ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 79 за 1975 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бабенко К.И.

Теория возмущений стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольса

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бабенко К.И. Теория возмущений стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1975. № 79. 38 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1975-79

Цена 24 коп.

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Др 46

К.И. Бабенко.

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Препринт № 79 за 1975г.

Москва.

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

УДК 532.516

К.И.Бабенко

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА.

Москва, 1975 г.

АННОТАЦИЯ

В задаче обтекания тела потоком вязкой жидкости построена теория возмущений для течений с малыми числами Рейнольдса. Как известно, эта теория является теорией сингулярных возмущений, и для ее обоснования нужно создать соответствующий математический аппарат.

С использованием теории потенциалов линеаризированных уравнений Навье-Стокса, решение нелинейной задачи представлено в виде специальных рядов переразлагая которые, можно получить асимптотические ряды теории возмущений в областях Стокса и Озеена.

Подробно исследован вопрос о единственности решения задачи обтекания при малых числах Рейнольдса. Установлен критерий нарушения единственности. Построена теория возмущений решения задачи обтекания, когда число Рейнольдса не мало; это задача о регулярных возмущениях. Дана формула для силы, действующей на тело, и тем самым обоснована формула Стокса и другие формулы, полученные методом сращиваемых асимптотических разложений. Таким образом в рассматриваемых задачах метод сращиваемых асимптотических разложений получил свое обоснование.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости, обтекающей тело $T \subset R^3$, граница S которого имеет кривизну, удовлетворяющую условию Гёльдера.

Пусть u, p, ρ - безразмерные вектор скорости, давление и плотность; поскольку $\rho \equiv 1$, плотность выпадает из дальнейших рассмотрений. Начало координат поместим внутрь T, а оси направим так, чтобы $u_\infty = (1,0,0)$. За единицу длины возьмем диаметр T.

Стационарное движение жидкости описывается системой

$$(u\cdot\nabla)u + \operatorname{grad} p = \frac{1}{Re}\Delta u, \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{0.1}$$

где Re - число Рейнольдса. Должно выполняться условие на границе тела

$$u|_S = u_0, \tag{0.2}$$

а также граничное условие в бесконечно удаленной точке

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = u_\infty. \tag{0.3}$$

Мы рассмотрим некоторые вопросы теории возмущений стационарных течений. Уже давно было понято, что в задачах обтекания теория возмущений даже при малых числах Рейнольдса есть теория сингулярных возмущений. Сингулярность теории происходит из-за некомпактности области и проявляется она прежде всего в том, что в теории возникают два характерных масштаба - диаметр тела и вязкий масштаб $1/Re$. Первые исследователи, которые занимались развитием теории возмущений, не совсем правильно понимали ситуацию и допустили, вполне естественные по своему времени, просчеты и даже ошибки. Теперь они известны под именем соответствующих парадоксов.

Тем не менее был получен и целый ряд замечательных результатов, из которых мы прежде всего отметим приближение Стокса и его формулу для силы, действующей на шар, медленно двигающийся в вязкой жидкости [1], а также приближение Озеена и озееновскую асимптотику течения в окрестности бесконечно удаленной точки [2].

С развитием метода сращиваемых асимптотических разложений в теории возмущений при малых числах Рейнольдса был достигнут существенный прогресс, и в частности, было показано, как вычислять последующие члены асимптотических выражений в формуле для силы, действующей на тело. Не имея возможности приводить обширную библиографию, отметим только работы Праудмена и Пирсона [3] и работу Бреннера и Кокса [4]. Во всех работах этого цикла, к сожалению, построения носят сугубо формальный характер, и отсутствует какое-либо обоснование установленных результатов. Учитывая драматическую историю развития теории возмущений при малых числах Рейнольдса, крайне желательно дать строгое математическое доказательство всем этим результатам и дать такое неформальное построение теории, при котором можно было бы надежно получать и новые результаты. Эта задача и решается автором в данной работе.

При построении теории возмущений мы существенным образом опираемся на теорию потенциалов линеаризированных уравнений Навье-Стокса. Эта исключительно красивая теория была построена независимо Одквистом и Лихтенштейном [5],[9]. Однако непосредственно применить эту теорию к нашим вопросам не удается. Объясняется это тем, что для линеаризации Стокса при решении краевой задачи мы попадаем на спектр соответствующего интегрального оператора, а для линеаризации Озеена - нет. Поэтому сразу же возникает задача о возмущениях несамосопряженного оператора в окрестности точки спектра при условии, что инвариантное подпространство не одномерно. Ввиду этого мы изменили конструкцию потенциалов, и соответствующие

результаты изложены в §I.

При построении теории возмущений удобно иметь простой аналитический вид для решения нелинейной задачи. Соответсвующая конструкция в виде рядов дается в §2. До нас эта же конструкция была использована Финном для доказательства существования решений класса PR в его интересной и богатой результатами работе [6]. Однако результаты Финна недостаточны для построения теории возмущений, поскольку требуются тонкие оценки функции Грина и отдельных членов ряда. При получении таких оценок существенную роль играют результаты работы [7].

При принятом в данной работе способе построения теории возмущений одним из важных вопросов является вопрос о единственности решения. Единственность решения получается как следствие результатов работы К.И. Бабенко [8]. В работе излагается один из вариантов теоремы единственности и устанавливается критерий нарушения единственности. При этом была построена теория возмущений решения задачи обтекания, когда число Рейнольдса не мало. Несмотря на регулярный характер этой теории возмущений, неожиданно оказалось, что обсснование сходимости рядов является делом далеко не тривиальным. Здесь существенную роль играют результаты работы [8].

За недостатком места мы в последнем параграфе работы рассмотрели вопрос лишь о построении асимптотического разложения для сил (точнее о четырех первых членах разложения), поскольку этот вопрос является наиболее тонким. Попутно была указана общая схема получения асимптотических разложений в областях $\{x : |x| << \lambda^{-1}\} \setminus T$ и $\{x : |x| >> \lambda^{-1}\}$, исходя из представления решения, данного в §2.

§ I. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА.

I. Линеризация Озеена, как известно, состоит в том, что вместо системы (0.I) рассматривается система

$$(u_\infty\cdot\nabla)u + grad\,p = \frac{1}{Re}\Delta u,\ div\,u = 0,$$

которую для удобства дальнейшего иссследования целесообразно записать в виде

$$\Delta u - 2\lambda(u_\infty\cdot\nabla)u - 2\lambda\,grad\,p = f,\ div\,u = 0, \qquad (I.I)$$

где $2\lambda = Re$, и для общности правая часть взята отличной от нуля. Фундаментальное решение системы (I.I) имеет вид

$$H_{ij}(x,y) = \delta_{ij}\Delta\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\,\partial x_j},\quad i,j=1,2,3. \qquad (I.2)$$

где

$$\phi = -\frac{1}{8\pi\lambda}\int_0^{\lambda S}(1-e^{-\alpha})\frac{d\alpha}{\alpha},\quad S(x,y) = S = |x-y| - u_\infty(x-y), \qquad (I.3)$$

причем вектору "скоростей" $H_i(x,y) = \{H_{i1}, H_{i2}, H_{i3}\}$ соответствует "давление"

$$p_i = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{4\pi|x-y|}\right),\ i=1,2,3. \qquad (I.4)$$

Заметим, что система, сопряженная к (I.I), получается заменой

u_∞ на $-u_\infty$, и поэтому функции (I.2), (I.4), как функции y, дают фундаментальное решение сопряженной системы. Учитывая это замечание и тот факт, что $u_\infty = (1,0,0)$, мы с помощью формулы Грина получим, что любое решение системы (I.I) с конечным интегралом Дирихле может быть представлено в виде

$$u(x) = u_\infty + v(x),\ v(x) = U(x) + \int_{\mathcal{B}} H(x,y)f(y)\,dy, \qquad (I.5)$$

где $H(x,y)$ – матрица с элементами H_{ij}, а $U(x)$ – вектор с компонентами

$$U_k(x) = \int_S\Big[\sum_{i,\ell=1}^{3}\Big(\frac{\partial H_{k\ell}(x,y)}{\partial y_i} + \frac{\partial H_{ki}(x,y)}{\partial y_\ell} + 2\lambda\delta_{\ell i}p_k(x,y)\Big)v_\ell n_i +$$

$$+\lambda n_\ell\sum_{\ell=1}^{3}H_{k\ell}(x,y)v_\ell\Big]d\sigma - \int_S\sum_{i,\ell=1}^{3}H_{k\ell}(x,y)\Big(\frac{\partial v_\ell}{\partial y_i} + \frac{\partial v_i}{\partial y_\ell} - 2\lambda\delta_{\ell i}p\Big)n_i\,d\sigma, \qquad (I.6)$$

$$k=1,2,3.$$

В этих интегралах n_i – компоненты вектора нормали, внешней по отношению к $\mathcal{B} = R^3\setminus T$, $d\sigma$ – мера Лебега на S. Давление найдется по формуле

$$p(x) = P(x) + \int_{\mathcal{B}}\sum_{i=1}^{3}p_i(x,y)f_i(y)\,dy + C, \qquad (I.7)$$

где в соответствии с (I.6)

$$P(x) = \int_S\Big[\sum_{i,\ell=1}^{3}\Big(\frac{\partial p_i(x,y)}{\partial y_\ell} + \frac{\partial p_\ell(x,y)}{\partial y_i} - 2\lambda\delta_{i\ell}p_1(x,y)\Big)v_i n_\ell +$$

$$+\lambda n_1\sum_{i=1}^{3}p_i v_i\Big]d\sigma -$$

$$-\int_S \sum_{i,\ell=1}^{3} p_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_\ell} + \frac{\partial v_\ell}{\partial y_i} - 2\lambda \delta_{i\ell} p \right) n_\ell \, d\sigma, \qquad \text{(I.8)}$$

а C – произвольная постоянная.

2. Интегралы в формулах (I.5), (I.6), (I.7), (I.8) дают примеры потенциалов для системы Озеена. Положим

$$K_{ij}(x,y) = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial H_{ij}(x,y)}{\partial y_k} + \frac{\partial H_{ik}(x,y)}{\partial y_j} + 2\lambda \delta_{kj} p_i(x,y) \right) n_k(y) + \lambda n_j(y) H_{ij}(x,y),$$

$x \in \mathcal{B}$, $y \in S$, $i,j = 1,2,3$. Потенциалом двойного слоя с плотностью $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C[S]$ будем называть интеграл вида

$$v(x) = \int_S K(x,y)\, \varphi(y)\, d\sigma \qquad \text{(I.9)}$$

где $K(x,y)$ – матрица с элементами K_{ij}. Соответствующее давление определяется по формуле

$$p(x) = \int_S \Big[\sum_{k,\ell=1}^{3} \left(\frac{\partial p_k(x,y)}{\partial y_\ell} + \frac{\partial p_\ell(x,y)}{\partial y_k} - 2\lambda \delta_{k\ell} p_1(x,y) \right) \varphi_k n_\ell + \lambda n_1 \sum_{k=1}^{3} p_k \varphi_k \Big] d\sigma \qquad \text{(I.10)}$$

Полагая в формулах (I.5)-(I.8) $v = const$, $p = const$, $f \equiv 0$, получим, что при $\varphi = C$ левая часть (I.9) будет равна $C\,\delta_{\mathcal{B}}(x)$, где $\delta_{\mathcal{B}}(x)$ – характеристическая функция области $\mathcal{B}$. Отсюда стандартным способом устанавливается, что для потенциала (I.9) имеет место формула

$$v_{\pm}(x) = \pm \tfrac{1}{2} \varphi(x) + \int_S K(x,y) \varphi(y)\, d\sigma, \qquad \text{(I.11)}$$

где $v_{\pm}$ обозначают предельные значения v соответственно изнутри и извне области $\mathcal{B}$.

3. Условимся, что когда нужно подчеркнуть зависимость от λ фундаментального решения H_{ij}, ядра K_{ij} и т.п. мы будем указывать явно этот аргумент, например, $H_{ij}(x,y;\lambda)$. Разлагая $H_{ij}(x,y;\lambda)$ по степеням λ, получим

$$K(x,y;\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu K_\nu(x,y),$$

причем $K_0(x,y)$ – ядро, отвечающее системе Стокса. Поэтому элементы этого ядра суть

$$-\frac{3}{4\pi} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r^5} \sum_{k=1}^{3} (x_k - y_k) n_k(y), \qquad \text{(I.12)}$$

где $r = |x - y|$. Поскольку $K_1 = O(r^{-1})$, $K_\nu = O(1)$, $\nu \geq 2$, и K_ν для $\nu \geq 1$, если $x \neq y$, бесконечно дифференцируема, то в вопросах дифференцируемости потенциала (I.9) вплоть до границы области $\mathcal{B}$ мы можем использовать результаты Одквиста [5] и Лихтенштейна [9].

4. Условимся обозначать однородную систему (I.1) посредством $(I.1)_0$, а систему, сопряженную к (I.1) либо $(I.1)_0$, посредством $(I.1)^*$ либо $(I.1)_0^*$. Такой же способ обозначений будем применять и в других случаях.

Рассмотрим для системы $(I.1)_0$ краевую задачу

$$u(x)|_S = u_0(x), \quad \lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0 \qquad \text{(I.I3)}$$

и будем отыскивать ее решение в виде потенциала (I.9), (I.I0). Тогда (I.II) приводит к интегральному уравнению для плотности

$$\frac{1}{2}\varphi(x) + \int_S K(x,y)\,\varphi(y)\,d\sigma = u_0(x). \qquad \text{(I.I4)}$$

Несложно показать, что уравнение (I.I4) не имеет нетривиальных решений, если $\lambda \neq 0$. Но если $\lambda = 0$, то хорошо известно, что уравнение (I.I4) имеет нетривиальные решения, причем размерность инвариантного подпространства данного интегрального оператора равна шести. Отсюда понятны те трудности, которые возникнут при малых λ, поскольку мы фактически будем вынуждены строить теорию возмущений несамосопряженного оператора в случае кратного собственного значения. Поэтому целесообразно изменить определение потенциала двойного слоя, чтобы в корне ликвидировать создавшуюся ситуацию.

Мы определим потенциал двойного слоя с плотностью φ следующим образом

$$v(x) = \int_S \mathcal{K}(x,y;\lambda)\,\varphi(y)\,d\sigma, \qquad \text{(I.I5)}$$

где

$$\mathcal{K}(x,y;\lambda) = K(x,y;\lambda) - H(x,y;\lambda)$$

Очевидно, что соответствующее давление определяется по формуле

$$p(x) = p_*(x) - \sum_{k=1}^{3} \int_S p_k(x,y)\,\varphi_k(y)\,d\sigma, \qquad \text{(I.I6)}$$

где $p_*(x)$ определяется формулой (I.I0)

5. Решая краевую задачу (I.I3), получим теперь вместо уравнения (I.I4) уравнение

$$\frac{1}{2}\varphi(x) + \int_S \mathcal{K}(x,y)\,\varphi(y)\,d\sigma = u_0(x) \qquad \text{(I.I7)}$$

Докажем, что уравнение $(I.I7)_0$ имеет лишь тривиальные решения. С этой целью изучим уравнение $(I.I7)^*$.

В области T рассмотрим систему (I.I) и введем для нее потенциал простого слоя

$$v(x) = \int_S \psi(y)\,H(y,x)\,d\sigma, \qquad \text{(I.I8)}$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ - плотность потенциала. Соответствующее давление представляется формулой

$$p(x) = -\int_S \sum_{i=1}^{3} \psi_i(y)\,p_i(y,x)\,d\sigma \qquad \text{(I.I9)}$$

Поле единичных нормалей $n(x)$, заданное на S, продолжим на некоторую окрестность S так, чтобы результирующее поле было полем класса C^1. Эту конструкцию всегда можно осуществить, если $S \in C^{2+\delta}$, $\delta > 0$, что мы

и будем предполагать. Если v, p - решение системы $(I.1)_0^*$, определенное в T, то положим

$$\tilde{T}_{ij}[v,p] = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - 2\lambda\delta_{ij}p + \lambda\delta_{j1}v_i .$$

Отметим, что $\tilde{T}_{ij}$ отличается от тензора напряжений T_{ij} лишь слагаемым $\lambda\delta_{j1}v_i$ и несущественным множителем. В окрестности S рассмотрим вектор $\tilde{\mathcal{I}}(x)$ с компонентами

$$\tilde{\mathcal{I}}_i(x) = \sum_{j=1}^{3} \tilde{T}_{ij}[v,p]\, n_j(x), \quad i = 1,2,3.$$

В области T для системы $(I.1)_0^*$ изучим краевую задачу

$$\left[\tilde{\mathcal{I}}_-(x) - v_-(x)\right]\Big|_S = v_0(x), \qquad (I.20)$$

где знак минус означает, что берется предельное значение извне $\mathcal{B}$, т.е. изнутри T. Решение этой задачи будем искать в виде потенциала (I.I8), (I.I9). Если в формулу, определяющую вектор $\tilde{\mathcal{I}}(x)$ подставить (I.I8), (I.I9), то получим

$$\tilde{\mathcal{I}}(x) = \int_S \psi(y)\,\mathcal{K}(y,x)\,d\sigma, \quad x \notin S$$

Если в ядре $\mathcal{K}(y,x)$ вместо компонент вектора $n(x)$ подставим соответственно компоненты $n(y)$, то в итоге получим ядро $\mathcal{K}_0(y,x)$; ясно, что

$$\mathcal{K}(y,x) = \mathcal{K}_0(y,x) + L(y,x),$$

где $L(y,x) = O(r^{-1})$. Учитывая соотношение (I.I2) и вытекающий из него факт, что главный член $\mathcal{K}_{ij}$ симметричен по i,j и нечетен как функция $x-y$, мы из (I.II) получим формулы скачка

$$\tilde{\mathcal{I}}_\pm(x) = \mp\frac{1}{2}\psi(x) + \tilde{\mathcal{I}}(x)\Big|_S \qquad (I.2I)$$

Поэтому краевая задача (I.20) приводит к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2}\psi(x) + \int_S \psi(y)\,\mathcal{K}(y,x)\,d\sigma = v_0(x) \qquad (I.I4)^*$$

Допустим, что уравнение $(I.I4)_0^*$ имеет нетривиальное решение $\psi(x)$. Тогда $\psi(x) \in C^2[S]$ поскольку пятое итерированное ядро дважды непрерывно дифференцируемо. Пусть v, p - решение уравнения $(I.I)_0^*$, определяемое формулами (I.I8), (I.I9) с данным потенциалом. В силу результатов Одквиста $v \in C^2(T)$, а $p \in C^1(T)$. Рассмотрим в T тождество

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_i T_{ij}[v,p]\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2. \qquad (I.22)$$

Учитывая сказанное, это тождество можно проинтегрировать по области T; таким образом получим

$$-\int_S v_-(x)\,\tilde{\mathcal{I}}_-(x)\,d\sigma = \frac{1}{2}\int_T \sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 dx$$

Воспользовавшись граничным условием (I.20), придем к соотношению

$$\frac{1}{2}\int_T \sum \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_S v^2 d\sigma = 0 .$$

Таким образом

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}=0, \quad i,j=1,2,3, \quad x\in T$$

и $v|_S = 0$. Но тогда $v = C + Ax$, где C - некоторый вектор, а A - антисимметричная матрица; соотношение $v|_S = 0$ влечет $v = 0$ при $x \in T$, и $p = const$. Поскольку $I_-(x) = 0$, то $p|_S = 0$, т.е. $p(x)\equiv 0$ при $x \in \overline{T}$.

Формулы (I.I8), (I.I9) определяют в $\mathcal{B}$ решение системы $(I.I)^*_0$. Поскольку v непрерывна при переходе через S, то $v_+|_S = 0$. Заметим, что в $\mathcal{B}$ также имеет место тождество (I.22). Проинтегрировав его по области $\mathcal{B}_R = \mathcal{B} \cap \{x : |x| \le R\}$ и учтя соотношение $v_+|_S = 0$ и легко проверяемые оценки

$$v(x),\ I(x) = O\left(|x|^{-1}(|x|+x_1+1)^{-1}\right)$$

получим после перехода к пределу при $R \to \infty$

$$\int_{\mathcal{B}} \sum \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0$$

Отсюда $v \equiv 0$, а используя уравнения (I.I) и тот факт, что $p \to 0$ при $|x| \to \infty$, получим $p(x) \equiv 0$. Поэтому $I(x) \equiv 0$, и из формул скачка (I.2I) выходит $\psi \equiv 0$.

Итак уравнение $(I.I7)_0$ имеет только тривиальное решение и, стало быть, краевая задача (I.I3) разрешима при любой правой части $u_0(x)$.

6. Используя результаты предыдущего пункта, имеем следующее предложение

Предложение I. Функция $\varphi(x,\lambda)$, решение уравнения (I.I7), есть аналитическая функция λ, если $0 \le \lambda < \infty$.

Из результатов Одквиста выходит

Предложение 2. Решение краевой задачи (I.I3) существует при любой правой части $u_0(x)$, если $u_0(x) \in C[S]$; решение аналитично в любой внутренней точке $\mathcal{B}$ и $u \in C[\mathcal{B} \cup S]$. Если $u_0 \in C^2[S]$, то $u \in C^2[\mathcal{B} \cup S]$, $p \in C^1[\mathcal{B} \cup S]$.

7. Рассмотрим вопрос о построении функции Грина системы (I.I) для задачи (I.I3).

Обозначим через $V_{ij}(x,y)$, $i,j = 1,2,3$ решение задачи (I.I3) в том случае, когда

$$V_{ij}(x,y)\big|_S = -H_{ij}(x,y)\big|_S, \quad j = 1,2,3,$$

причем $V_{ij}(x,y)$ и $H_{ij}(x,y)$ рассматриваются как функции x, а y рассматривается как параметр. Положим

$$G_{ij}(x,y) = H_{ij}(x,y) + V_{ij}(x,y), \quad j=1,2,3. \qquad \text{(I.23)}$$

"Давление", отвечающее "скорости" (V_{i1}, V_{i2}, V_{i3}), обозначим через $Q_i(x,y)$, а "давление", отвечающее G_{ij}, $j=1,2,3$, будет

$$R_i(x,y) = p_i(x,y) + Q_i(x,y), \quad i=1,2,3 \qquad \text{(I.24)}$$

Формулы (I.23), (I.24) полностью определяют матрицу Грина и вектор "давлений" R системы $(I.I)_0$ в случае задачи Дирихле (I.I3).

Принимая во внимание результаты пункта 5 и соответствующие результаты Одквиста [5] для системы Стокса, получим следующее предложение.

Предложение 3. Пусть $S \subset C^{2+\delta}$, $\delta > 0$. Матрица Грина $G(x,y)$ и вектор $\lambda R(x,y)$ - аналитические функции λ на любом промежутке $0 \le \lambda \le \lambda_0 < \infty$, если $x \neq y$, $x, y \in \mathcal{B}$. Равномерно по λ при $0 \le \lambda \le \lambda_0$, если x, x^1, y принадлежат некоторой окрестности S, выполняются неравенства

$$|G(x,y)| \le C|x-y|^{-1}, \ |\frac{\partial}{\partial x_k} G(x,y)|, \ |\lambda R(x,y)| \le C|x-y|^{-2}, \quad k=1,2,3, \qquad \text{(I.25)}$$

а также неравенства

$$\left|\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x_k \partial x_\ell}\right|, \ \left|\lambda \frac{\partial}{\partial x_k} R(x,y)\right| \le C|x-y|^{-3}, \quad k,\ell = 1,2,3. \qquad \text{(I.26)}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_\ell} G(x^1,y) - \frac{\partial}{\partial x_\ell} G(x,y)\right| \le C|x^1-x|\ln^2|x^1-x|\left[|x^1-y|^{-3} + |x-y|^{-3}\right]. \qquad \text{(I.27)}$$

§ 2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА.

I. Рассмотрим задачу обтекания тела стационарным потоком вязкой жидкости. Полагая $u = u_\infty + v$, $v|_S = u_0 - u_\infty = v_0$, мы получим систему

$$\Delta v - 2\lambda (u_\infty \cdot \nabla) v - 2\lambda \operatorname{grad} p = \varepsilon \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v}{\partial x_k}, \ \operatorname{div} v = 0, \qquad \text{(2.I)}$$

где $\varepsilon = 2\lambda$, и для нее краевую задачу

$$v|_S = v_0, \quad \lim_{|x| \to \infty} v(x) = 0 \qquad \text{(2.2)}$$

Отвлечемся на минуту от того, что $\varepsilon = 2\lambda$, и будем считать ε произвольным малым параметром. Тогда решение краевой задачи (2.I), (2.2) можно искать в виде рядов

$$v(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^\ell v^\ell(x,\lambda), \ p(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^\ell p^\ell(x,\lambda). \qquad \text{(2.3)}$$

Подставляя это решение в (2.I) и в (2.2), получим, что $v^0(x,\lambda)$

$v^0(x,\lambda)$ есть решение краевой задачи (2.2) для системы Озеена, а v^l, p^l, $l \geq 1$ – решение неоднородной системы Озеена (I.I) с

$$f(x) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=0}^{l-1} v_k^j \frac{\partial v^{l-1-j}}{\partial x_k}$$

и однородными краевыми условиями. Таким образом

$$v^l(x,\lambda) = \int_{\mathcal{B}} G(x,y) \sum_{k=1,j=0}^{3,l-1} v_k^j \frac{\partial v^{l-1-j}}{\partial y_k}\, dy, \qquad (2.4)$$

$$p^l(x,\lambda) = \int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1,k=1,j=0}^{3,3,l-1} R_i(x,y) v_k^j \frac{\partial v_i^{l-1-j}}{\partial y_k}\, dy. \qquad (2.4)'$$

Если теперь в (2.3) положить $\varepsilon = 2\lambda$, то мы получим решение задачи обтекания в виде

$$u(x) = u_\infty + \sum_{l=0}^{\infty} (2\lambda)^l v^l(x,\lambda), \quad p(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (2\lambda)^l p^l(x,\lambda), \qquad (2.5)$$

при условии сходимости рядов. К обоснованию сходимости мы и перейдем ниже. Для удобства опустим аргумент λ функций v^l и p^l.

2. Приведем некоторые вспомогательные оценки для фундаментального решения и функции Грина.

Легко проверяется неравенство

$$|H(x,y)| \leq C\lambda\, \psi_1(\lambda(x-y)) \qquad (2.6)$$

где $\psi_1(x) = \psi_\alpha(x)|_{\alpha=1}$, $\psi_\alpha(x) = |x|^{-1}(s+1)^{-\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$; константа C не зависит от x, y и λ; посредством $|H|$ обозначена какая-либо норма матрицы H.

Пусть $\mathcal{D}_x = \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \nu_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$, где ν_j вещественны и $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$; введем вспомогательную функцию

$$\psi(x) = [|x|(s+1)]^{-3/2} + |x|^{-2}(s+1)^{-1},$$

где $S = S(x)$. Нетрудно проверить, что

$$|\mathcal{D}_x H(x,y)| \leq C\lambda^2 \psi[\lambda(x-y)], |\mathcal{D}_y H(x,y)| \leq C\lambda^2 \psi[\lambda(x-y)] \qquad (2.7)$$

Из предложения 3 и неравенств (2.6), (2.7) выходит неравенство

$$|\mathcal{D}_y G(x,y)| \leq C\lambda^2 \psi[\lambda(x-y)] + C\lambda^3 \psi_1(\lambda x)\psi(-\lambda y) \qquad (2.8)$$

Замечание I. Аналогичным образом получается и следующая оценка

$$|\mathcal{D}_x G(x,y)| \leq C\lambda^2 \psi[\lambda(x-y)] + C\lambda^3 \psi(\lambda x)\, \psi_1(-\lambda y)$$

Предложение 4. Пусть $\frac{1}{2} \le \gamma < 1$. Имеет место неравенство

$$\int_{\mathcal{B}} \sup_{y} |D_y G(x,y)| |y|^{-2} (\lambda s(y)+1)^{-\gamma} dy \le A_0 \lambda \psi_\alpha(\lambda x),$$

где $0 < \alpha < 1$, причем α можно взять сколь угодно близким к 1 ; константа A_0 не зависит от λ .

Доказательство. Обозначив последний интеграл через I , по неравенству (2.8) имеем

$$I \le C\lambda^2 \int_{\mathcal{B}} \psi[\lambda(x-y)] |y|^{-2} (\lambda s(y)+1)^{-\gamma} dy + C_1 \lambda \psi_1(\lambda x).$$

Делая замену переменных под знаком интеграла и полагая $\lambda x = \xi$, получим

$$\lambda^2 \int_{D} \psi[\lambda(x-y)] |y|^{-2} (\lambda s(y)+1)^{-\gamma} dy \le \lambda \int_{R^3} \psi(\xi - y) |y|^{-2} (s+1)^{-\gamma} dy.$$

Обозначим через I_1 интеграл в правой части последнего неравенства. Если $|\xi| \le 1$, то

$$I_1 \le C_2 |\xi|^{-1} \le 3^\alpha C_2 |\xi|^{-1} (s(\xi)+1)^{-\alpha} = 3^\alpha C_2 \lambda^{-1} |x|^{-1} (\lambda s(x)+1)^{-\alpha}.$$

При $|\xi| \ge 1$ для оценки интеграла I применим Предложение 2 работы К.И. Бабенко, М.М. Васильева [7] . Прежде всего заметим, что $\psi(x) \le C |x|^{-3/2} (s+1)^{-3/2}$, и

поэтому в предложении 2 можно положить $\beta = 2$, $\delta = \frac{3}{2}$, $\varepsilon = \frac{3}{2}$; возьмем $h > 0$ и достаточно малым. Тогда $\tau_h = \frac{1}{2} - h$, и мы получим при $\gamma < 1$

$$I_1 \le C_3 \left\{ |\xi|^{-1-\frac{\gamma}{2}} (s(\xi)+1)^{-\frac{\gamma+1}{2}} + |\xi|^{-\frac{3}{2}} (s(\xi)+1)^{-(\frac{1}{2}-h)} \right\}$$

Так как $\gamma \ge \frac{1}{2}$ и h – мало, то

$$I_1 \le C_4 |\xi|^{-1} (s(\xi)+1)^{-q} = C_4 \lambda^{-1} |x|^{-1} (\lambda s(x)+1)^{-\alpha}$$

Из установленных неравенств вытекает утверждение предложения.

Замечание 2. Если допускать значения $\gamma < \frac{1}{2}$, то мы получим более слабый результат. При $\gamma = 0$ можно взять $\alpha = \frac{1}{2}$, что дает обобщение теоремы Финна [6] .

3. Оценим функции $v^\ell(x)$. Интегрируя по частям в интеграле (2.4), получим

$$v^\ell(x) = -\int_{\mathcal{B}} \sum_{k=1,j=0}^{3,\ell-1} v_\kappa^j \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_\kappa} v^{\ell-1-j} dy ,$$

откуда

$$|v^\ell(x)| \le \int_{\mathcal{B}} \sup_{y} |D_y G(x,y)| \sum_{j=0}^{\ell-1} |v^j| |v^{\ell-1-j}| \, dy ,$$

причем берется сферическая норма матрицы. Допустим, что

$$\sup_{x\in\mathcal{B}} \frac{|v^j(x)|}{\lambda\psi_\alpha(\lambda x)} = B_j < \infty$$

при $j = 0, 1, \dots, \ell-1$. Тогда по предложению 4

$$|v^\ell(x)| \le A_0 \sum_{j=0}^{\ell-1} B_j B_{\ell-1-j}\, \lambda\psi_\alpha(\lambda x),$$

и мы можем положить

$$B_\ell = A_0 \sum_{j=0}^{\ell-1} B_j B_{\ell-1-j}$$

Таким образом $B_\ell < \infty$, при $\ell \ge 1$, коль скоро $B_0 < \infty$. Но последнее неравенство очевидно, так как $v^0(x)$ - решение системы Озеена. Следуя Финну, положим $\varphi(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \varepsilon^j$ и тогда получим, что $\varphi(\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению $\varphi = B_0 + A_0 \varepsilon \varphi^2$, откуда

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2A_0\varepsilon}\left(1-\sqrt{1-4A_0B_0\varepsilon}\right),\quad B_\ell = (-1)^\ell\binom{\frac12}{\ell+1}2B_0(4B_0A_0)^\ell,\quad \ell = 0,1,2,\dots \qquad (2.9)$$

4. Оценим производные $v^\ell(x)$. Пусть $\psi_2(x) = |x|^{-3/2}(s+1)^{-\alpha_1} + |x|^{-2}(s+1)^{-\alpha_1+1/2}$, $0<\alpha_1<1$, причем α_1 может сколь угодно мало отличаться от единицы.

Предложение 5. Имеет место оценка

$$\lambda^3 \int_{\mathcal{B}} \sup_{\gamma} |D_x G(x,y)|\psi_2(\lambda y)\psi_\alpha(\lambda y)\,dy \le A_1\lambda^2\psi_2(\lambda x)\ln\frac{1}{\lambda} \qquad (2.10)$$

Доказательство. Аналогично тому, как было установлено неравенство (2.8), доказывается и неравенство

$$|D_x G(x,y)| \le C\lambda^2\psi[\lambda(x-y)] + C\lambda^3\psi(\lambda x)\psi_1(-\lambda y).$$

Обозначим через I левую часть неравенства (2.10); понятно, что

$$I \le C\lambda^5 \int_{\mathcal{B}} \psi[\lambda(x-y)]\psi_2(\lambda y)\psi_\alpha(\lambda y)\,dy + C_1\lambda^2\psi(\lambda x)$$

Таким образом достаточно оценить последний интеграл в правой части; обозначим произведение этого интеграла на λ^5 через I_1 . Ясно, что

$$I_1 = \lambda^2 \int_{\mathcal{B}_\lambda} \psi(\xi-y)\,\psi_2(y)\psi_\alpha(y)\,dy,$$

где $\xi = \lambda x$, а $\mathcal{B}_\lambda$ - образ $\mathcal{B}$ при гомотетии $x \to \lambda x$. Пусть $|\xi| \gg 1$; ясно, что

$$I_1 \le \lambda^2 \int_{\mathcal{B}_\lambda\cap U} \psi(\xi-y)\,\psi_2(y)\psi_\alpha(y)\,dy + C\lambda^2 \int_{|y|\ge 1} \psi(\xi-y)|y|^{-\frac{\xi}{2}}(s(y)+1)^{-\alpha+\alpha_1}\,dy, \qquad (2.11)$$

где $U = \{\, y : |y| \le 1 \,\}$. Легко видеть, что при $|y| \le 1$

$$\psi(\xi-y) = \psi(\xi)\left[1 + O\left(\frac{|y|}{|\xi|} + |y|^{\alpha_1}\right)\right].$$

Таким образом

$$\lambda^2 \int\limits_{\mathcal{B}_\lambda \cap T} \psi(\xi-y)\psi_2(y)\psi_\alpha(y)\,dy \le C\psi(\xi)\lambda^2 \ln\frac{1}{\lambda}$$

Оценим второй интеграл в (2.II). Пусть $\Psi(x)=|x|^{-3/2}(s+1)^{-3/2}$. Ясно, что

$$\lambda^2 \int\limits_{|y|\ge 1} \psi(\xi-y)|y|^{-\frac{\varepsilon}{2}}(s(y)+1)^{-\alpha-\alpha_1}dy \le C_1\lambda^2|\xi|^{-\frac{\varepsilon}{2}}(s(\xi)+1)^{-\alpha-\alpha_1} + C_2\lambda^2\int\limits_{|y|\ge 1}\Psi(\xi-y)|y|^{-\frac{\varepsilon}{2}}(s(y)+1)^{-\alpha-\alpha_1}dy$$

Последний интеграл справа обозначим через I_2; для его оценки применим Предложение 3 работы [7]. В данном случае $\beta=\frac{\varepsilon}{2}$, $\delta=\frac{3}{2}$, $\varepsilon=\frac{3}{2}$, $\beta_0=0$; если это необходимо, можно уменьшить α так, чтобы $\gamma=\alpha+\alpha_1$ было $<\frac{3}{2}$ и чтобы γ отличалось от $\frac{3}{2}$ сколь угодно мало. Возьмем h достаточно малым и так, чтобы $\frac{1}{2}-h=\alpha_1-\frac{1}{2}$. В итоге получим

$$\Big| I_2 - \Psi(\xi)\int\limits_{|y|\ge 1}|y|^{-\frac{\varepsilon}{2}}(s(y)+1)^{-\gamma}dy \Big| \le C_3\Big[|\xi|^{-2}(s(\xi)+1)^{-\frac{3}{2}} + |\xi|^{-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\alpha+\alpha_1}{2}}(s(\xi)+1)^{-\frac{3}{4}-\frac{\alpha+\alpha_1}{2}} + |\xi|^{-2}(s(\xi)+1)^{-(\alpha_1-\frac{1}{2})}\Big],$$

откуда $I_2 \le C_4\psi_2(\xi)$. Итак

$$I_1 \le C_5\lambda^2\psi_2(\lambda x)\ln\frac{1}{\lambda}.$$

Если же $|\xi| << 1$, то оценка I_1 получается довольно просто. В этом случае второй интеграл в (2.II) будет $O(1)$. Первый интеграл оценивается так

$$\int\limits_{\mathcal{B}_\lambda\cap U}\psi(\xi-y)\psi_2(y)\psi_\alpha(y)dy \le C|\xi|^{-3}\int\limits_{|y-\xi|\le\frac{1}{2}|\xi|}\psi(\xi-y)dy + C|\xi|^{-2}\int\limits_{\mathcal{B}_\lambda\cap U}\psi_2(y)\psi_\alpha(y)dy.$$

Отсюда

$$I_1 \le C_6\lambda^2|\xi|^{-2}\ln\frac{1}{\lambda} \le C_7\lambda^2\psi_2(\lambda x)\ln\frac{1}{\lambda}.$$

Предложение доказано.

5. Дифференцируя (2.4), получим

$$\mathcal{D}v^\ell(x) = \int\limits_{\mathcal{B}}\mathcal{D}_x G(x,y)\sum_{k=1,j=0}^{3,\ell-1} v_k^j\frac{\partial v^{\ell-1-j}}{\partial y_k}dy.$$

Положим

$$w^\ell(x) = \Big(\sum_{k=1}^{3}\Big|\frac{\partial v^\ell}{\partial x_k}\Big|^2\Big)^{1/2}.$$

Легко видеть, что

$$w^{\ell}(x) \le 3 \int_{\mathcal{B}} \sup_{\nu} |\mathcal{D}_x G(x,y)| \sum_{j=0}^{\ell-1} |v^j| w^{\ell-1-j} dy , \quad (2.12)$$

откуда так же, как и выше, получим оценку функции $w^{\ell}(x)$. В самом деле, легко видеть, что

$$\sup_{x \in \mathcal{B}} \frac{w^{\circ}(x)}{\lambda^2 \psi_2(\lambda x)} = \mathcal{L}_0 < \infty .$$

Применяя оценки для $|v^{\ell}(x)|$, неравенство (2.12) и предложение 5, получим оценку

$$\sup_{x \in \mathcal{B}} \frac{w^{\ell}(x)}{\lambda^2 \psi_2(\lambda x)} \le 3 A_1 \mathcal{L}_0 B_0^{\ell} (3A_1 \ln \tfrac{1}{\lambda} + 4A_0)^{\ell-1} \ln \tfrac{1}{\lambda} , \quad \ell \ge 1. \quad (2.13)$$

6. Из оценок (2.9), (2.13) вытекает сходимость рядов (2.5) при условии, что $\lambda < \lambda_*$. Из доказательства ясно, что λ_* зависит лишь от граничных условий $u_0(x)$ и от тела S.

Теорема 1. Если $S \in C^{2+\delta}$, $u_0(x) \in C^2[S]$, то существует такое число Рейнольдса Re_*, что решение задачи обтекания (0.1), (0.2) дается рядами (2.5), сходящимися, коль скоро $Re < Re_*$.

Замечание 3. Пусть $u_0(x)$ фиксировано. Если S входит в компактное семейство поверхностей из класса $C^{2+\delta}$, то нижняя грань по этому компактному семейству $\inf Re_* > 0$.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ЧИСЛЕ РЕЙНОЛЬДСА, ОТЛИЧНОМ ОТ НУЛЯ.

1. Предположим, что нам известно решение задачи обтекания (2.1), (2.2) при некотором числе Рейнольдса $Re_0 = 2\lambda_0$. Рассмотрим процедуру определения решения задачи обтекания при близком числе Рейнольдса с помощью регулярной теории возмущений. Известное решение v°, $q^{\circ} = 2\lambda_0 p^{\circ}$ будем считать удовлетворяющим условию

$$D[v^{\circ}] = \int_{\mathcal{B}} \sum_{k,i} \left(\frac{\partial v_k^{\circ}}{\partial x_i} \right)^2 dx < \infty \quad (3.1)$$

Тогда из теоремы работы [8] и результатов работы автора и М.М. Васильева [7] вытекает, что $v^{\circ}(x)$ имеет следующую асимптотику в бесконечно удаленной точке

$$v^{\circ}(x) = H(x,0) F + O\left(|x|^{-3/2} (s+1)^{-1/2} \ln |x| \right), \quad (3.2)$$

$$\mathcal{D} v^{\circ}(x) = \mathcal{D}_x H(x,0) F + O\left(|x|^{-2} (s+1)^{-1} \ln^4 |x| \right), \quad (3.3)$$

где F - вектор силы, с которой поток действует на тело. Пусть $\lambda = \lambda_0 + h$, h – мало; положим $2\lambda p = q$. Будем искать решение задачи (2.1), (2.2) в виде рядов

$$v(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu} v^{\nu}(x) , \quad q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu} q^{\nu}(x) \quad (3.4)$$

Пока вопрос о сходимости нами не исследован, будем считать эти ряды формальными рядами по степеням параметра h. Полагая в (2.I) $\lambda = \lambda_0 + h$, $2\lambda p = q$ и подставляя (3.4) в (2.I), получим после формального уравнивания членов с одной и той же степенью h

$$\Delta v^\nu - 2\lambda_0 \frac{\partial v^\nu}{\partial x_1} - \operatorname{grad} q^\nu - A(v^\nu) = F_\nu, \quad \operatorname{div} v^\nu = 0, \quad \nu \geq 1, \tag{3.5}$$

где $A(v)$ - дифференциальный оператор

$$A(v) = 2\lambda_0 \sum_{k=1}^{3} \left(v_k^\circ \frac{\partial v}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial v^\circ}{\partial x_k} \right), \tag{3.6}$$

а

$$F_\nu = 2\frac{\partial v^{\nu-1}}{\partial x_1} + 2\lambda_0 \sum_{k=1,i=1}^{3,\nu-1} v_k^i \frac{\partial v^{\nu-i}}{\partial x_k} + 2\sum_{k=1,i=0}^{3,\nu-1} v_k^i \frac{\partial v^{\nu-1-i}}{\partial x_k}. \tag{3.7}$$

Граничные условия для функциии v^ν имеют вид

$$v^\nu|_S = 0, \quad \lim_{|x| \to \infty} v^\nu(x) = 0, \quad \nu = 1,2,\ldots. \tag{3.8}$$

Поэтому

$$v^\nu - \mathcal{G}(v^\nu) = \int_{\mathcal{B}} G(x,y;\lambda_0) F_\nu(y)\,dy, \tag{3.9}$$

где

$$\mathcal{G}(v^\nu) = \int_{\mathcal{B}} G(x,y;\lambda_0) A(v^\nu)\,dy. \tag{3.10}$$

2. Прежде всего изучим оператор $\mathcal{G}$. Для этого нам потребуется несколько вспомогательных фактов. Ниже будем пользоваться следующим обозначением. Если $f : \mathcal{B}_0 \to R^3$, то

$$|f|_{2,\mathcal{B}_0} = \left(\int_{\mathcal{B}_0} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

причем $|f|$ обозначает какую-то норму вектора $f(x)$. Если $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ либо $\mathcal{B}_0 = R^3$, будем просто писать $|f|_2$. Аналогично по определению

$$|\nabla f|_{2,\mathcal{B}_0} = \left(\int_{\mathcal{B}_0} \left(\sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)^2 \right)^{\frac{2}{2}} dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

и $|\nabla f|_2 = |\nabla f|_{2,\mathcal{B}_0}$ в случае, если $\mathcal{B}_0 = R^3$ или $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$. Мы будем часто пользоваться теоремой Соболева об интегрируемости интегралов типа потенциала. Если

$$g(x) = \int_{R^3} \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda}\,dy$$

и $f \in L^2(R^3)$, то $g \in L^\sigma(R^3)$, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{2} - \frac{3-\lambda}{3}$ и

$$|g|_\sigma \leq A_{2,\lambda} |f|_2.$$

Предложение 6. Пусть $\mathcal{D}_x$ - дифференциальный оператор, определенный в пункте 2 §2. Допустим, что $f \in L^r(\mathcal{B})$, $1 < r < 2$, и пусть вектор-функция

$$g(x) = \int_{\mathcal{B}} G(x, y) f(y) dy .$$

Тогда $\mathcal{D} g(x) \in L^\sigma(\mathcal{B})$, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{r} - \frac{1}{4}$ и

$$|\mathcal{D}_x g|_\sigma < A_r(S, \lambda) |f|_r , \tag{3.II}$$

где константа A_r зависит от S, λ и r, причем при любом $\lambda < \infty$, $A_r(S, \lambda) < \infty$. Если $\mathcal{D}_x = \frac{\partial}{\partial x_1}$, то $\mathcal{D} g \in L^r(\mathcal{B})$, $1 < r < 2$, и

$$|\mathcal{D}_x g|_r < B_r(S, \lambda) |f|_r . \tag{3.I2}$$

Доказательство будет основываться на предложении I работы [8], которое для удобства читателя приведем с некоторым добавлением

Предложение 7. Пусть

$$h_{kem}(\varphi; x) = \int_{R^3} \frac{\partial}{\partial x_m} H_{ke}(x, y; \lambda) \varphi(y) dy ;$$

h_{kem} - оператор из L^r в L^σ, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{r} - \frac{1}{4}$, $r < 4$, причем

$$|h_{kem}(\varphi; x)| \leq A_r(\lambda) |\varphi|_r$$

При $m = 1$ сверх этого, h_{kem} - оператор из L^r в L^r, причем

$$|h_{ke1}(\varphi; x)|_r \leq B_r(\lambda) |\varphi|_r .$$

Доказательство предложения 6. Разобьем область $\mathcal{B}$ на две части $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cap \{ x : |x| \leq 2 \}$. Положим

$$g_j(x) = \int_{\mathcal{B}_j} G(x, y; \lambda) f(y) dy , \quad j = 1, 2$$

Если $x \in \mathcal{B}_1$, то по предложению 3

$$|\mathcal{D} g_1(x)| \leq C \int_{\mathcal{B}_1} |x - y|^{-2} |f(y)| dy$$

По теореме Соболева $\mathcal{D} g_1 \in L^{\sigma_*}$, $\sigma_* = \frac{3r}{3 - r}$, и поэтому

$$|\mathcal{D} g_1|_{\sigma, \mathcal{B}_1} \leq C_1 |f|_{r, \mathcal{B}_1} \tag{3.I3}$$

Поскольку $G = H + V$, то в соответствии с этим разложением разложим функции g_j в сумму $g_j = g_{j1} + g_{j2}$. Если $x \in \mathcal{B}_2$, $y \in \mathcal{B}_1$ либо $x \in \mathcal{B}$, $y \in \mathcal{B}_2$, то

$$|\mathcal{D}_x V(x, y; \lambda)| \leq C_1 \psi(x) \psi_1(-y) \tag{3.I4}$$

и поэтому при $\sigma > \frac{4}{3}$

$$|\mathcal{D}_x g_{12}|_{\sigma,\mathcal{B}_2} \le C_2 \int_{\mathcal{B}_1} \psi_1(-y)|f(y)|\,dy. \qquad (3.15)$$

Аналогичным образом

$$|\mathcal{D}_x g_{22}|_\sigma \le C_3 \int_{\mathcal{B}_2} \psi_1(-y)|f(y)|\,dy \qquad (3.16)$$

По неравенству Гёльдера при $\tau < 2$

$$\int_{\mathcal{B}} \psi_1(-y)|f(y)|\,dy \le C_4 |f|_\tau. \qquad (3.17)$$

Учитывая предложение 7 и установленные промежуточные неравенства, получим неравенство (3.11). Для доказательства (3.12) заметим, что в неравенстве (3.13) вместо σ можно взять меньшее количество τ; учтем еще, что вместо неравенства (3.14) в данном случае получим неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1} V(x,y;\lambda)\right| \le C_5 |x|^{-2}(s+1)^{-1}\psi_1(-y).$$

Поэтому для $\frac{\partial}{\partial x_1} g_{12}$, $\frac{\partial}{\partial x_1} g_{22}$ можно вместо σ взять τ. Применяя предложение 7 и промежуточные неравенства, получим неравенство (3.12).

3. Предложение 8. Допустим, что $f \in L^\tau(\mathcal{B}) \cap L^{\tau_1}(\mathcal{B})$, $2<\tau<3$, $\tau_1 = \frac{6\tau}{6+\tau}$. Тогда $\mathcal{D}_x g \in L^\sigma(\mathcal{B})$,

$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{3}$ и

$$|\mathcal{D}_x g|_\sigma < A_{\tau,\tau_1}(S,\lambda)\left[|f|_\tau + |f|_{\tau_1}\right] \qquad (3.18)$$

Если $\tau > 3$, $\tau_1 < 2$, то

$$|\mathcal{D}_x g|_\infty < A_{\tau,\tau_1}(S,\lambda)\left[|f|_\tau + |f|_{\tau_1}\right]. \qquad (3.19)$$

Доказательство. Произведем те же построения, что и при доказательстве предложения 6. Тогда, как и выше, $|\mathcal{D} g_1|_{\sigma,\mathcal{B}_1} \le C_2 |f|_{\tau,\mathcal{B}_1}$. Неравенства (3.15) и (3.16) останутся в силе и для данного значения σ. В неравенстве (3.17) возьмем $\tau = \tau_1$. Остается заметить, что $|\mathcal{D} H(x-y)| \le C\left[|x-y|^{-2} + |x-y|^{-3/2}\right]$, и поэтому

$$|\mathcal{D} g_{11}(x)| + |\mathcal{D} g_{21}(x)| \le \int_{\mathcal{B}} \left[|x-y|^{-2} + |x-y|^{-\frac{3}{2}}\right]|f(y)|\,dy, \quad x \in \mathcal{B}_2$$

Представляя интеграл справа в виде суммы двух интегралов и применяя к каждому из них теорему Соболева с показателями τ и τ_1, соответственно, получим

$$|\mathcal{D} g_{11}(x)|_\sigma + |\mathcal{D} g_{21}(x)|_\sigma \le C\left[|f|_\tau + |f|_{\tau_1}\right]$$

Суммируя эти неравенства, получим неравенство (3.18). Если $\tau > 3$, то в приведенных неравенствах можно всюду взять

$\sigma = \infty$, что в итоге приводит к (3.19).

4. Рассмотрим вопрос о гладкости функции $\mathcal{D}_x g$. Пусть ω - произвольный вектор; через $\Delta_\omega \varphi(x)$ будем обозначать первую разность какой-либо функции $\Delta_\omega \varphi(x) = \varphi(x+\omega) - \varphi(x)$. Условимся еще через $\mathcal{B}_*$ обозначать область, получающуюся из области $\mathcal{B}$ удалением малой окрестности многообразия S . Ниже $|\omega|$ будем брать столь малым, чтобы $x + \omega \in \mathcal{B}$, коль скоро $x \in \mathcal{B}_*$.

Предложение 9. Пусть $0 < \alpha < 1$. Допустим, что $f \in L^\tau(\mathcal{B}) \cap L^{\tau_1}(\mathcal{B})$, $\frac{3}{3-\alpha} < \tau < \frac{3}{1-\alpha}$, $\tau_1 = \frac{3\tau}{3+\tau\alpha} < 2$. Тогда

$$|\Delta_\omega g(x)|_{\sigma, \mathcal{B}_*} < C_{\tau,\alpha} [|f|_\tau + |f|_{\tau_1}] (|\omega| \ln^2 |\omega|)^\alpha ,$$

где $\sigma = \frac{3\tau}{3 - \tau(1-\alpha)}$. Если $\tau > \frac{3}{1-\alpha}$, $\tau_1 < 2$, то

$$|\Delta_\omega g(x)|_\infty < C_{\tau,\tau_1} [|f|_\tau + |f|_{\tau_1}] (|\omega| \ln^2 |\omega|)^\alpha$$

Доказательство. Комбинируя оценки (I.25) и (I.27), получим неравенство

$$|\Delta_\omega \mathcal{D}_x^k (x,y)| \leq C (|\omega| \ln^2 |\omega|)^\alpha \left[|x^1 - y|^{-2-\alpha} + |x - y|^{-2-\alpha} \right],$$

когда $x, x^1, y \in \mathcal{B}_1$, $x^1 = x + \omega$. Если x, $x^1 \in \mathcal{B}_2$, $y \in \mathcal{B}_2$, то, используя оценки фундаментального решения, с помощью простых выкладок получим

$$|\Delta_\omega \mathcal{D}_x \mathcal{K}(x,y)| < C |\omega|^\alpha \left[|x^1 - y|^{-2-\alpha} + |x - y|^{-2-\alpha} + |x - y|^{-2} \right].$$

Наконец, при $y \in \mathcal{B}_2$, $x, x^1 \in \mathcal{B}$, аналогично тому, как было доказано неравенство (2.8), получим

$$|\Delta_\omega \mathcal{D}_x \mathcal{K}(x,y)| \leq C |\omega|^\alpha \left[|x^1 - y|^{-2-\alpha} + |x - y|^{-2-\alpha} + |x - y|^{-2} + |x|^{-2} \psi_1(-y) \right].$$

Загрубляя это неравенство, вводя вместо $|\omega|^\alpha$ множитель $(|\omega| \ln^2 |\omega|)^\alpha$, получим неравенство, годное во всех случаях. Таким образом

$$|\Delta_\omega \mathcal{D}_x g(x)| \leq C (|\omega| \ln^2 |\omega|)^\alpha \left[J_{2+\alpha}(x^1) + J_{2+\alpha}(x) + J_2(x) + |x|^{-2} \int_{\mathcal{B}} |f(y)| \psi_1(-y)\, dy \right].$$

Если $\tau < \frac{3}{1-\alpha}$, то по теореме Соболева первые три интеграла принадлежат L^σ . Последний интеграл легко оценивается с помощью неравенства Гёльдера

$$\int_{\mathcal{B}} |f(y)| \psi_1(-y)\, dy \leq |f|_{\tau_1} |\psi_1|_{\frac{\tau_1}{\tau_1 - 1}}$$

и поскольку $\sigma > \frac{3}{2}$, то последнее слагаемое принадлежит $L^\sigma(\mathcal{B})$. Если же $\tau > \frac{3}{1-\alpha}$, то оценка получается применением неравенства Гёльдера.

5. В области $\mathcal{B}$ рассмотрим совокупность $C_0^1(\mathcal{B})$ - вектор-функций, обращающихся в нуль на S и при достаточно большом $|x|$. Замкнем $C_0^1(\mathcal{B})$ в метрике интеграла Дирихле

$$\|u\|^2 = \int_{\mathcal{B}} \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx .$$

В результате получим соболевское пространство $\dot{W}_2^1(\mathcal{B})$. Ясно, что $\dot{W}_2^1(\mathcal{B})$ - гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v) = \int_{\mathcal{B}} \sum_{j=1}^{3}{}' \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx .$$

Заметим, что если $u \in C_0^1(\mathcal{B})$, то

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{B}} \sum \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dy . \qquad (3.20)$$

Понятно, что соотношение (3.20) останется в силе и для произвольного элемента $u \in \dot{W}_2^1(\mathcal{B})$. Из (3.20) по неравенству Соболева выходит

$$|u|_{\frac{3s}{3-s}} \le K_s |\nabla u|_s , \qquad (3.21)$$

где K_s - постоянная, зависящая лишь от s, $s<3$. Если $\nabla u \in L^s \cap L^{s_1}$, $s_1 < 3 < s$, то

$$|u|_\infty \le K_{s,s_1}\left(|\nabla u|_s + |\nabla u|_{s_1}\right) \qquad (3.21)'$$

6. Рассмотрим оператор $\mathcal{G}(v)$ на $\dot{W}_2^1(\mathcal{B})$. Вначале установим одно вспомогательное предложение

Предложение 10. Если $1 < s < 3$, $\tau > \min\left(\frac{12s}{12+5s}, 1\right)$, то

$$|\mathcal{G}(v)|_\tau \le 2\lambda_0 |\nabla v|_s \left[|v^0|_\beta + K_s |\nabla v^0|_\gamma\right], \qquad (3.22)$$

где $\beta = \frac{s\tau}{s-\tau}$, $\gamma = \frac{3s\tau}{3s-(3-s)\tau}$.

Доказательство. Ясно, что

$$|\mathcal{A}(v)| \le 2\lambda_0 \left(|v^0||\nabla v| + |v||\nabla v^0|\right)$$

Применяя неравенство треугольника, получим

$$|\mathcal{A}(v)|_\tau \le 2\lambda_0 \left\{\left(\int_{\mathcal{B}} (|v^0||\nabla v|)^\tau dx\right)^{\frac{1}{\tau}} + \left(\int_{\mathcal{B}} (|\nabla v^0||v|)^\tau dx\right)^{\frac{1}{\tau}}\right\}$$

К обоим интегралам в правой части применим неравенство Гёльдера; в первом интеграле показатели σ, σ_1, $\sigma^{-1} + \sigma_1^{-1} = 1$, берем, соответственно, $\sigma = \frac{s}{s-\tau}$, $\sigma_1 = \frac{s}{\tau}$, а во втором $\sigma = \frac{3s}{(3+\tau)s-3\tau}$, $\sigma_1 = \frac{3s}{\tau(3-s)}$. Затем, пользуясь неравенством (3.21), получим (3.22). Полагая $s = 2$, $\tau = \frac{4}{3}$ и используя предложение 6, получим, что $\mathcal{G}$ - ограниченный оператор на $\dot{W}_2^1(\mathcal{B})$.

Предложение 11. Оператор $\mathcal{G} : \dot{W}_2^1(\mathcal{B}) \to \dot{W}_2^1(\mathcal{B})$ - компактный.

Доказательство. Разобьем область $\mathcal{B}$ на части $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, где $\mathcal{B}_0$ - пересечение $\mathcal{B}$ с δ-ок-

рестностью S, а $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \cap \{x : |x| \geq R\}$. Положим

$$u_j(x) = \int_{\mathcal{B}_j} G(x, y; \lambda_0) A(v)\, dy$$

Неравенство (3.22) остается в силе, если его применить не к области $\mathcal{B}$, а к любой области $\mathcal{B}_j$. Поэтому

$$\|u_j\| < A_{4/3}(S, \lambda_0) 2\lambda_0 \|v\| \left[|v^\circ|_{4, \mathcal{B}_j} + K_2 |\nabla v^\circ|_{\frac{12}{7}, \mathcal{B}_j} \right]$$

Поскольку $v^\circ \in L^6(\mathcal{B})$, $\nabla v^\circ \in L^2(\mathcal{B})$, а при $|x| \to \infty$ выполнены соотношения (3.2) и (3.3), то при достаточно малом δ и $\frac{1}{R}$

$$\|u_0\| + \|u_3\| \leq \varepsilon \|v\|, \tag{3.23}$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Ниже будем считать, что $v \in \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ – произвольное множество такое, что $\mathcal{V} \subset \{u : u \in \dot{W}_2^1(\mathcal{B}), \|u\| \leq 1\}$. Покажем, что существует конечная 3ε – сеть для множества $\mathcal{G}(\mathcal{V})$. Условимся положение точки x относительно S характеризовать расстоянием δ_x от x до S, измеряемым по нормали к S, проходящей через точку x. В окрестности S построим функцию $\varphi \in C^2$ так, чтобы выполнялись условия: 1) $\varphi(x) = 0$, если $\delta_x \leq \frac{1}{2}\delta_0$; 2) $\varphi(x) \equiv 1$, если $\delta_x \geq \delta_0$ и 3) $0 \leq \varphi \leq 1$. Поскольку весь рост φ происходит в слое толщиной $\frac{1}{2}\delta_0$, то $grad\, \varphi = O(\delta_0^{-1})$ и, загрубляя это неравенство, получим $grad\, \varphi = O(\delta_x^{-1})$. Так как $u_2(x)|_S = 0$, то по известному неравенству

$$\int_{\delta_x \leq \delta_0} |grad\, \varphi(x)|^2 |u_2(x)|^2 dx \leq C \int_{\delta_x \leq \delta_0} \left| \frac{u_2(x)}{\delta_x} \right|^2 dx \leq \tag{3.24}$$

$$\leq C_0 \int_{\delta_x \leq \delta_0} |\nabla u_2(x)|^2 dx,$$

где C_0 зависит лишь от максимума кривизны поверхности. Продолжим $\varphi(x)$ единицей на все $\mathcal{B}_1$ и потребуем, чтобы: 1) $\varphi(x) \equiv 0$ при $|x| \geq 2R_1$; 2) $\varphi(x) \equiv 1$, если $|x| \leq R_1$ и $\delta_x \geq \delta_0$; и 3) $0 \leq \varphi \leq 1$. Поскольку при $R_1 \leq |x| \leq 2R_1$, $grad\, \varphi = O(R_1^{-1})$ и $u_2(x) = O(|x|^{-1})$ при $|x| \to \infty$, то

$$\int_{R_1 \leq |x| \leq 2R_1} |grad\, \varphi(x)|^2 |u_2(x)|^2 dx \leq C_1 R_1^{-1} \tag{3.25}$$

Положив $w(x) = \varphi(x) u_2(x)$, оценим расстояние от u_2 до w. Ясно, что

$$\|u_2 - w\| \leq \left(\int_{\delta_x \leq \delta_0} |\nabla u_2|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{|x| \geq R_1} |\nabla u_2|^2 dx \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_{\mathcal{B}} |u_2|^2 |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{1/2}$$

Применяя неравенства (3.24) и (3.25), получим

$$\|u_2 - w\| \leq (1 + \sqrt{C_0}) \left(\int_{\delta_x \leq \delta_0} |\nabla u_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|x| \geq R_1} |\nabla u_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + C_1^{\frac{1}{2}} R_1^{-\frac{1}{2}}$$

Оценим оставшиеся интегралы. Приняв в предложениях 6 и I0 $\tau = \frac{12}{7}$, $s = 2$, получим, что $|\nabla u_2|_{3,\mathcal{B}} \le C_2$. Поэтому по неравенству Гёльдера

$$\Big(\int\limits_{\delta_x \le \delta_0} |\nabla u_2|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \le C_3 \delta_0^{\frac{1}{3}}.$$

Поскольку $\mathcal{B}_1$ - ограниченное множество, то

$$\mathcal{D} u_2(x) = \mathcal{D} H(x,0) L + O(|x|^{-2}),$$

где L - некоторая константа. Поэтому

$$\Big(\int\limits_{|x| \ge R_1} |\nabla u_2|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \le C_4 R_1^{-\frac{1}{2}}$$

причем константа C_4 не зависит от R_1. Итак, $\|u_2 - w\| \le C_5 \delta_0^{1/3} + C_6 R_1^{-1/2} \le \varepsilon$, если соответствующим образом выбрать δ_0 и R_1. Стало быть, мы получили множество $\{w\}$ финитных функций и нам остается только показать, что эти функции равностепенно непрерывны. Взяв в предложении 9 $\tau = \frac{6}{5-2\alpha}$, $\tau_1 = \frac{6}{5}$, а затем положив в предложении I0 $s = 2$, $\tau = \frac{6}{5-2\alpha}$ и $\tau = \frac{6}{5}$, получим при достаточно малом $|\omega|$

$$\Big(\int\limits_{\delta_x \ge \frac{1}{2}\delta_0} |\Delta_\omega(\nabla u_2(x))|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \le C_\alpha (|\omega| \ln^2 |\omega|)^\alpha$$

Применяя это неравенство и неравенство (3.2I) и используя простую выкладку, получим

$$\| \Delta_\omega (\nabla w) \| \le C (|\omega| \ln^2 |\omega|)^\alpha,$$

где C не зависит от функции w. Поскольку $\|w\|$ ограничены в совокупности, то $\{w\}$ компактно в $\dot{W}_2^1(\mathcal{B})$ и, стало быть, оно имеет конечную ε-сеть. Поэтому $\mathcal{G}(\mathcal{V})$ имеет конечную 3ε-сеть.

7. Теорема 2. Если уравнение $(3.9)_0$ имеет в $\dot{W}_2^1(\mathcal{B})$ только тривиальное решение, то ряды (3.4) сходятся в $L^\infty(\mathcal{B})$ и определяют классическое решение задачи (2.I), (2.2), если только $|h| \le \delta$, где δ - достаточно мало.

Доказательство. По предположению уравнение 3.9

$$v^\nu - \mathcal{G}(v^\nu) = f_\nu,$$

разрешимо при любой правой части $f_\nu \in \dot{W}_2^1(\mathcal{B})$. Пусть

$$f_\nu(x) = \int\limits_{\mathcal{B}} G(x,y;\lambda_0) F_\nu(y)\, dy$$

и допустим, что мы уже определили функции $v^1, \dots, v^{\nu-1}$, причем выполняются следующие неравенства

$$\operatorname{Max}\Big\{ |\nabla v^j|_2, |\nabla v^j|_\infty, \Big|\frac{\partial}{\partial x_1} v^j\Big|_{4/3}, |v^j|_4 \Big\} \le A B^{j-1} j^{-2} \qquad (3.26)$$

где $1 \le j \le \nu-1$. Здесь A и B – некоторые константы. Пусть M_j – величина, стоящая в левой части формулы (3.26). Если $|\nabla v^0|_2 < \infty$, то как отмечалось в начале пункта 1 данного параграфа $M_0 < \infty$. Из (3.7) вытекают легко проверяемые неравенства

$$|\mathcal{F}_\nu|_{4/3} \le 2\left|\frac{\partial v^{\nu-1}}{\partial x_1}\right|_{4/3} + 2|v^0|_4 |\nabla v^{\nu-1}|_2 + 2|\nabla v^0|_2 |\nabla v^{\nu-1}|_4 + \\ + 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{\nu-1} |v^i|_4 |\nabla v^{\nu-i}|_2 + 2\sum_{i=1}^{\nu-2} |v^i|_4 |\nabla v^{\nu-1-i}|_2 , \qquad (3.27)$$

и

$$|\mathcal{F}_\nu|_4 \le 2|\nabla v^{\nu-1}|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla v^\nu|_\infty^{\frac{1}{2}} + 2|v^0|_4 |\nabla v^{\nu-1}|_\infty + \\ + 2\sum_{i=1}^{\nu-1} |v^i|_4 \left(|\nabla v^{\nu-i}|_\infty + |\nabla v^{\nu-1-i}|_\infty\right) \qquad (3.28)$$

Так как согласно предложению 6 $|\nabla f_\nu|_2 \le A_{4/3} |\mathcal{F}_\nu|_{4/3}$, то существует решение v^ν уравнения (3.9), причем

$$|\nabla v^\nu|_2 \le C_0 |\nabla f_\nu|_2 ,$$

где константа C_0 – норма оператора $(I - \mathcal{G})^{-1}$. По предложению 10 $|\mathcal{A} v^\nu|_{4/3} \le C_1 |\nabla v^\nu|_2$ и, следовательно, согласно предложению 6

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1} v^\nu\right|_{4/3} \le \left|\frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{G}(v^\nu)\right|_{4/3} + \left|\frac{\partial}{\partial x_1} f_\nu\right|_{4/3} \le A_{4/3}\left(C_1 |\nabla v^\nu|_2 + |\mathcal{F}_\nu|_{4/3}\right).$$

Из (3.27), (3.28) вытекает, что

$$\mathrm{Max}\left(|\mathcal{F}_\nu|_{4/3}, |\mathcal{F}_\nu|_4\right) \le C A B^{\nu-2} \nu^{-2},$$

где константа C зависит только от константы M_0. Учитывая приведенные выше неравенства, получим

$$\mathrm{Max}\left(|\nabla v^\nu|_2, \left|\frac{\partial}{\partial x_1} v^\nu\right|_{4/3}\right) \le C_2 A B^{\nu-2} \nu^{-2},$$

где C_2 определяется по константам M_0, C_0, C_1. Предложение 3 работы [8] дает оценку

$$|v^\nu|_4 \le \frac{2}{\sqrt[3]{3}} C_2 A B^{\nu-2} \nu^{-2}.$$

Полагая в предложении 10 $s = 2$, получим, что $A(v^\nu) \in L^\tau$ при $\tau < 2$; беря τ близким к 2 и используя предложение 6, найдем, что $|\nabla \mathcal{G}(v^\nu)|_\sigma < C_3 |\nabla v^\nu|_2$, где σ близко к 4. Применяя предложение 10 к функции f_ν и учитывая (3.26)–(3.28), получим неравенство $|\nabla f_\nu|_\sigma \le C_4 A B^{\nu-2} \nu^{-2}$. Поэтому $|\nabla v^\nu|_\sigma < C_5 A B^{\nu-2} \nu^{-2}$ и, следовательно, в силу неравенства (3.21) получим неравенство

$$|v^\nu|_\infty \le C_6 A B^{\nu-2} \nu^{-2}.$$

Из ранне установленного неравенства

где $1 \le j \le \nu-1$. Здесь A и B – некоторые константы. Пусть M_j – величина, стоящая в левой части формулы (3.26). Если $|\nabla v^0|_2 < \infty$, то как отмечалось в начале пункта 1 данного параграфа $M_0 < \infty$. Из (3.7) вытекают легко проверяемые неравенства

$$|\mathcal{F}_\nu|_{4/3} \le 2\left|\frac{\partial v^{\nu-1}}{\partial x_1}\right|_{4/3} + 2|v^0|_4 |\nabla v^{\nu-1}|_2 + 2|\nabla v^0|_2 |\nabla v^{\nu-1}|_4 + \\ + 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{\nu-1} |v^i|_4 |\nabla v^{\nu-i}|_2 + 2\sum_{i=1}^{\nu-2} |v^i|_4 |\nabla v^{\nu-1-i}|_2 , \qquad (3.27)$$

и

$$|\mathcal{F}_\nu|_4 \le 2|\nabla v^{\nu-1}|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla v^\nu|_\infty^{\frac{1}{2}} + 2|v^0|_4 |\nabla v^{\nu-1}|_\infty + \\ + 2\sum_{i=1}^{\nu-1} |v^i|_4 \left(|\nabla v^{\nu-i}|_\infty + |\nabla v^{\nu-1-i}|_\infty\right) \qquad (3.28)$$

Так как согласно предложению 6 $|\nabla f_\nu|_2 \le A_{4/3} |\mathcal{F}_\nu|_{4/3}$, то существует решение v^ν уравнения (3.9), причем

$$|\nabla v^\nu|_2 \le C_0 |\nabla f_\nu|_2 ,$$

где константа C_0 – норма оператора $(I-\mathcal{G})^{-1}$. По предложению 10 $|\mathcal{A} v^\nu|_{4/3} \le C_1 |\nabla v^\nu|_2$ и, следовательно, согласно предложению 6

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1} v^\nu\right|_{4/3} \le \left|\frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{G}(v^\nu)\right|_{4/3} + \left|\frac{\partial}{\partial x_j} f_\nu\right|_{4/3} \le A_{4/3}\left(C_1 |\nabla v^\nu|_2 + |\mathcal{F}_\nu|_{4/3}\right).$$

Из (3.27), (3.28) вытекает, что

$$\mathrm{Max}\left(|\mathcal{F}_\nu|_{4/3}, |\mathcal{F}_\nu|_4\right) \le C A B^{\nu-2} \nu^{-2},$$

где константа C зависит только от константы M_0. Учитывая приведенные выше неравенства, получим

$$\mathrm{Max}\left(|\nabla v^\nu|_2, \left|\frac{\partial}{\partial x_1} v^\nu\right|_{4/3}\right) \le C_2 A B^{\nu-2} \nu^{-2},$$

где C_2 определяется по константам M_0, C_0, C_1. Предложение 3 работы [8] дает оценку

$$|v^\nu|_4 \le \frac{2}{\sqrt[3]{3}} C_2 A B^{\nu-2} \nu^{-2}.$$

Полагая в предложении 10 $s=2$, получим, что $A(v^\nu) \in L^\tau$ при $\tau < 2$; беря τ близким к 2 и используя предложение 6, найдем, что $|\nabla \mathcal{G}(v^\nu)|_\sigma < C_3 |\nabla v^\nu|_2$, где σ близко к 4. Применяя предложение 10 к функции f_ν и учитывая (3.26)–(3.28), получим неравенство $|\nabla f_\nu|_\sigma \le C_4 A B^{\nu-2} \nu^{-2}$. Поэтому $|\nabla v^\nu|_\sigma < C_5 A B^{\nu-2} \nu^{-2}$ и, следовательно, в силу неравенства (3.21) получим неравенство

$$|v^\nu|_\infty \le C_6 A B^{\nu-2} \nu^{-2}.$$

Из ранне установленного неравенства

$$|A(v^\nu)|_2 \le 2\lambda_0\left\{\left(\int_B (|v^0||\nabla v^\nu|)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_B (|\nabla v^0||v^\nu|)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

вытекает, что при $\tau < \sigma$

$$|A(v^\nu)|_2 \le 2\lambda_0\left\{|\nabla v^\nu|_\sigma |v^0|_\beta + |v^\nu|_\infty |\nabla v^0|_2\right\}$$

где $\beta = \frac{\sigma\tau}{\sigma-\tau}$. Итак, при $\tau < \sigma < 4$, $|A(v^\nu)|_2 \le$ $\le C_7 A B^{\nu-2}\nu^{-2}$ и по предложению 8, примененному к $\mathcal{G}(v^\nu)$ и f_ν, получим

$$|\nabla v^\nu|_\infty \le C_8 A B^{\nu-2}\nu^{-2}$$

Константу B мы можем взять столь большой, чтобы $B \ge$ $\ge \max\left(\frac{2}{3^{1/3}} C_2, C_3, \dots, C_8\right)$ и, стало быть, неравенство (3.26) будет иметь место и при $j = \nu$. Поскольку приведенные выкладки остаются в силе и при $\nu = 1$, то тем самым неравенство (3.26) имеет место для любого натурального ν. Поэтому ряд $\sum v^\nu h^\nu$ сходится в $\dot{W}_2^1(B)$ и $L^\infty(B)$ при $|h| \le B^{-1}$. Из предложения 9 вытекает, что

$$\nabla\mathcal{G}(v^\nu),\ \nabla f_\nu \in Lip(\alpha, C_9 M_\nu)$$

где $0 < \alpha < \frac{1}{4}$, $M_\nu = AB^{\nu-1}\nu^{-2}$, а C_9 не зависит ни от ν, ни от A и B. Поэтому $\nabla v^\nu \in$

$Lip(\alpha, 2C_9 M_\nu)$ и, следовательно,

$$A(v^\nu),\ F_\nu \in Lip(\alpha, C_{10} AB^{\nu-1}\nu^{-2})$$

Отсюда по теореме о дифференцируемости интегралов со слабой особенностью вытекает, что сумма ряда $\sum v^\nu h^\nu$ дважды непрерывно дифференцируема. Из приведенных оценок выходит сходимость ряда $\sum h^\nu q_\nu$ и дифференцируемость его суммы. Теорема доказана.

8. Согласно изложенной теории мы можем получить решение краевой задачи (2.1), (2.2) аналитическим продолжением по параметру $\lambda = \frac{1}{2}Re$, отправляясь от $\lambda = 0$. Процесс прервется, если для некоторого λ_0 уравнение (3.9) имеет нетривиальное решение либо если $|\nabla v(x;\lambda)|_2 \to \infty$ при $\lambda \to \lambda_0$. Хорошо известно, что если граничные значения $v_0(x)$ таковы, что

$$\int_S v_0(x)\, n(x)\, d\sigma(x) = 0, \qquad (3.29)$$

то последняя возможность не реализуется. Что же касается первой возможности, то она реализуется при бифуркации решения. Однако неясно, будет ли происходить бифуркация, если уравнение (3.9) имеет нетривиальное решение. В общем случае мы не располагаем никакими сведениями на этот счет, но хотелось бы верить, что в задаче обтекания наличие нетривиальных решений уравнения (3.9) всегда сопутствует бифуркации решения нелинейной задачи.

§ 4. О ЕДИНСТВЕННОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ.

I. Как это не удивительно, но теорема единственности обтекания тела стационарным потоком при малых числах Рейнольдса является глубоким и нетривиальным фактом. В полном объеме она является следствием теоремы К.И. Бабенко [8] об асимптотическом поведении в бесконечно удаленной точке решения задачи обтекания. Для частного случая так называемых классов Р.Е. Финном доказана единственность решения в классе [6].

Ниже мы изложим один из вариантов теоремы единственности решения в множестве решений с конечным интегралом Дирихле.

Предложение I2. Пусть $\lambda < \lambda_*$, $v(x,\lambda)$, $p(x,\lambda)$ – решение задачи обтекания (2.I), (2.2). Тогда

$$|\nabla v(x,\lambda)|_{3/2} \le A(\lambda)\left(\ln\frac{1}{\lambda}\right)^{2/3},$$

где $A(\lambda) = C A_0(\lambda)$, а

$$A_0(\lambda) = \mathcal{L}_0 + 3A_1\mathcal{L}_0\sum_{l=1}^{\infty}(\lambda B_0)^l\left(3A_1\ln\frac{1}{\lambda}+4A_0\right)^{l-1}\ln\frac{1}{\lambda}.$$

Доказательство. Используя неравенства (2.I3) и предыдущее неравенство, получим

$$|\nabla v(x,\lambda)|_{3/2} \le A_0(\lambda)\,|\lambda^2\psi_2(\lambda x)|_{3/2}$$

По неравенству треугольника

$$|\lambda^2\psi_2(\lambda x)|_{3/2} \le \left(\int_{\mathcal{B}}\lambda^{3/4}|x|^{-\frac{9}{4}}(\lambda s+1)^{-\frac{3}{2}\alpha_1}dx\right)^{2/3} +$$

$$+\left(\int_{\mathcal{B}}|x|^{-3}(\lambda s+1)^{-\frac{3}{2}\alpha_1}dx\right)^{2/3}$$

Полученные интегралы оцениваются единообразно и проведем оценку второго интеграла. Если z – радиус максимального шара, с центром в начале и вписанного в тело T, то

$$\int_{\mathcal{B}}|x|^{-3}(\lambda s+1)^{-\frac{3}{2}\alpha_1}dx \le 4\pi\int_z^{\lambda^{-1}}\frac{d\rho}{\rho} + 2\pi\int_{\lambda^{-1}}^{\infty}\frac{d\rho}{\rho}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{(2\rho\sin^2\frac{\theta}{2}+1)^{\frac{3}{2}\alpha_1}} \le$$

$$\le 4\pi\ln\frac{1}{z\lambda} + C_1.$$

Предложение доказано.

Выведем одну вспомогательную формулу, нужную нам в дальнейшем. Пусть $v(x,\lambda)$, $p(x,\lambda)$ и $v^*(x,\lambda^\circ)$, $p^*(x,\lambda^\circ)$ – два различных решения задачи обтекания (2.I), (2.2); положим $w = v - v^*$, причем если $\lambda = \lambda^\circ$, то по предположению $v \ne v^*$. Ниже будут рассматриваться только те решения задачи обтекания, для которых интеграл Дирихле конечен. По теореме работы [8] для этих решений имеют место асимптотические формулы (3.2), (3.3); согласно одному результату Финна [6] $p, p^* = O(|x|^{-2})$.

Используя дифференциальное уравнение, получим тождество

$$\Delta w - 2\lambda_0 \frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\lambda_0 \operatorname{grad} Q = 2\lambda \sum \left(w_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + v_k^* \frac{\partial w}{\partial x_k} \right) +$$

$$+ 2(\lambda - \lambda_0) \frac{\partial v}{\partial x_1} + 2(\lambda_0 - \lambda) \sum v_k^* \frac{\partial v^*}{\partial x_k} .$$

Умножим это соотношение на w и проинтегрируем по области $\mathcal{B}_N = \mathcal{B} \cap \{x : |x| \le N\}$. В итоге получим

$$- \int_{\mathcal{B}_N} |\nabla w|^2 dx - \int_{\partial \mathcal{B}_N} [\lambda_0 w^2 n_1 + 2\lambda_0 Q w_n - \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial n} - w^2 v_n^*] d\sigma =$$

$$= 2\lambda \int_{\mathcal{B}_N} \sum w_k w \cdot \frac{\partial v}{\partial x_k} dx + 2(\lambda_0 - \lambda) \int_{\mathcal{B}_N} [w \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} - \sum v_k^* w \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x_k}] dx$$

Устремим $N \to \infty$; на основании сделанных замечаний об асимптотике решений при $|x| \to \infty$ интеграл по сфере $|x| = N$ стремится к нулю. Интеграл по S равен нулю, так как $w|_S = 0$. Поэтому

$$- \int_{\mathcal{B}} |\nabla w|^2 dx = 2\lambda \int_{\mathcal{B}} \sum w_k w \cdot \frac{\partial v}{\partial x_k} dx + 2(\lambda_0 - \lambda) \int_{\mathcal{B}} [w \frac{\partial v}{\partial x_1} - \sum v_k^* w \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x_k}] dx .$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим такие следствия

$$|\nabla w|_2^2 \le 2\lambda |w|_4^2 |\nabla v|_2 + 2|\lambda_0 - \lambda| |w|_4 \left[\left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|_{4/3} + |v^*|_4 |\nabla v^*|_2 \right] \qquad (4.1)$$

и

$$|\nabla w|_2^2 \le 2\lambda |w|_6^2 |\nabla v|_{3/2} , \quad \lambda_0 = \lambda . \qquad (4.2)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы I. Существует число Рейнольдса $R_u(S, v_0)$, $0 < R_u \le \infty$, такое, что решение задачи (2.I), (2.2) с конечным интегралом Дирихле при $Rl < R_u$ единственно. Если S и v_0 принадлежат некоторым компактным семействам, то $\inf R_u > 0$, где нижняя грань берется по этим семействам.

Доказательство. Пусть $\lambda < \lambda_*$ и $v(x, \lambda)$, $p(x, \lambda)$ - решение задачи обтекания (2.I), (2.2). Допустим, что имеется еще одно решение этой задачи v^*, p^* с конечным интегралом Дирихле

$$|\nabla v^*|_2 < \infty$$

Используя неравенство (4.2) и применяя неравенство Соболева (3.2I) при $s = 2$, найдем

$$|\nabla w|_2^2 \le 2\lambda K_2 |\nabla v|_{3/2} |\nabla w|_2^2$$

Определим λ_0 из условия $2\lambda K_2 A(\lambda) \left(\ln \frac{1}{\lambda} \right)^{2/3} = 1$; ясно, что $\lambda_0 > 0$. Тогда в силу предложения I2 при $\lambda < \lambda_0$ выходит, $\nabla w \equiv 0$, т.е. $w = C + Dx$, где D - антисимметрическая матрица, а C - произвольный вектор. Учитывая граничные условия на

S и при $x = \infty$, получим $D = 0$, $C = 0$, т.е. $w \equiv 0$. Если S и v_0 принадлежат некоторым компактным семействам, то ясно, что нижняя грань по этим семействам - $\inf \lambda_0 > 0$. Теорема доказана.

2. Возникает вопрос о том, как определить число Рейнольдса $R_u(S, v_0)$.

Теорема 4. Пусть $\lambda_0 = \frac{1}{2} R_u(S, v^0) < \infty$, и для множества решений задачи (2.I), (2.2) имеет место априорная оценка интеграла Дирихле. Тогда существует решение v^0 , p^0 краевой задачи (2.I), (2.2) такое, что для системы в вариациях

$$\Delta v - 2\lambda_0 \frac{\partial v}{\partial x_1} - 2\lambda_0 \operatorname{grad} p - 2\lambda_0 \sum \left(v_k^0 \frac{\partial v}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial v^0}{\partial x_k} \right) = 0$$

$$\operatorname{div} v = 0 \qquad (4.3)$$

краевая задача

$$v|_S = 0 \ , \quad \lim_{|x| \to \infty} v = 0 \qquad (4.4)$$

имеет нетривиальное решение в классе $\dot{W}_2^1(\mathcal{B})$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных предложений.

Предложение I3. Пусть $v(x, \lambda)$, $p(x, \lambda)$, $\lambda \in \mathcal{E}$ - множество решений задачи обтекания с равномерно ограниченным интегралом Дирихле

$$|\nabla v(x, \lambda)|_2 \leq C \ , \quad \lambda \in \mathcal{E} \ , \quad 0 < \lambda_* < \lambda < \lambda^* < \infty .$$

Тогда равномерно по λ

$$|v(x, \lambda)|_4 \leq C_1 \ , \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_1} v(x, \lambda) \right|_{4/3} \leq C_2 \qquad (4.5)$$

Доказательство. Пусть $v^0(x, \lambda)$, $p^0(x, \lambda)$ - решение задачи обтекания для линеаризированной системы Озеена с граничными условиями (2.2). Тогда

$$v(x, \lambda) = v^0(x, \lambda) + 2\lambda \int_{\mathcal{B}} G(x, y, \lambda) \sum v_k(y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} dy \qquad (4.6)$$

Теперь текстуально повторим доказательство предложения 4 работы [8] , но вместо предложения I этой работы применим предложение 6 настоящей работы. В итоге получим первое неравенство (4.5). Из него на основании предложения 6 вытекает второе неравенство (4.5), поскольку

$$\left| \sum v_k \frac{\partial v}{\partial y_k} \right|_{4/3} \leq |v|_4 |\nabla v|_2$$

Предложение I4. Пусть выполнены условия предложения I3. Если в L^4 $\lim_{\lambda \to \lambda_0} v(x, \lambda) = \tilde{v}$, то $\tilde{v}$ - решение задачи обтекания (2.I), (2.2), когда $\lambda = \lambda_0$.

Доказательство. Легко проверяется, что имеет место соотношение

$$v(x, \lambda) = v^0(x, \lambda_0) + 2\lambda \int_{\mathcal{B}} \tilde{G}(x, y; \lambda_0) \sum v_k(y, \lambda) \frac{\partial v(y, \lambda)}{\partial y_k} dy +$$

$$+ 2(\lambda-\lambda_0)\int_{\mathcal{B}} G(x,y;\lambda_0)\,\frac{\partial v(y,\lambda)}{\partial y_1}\,dy. \qquad (4.7)$$

Пусть $\psi(x)$ - произвольный финитный в $\mathcal{B}$ вектор; умножим (4.7) на $\psi(x)$ и проинтегрируем по x. Положим

$$\mathcal{H}(y) = \int_{\mathcal{B}} \psi(x)\, G(x,y;\lambda_0)\,dx.$$

Тогда

$$\int_{\mathcal{B}} v(x,\lambda)\,\psi(x)\,dx = \int_{\mathcal{B}} v^0(x,\lambda)\,\psi(x)\,dx +$$

$$+ 2\lambda\int_{\mathcal{B}} \mathcal{H}(y)\sum v_k(y,\lambda)\,\frac{\partial v(y,\lambda)}{\partial y_k}\,dy + \qquad (4.8)$$

$$+ 2(\lambda-\lambda_0)\int_{\mathcal{B}} \mathcal{H}(y)\,\frac{\partial v(y,\lambda)}{\partial y_1}\,dy.$$

Легко проверить, что $\mathcal{H} \in L^4$. Аналогично тому, как было установлено неравенство (2.8), нетрудно показать, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_1} G(x,y;\lambda_0)\right| \le C\,|x-y|^{-2}\,(S(-y)+1)^{-1}$$

Поэтому $\frac{\partial}{\partial y_1}\mathcal{H}(y) \in L^{4/3}$. Второй интеграл в (4.8) можно проинтегрировать по частям, и мы получим

$$\int_{\mathcal{B}} \mathcal{H}(y)\,\frac{\partial v}{\partial y_1}\,dy = -\int_{\mathcal{B}} v(y,\lambda)\,\frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial y_1}\,dy = O(1).$$

Перейдем в (4.8) к пределу при $\lambda \to \lambda_0$ по такой подпоследовательности значений λ, для которой $\frac{\partial v}{\partial y_k}$ слабо сходятся в L^2 к некоторому вектору Ω_k, $k=1,2,3$. Понятно, что Ω_k - обобщенная производная от $\tilde{v}$ по y_k. Учитывая сделанные выше замечания, получим

$$\int_{\mathcal{B}} \tilde{v}\,\psi\,dx = \int_{\mathcal{B}} v^0(x,\lambda_0)\,\psi\,dx + 2\lambda_0\int_{\mathcal{B}} \mathcal{H}(y)\sum \tilde{v}_k\,\frac{\partial v}{\partial y_k}\,dy$$

В силу произвольности вектора ψ отсюда выходит, что $\tilde{v}$ удовлетворяет соотношению (4.6). Отсюда стандартным способом выводятся дифференциальные свойства $\tilde{v}$, и тем самым устанавливается, что $\tilde{v}$ - классическое решение задачи обтекания.

Предложение I5. Пусть выполнены условия предложения I4. Тогда $|\nabla(v(x,\lambda)-\tilde{v}(x))|_2 \longrightarrow 0$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Доказательство. Поскольку $\tilde{v}(x)$ - решение задачи обтекания, то для разности $w = v - \tilde{v}$ будет иметь место неравенство (4.I), в котором роль v^* играет $\tilde{v}$. Учитывая предложение I3, получим $|\nabla w|_2 \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Доказательство теоремы 4. Пусть $\mathcal{M}$ - множество решений задачи обтекания, отвечающих числу Рейнольдса $Re_u = 2\lambda_0$. Если $\mathcal{M}$ содержит более двух элементов, и (v^0, p^0), (v^1, p^1) суть элементы этого множества, то по крайней мере для одного из них уравнение в вариациях будет иметь нетривиальное

решение в классе $\dot{W}_2^1(\mathcal{B})$. В самом деле, в противном случае уравнение $(3.9)_0$, построенное для каждого из этих решений, будет иметь только тривиальные решения, и по теореме 2 мы получим при $\lambda < \lambda_0$ не менее двух различных решений. А это абсурдно. Таким образом остается рассмотреть случай, когда $\mathcal{M}$ состоит только из одного элемента. Пусть $v^j(x,\lambda)$, $p^j(x,\lambda)$, $j = 1, 2$, - различные решения задачи обтекания при $\lambda > \lambda_0$. Поскольку $|\nabla v^j|_2$ равномерно ограничены, то последовательность $\{v^j(x,\lambda)\}$ равномерно непрерывна в L^s , $s < 6$. Значит она компактна в L^4 , и таким образом из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся при $\lambda \to \lambda_0$. Так как по предложению I4 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} v^j(x,\lambda) = v(x,\lambda_0)$, то этот предел существует не только по подпоследовательности. Следовательно $|v^j(x,\lambda)-v(x,\lambda_0)|_4 \to 0$ и $|\nabla(v^j(x,\lambda)-v(x,\lambda_0))|_2 \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$. Пусть $w(x,\lambda) = v^1(x,\lambda) - v^2(x,\lambda)$; по предположению $w \not\equiv 0$. Из (4.I) вытекает, что $|\nabla w|_2 \le$ $\le C|w|_4$. Положив $\omega = \frac{w}{|w|_4}$, мы получим компактную в L^4 последовательность, так как $|\nabla\omega|_2 \le C$. Поскольку

$$\Delta\omega - 2\lambda_0\frac{\partial\omega}{\partial x_1} - 2\lambda_0 \operatorname{grad} Q = 2\lambda\sum\Big(\omega_k\frac{\partial v^1}{\partial x_k} + v_k^2\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\Big) + 2(\lambda-\lambda_0)\frac{\partial\omega}{\partial x_1},$$

где $Q = \frac{\lambda}{\lambda_0}(p^1-p^2)|w|_4^{-1}$, то

$$\omega(x) = 2\lambda\int_{\mathcal{B}} G(x,y;\lambda_0)\sum\Big(\omega_k\frac{\partial v^1(y,\lambda)}{\partial y_k} + v_k^2(y,\lambda)\frac{\partial\omega}{\partial y_k}\Big)dy + 2(\lambda-\lambda_0)\int_{\mathcal{B}} G(x,y;\lambda_0)\frac{\partial\omega}{\partial y_1}dy .$$

Выделим из $\{\omega(x,\lambda)\}$ подпоследовательность, сходящуюся при $\lambda \to \lambda_0$ в смысле метрики L^4 . Не ограничивая общности, можно считать, что $\frac{\partial}{\partial x_k}\omega(x,\lambda)$ слабо сходятся в L^2 . Умножим последнее соотношение на произвольный финитный вектор $\psi(x)$ и проинтегрируем по x . Затем в последнем интеграле проинтегрируем по частям, а в первом интеграле заменим $\frac{\partial}{\partial y_k}v^1(y,\lambda)$ и $v_k^2(y,\lambda)$ на $\frac{\partial}{\partial y_k}v(y,\lambda_0)$ и $v_k(y,\lambda_0)$ соответственно. Это преобразование даст нам слагаемые порядка $o(1)$. Итак мы получим

$$\int_{\mathcal{B}}\omega\psi\,dx = 2\lambda\int_{\mathcal{B}}\mathcal{H}(y)\sum\Big(\omega_k(y,\lambda)\frac{\partial v(y,\lambda_0)}{\partial y_k} + v_k(y,\lambda_0)\frac{\partial\omega}{\partial y_k}\Big)dy + o(1).$$

Переходя к пределу при $\lambda \to \lambda_0$, учитывая произвольность ψ и обозначая $w(x) = \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\omega(x,\lambda_0)$, получим

$$w(x) = 2\lambda_0\int_{\mathcal{B}} G(x,y,\lambda_0)\sum\Big(w_k\frac{\partial v(y,\lambda_0)}{\partial y_k} + v_k(y,\lambda_0)\frac{\partial w}{\partial y_k}\Big)dy$$

Интеграл справа есть непрерывная функция x , и поэтому $w \in C(\mathcal{B})$, причем $w|_S = 0$. По построению $w \in \dot{W}_2^1(\mathcal{B})$. Стандартными приемами далее устанавливается, что w - классическое решение уравнения (4.3). Теорема доказана.

3. Число Рейнольдса $Re_u(S, v^\circ)$ является важной характеристикой задачи. Читателю понятно, что задача определения Re_u близка к задаче определения критического числа Рейнольдса $Re_s(S, v^\circ)$ - числа Рейнольдса потери устойчивости. Кстати вопрос об определении этого числа пока остается открытым. Мы не располагаем строгими постановками спектральных задач,

которые приводят к понятию критического числа Рейнольдса. Но если отвлечься от этого обстоятельства и трактовать критическое число Рейнольдса "наивно", то сразу же возникает вопрос о взаимоотношении между числами Re_u и Re_s. Известно, что во многих задачах $Re_u = Re_s$. От взаимоотношения между этими числами зависит характер возбуждения неустойчивости.

Задача подсчета аналитическим путем этих чисел для конкретных тел представляется совершенно безнадежной. Однако с помощью численных методов, может быть, удастся пролить свет на этот волнующий вопрос. Развитие теории течений вязкой жидкости и развитие самих численных методов, может быть, приведут к такой ситуации, когда мы будем иметь безупречные оценки погрешности численных алгоритмов, и тем самым наши выводы, полученные с помощью ЭВМ, будут логически безукоризненными.

Нам представляется важной задачей создание алгоритмов для численного определения критических чисел Re_u и Re_s.

§ 5. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ТЕЧЕНИЯХ С МАЛЫМИ ЧИСЛАМИ РЕЙНОЛЬДСА.

1. Теорема единственности, доказанная выше, позволяет в вопросах теории течений с малыми числами Рейнольдса ограничиться решением, которое дается рядами (2.5). Результаты, полученные в §§1 и 2, позволяют получить асимптотику скоростей и давлений для течений с малыми числами Рейнольдса. Теория, развитая в §2, - это правильно понимаемая теория возмущений при $Re = 0$. Ряды (2.5) и являются рядами теории возмущений, причем, как доказано, эти ряды сходятся. В механике жидкостей предпринимались многочисленные попытки получить асимптотические разложения решения задачи обтекания в виде

$$u(x) = u_\infty + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu(\lambda)\, U_\nu(x) , \qquad (5.1)$$

где $\{\varepsilon_\nu(\lambda)\}$ - некоторая асимптотическая последовательность. Уже беглый анализ формул (2.5) показывает, что получить асимптотическое разложение вида (5.1) во всей области $\mathcal{B}$ не удастся и что такого рода разложения можно построить лишь в областях $\mathcal{B}_s = \{x : |x| \ll \lambda^{-1}\} \setminus T$, т.е. области Стокса, области $\mathcal{B}_0 = \{x : |x| \gg \lambda^{-1}\}$, т.е. области Озеена и промежуточной области $\{x : |x| \simeq \lambda^{-1}\}$.

Асимптотические разложения в указанных областях можно получить следующим образом. Нужно в рядах (2.5) удержать конечное число членов, а затем оставшиеся в конечном числе слагаемые переразложить. При этом определится как сама асимптотическая последовательность $\{\varepsilon_\nu(\lambda)\}$ так и коэффициенты асимптотических разложений. Отметим, что в области Озеена разложение будет иметь вид

$$u(x) = u_\infty + \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu(\lambda)\, \tilde{V}_\nu(\xi) \qquad (5.1')$$

где $\xi = \lambda x$, а $\{\delta_\nu(\lambda)\}$ - асимптотическая последовательность. При таком подходе, естественно, отпадает надобность в процедуре сращивания. Конечно, на практике удастся получить лишь один-два члена асимптотических разложений (5.1), (5.1'). Наконец отметим, что данный подход позволяет установить оценку остаточного члена. В виду недостатка места мы не будем производить детальные вычисления, а остановимся лишь на вопросе о вы-

числении асимптотики для сил, действующих на обтекаемое тело.

2 Обозначим через F_i проекцию силы на ось x_i, а через F_i^0 ту же проекцию, но подсчитанную в приближении Озеена. Как известно

$$F_i = -\frac{1}{2\lambda}\int_S \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\delta_{ij}2\lambda p\right)n_j\,d\sigma\,, \qquad (5.2)$$

причем n - внешняя нормаль по отношению к области $\mathcal{B}$. Записав уравнения (2.I) в дивергентном виде и интегрируя их по области $\mathcal{B}_N = \{x : |x| \le N\} \setminus T$, получим

$$F_i = \frac{1}{2\lambda}\int_{|x|=N}\sum_j\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-2\lambda p\,\delta_{ij}-2\lambda\,\delta_{j1}v_i\right)n_j\,d\sigma - \int_{|x|=N}\sum v_i v_j n_k\,d\sigma$$

где n - внешняя нормаль. Отметим, что мы воспользовались граничным условием (2.2) в форме $v|_S = -u_\infty$. В случае общей граничной задачи (2.I), (2.2) последнюю формулу нужно видоизменить, так как появится интеграл по S. Поскольку

$$|v| \le C|x|^{-1}(s+1)^{-1}\,,\ |\nabla v| \le C_1|x|^{-3/2}(s+1)^{-\alpha_1}\,, \qquad (5.3)$$

где α_1 сколь угодно близко к 1, то

$$F_i = -\int_{|x|=N}(pn_i+v_i n_1)\,d\sigma + o(1)\,. \qquad (5.4)$$

На основании (2.4)-(2.5)

$$v(x) = v^0(x,\lambda) + v^*(x,\lambda),\quad p(x) = p^0(x,\lambda)+p^*(x,\lambda), \qquad (5.5)$$

где $(v^0+u_\infty,\ p^0)$ - решение задачи обтекания для уравнений Озеена; v^*, p^* можно записать в виде

$$v^*(x,\lambda)=\sum_{\ell=1}^{\infty}(2\lambda)^{\ell}v^{\ell}(x,\lambda)\,,\quad p^*(x,\lambda)=\sum_{\ell=1}^{\infty}(2\lambda)^{\ell}p^{\ell}(x,\lambda)$$

либо в виде

$$v^*(x,\lambda) = 2\lambda\int_{\mathcal{B}} G(x,y;\lambda)\sum v_k\frac{\partial v}{\partial y_k}\,dy$$

$$p^*(x,\lambda) = 2\lambda\int_{\mathcal{B}}\sum R_i(x,y;\lambda)v_k\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\,dy\,. \qquad (5.6)$$

Используя формулы (5.5), (5.6), мы можем вычислить предел интеграла (5.4) при $N \to \infty$.

<u>Предложение I6</u>. Пусть $|\xi| \le C$; положим

$$J_{ijk} = \int_{|x|=N} H_{ij}(x-\xi)n_k(x)\,d\sigma\,.$$

Имеют место следующие соотношения

$$J_{ij1} = -\frac{\delta_{ij}}{3\lambda} + O(N^{-1})\,.$$

Если $k \neq 1$, то

$$J_{ij\kappa} = \begin{cases} O(N^{-1}) & , \text{если } i,j > 1 \\ \frac{\delta_{j\kappa}}{3\lambda} + O(N^{-1}) & , \text{если } i = 1 \\ \frac{\delta_{i\kappa}}{3\lambda} + O(N^{-1}) & , \text{если } j = 1 . \end{cases}$$

Доказательство этих соотношений производится простой проверкой, и мы ее представляем читателю.

Вычислим интеграл (5.9) двумя способами. Воспользуемся формулами (I.5)-(I.8), положив в них предварительно

$$f = 2\lambda \sum v_\kappa \frac{\partial v}{\partial x_\kappa} .$$

Объемные интегралы в формулах (I.5) и (I.7) обозначим через $I(x) = (I_1, I_2, I_3)$ и $J(x)$, соответственно. Легко проверить, что при $|\xi| \leqslant C$,

$$\int_{|x|=N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right) n_\kappa \, d\sigma = -\frac{\delta_{i\kappa}}{3} + o(1) \qquad (5.7)$$

$$\int_{|x|=N} \frac{\partial}{\partial \xi_\ell} H_{ij}(x,\xi) n_\kappa \, d\sigma = o(1).$$

Используя эти соотношения и предложение I6, получим

$$\int_{|x|=N} U_i(x) n_1 \, d\sigma = -\frac{2}{3} F_i + o(1), \quad \int_{|x|=N} P n_i \, d\sigma = -\frac{1}{3} F_i + o(1) \qquad (5.8)$$

Поэтому из (5.3) выходит важное соотношение

$$\int_{|x|=N} J(x) n_\kappa(x) d\sigma + \int_{|x|=N} I_\kappa(x) n_1(x) d\sigma = o(1) \qquad (5.9)$$

Легко видеть, что

$$\int_{|x|=N} J(x) \, n_\kappa \, d\sigma = o(1) . \qquad (5.10)$$

В самом деле, используя теорему (5.4) работы [6] , имеем $J(x) = O(|x|^{-2}(s+1)^{-1})$. Отсюда мы получаем (5.I0), а на основании (5.9) получаем

$$\int_{|x|=N} I_\kappa(x) \, n_1 \, d\sigma = o(1) \qquad (5.11)$$

Из (5.8) и (5.I0) вытекает

$$\int_{|x|=N} p \, n_i \, d\sigma = -\frac{1}{3} F_i + o(1), \quad \int_{|x|=N} v_i \, n_1 \, d\sigma = -\frac{2}{3} F_i + o(1). \qquad (5.12)$$

Теперь, воспользовавшись формулами (5.5), (5.6), вычислим интеграл (5.4). Предварительно сделаем одно замечание, позволяющее упростить выкладки. В формулах (5.6) $G(x,y;\lambda)$ - функция Грина системы (I.I). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство будем применять запись $G(x,y;\lambda,u_\infty)$. Тогда $G(x,y;\lambda,-u_\infty)$ - функция Грина сопряженной системы. Имеет место фундаментальное тождество

$$G(x,y;\lambda,u_\infty) \equiv G(y,x;\lambda,-u_\infty)$$

Таким образом

$$v^*(x,\lambda) = \int_{\mathcal{B}} G(y,x;\lambda,-u_\infty)\, f(y)\,dy$$

где $f = 2\lambda \sum v_k \frac{\partial v}{\partial x_k}$. Принимая во внимание формулу (I.23), мы имеем $G = H + V$, где $\underset{\sim}{V}$ - матрица с элементами $\underset{\sim}{V}_{ij}$. Таким образом

$$v^*(x) = \int_{\mathcal{B}} H(y,x;-u_\infty) f(y)\,dy + \int_{\mathcal{B}} V(y,x;\lambda,-u_\infty) f(y)\,dy \qquad (5.13)$$

При вычислении асимптотики интеграла

$$\int_{|x|=N} v_i^* n_1\, d\sigma$$

первый интеграл в (5.I3) на основании (5.II) даст вклад, равный $o(1)$ и, стало быть, основной вклад происходит от второго интеграла в (5.I3). Элементы $V_{ij}(y,x;\lambda,-u_\infty)$ матрицы V определяются как решение краевой задачи (I.I3) с граничными условиями

$$V_{ij}(y,x;\lambda,-u_\infty)\big|_S = -H_{ij}(y,x,-u_\infty)\big|_S = -H_{ij}(x,y,u_\infty)\big|_S,$$

причем x играет роль параметра, $y \in S$. Поэтому $V_{ij}(y,x;\lambda,-u_\infty)$ есть линейный оператор от функции $-H_{ij}(x,z;u_\infty)$, рассматриваемой как функция z, т.е.

$$V_{ij}(y,x;\lambda,-u_\infty) = \mathcal{L}_{ij}(y;-H_{ij}(x,z;u_\infty)).$$

Следовательно в силу предложения I6

$$\int_{|x|=N} V_{ij}(y,x;\lambda,-u_\infty) n_1(x)\,d\sigma = \frac{1}{3\lambda}\mathcal{L}_{ij}(y;\delta_{ij}) + o(1).$$

Отсюда

$$\int_{|x|=N} v_i n_1\,d\sigma = \frac{2}{3}\int_{\mathcal{B}} \sum_{j,k} \mathcal{L}_{ij}(y;\delta_{ij}) v_k \frac{\partial v_i}{\partial y_k}\,dy + \int_{|x|=N} v_i^\circ n_1\,d\sigma + o(1)$$

Принимая во внимание соотношения (5.I2) и учитывая, что они сохраняют силу для озееновского решения v°, p°, с заменой F_i на F_i° (F_i° - сила, действующая на тело в озееновском потоке) получим

$$F_i = F_i^\circ - \int_{\mathcal{B}} \sum_{j,k} w_j^i(y) v_k(y) \frac{\partial v_j(y)}{\partial y_k}\,dy, \quad w_j^i(y) = \mathcal{L}_{ij}(y;\delta_{ij}) \qquad (5.14)$$

3. Я ограничусь рассмотрением силы лобового сопротивления F_1. В этом случае вектор $w^1(y) = (w_1^1, w_2^1, w_3^1)$ имеет прозрачный механический смысл. Он равен вектору скорости возмущений при обтекании нашего тела озееновским потоком, когда вектор скорости на бесконечности равен $-u_\infty$. Переобозначим этот вектор через

$w^\circ(y)$. Итак,

$$F_1 = F_1^\circ - \int_{\mathcal{B}} \sum_{k,\ell} w_k^\circ v_\ell \frac{\partial v_k}{\partial y_\ell}\, dx \qquad (5.14)$$

Займемся асимптотикой интеграла. На основании результатов пунктов 3 и 5 §2

$$v_\ell \frac{\partial v}{\partial x_\ell} = v_\ell^\circ \frac{\partial v^\circ}{\partial x_\ell} + \frac{9}{2}\lambda\left(v_\ell^\circ \frac{\partial v^1}{\partial x_\ell} + v_\ell^1 \frac{\partial v^\circ}{\partial x_\ell}\right) + O(\lambda^2 \ln^2\lambda)|x|^{-\frac{5}{2}}(s|x|+1)^{-1-q}$$

Принимая во внимание, что $w = O(|x|^{-1})$, получим

$$F_1 = F_1^\circ - I^\circ - \frac{9}{2}\lambda I^1 + O(\lambda^2 \ln^2\lambda), \qquad (5.15)$$

где

$$I^\circ = \int_{\mathcal{B}} \sum_{k,\ell} w_k^\circ v_\ell^\circ \frac{\partial v_k^\circ}{\partial x_\ell}\, dx \quad , \quad I^1 = \int_{\mathcal{B}} \sum_{k,\ell} w_k^\circ \left(v_\ell^\circ \frac{\partial v_k^1}{\partial x_\ell} + v_\ell^1 \frac{\partial v_k^\circ}{\partial x_\ell}\right) dx$$

Отметим, что остаточный член в формуле (5.15) завышен; от множителя $\ln^2\lambda$ можно освободиться.

3. Найдем асимптотику интеграла I° . Область интегрирования разобъем на две $\mathcal{B}_0 = \{x : |x| \le R\} \cap T$ и $\mathcal{B}_1 = \{x : |x| \ge R\}$, где R - фиксированное достаточно большое число. Вектор v° дается формулой (I.15), в которой ядро является аналитической функцией λ в точке $\lambda = 0$. Плотность φ определяется из уравнения, в котором правая часть не зависит от λ . По-

скольку при $\lambda = 0$ уравнение $(I.17)_\varphi$ имеет только тривиальные решения, то плотность φ - аналитическая функция λ при $\lambda = 0$. Это следует хотя бы из того, что детерминанты Фредгольма ядра $\mathcal{K}$ будут аналитическими функциями λ . Поэтому $v^\circ(x,\lambda)$, а стало быть, и $w^\circ(x,\lambda)$ - аналитические функции λ при $\lambda = 0$.

Пусть v^s - вектор скорости жидкости в приближении Стокса, а F^s - сила, действующая на тело. Тогда

$$v^\circ(x,\lambda) = v^s(x) + O(\lambda), \quad \frac{\partial v^\circ(x,\lambda)}{\partial x} = \frac{\partial v^s(x)}{\partial x} + O(\lambda|x|^{-1/2}(s+1)^{-1/2})$$

причем эти оценки равномерны в $\mathcal{B}$. (5.15)

Замечание I. Учитывая эти соотношения и формулу (5.2), получаем следующий фундаментальный факт

$$F^\circ = F^s + O(1).$$

Таким образом интеграл

$$\int_{\mathcal{B}_0} \sum w_k^\circ v_\ell^\circ \frac{\partial v_k^\circ}{\partial x_\ell}\, dx$$

является аналитической функцией λ .

В интеграле по области $\mathcal{B}_1$ поступим несколько иначе. Считая, что $|x| \ge R$, применим к ядру $\mathcal{K}(x,y,\lambda)$ формулу Тейлора, раскладывая его в ряд по переменной y . Остаточный член можем взять в виде интеграла. Тогда $v_k^\circ(x)$ запишется в виде

$$v_k^\circ(x) = \sum_i H_{ki}(x) A_i + \frac{x_k}{|x|^3} B_k + \sum_{i,j} \frac{\partial H_{ki}(x)}{\partial x_j} A_{kij} + \dots , \qquad (5.16)$$

где коэффициенты A и B выражаются через моменты плотности

φ . Для $w_\kappa^\circ(x)$ имеем формулу

$$w_\kappa^\circ(x) = \sum_i H_{ki}(-x) A_i^* - \frac{x_\kappa}{|x|^3} B_\kappa^* + \sum_{ij}' \frac{\partial}{\partial x_j} H_{ki}(-x) A_{kij}^* + \dots \quad (5.17)$$

Заметим, что здесь отдельные группы слагаемых упорядочены в смысле их порядка убывания на бесконечности. Таким образом интеграл по области $\mathcal{B}_1$ приобретает вид

$$I_1^\circ = \int_{\mathcal{B}_1} \sum w_\kappa^\circ v_\ell^\circ \frac{\partial v_\kappa^\circ}{\partial x_\ell} dx = \sum_{ijz}' A_i^* A_j A_z \sum_{k\ell} \int_{\mathcal{B}_1} H_{ki}(-x) H_{\ell j}(x) \frac{\partial H_{kz}(x)}{\partial x_\ell} dx + \dots,$$

где многоточием обозначена сумма тех интегралов, в которые обязательно входят члены из старших групп разложений (5.16), (5.17). Покажем, что каждый из интегралов, обозначаемых многоточием, допускает асимптотическое разложение вплоть до членов $O(\lambda^2 \ln \lambda)$. Для примера рассмотрим интеграл

$$J = \int_{\mathcal{B}_1} H_{ki}(-x) \frac{\partial H_{\ell j}(x)}{\partial x_m} \frac{\partial H_{kz}(x)}{\partial x_\ell} dx .$$

Поскольку $\nabla H_{ij}(x) = O(|x|^{-3/2}(s+1)^{-\frac{1}{2}})$ (равномерно по λ !), то подинтегральное выражение имеет порядок $O(|x|^{-4}(s+1)^{-1})$. Поэтому

$$J = \int_{R \le |x| \le \lambda^{-1}} H_{ki}(-x) \frac{\partial H_{\ell j}(x)}{\partial x_m} \frac{\partial H_{kz}(x)}{\partial x_\ell} dx + O(\lambda^2 \ln \lambda) .$$

Разложим подинтегральную функцию в ряд по степеням λ . Так, например,

$$\frac{\partial H_{\ell j}(x,\lambda)}{\partial x_m} = \frac{\partial H_{\ell j}(x,0)}{\partial x_m} + \lambda \varphi_{\ell j}(x) + \lambda^2 \psi_{\ell j}(x,\lambda),$$

причем $\varphi_{\ell j}(x) = O(|x|^{-1})$, а $\psi_{\ell j}(x) = O(1)$. Производя подстановку этого разложения последовательно вместо каждого сомножителя под знаком интеграла и затем распространяя полученные интегралы на всю область $\mathcal{B}_1$, что приведет к погрешности порядка $O(\lambda^2 \ln \lambda)$, получим

$$J = a + b\lambda + O(\lambda^2 \ln \lambda).$$

Здесь a и b – некоторые константы, зависящие от k, ℓ, i, j, z .

Найдем асимптотику интеграла

$$J = \int_{\mathcal{B}_1} H_{ki}(-x,\lambda) H_{\ell j}(x,\lambda) \frac{\partial H_{kz}(x,\lambda)}{\partial x_\ell} dx .$$

Положив $\xi = \lambda x$, получим следующие очевидные соотношения

$$H_{ij}(x,\lambda) = \lambda H_{ij}(\xi,1), \quad \frac{\partial}{\partial x_\kappa} H_{ij}(x,\lambda) = \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \xi_\kappa} H_{ij}(\xi,1) .$$

Поэтому, переходя в интеграле J к переменной ξ и разбивая область интегрирования на две части, получим

$$J = \lambda \int_{R\lambda \le |\xi| \le 1} H_{ki}(-\xi,1) H_{\ell j}(\xi,1) \frac{\partial H_{kz}(\xi,1)}{\partial \xi_\ell} d\xi + C\lambda . \quad (5.18)$$

Перейдем к сферическим координатам, положив $\xi = z\eta$, $|\eta| = 1$, $\eta \in S^2$, где S^2 – двумерная сфера. Легко проверить, что $H_{ij}(\xi,1) = P_{ij}(\xi) + Q_{ij}(\xi) + R_{ij}(\xi)$, где

$$P_{ij}(\xi) = \frac{1}{8\pi z} p_{ij}(\eta), \quad Q_{ij}(\xi) = \frac{1}{16\pi} q_{ij}(\eta), \quad \frac{\partial P_{ij}(\xi)}{\partial \xi_\ell} = \frac{1}{8\pi z^2} p_{ij\ell}(\eta),$$

$$\frac{\partial Q_{ij}(\xi)}{\partial \xi_\ell} = \frac{1}{16\pi z} q_{ij\ell}(\eta),$$

$$p_{ij}(\eta) = -(\delta_{ij} + \eta_i \eta_j), \quad q_{ij}(\eta) = -3\delta_{ij}\eta_1 - \eta_1\eta_i\eta_j + \delta_{j1}\eta_i + \delta_{i1}\eta_j + 3\delta_{ij} - \delta_{i1}\delta_{j1}$$

$R_{ij}(\xi)$ - остаток, $R_{ij}(\xi)=O(\tau)$, $\frac{\partial R_{ij}(\xi)}{\partial \xi_\ell}=O(1)$. Делая подстановку в интеграле (5.I8) и используя эти формулы, получим

$$J=-\frac{\lambda \ln\frac{1}{\lambda}}{2\,(8\pi)^3}\int_{S^2}\left[p_{ki}(-\gamma)q_{ej}(\gamma)p_{kre}(\gamma)+q_{ki}(-\gamma)p_{ej}(\gamma)p_{kre}(\gamma)+\right.$$

$$\left.+p_{ki}(-\gamma)p_{ej}(\gamma)q_{krj}(\gamma)\right]d\sigma+A_{keijr}\lambda+O(\lambda^2).$$

В последней формуле свободный член отсутствует, поскольку

$$\int_{S^2}p_{ki}(-\gamma)p_{ej}(\gamma)p_{kre}(\gamma)\,d\sigma=0.$$

Итак,

$$I^\circ=A+\sum_{ijr}{}' C_{ijr}A_i^*A_jA_r\,\lambda\ln\lambda+\lambda B(\lambda)+O(\lambda^2\ln\lambda), \quad (5.I9)$$

где $B(\lambda)$ - тернарная форма от A_i, A_i^*.

4. Чтобы получить формулу для коэффициента A, вычислим интеграл I° другим способом. Пусть $\mathcal{B}_\lambda=\{x:|x|\le\lambda^{-1}\}\setminus T$; легко видеть, что

$$I^\circ=\int_{\mathcal{B}_\lambda}\sum w_\kappa^\circ v_\ell^\circ\frac{\partial v_\kappa^\circ}{\partial x_\ell}\,dx+O(\lambda).$$

Заменяя последовательно в этом интеграле каждый множитель по формуле (5.I5), получим

$$I^\circ=\int_{\mathcal{B}_\lambda}\sum w_\kappa^s v_\ell^s\frac{\partial v_\kappa^s}{\partial x_\ell}\,dx+O(\lambda\ln\lambda)=\int_{\mathcal{B}}\sum w_\kappa^s v_\ell^s\frac{\partial v_\kappa^s}{\partial x_\ell}\,dx+O(\lambda\ln\lambda),$$

и сравнивая с (5.I9), найдем

$$A=\int_{\mathcal{B}}\sum_{\kappa,\ell}w_\kappa^s v_\ell^s\frac{\partial v_\kappa^s}{\partial x_\ell}\,dx \quad (5.20)$$

5. Формулы (5.I2), как уже отмечалось выше, сохраняют силу для озееновского решения. Используя вторую из этих формул и подставляя вместо v_i^0 разложение (5.I6), а затем применяя предложение I6 и (5.7), получим

$$F_i^\circ=\frac{1}{2\lambda}A_i-2\pi B_i\,\delta_{i1}.$$

Я не буду вычислять асимптотику интеграла I^1, а отмечу, что, применяя аналогичную технику, нетрудно показать, что $I^1=A^1+O(\lambda\ln^2\lambda)$. Таким образом

$$F_1=F_1^\circ-A-8\lambda^4\ln\lambda\sum_{ijr}C_{ijr}(F_i^\circ)^*F_j^\circ F_r^\circ+\lambda B+O(\lambda^2\ln^2\lambda), \quad (5.2I)$$

где $(F_i^\circ)^*$ - компонента силы в озееновском приближении при обтекании тела потоком, имеющим на бесконечности противоположное направление.

6. Сделаем одно замечание по поводу формулы (5.20). Если тело симметрично относительно плоскости $x_1=0$, то, как легко видеть, $w^s(x)=-v^s(x)$. Поэтому

$$A=-\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\sum_{k,\ell}v_\ell^s\frac{\partial(v_\kappa^s)^2}{\partial x_\ell}\,dx=-\frac{1}{2}\int_S v^2v_n\,d\sigma=0.$$

Если же тело указанной симметрией не обладает, то вообще говоря, $A\neq 0$, и как следует из (5.2I), сила в приближении Стокса и сила в приближении Озеена совпадают с точным значением силы лишь в главном члене. Кстати в литературе, посвященной течениям вязкой жидкости, иногда делаются высказывания о том, что приближение Озеена в каком-то смысле "точнее" стоксовского.

Допустим, что обтекаемое тело есть тело вращения; тогда $F_j^\circ=(F_j^\circ)^*=0$ при $j=2,3$ и в сумме (5.2I)

остается только одно слагаемое. Кропотливый подсчет дает $C_{111} = \frac{1}{80\pi^2}$, и следовательно

$$F_1 = F_1^0 - A - \frac{\lambda^4 \ln\lambda}{10\pi^2}(F_1^0)^*(F_1^0)^2 + B\lambda + O(\lambda^2 \ln^2\lambda). \quad (5.22)$$

Предположим, что обтекаемое тело - сфера. Тогда $A = 0$, $(F_1^0)^* = -F_1^0$, $F_1^0 = \frac{3\pi}{\lambda} + \dots$, и мы получим

$$F_1 = F_1^0\left(1 + \frac{9}{40}Re^2 \ln Re\right) + \frac{B}{2}Re + O(Re^2 \ln^2 Re), \quad (5.23)$$

что согласуется с известным результатом Праудмена и Пирсона [3].

Теорема 5. Пусть выполнены условия предложения 3 §I. При малых числах Рейнольдса

$$F = F^S + O(1), \quad F = F^0 + O(1),$$

а для силы лобового сопротивления F_1 имеет место соотношение (5.2I).

Доказательство. Интеграл в (5.I4) равномерно по λ ограничен, поскольку в силу результатов §2 $|w_j v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k}| \le C|x|^{-7/2}$. Учитывая замечание I, получаем первое утверждение теоремы. Формула (5.2I) доказана выше. Теорема доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Stokes,G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulunucs. Trans. Camb.Phyl Soc. 9 (I88I), Part II, 8-I06.

2. Oseen, C.W. Über die Stokes'sche Formel und über eine Verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, Ark.Math.Astronom. Fys. 6 (I9I0), N 29.

3. Proudman I., Pearson J.R.A., Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. J.Fluid Mech. 2, 237, (I957).

4. Brenner H., Cox R.G. The resistance to a particle of arbitrary shape in translational motion at small Reynolds numbers. J.Fluid Mech. I7, 56I-595, I968.

5. Odqvist, F.K.G. Über Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. Math. Zeit.32 (I930), 329-375.

6. Finn R. On the Exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated peturbation problems, Arch. Rational Mech. Anal. I9, N 5, 363-406 (I965).

7. Бабенко К.И., Васильев М.М. Об асимптотическом поведении стационарного течения вязкой жидкости вдали от тела, ПММ, том 37, 69I-705, I973.

8. Бабенко К.И. О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью, Мат. Сборник, том 9I (I33) № I, 3-26, (I973).

9. Lichtenstein L. Uber einige Existenz probleme der Hydrodynamik. Math.Zeit. 28,387-415, 725 (I928).