



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 115 за 1975 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[М.Л. Лидов, М.А. Вашковьяк](#)

Двояко-асимптотические
симметричные орбиты в
плоской ограниченной
круговой задаче трех тел

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лидов М.Л., Вашковьяк М. А.
Двояко-асимптотические симметричные орбиты в плоской ограниченной круговой задаче трех тел // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1975. № 115. 19 с.
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1975-115>



ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

М.Л. Лидов, М.А. Вашковьяк.

ДВОЙКО-АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ОРБИТЫ
В ПЛОСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ
ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ.

Препринт № 115 за 1975г.

Москва.

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

УДК 521.13

М.Л.Лидов, М.А.Вашковьяк

Двойно-асимптотические симметричные орбиты
в плоской ограниченной круговой
задаче трех тел

Препринт

Москва, 1975 г.

Двояко-асимптотические симметричные орбиты
в плоской ограниченной круговой
задаче трех тел

Лидов М.Л., Вашковьяк М.А.

ИГиМ АН СССР. Препринт № 115, М., 1975,

стр., 30 рис., библи. 6 назв.

С помощью метода Deprit и Henrard численным способом исследуются классы симметричных двояко-асимптотических траекторий к коллинеарным точкам либрации L_i плоской ограниченной круговой задачи трех тел. Обнаружены траектории нового типа. Основные параметры найденных траекторий приведены в таблицах, а сами траектории в координатной плоскости представлены на рисунках.

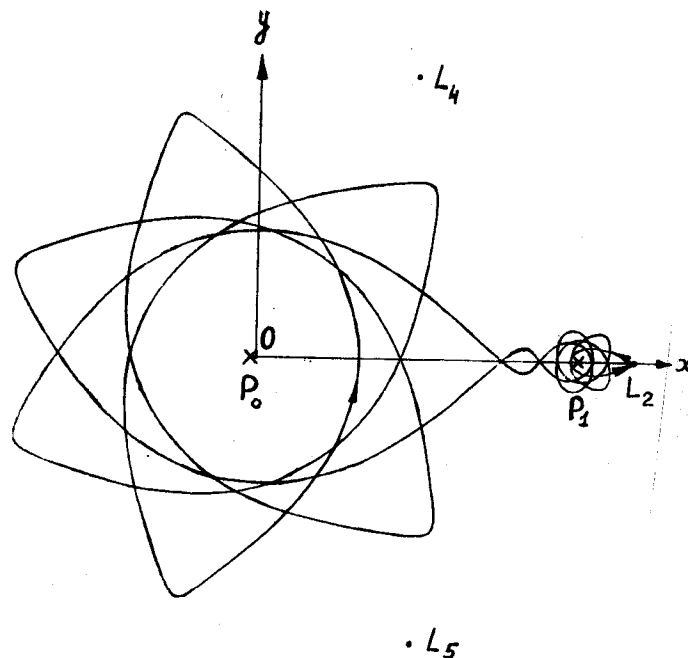
Ключевые слова: Ограниченная задача трех тел - асимптотические орбиты.

СОДЕРЖАНИЕ

| | <u>Стр.</u> |
|--------------------------------------|-------------|
| 1. Введение | 5 |
| 2. Метод построения траекторий | 7 |
| 3. Результаты расчетов | 9 |
| 4. Литература | 15 |

I. Введение.

В настоящей работе рассматривается специальный класс орбит плоской ограниченной круговой задачи трех тел — так называемых симметричных орбит, двойко-асимптотических к коллинеарным точкам либрации. Одна из таких орбит изображена на следующем рисунке.



На этом рисунке во вращающейся барицентрической системе координат Oxy отмечены точки P_0 , P_1 , в которых находятся два тела конечных масс $1-M$ и M соответственно, и коллинеарная точка либрации L_2 . В данном примере $M \approx 0,01217$, что приблизительно равно отношению масс в системе Земля (P_0)—

Луна (P_2). В начальный момент времени $t=0$ тело P пренебрежимо малой массы находится в малой окрестности точки L_2 . Начальные фазовые координаты выбраны так, что при $t \rightarrow -\infty$ тело P стремится к L_2 . С ростом времени тело P удаляется от L_2 , совершает два с половиной оборота вокруг Луны, затем выходит из сферы действия Луны, совершает четыре оборота вокруг Земли, а затем после двух с половиной оборотов вокруг Луны при $t \rightarrow +\infty$ снова возвращается в точку L_2 . Отметим, что, если исключить из рассмотрения малую окрестность точки L_2 , то движение по этой сложной траектории занимает примерно 130 суток.

Траектории подобного типа представляют специальный интерес в связи с различными проектами (см., например, [1,2]), в которых космический аппарат должен двигаться по орбите, расположенной в окрестности коллинеарной точки либрации L_i ($i=1,2,3$). В частности, из-за неустойчивости таких орбит для удержания КА в заданной окрестности требуется постоянно корректировать его движение. Если необходимость нахождения КА вблизи L_i временно отпадает, то его можно энергетически экономным путем перевести на двояко-асимптотическую траекторию. Двигаясь по этой траектории, КА через некоторое конечное время вернется в достаточно малую окрестность той же самой либрационной точки. Кроме того, асимптотические траектории представляют интерес как траектории достижения окрестности коллинеарных точек либрации в рамках пассивного полета.

Двояко-асимптотические траектории рассматривались в работе Derpit и Neugard [3] (см. также [4]), где был разработан метод расчета симметричных орбит подобного типа и найдено 35 таких орбит. Используя этот метод, мы провели дальнейшее изучение класса симметричных двояко-асимптотических траекторий.

Этот класс содержит счетное множество таких траекторий. Их можно определенным образом упорядочить по числу пересечений с осью Ox и по значению массы M меньшего тела. В нашей работе изучались траектории с небольшим числом пересечений. При этом были обнаружены новые типы траекторий.

2. Метод построения траекторий.

По определению асимптотической траекторией к коллинеарной точке либрации L_i ограниченной круговой задачи трех тел называется траектория, при движении по которой тело P пренебрежимо малой массы достигает точку L_i при $t \rightarrow -\infty$ (исходящая траектория) или при $t \rightarrow +\infty$ (входящая траектория).

Уравнения движения тела P во вращающейся барицентрической системе координат Oxy имеет известный вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= x - \frac{1-M}{r_0^3}(x+M) - \frac{M}{r_1^3}(x-1+M), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= y \left(1 - \frac{1-M}{r_0^3} - \frac{M}{r_1^3} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$r_0^2 = (x+M)^2 + y^2, \quad r_1^2 = (x-1+M)^2 + y^2.$$

В используемой системе координат ось Ox направлена по линии, соединяющей две конечные массы $1-M$ и M в сторону меньшей массы M ($0 \leq M \leq 1/2$). Эти массы находятся на единичном расстоянии друг от друга и обращаются вокруг общего центра масс с единичной угловой скоростью. Начальные значения $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ для вычисления исходящих асимптотических траекторий могут быть приближенно определены по следующим формулам

$$x_0 = X_i + \varepsilon, \quad y_0 = c\varepsilon, \quad (2)$$

$$\dot{x}_0 = \frac{\varepsilon}{2} c \varepsilon (3 - 2A - \omega_2^2), \quad \dot{y}_0 = \frac{\varepsilon}{2} \varepsilon (\omega_2^2 - A - 3),$$

$$\text{где } c = \frac{2\omega_2}{1 - A - \omega_2^2}, \quad A = \frac{1 - M}{|X_i + M|^3} + \frac{M}{|X_i - 1 + M|^3},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{A(9A - 8) + \frac{1}{2}A - 1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{A(9A - 8) - \frac{1}{2}A + 1}}.$$

Здесь $X_i = X_i(M)$ — абсцисса коллинеарной точки либрации L_i (см., например, [5]). При достаточно малом $|\varepsilon|$ ошибка в определении начальных фазовых координат по формулам (2) имеет порядок $O(\varepsilon^2)$. Значениям $\varepsilon > 0$ отвечают исходящие асимптотические траектории положительного типа, а $\varepsilon < 0$ — отрицательного типа.

Метод построения симметричных двойко-асимптотических траекторий опирается на специфику уравнений (I). Если в момент времени t^* траектория пересекает ось Ox под прямым углом, т.е. $y(t^*) = 0$ и $\dot{x}(t^*) = 0$, то справедливы следующие соотношения симметрии:

$$x(t^* + t) = x(t^* - t), \quad y(t^* + t) = y(t^* - t).$$

Зафиксируем параметр M и рассмотрим исходящую асимптотическую траекторию. Пусть в некоторый момент времени $t_i^*(M)$ траектория впервые пересекает ось Ox . Если можно подобрать такое M ($0 \leq M \leq 1/2$), что в момент $t_i^*(M)$ $\dot{x}(t_i^*(M)) = 0$, то (в силу указанной симметрии траектории относительно оси Ox) тело P при $t \rightarrow +\infty$ вернется в исходную точку либрации

L_i . Аналогично путем подбора параметра M можно искать асимптотические траектории, у которых M — е пересечение оси Ox в момент $t_n^*(M)$ будет ортогональным. Так определяют-ся симметричные двойко-асимптотические траектории.

В зависимости от точки либрации будем относить такие траектории к классам $\{L_1\}, \{L_2\}, \{L_3\}$. В зависимости от знака ε будем различать траектории положительного ($\varepsilon > 0$) или отрицательного ($\varepsilon < 0$) типа. Порядковый номер n ортогонального пересечения оси Ox будем называть индексом симметричной двойко-асимптотической траектории. Как следует из дальнейших примеров, при фиксированном M может существовать много траекторий одного типа, отвечающих различным значениям M .

3. Результаты расчетов.

Описанным выше методом с помощью численного интегрирования системы уравнений плоской ограниченной круговой задачи трех тел и подбора массы M определялись симметричные двойко-асимптотические траектории для небольших значений индекса n .

3.1 В таблице I приведены характеристики таких траекторий, принадлежащих классу $\{L_1\}$. В частности, указаны значения x и y в момент ортогонального пересечения траекторий с осью Ox . Эти траектории показаны на рис. I-13. Номера рисунков расположены выше и левее соответствующих траекторий. В таблице и на рисунках звездочками отмечены орбиты, которые уже были указаны в работе [3].

В рамках используемого вычислительного алгоритма искали все траектории класса $\{L_1\}$ с индексом $n \leq 4$. При этом не было обнаружено траекторий положительного типа $\varepsilon > 0$. Траектории положительного типа не были обнаружены и для $n = 5$,

Таблица I. Орбиты, двойко-асимптотические к L_1 .

| n | M | x | y | E | Номер рисунка |
|-----|------------|------------|------------|-------|---------------|
| 1 | 0.00425400 | -0.827025 | -0.0981040 | < 0 | I |
| 2 | 0.00149700 | 0.555371 | 0.921782 | " | 2 |
| 2 | 0.00415732 | 0.872740 | 0.0492464 | " | 3 |
| 2 | 0.024791 | 0.21648 | 2.21597 | " | 4 (*) |
| 3 | 0.00212468 | -0.537323 | -0.977759 | " | 5 |
| 3 | 0.012146 | -0.33212 | -1.76495 | " | 6 (*) |
| 3 | 0.069429 | -0.70387 | -0.12296 | " | 7 (*) |
| 4 | 0.00148481 | 0.909422 | 0.0367100 | " | 8 |
| 4 | 0.00271217 | 0.524688 | 0.996705 | " | 9 |
| 4 | 0.00867868 | 0.324397 | 1.711683 | " | 10 |
| 4 | 0.0241026 | 0.764192 | 0.0822582 | " | 11 |
| 4 | 0.151393 | -0.0527041 | 3.717075 | " | 12 |
| 6 | 0.443599 | 0.497501 | -3.535356 | > 0 | 13 |

однако для $n = 6$ такая траектория была найдена (рис.13). Траектории отрицательного типа охватывают точку P_0 большей массы $1-M$, а траектория положительного типа - точку P_2 меньшей массы M .

Интересно отметить, что в некоторых случаях были обнаружены траектории, отвечающие различным индексам n и очень близким значениям M (сравните попарно траектории на рис.1 и 3, 2 и 8, 4 и 11). При этом траектория с большим индексом лежит в некоторой достаточно малой окрестности траектории с меньшим индексом, а точка ее ортогонального пересечения с осью Ox расположена вблизи L_1 . В масштабе рис.3,8,11 симметричные ветви траекторий практически сливаются.

Возникает интересная проблема о доказательстве существования таких "близких" траекторий аналитическим путем.

3.2 Аналогичные характеристики найденных траекторий класса $\{L_2\}$ приведены в таблице 2, а сами траектории изображены на рис.14-25. Так же, как и в предыдущем случае, искались все траектории с $n \leq 4$. При этом траекторий отрицательного типа не было обнаружено. Однако, как следует из примеров (рис.21-25), они существуют для больших значений n , в частности, для $n = 7$ и $n = 10$. Все найденные траектории охватывают обе конечные массы. Траектория на рис. 15 ($n = 2$) лежит в малой окрестности траектории на рис.14 ($n = 1$) и отвечает близкому значению M .

Траектория, изображенная на рис.23 ($n = 10$, $E < 0$), была описана в начале данной работы. В статье Davidson [6] (см. также [4]) приведена периодическая орбита для $M = 0,012277471$, близкого к значению, соответствующему двойко-асимптотической орбите $M = 0,0121683$. Геометрические характеристики этих двух орбит практически совпадают. В связи с этим следует обратить

Таблица 2. Орбиты, двойко-асимптотические к L_2 .

| n | M | x | y | E | Номер рису- нка |
|-----|------------|------------|------------|-------|-----------------------|
| 1 | 0.00153894 | -2.023602 | 1.425845 | > 0 | 14 |
| 2 | 0.00152878 | 1.0960102 | -0.0418271 | "- | 15 |
| 2 | 0.004735 | 2.94475 | -2.50026 | "- | 16 (*) |
| 3 | 0.0030966 | -1.179218 | 0.105450 | "- | 17 |
| 3 | 0.007941 | -3.78639 | 3.42489 | "- | 18 (*) |
| 4 | 0.00145180 | 1.686711 | -0.9917111 | "- | 19 |
| 4 | 0.00264079 | 2.328692 | -1.792231 | "- | 20 |
| 7 | 0.00416047 | -0.8329901 | -0.0940558 | < 0 | 21 |
| 10 | 0.00600571 | 0.8056416 | 0.217086 | "- | 22 |
| 10 | 0.0121683 | 0.318262 | 1.715925 | "- | 23 |
| 10 | 0.0267025 | 0.741053 | 0.228518 | "- | 24 |
| 10 | 0.0730866 | -0.739205 | 0.0344705 | "- | 25 |

внимание на проблему аналитической связи между двойко-асимптотическими и близкими к ним периодическими траекториями.

3.3 В таблице 3 мы приводим характеристики лишь четырех типичных траекторий класса $\{L_3\}$ (рис.26-29), не содержащихся в работе Dergit и Hennard [3]. Траектории, изображенные на рис.26,28, имеют подковообразную форму и охватывают устойчивые точки либрации L_4 и L_5 . На рис.27 изображена траектория, охватывающая обе точки P_0 и P_2 , а на рис.29 - лишь P_0 .

Из работы [3] и наших вычислений, которые не приведены в данном препринте, можно заключить, что класс $\{L_3\}$ содержит много траекторий даже с небольшими значениями индекса.

В заключение авторы приносят свою благодарность В.А.Ляховой за помощь в проведении расчетов на ЭМ.

Таблица 3. Орбиты, двойко-асимптотические к L_3 .

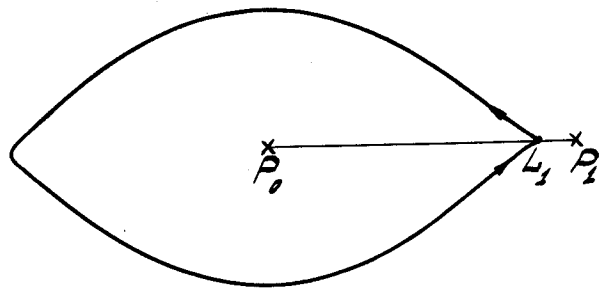
| n | M | x | y | ε | Номер рисунка |
|-----|------------|-----------|-------------|---------------|------------------|
| I | 0.0018704 | -1.024032 | 0.04000577 | > 0 | 26 |
| 2 | 0.00941879 | 1.2880056 | 0.489769 | > 0 | 27 |
| I | 0.00108919 | -0.996457 | -0.00672664 | < 0 | 28 |
| 2 | 0.00824266 | 0.503567 | 1.074523 | < 0 | 29 |

ЛИТЕРАТУРА

1. Farquhar R.W., 1967. Station-Keeping in the Vicinity of Collinear Libration Points with an Application to a Lunar Communication Problem. Space Flight Mechanics. American Astronautical Society. New York. Science and Technology Series, v.II, p.519.
2. Лидов М.Л., Лукьянов С.С., Тесленко Н.М., 1974. Автоматическая станция в окрестности лунной либрационной точки L_2 . Препринт ИПМ АН СССР, № II6.
3. Deprit A. and Henrard J., 1965. Symmetric Doubly Asimptotic Orbits in the Restricted Three-Body Problem. Astronomical Journal, v.70, no 1329, p.271.
4. Szebehely V., 1967. Theory of orbits. Academic Press. New York and London.
5. Субботин М.Ф., 1968. Введение в теоретическую астрономию. Наука. М.
6. Davidson M.C., 1964. Numerical Examples of Transition Orbits in the Restricted Three Body Problem. Astronautica Acta, v.X, fasc. 5-6, p.308.

1.

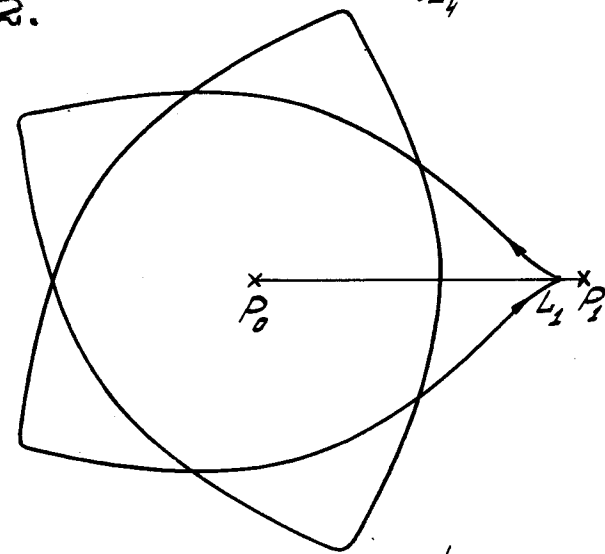
.L₄



.L₅

2.

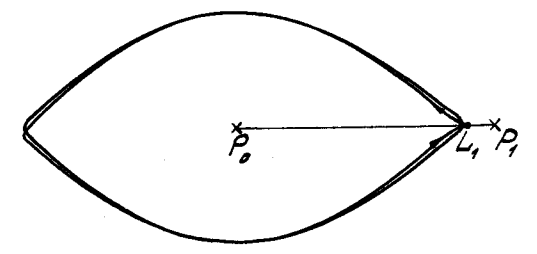
.L₄



.L₅

3.

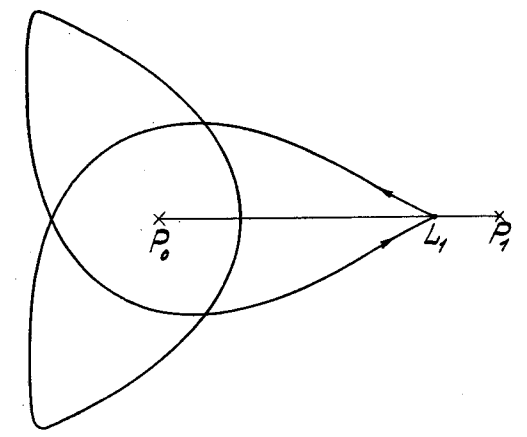
.L₄



.L₅

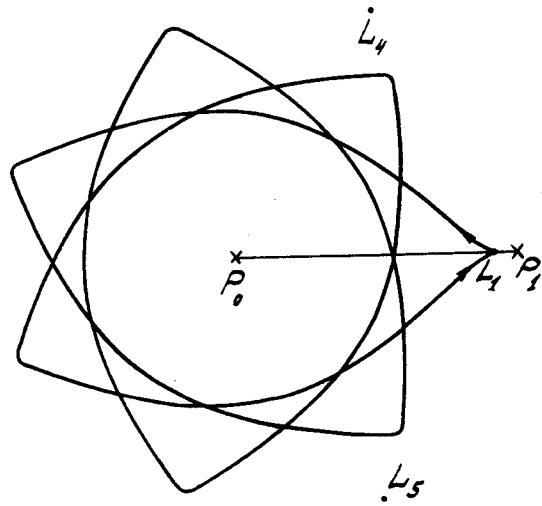
4. (*)

.L₄

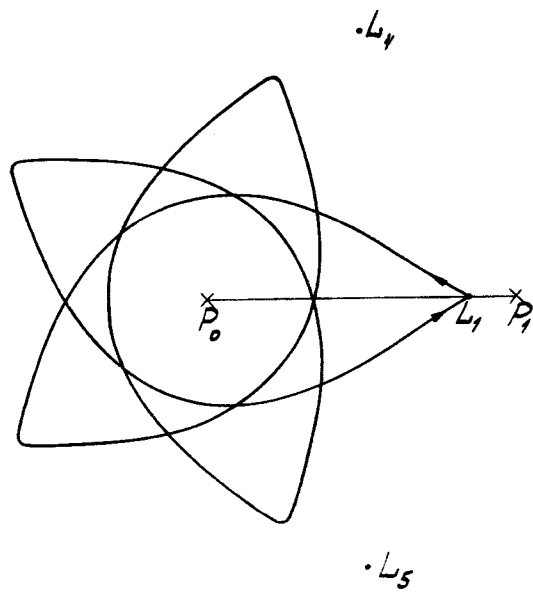


.L₅

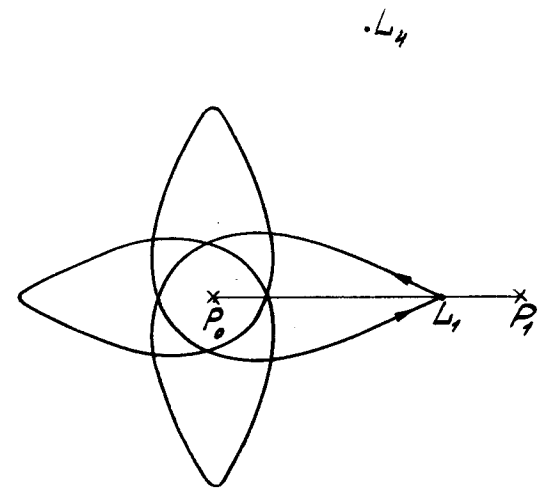
5.



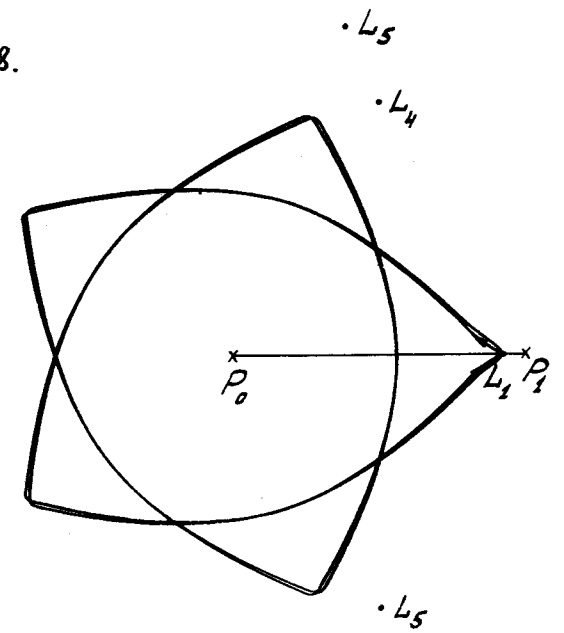
6. (*)



7. (*)

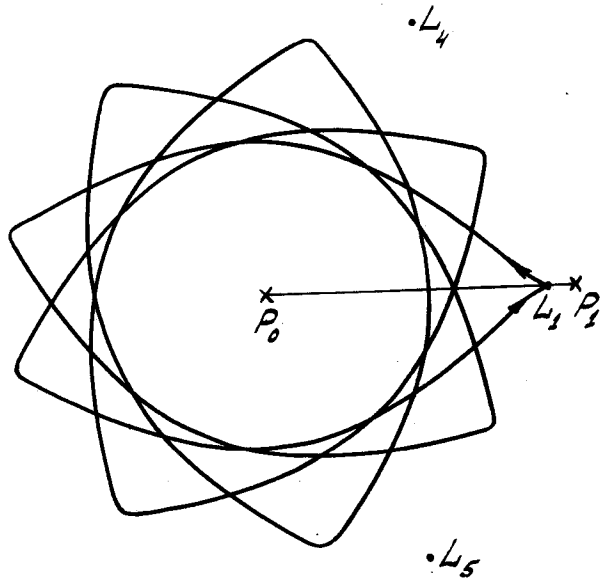


8.

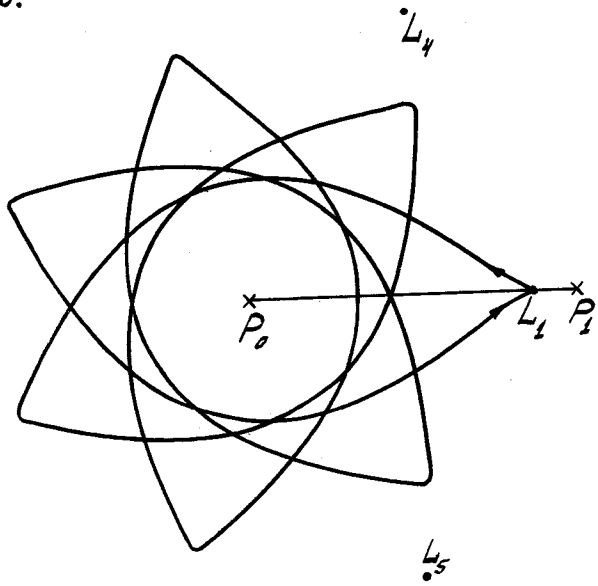


9.

20

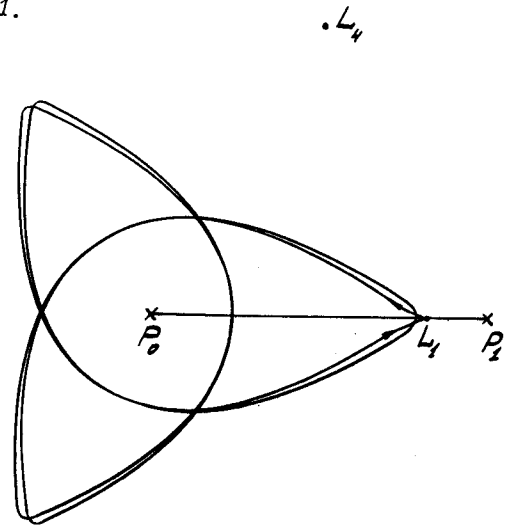


10.

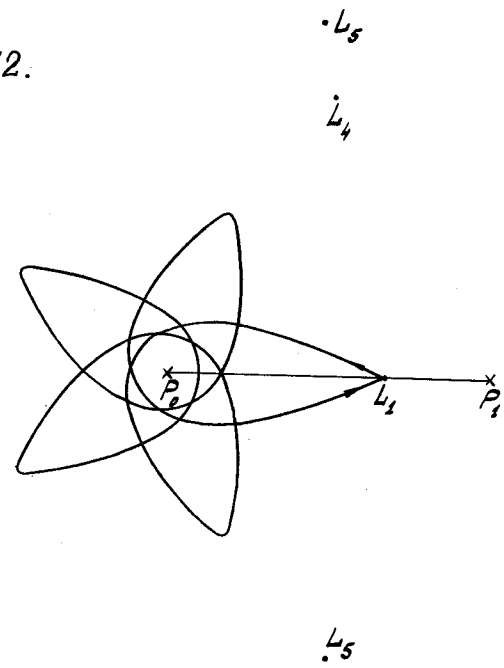


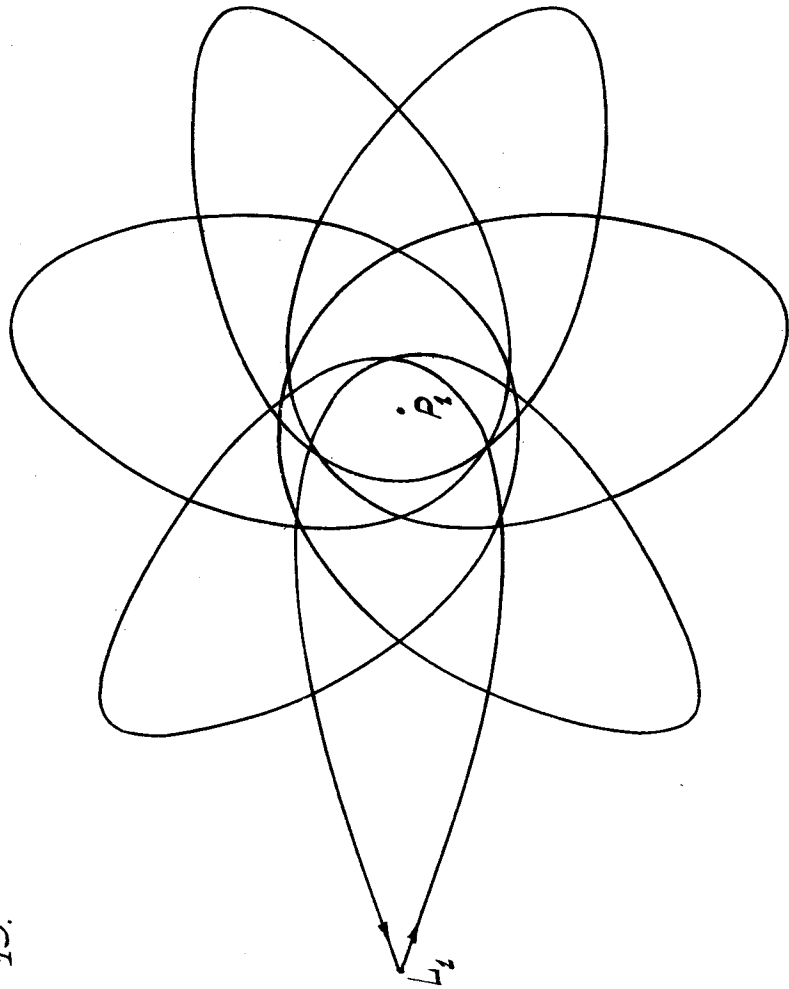
11.

21

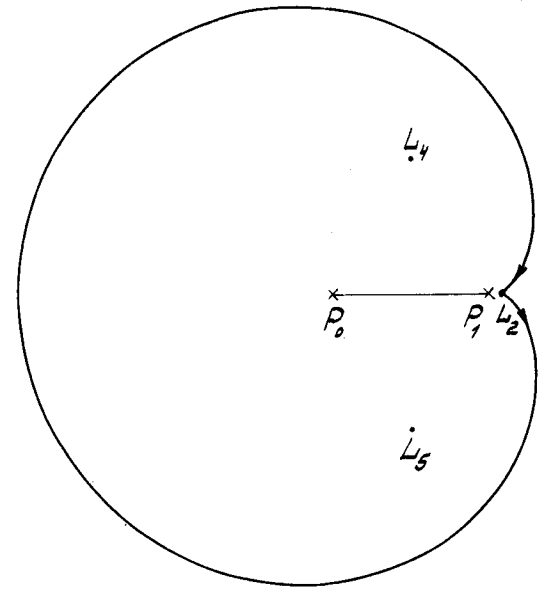


12.

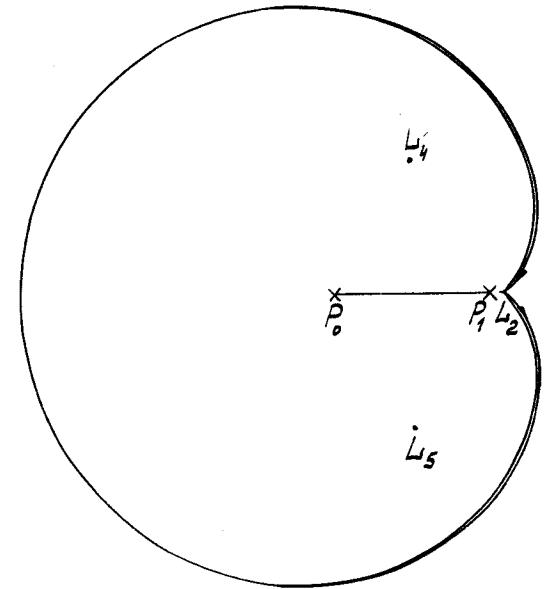




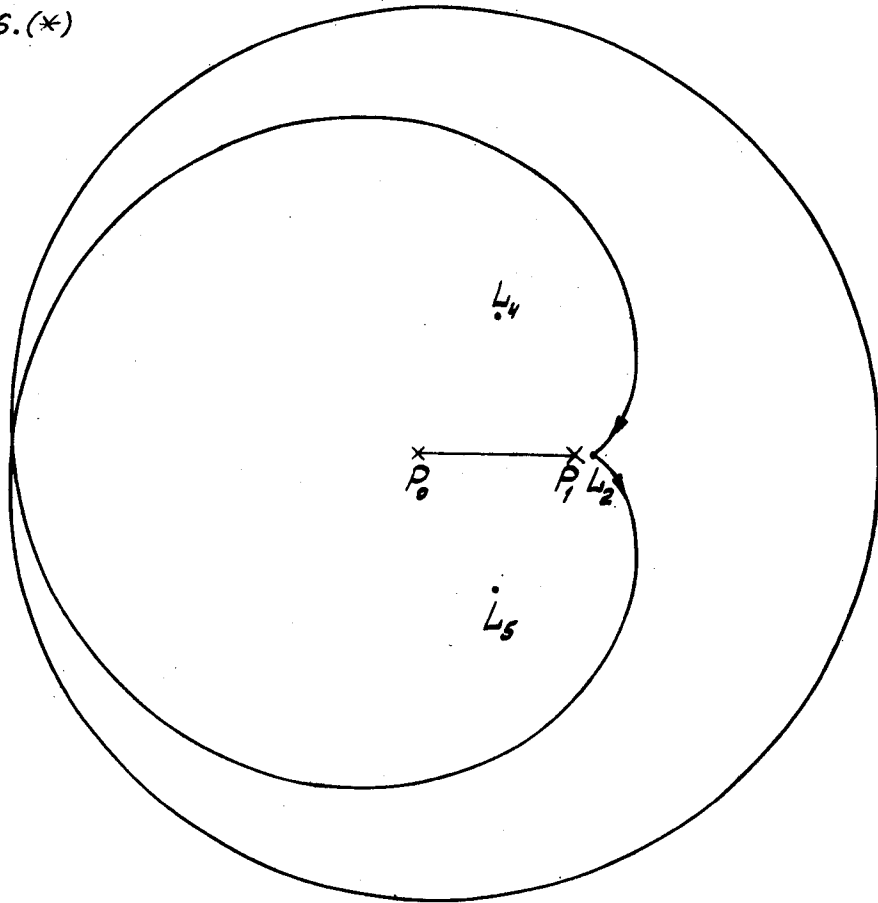
14.



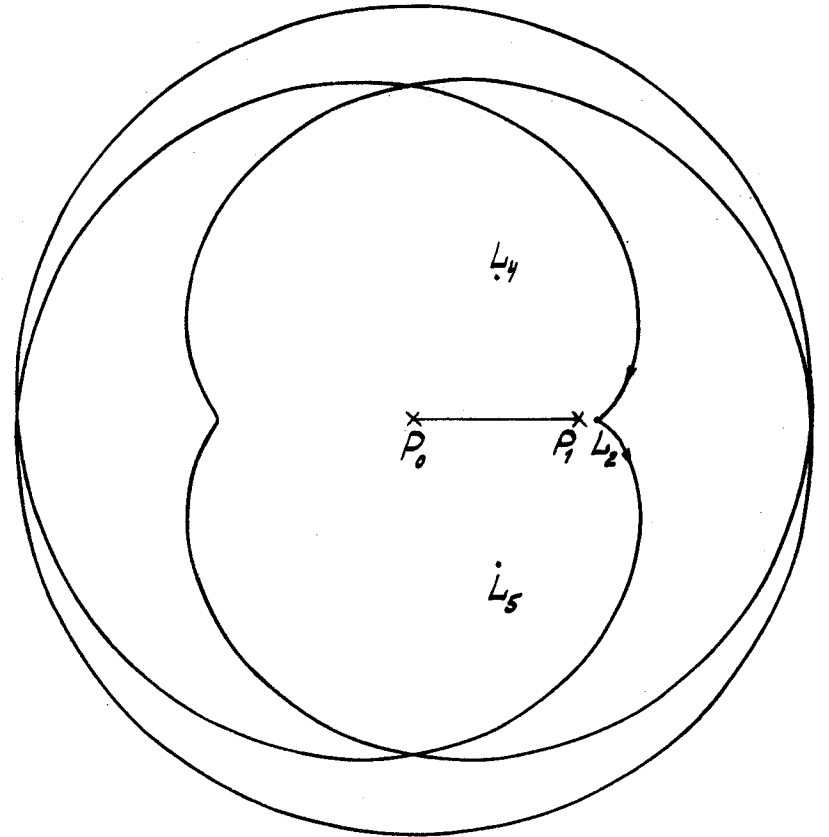
15.



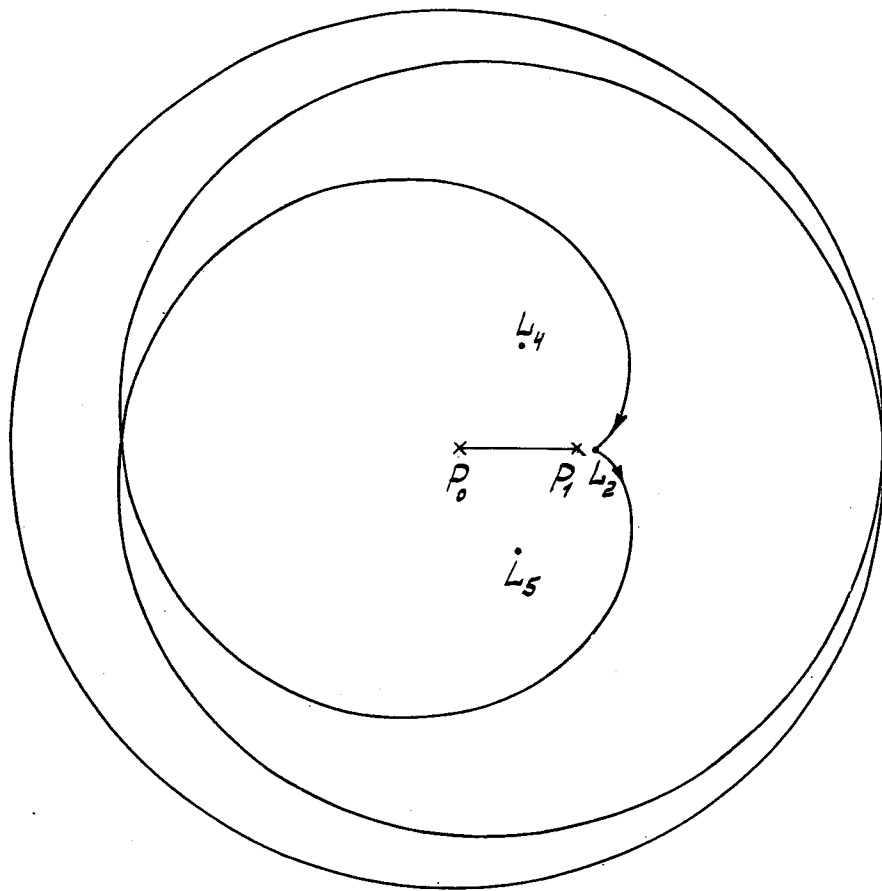
16. (*)



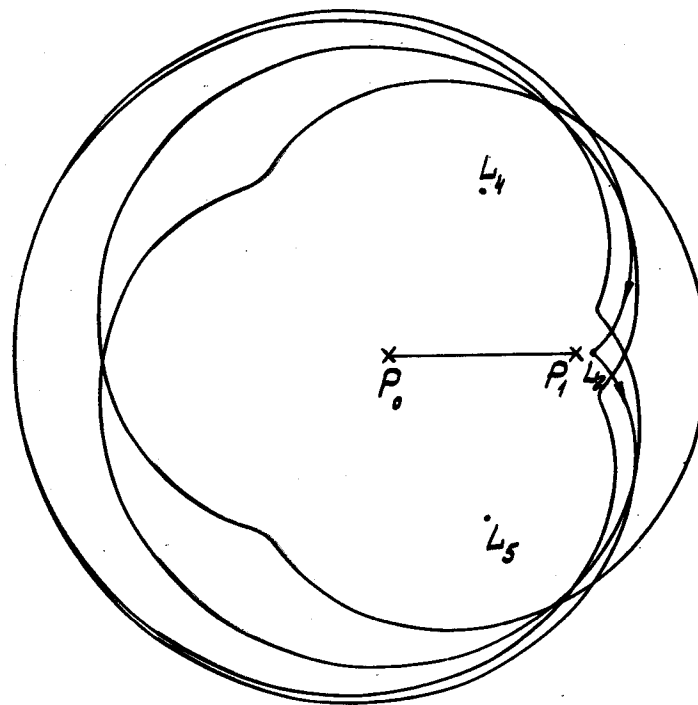
17.



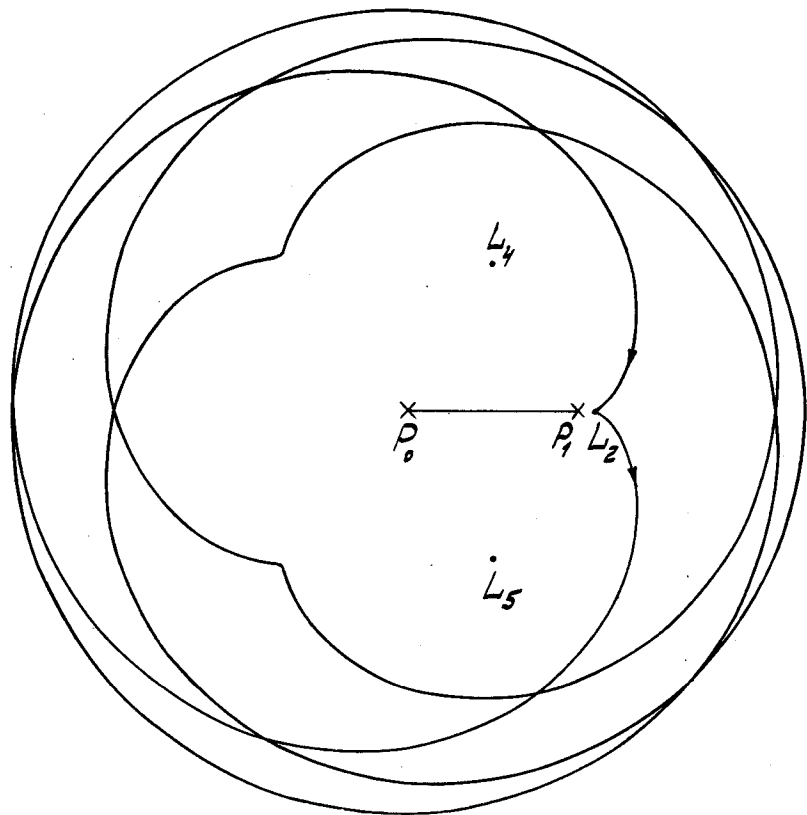
18. (*)



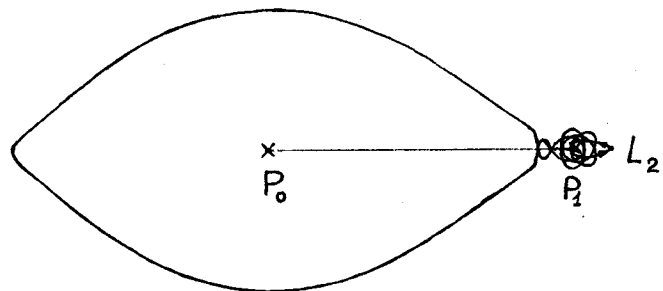
19.



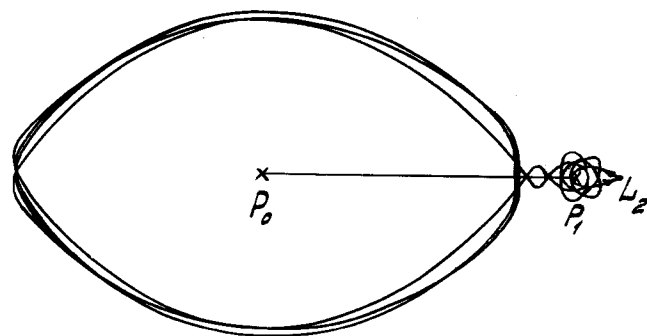
20.



21.

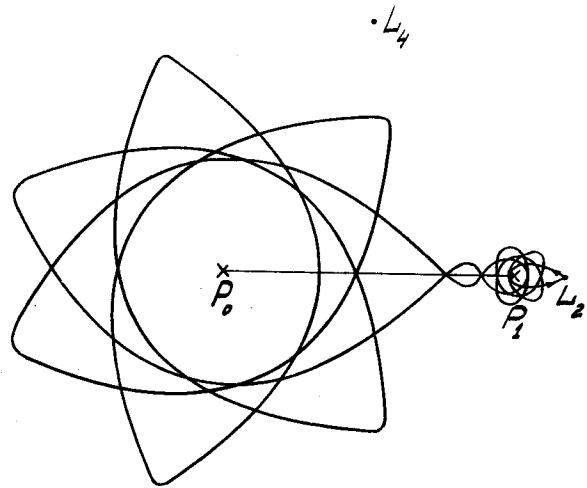
 $\cdot L_4$ 

22.

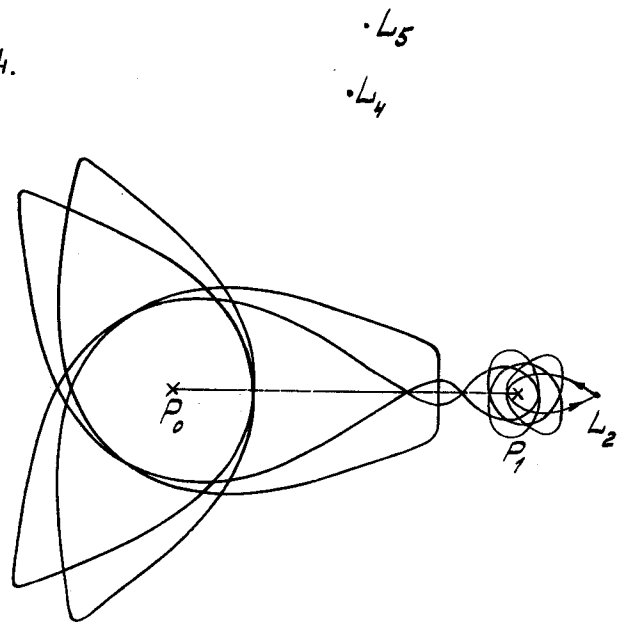
 $\cdot L_5$ $\cdot L_4$ 

23.

30



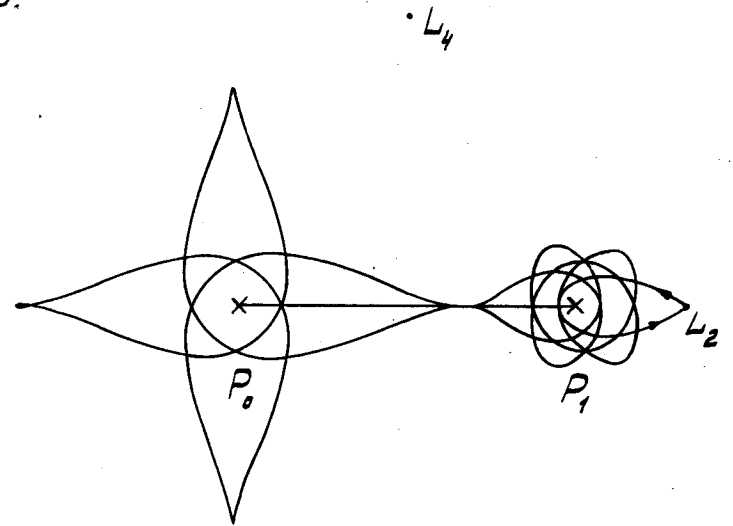
24.



.L₅

31

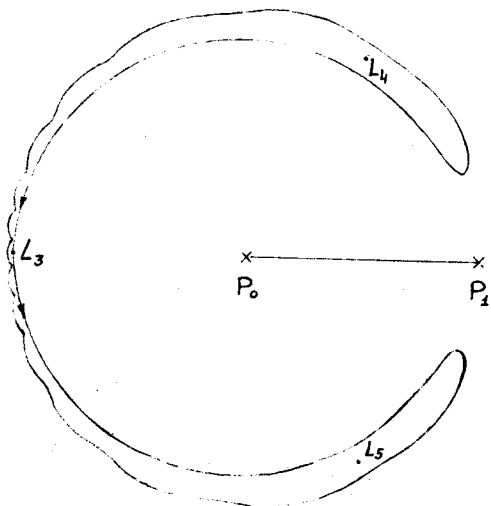
25.



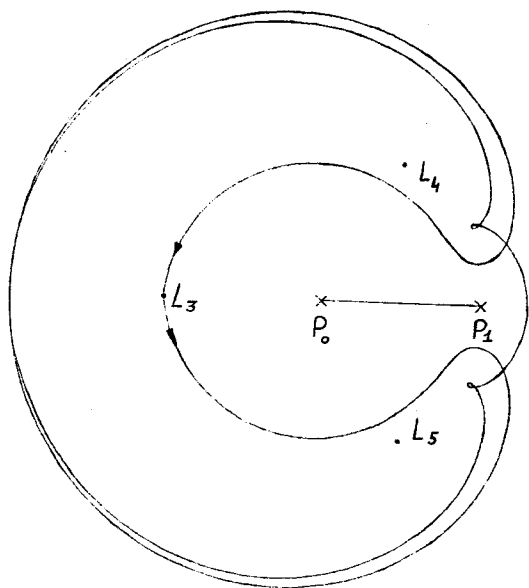
.L₅

26.

32

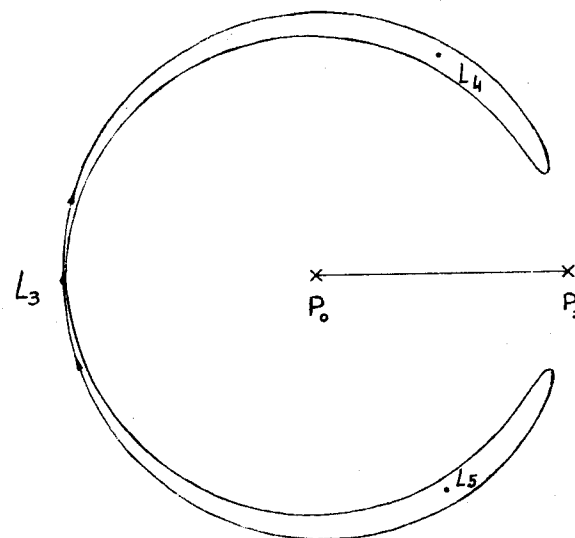


27.

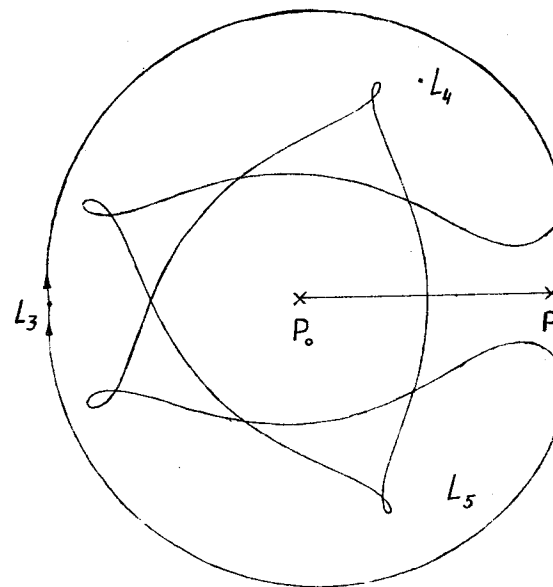


28.

33



29.



М.Л. Лидов, М.А. Вашковьяк.
"Двух-асимптотические симметричные
орбиты в плоской ограниченной круговой задаче трех тел."
Редактор Н.М. Тесленко, Корректор М.А. Вашковьяк.
№ Т-20378 от 4.12.75г. Заказ № 3451. Тираж 120 экз.
Формат бумаги 60X90, 1/16. Объем 2,2 уч. изд. л.

Цена 16 коп.

055 (02)2

Отпечатано на ротационных в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.