлен $Q_{2P+1}^{(j_m)}(x^{(m)})$ степени не выше $2P+1-j$ по $x^{(m)}$:

$$\Phi_{2P+1}^{(j_m)}(x^{(1)},\dots,x^{(m)},\dots,x^{(M)}) \equiv Q_{2P+1}^{(j_m)}(x^{(m)}) \equiv$$

$$\sum_{i=0}^{P+1} (\Delta x_{K_m}^{(m)})^{i-j_m} \cdot \frac{q_i^{(j_m)}(X^{(m,K)}, m, s, K, P)}{i!} \cdot \qquad (13)$$

$$\Delta^i_{x^{(m)}} \varphi(x^{(1)},\dots,x^{(m)}_{K_m-s},\dots,x^{(M)}).$$

5. Определение оператора $L^{(j)}$. Фиксируем целые $P \geq 0$, $0 \leq s \leq P$, целочисленный вектор $j=(j_1,\dots,j_m,\dots,j_M)$, $0 \leq j_m \leq P$. Определим оператор $L^{(j)}$ равенством

$$L^{(j)} \equiv L_M^{(j_M)} \dots L_m^{(j_m)} \dots L_1^{(j_1)}, \qquad (14)$$

где под произведением операторов понимается их последовательное применение.

Оператор $L^{(j)}$ ставит в соответствие каждой сеточной функции (I) функцию $F_h^{(j)}$

$$F_h^{(j)}(x^{(1)},\dots,x^{(m)},\dots,x^{(M)}) \equiv L^{(j)} f^{(h)}, \qquad (15)$$

определенную на всем пространстве переменных $x^{(1)},\dots,x^{(M)}$.
В развернутом виде формула (I5) записывается следующим образом

$$F_h^{(j)}(x^{(1)},\dots,x^{(m)},\dots,x^{(M)}) \equiv$$

$$\equiv\left[\prod_{m=1}^{M}\left(\sum_{i=0}^{P+1}\left(\Delta x_{k_m}^{(m)}\right)^{i-j_m} q_i^{(j_m)}\left(X^{(m,k)}, m, s, k, P\right)\cdot\right.\right. \tag{16}$$

$$\left.\left.\cdot\frac{\Delta^i_{x^{(m)}}}{i!}\right) f^{(h)}\left(x^{(1)}_{k_1-s}, \ldots, x^{(m)}_{k_m-s}, \ldots, x^{(M)}_{k_M-s}\right)\right],$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_M$ выбираются для заданных $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(M)}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$x^{(m)}_{k_m} \leqslant x^{(m)} < x^{(m)}_{k_m+1}, \qquad m = 1, 2, \ldots, M.$$

6. Формула восполнения на всем пространстве. В случае, если $j = 0$ – нулевой вектор, формулу (I6) будем называть формулой гладкого восполнения сеточной функции $f^{(h)}$ до функции $F_h = F_h^{\circ}$, определенной во всем пространстве.

Теорема I. Функция $F_h(x^{(1)}, \ldots, x^{(M)})$ в точках сетки (2) совпадает с функцией $f^{(h)}(x^{(1)}_{k_1}, \ldots, x^{(M)}_{k_M})$ и имеет во всем пространстве $x^{(1)}, \ldots, x^{(M)}$ всевозможные производные

$$D_{(j_1,\ldots,j_M)} F_h \equiv \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_M} F_h}{(\partial x^{(1)})^{j_1}\cdots(\partial x^{(M)})^{j_M}}, \qquad 0 \leqslant j_1, \ldots, j_M \leqslant P, \tag{17}$$

порядка не выше P по каждому переменному, причем эти производные непрерывны по совокупности аргументов всюду в пространстве $-\infty < x^{(1)}, \ldots, x^{(M)} < \infty$ и задаются формулой (I6):

$$D_{(j_1,\ldots,j_M)} F_h \equiv F_h^{(j)}, \qquad j = (j_1, \ldots, j_M). \tag{18}$$

Теорема 2. Пусть шаги сетки $\Delta x^{(m)}_k$, $m = 1, 2, \ldots, M$; $k = 0, \pm 1, \ldots$, удовлетворяют условиям

$$A \leqslant \frac{\Delta x^{(m)}_{k+i}}{\Delta x^{(m)}_k} \leqslant B, \tag{19}$$

$$i = -s, 1-s, \ldots, P-s; \quad m = 1, 2, \ldots, M;$$

где A и B некоторые постоянные, не зависящие от k и m.

Тогда справедливы оценки

$$\left|D_{(j_1,\ldots,j_M)} F_h\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, \ldots, x^{(M)}\right)\right| \leqslant \tag{20}$$

$$C\cdot\max_{\substack{k_m-s \leqslant r_m \leqslant k_m-s+P-j_m\\ m=1,2,\ldots,M}}\left|\Delta^{j_1}_{x^{(1)}}\ldots\Delta^{j_M}_{x^{(M)}} f^{(h)}\left(x^{(1)}_{r_1}, \ldots, x^{(M)}_{r_M}\right)\right|$$

где $C = C(P, A, B)$ не зависит от $\Delta x^{(m)}_k$, $m = 1, 2, \ldots, M$; $k = 0, \pm 1, \ldots$ и от сеточной функции $f^{(h)}$, а числа k_m, $m = 1, 2, \ldots, M$, есть те целые числа, при которых значения аргументов $x^{(m)}$ в левой части неравенства (20) удовлетворяют неравенствам

$$x^{(m)}_{k_m} \leqslant x^{(m)} \leqslant x^{(m)}_{k_m+1}$$

7. Формула интерполирования во всем пространстве.

Пусть функция $f^{(h)}$ является таблицей значений некоторой функции

$$f\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, \ldots, x^{(M)}\right) \tag{21}$$

определенной на всем пространстве. Фиксируем $P \geq 0$, $0 \leq s \leq P$ и построим операторы $L^{(j)}$. Функцию

$$F_h(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}; \dots, x^{(M)}) = L^{\circ} f^{(h)}, \qquad (22)$$

определенную при $j=0$ по формуле (I5) или (I6) будем считать интерполяционной функцией для функции (2I).

Теорема 3. Пусть функция (2I) есть многочлен степени не выше по каждому аргументу. Тогда интерполяционная формула (22) точна:

$$L f^{(h)} \equiv L^{\circ} f^{(h)} \equiv F_h(x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) \equiv f(x^{(1)}, \dots, x^{(M)}).$$

Введем обозначения

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(M)}); \qquad \|x\| = \left(\sum |x^{(m)}|^2\right)^{1/2};$$

$$f^{(j)}(x) \equiv \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_M} f(x^{(1)}, \dots, x^{(M)})}{(\partial x^{(1)})^{j_1} \dots (\partial x^{(M)})^{j_M}}; \qquad (23)$$

$$|j| = j_1 + \dots + j_M;$$

$$w_q[f, \tilde{x}, \delta, h] = \sup_{|j|=q} \left| f^{(j)}(x'') - f^{(j)}(x') \right|$$

где точная верхняя грань берется по всевозможным парам точек x' и x'', принадлежащих сфере

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \delta$$

и удовлетворяющих условию

$$\|x'' - x'\| < h$$

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ имеет всевозможные непрерывные частные производные до некоторого порядка ρ включительно, а шаги сетки подчинены условиям

$$c' h_{(k_1, \dots, k_M)} \leq \Delta x^{(m)}_{k_m + i} \leq c'' h_{(k_1, \dots, k_M)},$$

$$m = 1, 2, \dots, M; \quad k_m = 0, \pm 1, \dots; \quad i = -s, 1-s, \dots, P+1-s;$$

где c', c'' некоторые положительные постоянные, а $h_{(k_1, \dots, k_M)}$ некоторое положительное число, характеризующее размеры ячеек сетки, примыкающих к узлу $(x^{(1)}_{k_1}, \dots, x^{(M)}_{k_M})$. Обозначим через $f^{(h)}(x)$ сеточную функцию, совпадающую с $f(x)$ в точках сетки, фиксируем $P \geq 0$, $0 \leq s \leq P$ и построим функции $D_j F_h(x) = F_h^{(j)}(x) = L^{(j)} f^{(h)}(x)$.

Для интерполирующей функции $F_h(x)$ и всех ее производных $F_h^{(j)}(x)$ до порядка $q = \min(\rho, P)$ включительно справедливы равенства

$$D_j f(x) = F_h^{(j)}(x) + w_q[f, x_{(k_1, \dots, k_M)}, \delta_{(k_1, \dots, k_M)}, h_{(k_1, \dots, k_M)}] \, O(h^{q-|j|}_{(k_1, \dots, k_M)})$$

где числа $k_1, \dots, k_M$ по заданному x выбраны так, чтобы выполнялись неравенства $x^{(m)}_{k_m} \leq x^{(m)} \leq x^{(m)}_{k_m+1}$, $m = 1, 2, \dots, M$; постоянная в оценке величины $O(h^{q-|j|}_{(k_1, \dots, k_M)})$ не зависит от функции $f(x)$ и от x, а лишь от постоянных c', c'', P; через $x_{(k_1, \dots, k_M)}$ обозначена точка $(x^{(1)}_{k_1}, \dots, x^{(M)}_{k_M})$ и через $\delta_{(k_1, \dots, k_M)}$ радиус сферы с центром в точке $x_{(k_1, \dots, k_M)}$, содержащей все точки сетки, значения в которых используются при вычислении $F_h(x)$ в ячейке $x^{(m)}_{k_m} \leq x^{(m)} \leq x^{(m)}_{k_m+1}$, $m = 1, 2, \dots, M$.

8. Замечание о вычислительной устойчивости интерполяционной формулы.

Если таблица интерполируемой функции $f^{(h)}$ задана неточно с погрешностью $\delta f^{(h)}$, то погрешности δF_h и $(\delta F_h)^{(j)}$, вносимые этим в интерполяционную функцию F_h и ее производную $F_h^{(j)}$ есть $(\delta F_h)^{(j)} = L^{(j)} \delta f^{(h)}$ и оценивается в силу теоремы 2. В случае постоянного шага сетки $\Delta x_k^{(m)} \equiv h$, $m = 1, 2, \dots, M$; $k = 0, \pm 1, \dots$ при условии

$$\max \left| \delta f^{(h)} (x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_M}^{(M)}) \right| = O(h^q)$$

имеют место оценки

$$(\delta F_h)^{(j)} = O(h^{q - |j|})$$

9. Примеры. В случае $P = S = 0$ и $j = (0, 0, \dots, 0) = 0$ формула (16) есть формула полилинейной интерполяции. В случае $M = 1$, постоянного шага сетки $\Delta x_k = h$, $P = 2$ и $S = 1$ имеем:

$$F_h(x) = f(x_{k-1}) + h \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h} \cdot (X^{(k)} + 1) + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1})}{h^2} \cdot X^{(k)} \cdot (X^{(k)} + 1) + \frac{h^3}{3!} \frac{f(x_{k+2}) - 3f(x_{k+1}) + 3f(x_k) - f(x_{k-1})}{h^3} \cdot \left[3 \cdot (X^{(k)})^3 \cdot (X^{(k)} - 1) \cdot (3 - 2X^{(k)}) \right],$$

где $X^{(k)} = \dfrac{x - x_k}{h}$, $x_k \le x \le x_{k+1}$

§ 2. Обоснование формул восполнения и интерполяции.

Здесь будет придан наглядный смысл формулам восполнения и доказаны теоремы .... 1-4.

Для этого установим ряд лемм.

Лемма I. Пусть в узлах одномерной сетки

$$\dots < x_{k-1}^{(m)} < x_k^{(m)} < x_{k+1}^{(m)} < \dots$$

по переменному $x^{(m)}$ задана сеточная функция $\varphi(x^{(m)})$. Зададим целые $P \geq 0$, $0 \leq S \leq P$, фиксируем k и обозначим через $A_P(x^{(m)})$ и $B_P(x^{(m)})$ многочлены степени не выше P каждый, удовлетворяющие равенствам

$$A_P(x_{k+j}^{(m)}) = \varphi(x_{k+j}^{(m)}), \quad j = -s, 1-s, \dots, P-s;$$

$$B_P(x_{k+j}^{(m)}) = \varphi(x_{k+j}^{(m)}), \quad j = 1-s, 2-s, \dots, P+1-s;$$

Тогда многочлен $\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)}) \equiv \widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)}, k, s)$ степени не выше $2P+1$, определенный равенствами

$$\left. \frac{d^n \widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})}{(dx^{(m)})^n} \right|_{x^{(m)} = x_k^{(m)}} = \left. \frac{d^n A_P(x^{(m)})}{(dx^{(m)})^n} \right|_{x^{(m)} = x_k^{(m)}} \qquad (1)$$

$$\left. \frac{d^n \widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})}{(dx^{(m)})^n} \right|_{x^{(m)} = x_{k+1}^{(m)}} = \left. \frac{d^n B_P(x^{(m)})}{(dx^{(m)})^n} \right|_{x^{(m)} = x_{k+1}^{(m)}} \qquad (2)$$

$$n = 0, 1, \dots, P;$$

совпадает с многочленом $Q_{2P+1}(x^{(m)})$, заданном формулой (I3) из § I при $j_m = 0$:

$$\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)}) \equiv Q_{2P+1}(x^{(m)}) \qquad (3)$$

Доказательство. Известно, что формулы (I) и (2) определяют один и только один интерполяционный многочлен Эрмита $\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})$ степени не выше $2P+1$. Из построения $\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})$ очевидно, что коэффициенты этого многочлена линейно зависят от совокупности $P+2$ чисел $\{\varphi(x^{(m)}_{k+j})\}$ $j=-s, 1-s, \dots, P+1-s$. Поэтому $\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})$ можно записать в следующем виде:

$$\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)}) = \sum_{i=0}^{P+1} \varphi(x^{(m)}_{i-s})\, \psi_i(X^{(m,k)}), \qquad (4)$$

где $\psi_i(X^{(m,k)})$ некоторые многочлены, не зависящие от $\{\varphi(x^{(m)}_j)\}$. В силу формул (I) числа $\varphi(x^{(m)}_{k-s}), \dots, \varphi(x^{(m)}_{k+P+1-s})$ линейно и однозначно выражаются через разностные отношения $\Delta^{r}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k-s})$, $r=0,1,\dots,P+1$. Поэтому из (4) вытекает возможность представить $\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})$ в виде

$$\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)}) = \sum_{r=0}^{P+1} (\Delta x^{(m)}_k)^r \cdot \frac{\Delta^{r}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k-s})}{r!}\, \tilde{q}_r(X^{(m,k)}) \qquad (5)$$

где $\tilde{q}_i(X^{(m,k)})$ некоторые многочлены, не зависящие от φ. Остается показать, что многочлены $\tilde{q}_i(X^{(m,k)}) \equiv q_i(X^{(m,k)})$, т.е. имеют вид (7), (8), (9) из § I. Для доказательства первых двух из этих трех формул заметим, что если $\varphi(x^{(m)}_j)$,

$j=k-s, k+1-s, \dots, k+P+1-s$ являются значениями некоторого многочлена $\varphi(x^{(m)})$ степени не выше P, то

$$A_P(x^{(m)}) \equiv B_P(x^{(m)}) \equiv \widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)}) \equiv \varphi(x^{(m)})$$

Пусть $\varphi(x^{(m)}) \equiv 1$. Тогда $\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)}) \equiv 1$, $\Delta^{i}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k-s}) = 0$ при $i=1,2,\dots,P+1$ и в силу (5) получим $1 \equiv \tilde{q}_0(X^{(m,k)})$, т.е. формулу (7), § I. Положим теперь:

$$\varphi(x^{(m)}) = \frac{\prod_{j=0}^{i-1}(x^{(m)} - x^{(m)}_{k+j-s})}{\prod_{j=0}^{i-1}(x^{(m)}_{k+i-s} - x^{(m)}_{k+j-s})}, \qquad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, P$$

Многочлен (6) имеет степень $i \le P$, поэтому $\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)}) \equiv \varphi(x^{(m)})$. Далее,

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x^{(m)}_{k+j-s}) = 0, \quad \text{если } 0 \le j < i \\ &\varphi(x^{(m)}_{k+i-s}) = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Отсюда $\Delta^{r}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k+j-s}) = 0$, если $j+r<i$, $j \ge 0$, так как $\Delta^{r}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k+j-s})$ в этом случае есть линейная комбинация чисел $\varphi(x^{(m)}_{k+t-s})$, $0 \le t < i$, равных нулю. Далее,

$$\Delta^{i}_{x^{(m)}}\varphi(x_{k-s}) = \frac{\Delta^{i-1}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k+1-s}) - \Delta^{i-1}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k-s})}{x^{(m)}_{k+i-s} - x^{(m)}_{k-s}} \cdot i =$$

$$= \frac{i}{x^{(m)}_{k+i-s} - x^{(m)}_{k-s}} \cdot \Delta^{i-1}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k+1-s}) = \frac{i}{x^{(m)}_{k+i-s} - x^{(m)}_{k-s}} \cdot \frac{i-1}{x^{(m)}_{k+i-s} - x^{(m)}_{k+1-s}} \cdot$$

$$\cdot \Delta^{i-2}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k+2-s}) = \frac{i!}{\prod_{0 \le j < i}(x^{(m)}_{k+i-s} - x^{(m)}_{k+j-s})} \qquad (8)$$

Наконец, $\Delta^{r}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k+i-s})=0$ при $r>i$, потому что порядок r разностного отношения выше степени многочлена (6). Поскольку в рассматриваемом случае $\varphi(x^{(m)})\equiv\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})$, формула (5) примет вид

$$\varphi(x^{(m)})=\frac{\prod\limits_{0\le j<i}(x^{(m)}-x^{(m)}_{k+j-s})}{\prod\limits_{0\le j\le i}(x^{(m)}_{k+i-s}-x^{(m)}_{k+j-s})}=(\Delta x^{(m)}_{k})^{i}\,\frac{\widetilde{q}_i(X^{(m,k)})}{\prod\limits_{0\le j<i}(x^{(m)}_{k+i-s}-x^{(m)}_{k+j-s})},$$

$$i=1,2,\ldots,P.$$

откуда получается

$$\widetilde{q}_i(X^{(m,k)})=\prod_{0\le j<i}\left(\frac{x^{(m)}-x^{(m)}_{k}}{\Delta x^{(m)}_{k}}-\frac{x^{(m)}_{k+j-s}-x^{(m)}_{k}}{\Delta x^{(m)}_{k}}\right)=\prod_{0\le j<i}\left(X^{(m,k)}-X^{(m,k)}_{j-s}\right)$$

$$i=1,2,\ldots,P.$$

т.е. $\widetilde{q}_i(X^{(m,k)})=q_i(X^{(m,k)})$ в силу (8), § I.

Переходим к получению формулы (9), § I для $\widetilde{q}_{2P+1}(X^{(m,k)})$.

Зададим

$$\varphi(x^{(m)}_{k+i-s})=\begin{cases}0, & \text{если } i\le P\\ 1, & \text{если } i=P+1\end{cases}\qquad(9)$$

Очевидно, в этом случае

$$\Delta^{j}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k-s})=0\quad\text{если } j\le P\qquad(10)$$

В силу формулы (8), остающейся справедливой и в случае, если в (6) положить $i=P+1$, получим

$$\Delta^{P+1}_{x^{(m)}}\varphi(x^{(m)}_{k-s})=\frac{(P+1)!}{\prod\limits_{0\le j\le P}(x^{(m)}_{k+P+1-s}-x^{(m)}_{k+j-s})}.\qquad(11)$$

Подставляя (I0) и (II) в (5), получим

$$\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})=\frac{(\Delta x^{(m)}_{k})^{P+1}}{\prod\limits_{0\le j\le P}(x^{(m)}_{k+P+1-s}-x^{(m)}_{k+j-s})}\cdot\widetilde{q}_{P+1}(X^{(m,k)}),$$

или

$$\widetilde{q}_{P+1}(X^{(m,k)})=\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})\left[\prod_{0\le j\le P}(X^{(m,k)}_{P+1-s}-X^{(m,k)}_{j-s})\right]\qquad(12)$$

Вычислим $\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})$ в рассматриваемом случае, когда $\varphi(x^{(m)})$ задано формулой (9). Заметим прежде всего, что в этом случае $A_P(x^{(m)})\equiv 0$,

$$B_P(x^{(m)})=\frac{(x^{(m)}-x^{(m)}_{k+1-s})(x^{(m)}-x^{(m)}_{k+2-s})\ldots(x^{(m)}-x^{(m)}_{k+P-s})}{(x^{(m)}_{k+P+1-s}-x^{(m)}_{k+1-s})(x^{(m)}_{k+P+1-s}-x^{(m)}_{k+2-s})\ldots(x^{(m)}_{k+P+1-s}-x^{(m)}_{k+P-s})}.$$

Поэтому условия (I) и (2) примут вид

$$\frac{d^{n}\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)}_{k})}{(dx^{(m)})^{n}}=0,\quad n=0,1,\ldots,P;\qquad(13)$$

$$\frac{d^n \widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)}_{k+1})}{(dx^{(m)})^n} = \left[\prod_{j=1} (x^{(m)}_{k+P+1-s} - x^{(m)}_{k+j-s})\right]^{-1} \left[\frac{d^n}{(dx^{(m)})^n} \prod_{j=1} (x^{(m)} - x^{(m)}_{k+j-s})\right]$$

$$\text{при } x^{(m)} = x^{(m)}_{k+1}; \qquad n = 0, 1, \ldots, P. \tag{14}$$

Далее, построим многочлены $\ell_r(v)$, $r = 0, 1, \ldots, P$ степени $2P+1$, удовлетворяющие условиям

$$\left.\frac{d^j \ell_r(v)}{dv^j}\right|_{v=0} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, P. \tag{15}$$

$$\left.\frac{d^j \ell_r(v)}{dv^j}\right|_{v=1} = \delta^j_r,$$

Эти многочлены получаются как частный случай многочленов Эрмита (В.Л.Гончаров, Теория интерполирования, М., 1954, стр.66) и имеют вид (I0), § I. Отметим еще, что в силу формулы $X^{(m,k)} = \frac{x^{(m)} - x^{(m)}_k}{\Delta x^{(m)}_k}$ справедливо символическое равенство

$$\frac{d^j}{(dx^{(m)})^j} = \left(\Delta x^{(m)}_k\right)^{-j} \frac{d^j}{(dX^{(m,k)})^j} \tag{16}$$

Учитывая (I5) и (I6), многочлен $\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})$, заданный условиями (I3), (I4), можно записать так

$$Q_{2P+1}(x^{(m)}) = \sum_{i=0}^{P} \left[(\Delta x^{(m)}_k)^i \ell_i(X^{(m,k)})\right] \left[\frac{d^i \widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})}{(dx^{(m)})^i}\right] =$$

$$\text{при } x^{(m)} = x^{(m)}_{k+1}.$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{1 \le j \le P} (x^{(m)}_{k+P+1} - x^{(m)}_{k+j-s})} \sum_{i=0}^{P} (\Delta x^{(m)}_k)^i \ell_i(X^{(m,k)}) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{d^i}{(dx^{(m)})^i} \prod_{j=1}^{P} (x^{(m)} - x^{(m)}_{k+j-s})\right]_{x^{(m)} = x^{(m)}_{k+1}} \cdot \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\prod\limits_{1 \le j \le P} (X^{(m,k)}_{P+1-s} - X^{(m,k)}_{j-s})} \sum_{r=0}^{P} \ell_r(X^{(m,k)}) \left[\frac{d^r}{(dX^{(m,k)})^r} \prod_{j=1}^{P} (X^{(m,k)} - X^{(m,k)})\right]_{\text{при } X^{(m,k)} = 1}.$$

В силу (I2) отсюда получается, что $\widetilde{q}_{P+1}(X^{(m,k)})$ совпадает с $q_{P+1}(X^{(m,k)})$, которое определено формулой (9), § I. Лемма I доказана.

Лемма 2. Пусть функция (II), § I

$$\varphi(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, \ldots, x^{(M)})$$

определена на одномерной сетке

$$\ldots < x^{(m)}_{k-1} < x^{(m)}_k < x^{(m)}_{k+1} < \ldots$$

по переменному $x^{(m)}$, а остальные аргументы $x^{(1)}, \ldots, x^{(m-1)}$, $x^{(m+1)}, \ldots, x^{(M)}$ - фиксированные параметры. Тогда функция Φ_m , определенная формулой (I2), § I при $j_m = 0$:

$$\Phi_m(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, \ldots, x^{(M)}) = L^{(0)}_m \varphi(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, \ldots, x^{(M)}) \equiv \tag{17}$$

$$\equiv \sum_{i=0}^{P+1} (\Delta x^{(m)}_k)^i \cdot \frac{q_i(X^{(m,k)})}{i!} \cdot \Delta^i_{x^{(m)}} \varphi(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}_{k-s}, \ldots, x^{(M)}),$$

где K определено по $x^{(m)}$ так, чтобы выполнялись неравенства $x_{K}^{(m)} \leq x^{(m)} \leq x_{K+1}^{(m)}$, в узлах сетки совпадает с функцией φ, обладает непрерывными производными по $x^{(m)}$ до порядка P включительно всюду на прямой $-\infty < x^{(m)} < \infty$. Производная порядка j_m от функции $\Phi_m(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, \dots, x^{(M)})$ задается формулой (I2), § I, т.е.

$$L_m^{(j_m)} = \frac{d^{j_m}}{(dx^{(m)})^{j_m}} L_m^{(0)} \tag{18}$$

Доказательство. По определению (I3), § I многочлена $Q_{2P+1}(x^{(m)})$ формула (I7) может быть записана так

$$\Phi_m(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, \dots, x^{(M)}) = Q_{2P+1}(x^{(m)}, K, S, P) \tag{19}$$

$$x_K^{(m)} \leq x^{(m)} < x_{K+1}^{(m)}$$

В силу леммы I из формулы (I9) непосредственно следует справедливость первых двух утверждений доказываемой леммы. Это следует из определения многочленов $A_P(x)$ и $B_P(x)$ и из условий (I) и (2), поскольку при любом целом K многочлен $B_P(x^{(m)})$, построенный для отрезка $x_{K-1}^{(m)} \leq x^{(m)} \leq x_K^{(m)}$ совпадает с многочленом $A_P(x^{(m)})$ построенным для отрезка $x_K^{(m)} \leq x^{(m)} \leq x_{K+1}^{(m)}$

Для доказательства второго утверждения леммы достаточно взять производную порядка j_m по $x^{(m)}$ от обеих частей тождества (I7), используя при этом равенство

$$\frac{d^j}{(dx^{(m)})^j} = (\Delta x_K^{(m)})^{-j} \frac{d^j}{(d\chi^{(m,K)})^j}$$

, а затем сравнить полученный результат с формулой (I2), § I.

Воспроизведем теперь для удобства читателя формулировку теорему I из § I и докажем эту теорему.

Теорема I. Пусть функция $M \geqslant 1$ аргументов (I), § I

$$f^{(h)}(x_{K_1}^{(1)}, \dots, x_{K_m}^{(m)}, \dots, x_{K_M}^{(M)}) \tag{20}$$

задана на сетке (2), § I

$$(x_{K_1}^{(1)}, \dots, x_{K_m}^{(m)}, \dots, x_M^{(M)}), \tag{21}$$

$$K_m = 0, \pm 1, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Определим во всем пространстве $-\infty < x^{(m)} < \infty$, $m = 1, 2, \dots, M$. функцию $F_h^{(j)}(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, \dots, x^{(M)})$, формулой (I6), § I, положив

$$F_h^{(j)}(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, \dots, x^{(M)}) = L^{(j)} f^{(h)} = L_M^{(j_M)} \dots L_1^{(j_1)} f^{(h)} \equiv$$

$$\equiv \left[\prod_{m=1}^{M} \left(\sum_{i=0}^{P+1} (\Delta x_{K_m}^{(m)})^{i-j_m} q_i^{(j_m)} (\chi^{(m,K)}, m, s, K_m, P) \frac{\Delta_{x^{(m)}}^{i}}{i!} \right] \cdot f^{(h)}(x_{K_1-s}^{(1)}, \dots, x_{K_m-s}^{(m)}, \dots, x_{K_M-s}^{(M)}) \tag{22}$$

Функция $F_h(x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$, определенная равенством (22) при $j = (j_1, \dots, j_M) = (0, \dots, 0) = 0$ обладает следующими свойствами: I°. в узлах сетки (2I) совпадает с функцией $f^{(h)}$;

2°. имеет во всем пространстве $-\infty < x^{(m)} < \infty$, $m = 1, 2, \dots, M$, всевозможные производные

$$D_{(j_1, \dots, j_M)} F_h \equiv \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_M} F_h}{(\partial x^{(1)})^{j_1} \dots (\partial x^{(M)})^{j_M}},$$

$$0 \leq j_m \leq P.$$

порядка не выше P по каждому переменному, причем эти производные непрерывны по совокупности аргументов всюду в пространстве $-\infty < x^{(1)},\dots, x^{(M)} < \infty$ и задаются следующей формулой

$$D_{(j_1,\dots,j_M)} F_h \equiv D_j F_h = L^{(j)} f^{(h)} = F_h^{(j)} \qquad (23)$$

Доказательство. Справедливость утверждения 1° непосредственно следует из справедливости первого утверждения леммы 2.

Для доказательства утверждения 2° заметим, что для умножения (последовательного применения) операторов

$$q_i^{(j_m)}(X^{(m,\kappa)}, m, \kappa, s, P)\,\Delta^{i}_{x^{(m)}}$$

с любыми i, m, j_m имеют место перестановочность, распределительность и ассоциативность. Отсюда, в частности, следует перестановочность операторов $L_m^{(j_m)}$ при различных m и j_m. Сначала докажем непрерывность функции $F_h^{(j_m)}$, задаваемой формулой (22). В силу леммы 2 результат применения оператора $L_m^{(j_m)}$, $0 \le j_m \le P$ к функции, определенной на сетке по переменному $x^{(m)}$, есть непрерывная по $x^{(m)}$ всюду на прямой $-\infty < x^{(m)} < \infty$ функция. Ввиду перестановочности операторов $L_m^{(j_m)}$ в силу формулы (22), которую можно записать так:

$$F_h^{(j)} = L_m^{(j_m)}\left(L_1^{(j_1)} \dots L_{m+1}^{(j_{m+1})} L_{m-1}^{(j_{m-1})} \dots L_1^{(j_1)}\right) f^{(h)}$$

очевидно, что функция $F_h^{(j)}$ непрерывна по каждому аргументу $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots, M$. Но внутри и на границе каждой ячейки $x^{(m)}_{\kappa_m} \le x^{(m)} \le x^{(m)}_{\kappa_m+1}$, $m = 1, 2, \dots, M$.

$F_h^{(j)}$ есть многочлен. Очевидно, что кусочно-многочленная функция, непрерывная по каждому аргументу в отдельности, непрерывна и по их совокупности всюду в пространстве

$$-\infty < x^{(1)}, \dots, x^{(M)} < \infty .$$

Докажем теперь, что функция $F_h(x^{(1)},\dots,x^{(M)})$ имеет производные порядка $j = (j_1,\dots,j_M)$, $0 \le j_m \le P$, которые задаются формулой (22). Воспользуемся индукцией по j. При $j = (0,\dots,0)$ утверждение справедливо по определению функции $F_h = F_h^{(0)}$. Пусть оно уже установлено при некотором $j = (j_1,\dots,j_M)$, причем хотя бы одно из чисел $j_1,\dots,j_M$ строго меньше P. Пусть, скажем, $j_m < P$ и докажем, что

$$\frac{d}{d(x^{(m)})} F_h^{(j_1,\dots,j_m,\dots,j_M)} = F_h^{(j_1,\dots,j_m,\dots,j_M)}$$

В самом деле

$$\frac{d}{d(x^{(m)})}\left(L_M^{(j_M)} \dots L_m^{(j_m)} \dots L_1^{(j_1)}\right) f^{(h)} = \frac{d}{d(x^{(m)})} L_m^{(j_m)} \Big[L_M^{(j_M)} \dots L_{m+1}^{(j_{m+1})} L_{m-1}^{(j_{m-1})} \dots L_1^{(j_1)}\Big] \cdot f^{(h)} = L_M^{(j_M)} \dots L_m^{(j_m+1)} \dots L_1^{(j_1)} f^{(h)} =$$

$$= F_h^{(j_1,\dots,j_m+1,\dots,j_M)}$$

В этой цепочке переходов мы воспользовались замеченной выше перестановочностью и ассоциативностью операторов, а также формулой (18), из которой видно, что $\frac{d}{d(x^{(m)})} L_m^{(j_m)} = L_m^{(j_m+1)} = \frac{d^{j_m+1}}{(d(x^{(m)}))^{j_m+1}} L_m^{(0)}$.

Доказательство теоремы 1 завершено.

Лемма 3. Пусть

$$\Delta x^{(m)}_{k+i} \geqslant A\,\Delta x^{(m)}_{k}, \qquad i=-s,1-s,\dots,P-s \quad (24)$$

где A некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\left|\Delta^{j+r}_{x^{(m)}} f(x^{(m)}_{k-s})\right| < \left[\frac{2}{A\,\Delta x^{(m)}_{k}}\right]^{r} \cdot \max_{0\le t\le r}\left|\Delta^{j}_{x^{(m)}} f(x^{(m)}_{k+t-s})\right|, \qquad 0\le j+r\le P+1.$$

Доказательство

$$\left|\Delta^{(j+r)}_{x^{(m)}} f(x^{(m)}_{k-s})\right| = \frac{j+r}{x^{(m)}_{k+j+r-s}-x^{(m)}_{k-s}}\left|\Delta^{(j+r-1)}_{x^{(m)}} f(x^{(m)}_{k+1-s}) - \Delta^{(j+r-1)}_{x^{(m)}} f(x^{(m)}_{k-s})\right| \leqslant \frac{\quad}{A\,\Delta x^{(m)}_{k}}\max\left|\Delta^{j+r-1}_{x^{(m)}} f(x^{(m)}_{k+t-s})\right|$$

$$\leqslant \dots \leqslant \left[\frac{2}{A\,\Delta x^{(m)}_{k}}\right]^{r}\max_{0\le t\le r}\left|\Delta^{j}_{x^{(m)}} f(x^{(m)}_{k+t-s})\right|.$$

Мы воспользовались тем, что в силу (24)справедливо

$$\frac{t''-t'}{x^{(m)}_{t''}-x^{(m)}_{t'}} \leqslant \frac{1}{A\,\Delta x^{(m)}_{k}}$$

при любых t' и t'' , лежащих между $k-s$ и $k+P+1-s$

Лемма 4. Пусть

$$\Delta x^{(m)}_{k+i} \leqslant B\,\Delta x^{(m)}_{k}, \qquad i=-s,1-s,\dots,P-s.$$

Тогда многочлены

$$q^{(j)}_{i}(X^{(m,k)}, m, k, s, P); \qquad i=1,2,\dots,P+1; \quad j=0,1,\dots,P;$$

ограничены на отрезке

$$0\leqslant X^{(m,k)} \leqslant 1$$

некоторой постоянной $C=C(B,P)$:

$$\max_{0\le X^{(m,k)}\le 1}\left|q^{(j)}_{i}(X^{(m,k)}, m, k, s, P)\right| \leqslant C \qquad (25)$$

Доказательство. Очевидно из формул (7),(8),(9) § I, задающих многочлены $q_i(X^{(m,k)}, m, k, s, P)$.

Теорема 2. Пусть сетка подчинена условиям

$$A\,\Delta x^{(m)}_{k_m} \leqslant \Delta x^{(m)}_{k_m+i} \leqslant B\,\Delta x^{(m)}_{k_m}, \qquad i=-s,1-s,\dots,P-s \quad (26)$$

Тогда производная $D_{(j_1,\dots,j_M)} F_h$, $0\le j_m\le P$, интерполяционной функции $F_h(x^{(1)},\dots,x^{(M)})$, определенной равенством (22) при $j=(j_1,\dots,j_M)=(0,\dots,0)$, удовлетворяет оценке

$$\left|D_{(j_1,\dots,j_M)} F_h(x^{(1)},\dots,x^{(M)})\right| \leqslant C(A,B,P)\cdot \max_{\substack{0\le r_m\le P+1-j_m\\ 0\le m\le M}}\left|\Delta^{j_1}_{x^{(1)}}\dots\Delta^{j_M}_{x^{(M)}} f^{(h)}(x^{(1)}_{k_1-s+r_1},\dots,x^{(M)}_{k_M-s+r_M})\right| \quad (27)$$

где $C(A, B, P)$ не зависит ни от шагов сетки, ни от координат $x^{(1)}, \dots, x^{(M)}$. Числа K_m в оценке (27) при заданных $x^{(m)}$ выбираются так, чтобы выполнялись неравенства

$$x^{(m)}_{K_m} \le x^{(m)} \le x^{(m)}_{K_m+1}, \qquad m = 1, 2, \dots, M .$$

Доказательство. В силу формулы (22) производную

$$D_{(j_1, \dots, j_M)} F_h(x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) = F_h^{(j)}(x^{(1)}, \dots, x^{(M)}), \qquad 0 \le j_m \le P$$

можно записать в виде

$$F_h^{(j)}(x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) = \sum_{\{i_m\}} \left[\prod_{m=1}^{M} (\Delta x^{(m)}_{K_m})^{i_m - j_m} q^{(j_m)}(X^{(m,K)}, m, K, s, P) \cdot \frac{1}{(i_m)!} \Delta^{i_m}_{x^{(m)}} \right] f^{(h)}(x^{(1)}_{K_1 - s}, \dots, x^{(M)}_{K_M - s}), \tag{28}$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам $\{i_m\}$ $m = 1, 2, \dots, M$, в которых i_m принимают независимо любые значения от нуля до $P+1$. В действительности можно считать, что i_m удовлетворяют условиям

$$j_m \le i_m \le P+1, \qquad m = 1, 2, \dots, M,$$

поскольку в случае $i_m < j_m \le P$ функция $q_{i_m}(X^{(m,K)})$ есть многочлен степени i_m, так что $q^{(j_m)}_{i_m}(X^{(m,K)}) \equiv 0$. Числа K_m в формуле (28) выбираются по значениям $x^{(m)}$ так, чтобы выполнялись неравенства $x^{(m)}_{K_m} \le x^{(m)} < x^{(m)}_{K_m+1}$.

В силу леммы 3, применимой благодаря первому из неравенств (26), можно написать:

$$\left| \prod_{m=1}^{M} \left[(\Delta x^{(m)}_{K_m})^{i_m - j_m} \Delta^{i_m}_{x^{(m)}} \right] f^{(h)}(x^{(1)}_{K_1 - s}, \dots, x^{(M)}_{K_M - s}) \right| =$$

$$= \left| \prod_{m=1}^{M} \left[(\Delta x^{(m)}_{K_m})^{i_m - j_m} \Delta^{j_m + (i_m - j_m)}_{x^{(m)}} \right] f^{(h)}(x^{(1)}_{K_1 - s}, \dots, x^{(M)}_{K_M - s}) \right| \le \tag{29}$$

$$\le \prod_{m=1}^{M} \left[\left(\frac{2}{A \Delta x^{(m)}_{K_m}} \right)^{i_m - j_m} (\Delta x^{(m)})^{i_m - j_m} \right] \cdot$$

$$\cdot \max_{\substack{0 \le r_m \le i_m - j_m \\ 1 \le m \le M}} \left| \Delta^{j_1}_{x^{(1)}} \dots \Delta^{j_M}_{x^{(M)}} f^{(h)}(x^{(1)}_{K - s + r_1}, \dots, x^{(M)}_{K - s + r_M}) \right| =$$

$$= \prod_{m=1}^{M} \left(\frac{2}{A} \right)^{i_m - j_m} \cdot \max_{\substack{0 \le r_m \le i_m - j_m \\ 1 \le m \le M}} \left| \Delta^{j_1}_{x^{(1)}} \dots \Delta^{j_M}_{x^{(M)}} f^{(h)}(x^{(1)}_{K - s + r_1}, \dots, x^{(M)}_{K - s + r_M}) \right|$$

Из оценок (29) и (25) и из формулы (28) вытекает справедливость устанавливаемой оценки (27). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(x^{(1)},\dots,x^{(M)})$ есть многочлен степени не выше P по каждому аргументу, а $\varphi^{(h)}$ есть таблица ее значений на прямоугольной сетке. Тогда интерполяционная формула (I5), § I, или (I6), § I

$$\Phi_h^{(j)}(x^{(1)},\dots,x^{(M)}) = L^{(j)}\varphi^{(h)} \qquad (30)$$

точна:

$$\Phi_h^{(j)}(x^{(1)},\dots,x^{(M)}) \equiv D_{(j)}\varphi(x^{(1)},\dots,x^{(M)}).$$

Доказательство. Функция

$$\Phi_m(x^{(1)},\dots,x^{(m)},\dots,x^{(M)}) = L_m\varphi^{(h)},$$

задаваемая формулой (I2), § I, на отрезке $x_k^{(m)} \leq x^{(m)} \leq x_{k+1}^{(m)}$ по переменной $x^{(m)}$ есть многочлен $Q_{2P+1}(x^{(m)})$, задаваемый в соответствии с формулой (I3) § I. В силу леммы I многочлен $Q_{2P+1}(x^{(m)})$ совпадает с многочленом $\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})$, который определен условиями (I) и (2). Многочлен $\widetilde{Q}_{2P+1}(x^{(m)})$ в виду единственности многочлена, определенного условиями (I),(2), совпадает с многочленом $\varphi(x^{(1)},\dots,x^{(m)},\dots,x^{(M)})$, так что

$$\Phi_m(x^{(1)},\dots,x^{(m)},\dots,x^{(M)}) \underset{x^{(m)}}{\equiv} L_m\varphi^{(h)} \underset{x^{(m)}}{\equiv}$$
$$\equiv \varphi(x^{(1)},\dots,x^{(m)},\dots,x^{(M)}).$$

Далее, из формулы (30)

$$\Phi(x^{(1)},\dots,x^{(M)}) \equiv L_M\dots L_1\varphi^{(h)}$$

Применяя изложенное соображение последовательно для операторов $L_1, L_2,\dots,L_M$, видим, что

$$\Phi_h(x^{(1)},\dots,x^{(M)}) \underset{\{x^{(m)}\}}{\equiv} \varphi(x^{(1)},\dots,x^{(M)}).$$

Далее, в силу равенств (23) имеем

$$L^{(j)}\Phi_h(x^{(1)},\dots,x^{(M)}) \equiv D_{(j)}\Phi_h \equiv \Phi_h^{(j)} \equiv \varphi^{(j)}.$$

Обозначим $|j| = j_1+\dots+j_M$; $j! = (j_1)!\dots(j_M)!$;

$x^{(j)} = (x^{(1)})^{j_1}\dots(x^{(M)})^{j_M}$;

$$D_{(j)}\varphi(0) = \left.\frac{\partial^{j_1+\dots+j_M}\varphi(x^{(1)},\dots,x^{(M)})}{(\partial x^{(1)})^{j_1}\dots(\partial x^{(M)})^{j_M}}\right|_{x^{(1)}=\dots=x^{(M)}=0}$$

Лемма 5. Пусть $q \geq 0$ целое и $i = (i_1,\dots,i_M)$ и

$$\sum_{|i|=q}\frac{c_i}{i!}x^i$$

некоторый многочлен. Тогда справедливо тождество

$$D_{(j)}\Big[\sum_{|i|=q}\frac{c_i}{i!}x^i\Big] = \sum_{i,\,|i+j|=q}\frac{c_{i+j}}{i!}x^i.$$

Доказательство очевидно.

Теорема 4. Пусть функция $\varphi(x)$ имеет всевозможные непрерывные частные производные до некоторого порядка p включительно, а шаги сетки подчинены условиям

$$C' h_{(k_1,\ldots,k_M)} \leqslant \Delta x^{(m)}_{k_m+i} \leqslant C'' h_{(k_1,\ldots,k_M)} \qquad (31)$$

$$m = 1, 2, \ldots, M;$$
$$k_m = 0, \pm 1, \ldots;$$
$$i = -s, 1-s, \ldots, P+1-s,$$

где C' и C'' некоторые положительные постоянные, а $h_{(k_1,\ldots,k_M)}$ — некоторое положительное число, характеризующее размеры ячеек сетки, примыкающих к узлу $(x^{(1)}_{k_1}, \ldots, x^{(M)}_{k_M})$.

Обозначим через $f^{(h)}(x)$ сеточную функцию, совпадающую с $f(x)$ в точках сетки, фиксируем $P \geq 0$, $0 \leq s, \leq P$ и построим функции

$$D_{(j)} F_h = F^{(j)}_h(x) = L^{(j)} f^{(h)}(x).$$

Для интерполирующей функции $F_h(x)$ и всех ее производных $F^{(j)}_h(x)$ до порядка $q = min(p, P)$ справедливы равенства

$$D_{(j)} f(x) = F^{(j)}_h(x) + \omega_q \left[f, x_{(k_1,\ldots,k_M)}, \delta_{(k_1,\ldots,k_M)}, h_{(k_1,\ldots,k_M)}\right] \mathcal{O}\left(h^{q-|j|}_{(k_1,\ldots,k_M)}\right),$$

$$x^{(m)}_{k_m} \leqslant x^{(m)} < x^{(m)}_{k_m+1}, \quad m = 1, 2, \ldots, M \quad \text{где}$$

$\left|\mathcal{O}\left(h^{q-|j|}_{(k_1,\ldots,k_M)}\right)\right| \leqslant C h^{q-|j|}_{(k_1,\ldots,k_M)}$ и C не зависит от функции $f(x)$, а лишь от постоянных C', C'' и P; функция ω_q

определена равенством (23), § I, а число $\delta_{(k_1,\ldots,k_M)}$ — радиус сферы с центром в точке $x^{(1)}_{k_1}, \ldots, x^{(M)}_{k_M}$, содержащей все точки сетки, значения в которых используются при вычислении $F_h(x)$ в ячейке

$$x^{(m)}_{k_m} \leqslant x^{(m)} \leqslant x^{(m)}_{k_m+1}, \qquad m = 1, 2, \ldots, M.$$

Доказательство. Ввиду равноправия всех точек сетки достаточно рассмотреть случай $k_1 = k_2 = \ldots = k_M = 0$.

В окрестности точки $x = 0$ представим функцию $D_{(j)} f(x)$, $|j| \leqslant q$, по формуле Тейлора

$$D_{(j)} f(x) = \sum_{i,\ |i+j| \leqslant q} \frac{x^i}{i!} D_{(i+j)} f(0) + \omega_q\left[f, 0, \delta, h_{(0,\ldots,0)}\right] \cdot \mathcal{O}\left(\|x\|^{q-|j|}\right) \qquad (32)$$

В частности, при $j = 0$ справедливы формулы

$$f(x) = \sum_{|i| \leqslant q} \frac{x^i}{i!} D_{(i)} f(0) + \omega_q \cdot \mathcal{O}(\|x\|^q), \qquad (33)$$

$$f^{(h)}(x) = \left[\sum_{|i| \leqslant q} \frac{x^i}{i!} D_{(i)} f(0)\right]^{(h)} + \left[\omega_q \cdot \mathcal{O}(\|x\|^q)\right]^{(h)},$$

где $[\varphi(x)]^{(h)}$ сеточная функция, совпадающая в узлах сетки с функцией $\varphi(x)$. Для интерполяционной функции $F^{(j)}_h(x)$, $|j| \leqslant q$, $F^{(j)}_h(x) = L^{(j)} f^{(h)}(x)$ в силу формулы (33) имеем

$$F^{(j)}_h(x) = L^{(j)} \left[\sum_{|i| \leqslant q} \frac{x^i}{i!} D_{(i)} f(0)\right]^{(h)} + L^{(j)} \left[\omega_q \cdot \mathcal{O}(\|x\|^q)\right]^{(h)} \qquad (34)$$

В силу теоремы 3 и леммы 5 первое слагаемое в правой части (34) можно записать так:

$$L^{(j)}\left[\sum_{|i|\le q} \frac{x^i}{i!} D_{(i)} f(0)\right]^{(h)} = D_{(j)} \sum_{|i|\le q} \frac{x^i}{i!} D_{(i)} f(0) =$$

$$= \sum_{i,\, |i+j|\le q} \frac{x^i}{i!} D_{(i+j)} f(0) \qquad (35)$$

В силу теоремы 2 и леммы 2 благодаря условию (31) второе слагаемое в правой части формулы (34) удовлетворяет оценке

$$L^{(j)}\left[w_q \cdot O(\|x\|^q)\right]^{(h)} = |w_q| \cdot O(\|x\|^{q-|j|})$$

Поэтому вместо (33) можно написать

$$F_h^{(j)}(x) = \sum_{i,\, |i+j|\le q} \frac{x^i}{i!} D_{(i+j)} f(0) + w_q \cdot O(\|h_{(0,\dots,0)}\|^{q-|j|}) \qquad (36)$$

Сравнивая (32) и (36), убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рябенький В.С., Канд.дисс., МГУ (1952).

[2] Рябенький В.С. и Филиппов А.Ф., Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат (1956).

[3] Schoenberg I. J., Contributions to problem approximation of equidistant data by analitic functions, Quart. Appl. Math., 4 (1946)

[4] Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L., Best approximation properties of the spline fit, J. Math. Mech., 11, (1962).

[5] Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L., The Theory of Splines and Their Applications, Academic. Press. New York and London.

(1967) (Русский перевод Дж.Алберг, Э.Нилсон, Дж.Уолш, Теория сплайнов и ее приложения, Изд-во "Мир", Москва, 1972).