ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 33 за 1980 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Галактионова О.О.,
Златоустов В.А.

2π-периодические решения уравнения Дюффинга при малых значениях амплитуды вынуждающей силы

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
АКАДЕМИИ НАУК СССР

О.О.Галактионова, В.А. Златоустов

2π - ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЮФФИНГА ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ АМПЛИТУДЫ ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛЫ

Москва - I980

УДК 517.91/.93 : 534

А Н Н О Т А Ц И Я

Исследованы 2π-периодические решения уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} + \mu(x + a x^3) = e \sin t$$

при малых значениях амплитуды e вынуждающей силы. В случае $e = 0$ получено общее решение этого уравнения при различных значениях определяющих параметров μ и a, а также построена полная картина порождающих решений.

Проведенное исследование является необходимым этапом изучения 2π-периодических решений уравнения Дюффинга при произвольных значениях параметра e.

Ключевые слова и фразы: 2π-периодические решения, уравнение Дюффинга, порождающие решения.

Содержание

Введение

В работе исследуются общие свойства 2π - периодических решений уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} + \mu(x + ax^3) = e\sin t \qquad (1)$$

при малых значениях амплитуды e вынуждающей силы и при произвольных значениях параметров μ и a.

Уравнение (I), впервые рассмотренное в [I], описывает колебания материальной точки под действием упругой силы и внешней периодической силы с амплитудой e.

Изучение этого уравнения имеет большое прикладное значение, так как колебания, которые оно моделирует, часто встречаются в радиотехнике, электротехнике, а также во многих физических и механических системах. Оно описывает, например, установившиеся колебания цепей переменного тока, содержащих индуктивности в виде железных сердечников, автоколебания синхронных электрических машин [2], колебания сооружений с гибкими связями (мачт с растяжками, ЛЭП), маятниковых сооружений (подвесных оборудований, кранов с гибким подвесом), крупнопанельных зданий [3].

Уравнение Дюффинга изучалось многими авторами. В основном, использовались приближенные методы нелинейной механики, так как при произвольных значениях определяющих параметров общее решение этого уравнения неизвестно. Эти методы позволяют получить лишь картину поведения решения "в малом", например, в окрестности особых точек, и служат для выяснения качественных особенностей задачи и для получения асимптотик. Методы, применяемые в настоящей работе, обладают тем преимуществом, что они позволяют выяснить некоторые общие свойства решений и их поведение в целом. Аналогичные методы были использованы в работах [4], [5] для изучения периодических колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты и периодических решений уравнения, описывающего вынужденные колебания математического маятника.

Используя метод Чезари [6], а также результаты [7], в работе показано, что при $e \ll 1$ для уравнения (I), записанного в виде

$$\ddot{x} + F(x) = e f(t) \qquad (2)$$

и обладающего симметрией

$$F(x) = -F(-x), \quad f(t) = -f(-t), \quad f(t+\pi) = -f(t) \qquad (3)$$

(где $F(x) = \mu(x + ax^3)$, $f(t) = \sin t$), существует класс периодических решений, численное построение которых сводится к решению однопараметрических краевых задач.

В работе подробно исследуются 2π - периодические решения уравнения (I) при $e \ll 1$, а также получена общая картина поведения порождающих решений при $e = 0$ для значений параметра $|\mu| \leqslant 10$.

Нетрудно видеть, что в уравнении (I) изменение e на $-e$ равносильно сдвигу t на π. Поэтому дальнейшее исследование 2π - периодических решений уравнения (I) будет проводиться только при положительных значениях $e \geqslant 0$.

Если в уравнении (I) сделать замену переменных

$$z = \sqrt{|a|}\, x, \quad \varepsilon = \sqrt{|a|}\, e, \qquad (4)$$

то оно преобразуется к виду

$$\ddot{z} + \mu(z \pm z^3) = \varepsilon \sin t. \qquad (5)$$

Уравнение (5) совпадает с (I) при $|a| = 1$. Следовательно, если известны 2π - периодические решения уравнения (I) при значениях $|a| = 1$, то, изменяя масштаб по осям e и x согласно (4), можно получить 2π - периодические решения при произвольных значениях a. В связи с этим, исследование проводилось только при $|a| = 1$.

Отметим, что при $a = \dfrac{4(1-9\mu)}{3^8 e^2 \mu}$, $\mu \neq 1/9$ уравнение (1) имеет аналитическое 6π - периодическое решение $x = A\sin(t/3)$, где амплитуда $A = 27(9\mu-1)^{-1}$. При $a = 0$, $\mu \neq 1$ уравнение (I) имеет 2π - периодическое решение $x = e\sin t/(\mu-1)$, а при $\mu = 0$ - решение $x = -e\sin t$. Эти решения могут быть использованы для проверки правильности работы численных алгоритмов.

Авторы искренне признательны В.А.Сарычеву за постановку задачи, ценные советы и постоянное внимание к работе, а также В.В.Сазонову за неоднократные полезные обсуждения и критические замечания.

I. 2π - периодические решения уравнения Дюффинга при $e = 0$.

Если отсутствует внешняя периодическая сила $(e = 0)$, то (I) переходит в уравнение

$$\ddot{x} + \mu(x + ax^3) = 0, \qquad (6)$$

интеграл энергии которого имеет следующий вид:

$$H(x, \dot{x}) = \dot{x}^2/2 + \mu x^2/2 + \mu a x^4/4 = E. \qquad (7)$$

Здесь E - постоянная энергии.

I.I. Исследование периодических решений с помощью метода фазовой плоскости

Уравнение (6) имеет стационарные решения

$$x_z = 0 \qquad (a \text{ - любое}) \qquad (8)$$

$$x_z = \pm 1/\sqrt{-a} \qquad (a < 0) \qquad (9)$$

Для изучения структуры фазовой плоскости уравнения (6) воспользуемся классификацией Пуанкаре особых точек в зависимости от характера интегральных кривых вблизи этих точек. С этой целью будем исследовать корни характеристического уравнения, соответствующего линеаризованному в окрестности особых точек уравнению (6).

Рассмотрим следующие случаи:

I) $\mu < 0$, $a > 0$.

В этом случае на фазовой плоскости (рис. I) имеется только одна особая точка (0,0), которой соответствует стационарное решение (8). Эта точка является седловой точкой и в ее окрестности все фазовые траектории незамкнутые. Следовательно, в этом случае уравнение (6) не имеет периодических решений.

2) $\mu > 0$, $a > 0$.

На фазовой плоскости имеется единственная особая точка (0,0), являющаяся центром (рис. 2). В этом случае при $E \geqslant 0$ существует одно семейство периодических решений.

3) $\mu < 0$, $a < 0$.

В этом случае на фазовой плоскости (рис. 3) существуют три особые точки (0,0) и $(\pm 1/\sqrt{-a}, 0)$, в которых соответственно $H(0,0) = 0$ и $H(\pm 1/\sqrt{-a}, 0) = -\mu/4a$. Линия $E = 0$ является сепаратрисой, которая отделяет область существования двух семейств периодических решений $(-\mu/4|a| < E < 0)$ от области существования одного семейства периодических решений $(E > 0)$.

4) $\mu > 0$, $a < 0$.

На фазовой плоскости имеются три особые точки (рис. 4). Точка (0,0) является центром, а точки $(\pm 1/\sqrt{|a|}, 0)$ являются седловыми точками. В этом случае существует одно семейство периодических решений при $0 \leqslant E < \mu/4|a|$.

I.2. Физическая интерпретация картины движения

Рассмотренные выше случаи допускают достаточно наглядную физическую интерпретацию.

В случае 2) $(\mu > 0, a > 0)$ уравнение (6) описывает колебательную систему, состоящую из точечной массы, прикрепленной к упругой струне, которая совершает свободные колебания относительно нулевого положения равновесия (рис. 5а).

В случае 3) $(\mu < 0, a < 0)$ уравнение (6) моделирует колебательную систему, состоящую из двух упругих линейных элементов (стержни или пружины), которые могут свободно поворачиваться вокруг шарниров A, B (рис. 5в) [8]. Свободные концы пружин соединены шарниром C, масса m которого велика по сравнению с массами пружин. В ненапряженном состоянии пружины находятся в положениях AC' и BC'. При удлинении пружин на массу действует сила, пропорциональная жесткости пружины, под действием которой возникают колебания. В зависимости от знака потенциальной энергии, соответствующей предварительному сжатию или растяжению пружин, масса m может совершать колебания либо около положений равновесия $x_z = \pm 1/\sqrt{|a|}$, либо около положений равновесия $x_z = 0$, $x_z = \pm 1/\sqrt{|a|}$.

В случае $\mu > 0$, $a = -1/6$ уравнение (6) интерпретирует малые свободные колебания математического маятника (рис.5с).

I.3. Вывод формул общего решения уравнения (6)

С помощью интеграла энергии (7) можно проинтегрировать уравнение (6) в эллиптических функциях Якоби [9], [10]. Рассмотрим все возможные случаи.

Случай I $(\mu > 0, a > 0, E \geqslant 0)$.

Интеграл энергии (7) запишем в виде $-2\dot{x}^2 = \mu a x^4 + 2\mu x^2 - 4E$. Разложим правую часть на множители. Для этого найдем решение уравнения $\mu a x^4 + 2\mu x^2 - 4E = 0$ в виде $x_1^2 = (\mu+\delta)/\mu a$, $x_2^2 = \frac{(\delta-\mu)}{\mu a}$. Здесь $\delta = \sqrt{\Delta}$ и $\Delta = \mu^2 + 4\mu a E > 0$. Тогда (7) преобразуется следующим образом:

$$2\dot{x}^2 = -\mu a(x^2 + x_1^2)(x^2 - x_2^2) = \mu a (x_1 x_2)^2 \left(1 + \frac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{x_2^2}\right) =$$

$$= 4E\left(1 + \frac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{x_2^2}\right), \text{ т.к. } x_1^2 + x_2^2 = 2\delta/\mu a,$$

Отсюда $(x_1 x_2)^2 = 4E/\mu a$.

$$\sqrt{2E}\,dt = \pm dx \Big/ \sqrt{(1 + x^2/x_1^2)(1 - x^2/x_2^2)}. \qquad (10)$$

Обозначим $x/x_2 = \sqrt{1 - z^2}$, тогда $dx = -z x_2 dz/\sqrt{1 - z^2}$. Имеем

$$1 - \frac{x^2}{x_2^2} = z^2, \quad 1 + \frac{x^2}{x_1^2} = (x_1^2 + x_2^2)(1 - k^2 z^2)/x_1^2, \quad k^2 = x_2^2/(x_1^2 + x_2^2).$$

После несложных выкладок (I0) принимает вид

$$\sqrt{\delta}\,dt = \pm dz\Big/\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \;. \qquad (11)$$

Отсюда находим, что $z = \mathrm{sn}\sqrt{\delta}\,\tau$, где $\tau = t_0 + t$ и $t_0 = \mathrm{const}$. Переходя от z к x , получим общее решение в виде эллиптических функций Якоби

$$x(\tau) = \sqrt{(\delta-\mu)/\mu a}\;\mathrm{cn}[\sqrt{\delta}\,\tau] \;, \qquad (12)$$

$$\dot{x}(\tau) = -\sqrt{\delta(\delta-\mu)/\mu a}\;\mathrm{sn}[\sqrt{\delta}\,\tau]\,\mathrm{dn}[\sqrt{\delta}\,\tau] \;.$$

Решение (I2) является четной функцией τ . Положив $t_0^* = t_0 + K/\sqrt{\delta}$, запишем (I2) в виде нечетной функции $(t_0^* + t)$

$$x(t+t_0^*) = \sqrt{\frac{\delta-\mu}{\mu a}}\;\mathrm{sn}[\sqrt{\delta}(t+t_0^*)]\sqrt{1-k^2}\Big/\mathrm{dn}[\sqrt{\delta}(t+t_0^*)] \,. \qquad (13)$$

В дальнейшем будем использовать общее решение в форме (I3), которое перепишем в следующем виде:

$$x(t+t_0) = \sqrt{\frac{\delta-\mu}{\mu a}}\;\mathrm{sn}[\sqrt{\delta}(t+t_0)]\sqrt{1-k^2}\Big/\mathrm{dn}[\sqrt{\delta}(t+t_0)] \,. \qquad (14)$$

Из (I4) следует, что период $T_0 = 4K(k)/\sqrt{\delta}$, где $K(k)$ - полный эллиптический интеграл первого рода, k - модуль эллиптических функций.

Найдем пределы изменения модуля k . Пусть E стремится к нулю, тогда $\delta = \mu\sqrt{1+4aE/\mu}$ асимптотически приближается к μ и, следовательно, $k^2 \to 0$. С другой стороны, если $E \to \infty$, то $\delta \to \infty$ и $k^2 = 1/2 - \mu/2\delta$ стремится к I/2. Таким образом, $0 \le k^2 < 1/2$.

Аналогичным образом можно найти общее решение, период T_0 и пределы изменения k^2 и в остальных случаях. Приведем окончательные результаты для всех четырех случаев.

Случай I $(\mu > 0,\ a > 0,\ E \geq 0)$.

$$x_0 = \sqrt{\frac{\delta-\mu}{\mu a}}\;\mathrm{sn}[\sqrt{\delta}(t+t_0)]\sqrt{1-k^2}\Big/\mathrm{dn}[\sqrt{\delta}(t+t_0)] \,,$$

$$\dot{x}_0 = \sqrt{\frac{\delta(\delta-\mu)}{\mu a}}\;\mathrm{cn}[\sqrt{\delta}(t+t_0)]\sqrt{1-k^2}\Big/\mathrm{dn}^2[\sqrt{\delta}(t+t_0)] \,, \qquad (15)$$

$$\delta = \sqrt{\mu^2+4\mu a E} \,,\quad k^2 = (\delta-\mu)/2\delta \,,\quad T_0 = 4K(k)/\sqrt{\delta} \,,$$

$$(0 \le k^2 < 1/2)$$

Случай II $(\mu < 0,\ a < 0,\ E > 0)$.

$$x_0 = \sqrt{\frac{\delta-\mu}{\mu a}}\;\mathrm{sn}[\sqrt{\delta}(t+t_0)]\sqrt{1-k^2}\Big/\mathrm{dn}[\sqrt{\delta}(t+t_0)] \qquad (16)$$

$$\dot{x}_0 = \sqrt{\frac{\delta(\delta-\mu)}{\mu a}}\;\mathrm{cn}[\sqrt{\delta}(t+t_0)]\sqrt{1-k^2}\Big/\mathrm{dn}^2[\sqrt{\delta}(t+t_0)]$$

$$\delta = \sqrt{\mu^2+4\mu a E} \,,\quad k^2 = (\delta-\mu)/2\delta \,,\quad T_0 = 4K(k)/\sqrt{\delta} \,,$$

$$(1/2 < k^2 < 1)$$

Случай III $(\mu > 0,\ a < 0,\ 0 \le E < \mu/4|a|)$.

$$x_0 = \sqrt{\frac{\mu-\delta}{\mu|a|}}\;\mathrm{sn}\Big[\sqrt{\frac{2E\mu|a|}{\mu-\delta}}\,(t+t_0)\Big] \,, \qquad (17)$$

$$\dot{x}_0 = \sqrt{2E}\;\mathrm{dn}\Big[\sqrt{\frac{2E\mu|a|}{\mu-\delta}}(t+t_0)\Big]\,\mathrm{cn}\Big[\sqrt{\frac{2E\mu|a|}{\mu-\delta}}(t+t_0)\Big] \,,$$

$$\delta = \sqrt{\mu^2-4\mu|a|E} \,,\quad k^2 = \frac{\mu-\delta}{\mu+\delta} \,,\quad T_0 = 4K(k)\sqrt{\frac{\mu-\delta}{2E\mu|a|}} \,,$$

$$(0 \le k^2 < 1)$$

Случай IУ $(\mu < 0,\ a < 0,\ -|\mu|/4|a| \le E < 0)$.

$$x_0 = \pm\sqrt{\frac{|\mu|+\delta}{\mu a}}\;\mathrm{dn}\Big[\sqrt{\frac{2E\mu a}{\mu+\delta}}\,(t+t_0)\Big] \,, \qquad (18)$$

$$\dot{x}_0 = \mp\sqrt{\frac{2\delta^2}{\mu a}}\;\mathrm{sn}\Big[\sqrt{\frac{2E\mu a}{\mu+\delta}}(t+t_0)\Big]\,\mathrm{cn}\Big[\sqrt{\frac{2E\mu a}{\mu+\delta}}(t+t_0)\Big] \,,$$

$$\delta = 2\sqrt{\mu a(\mu/4a+E)} \,,\quad k^2 = \frac{2\delta}{\delta-\mu} \,,\quad T_0 = \frac{2\sqrt{2}\,K(k)}{\sqrt{\delta-\mu}} \,,$$

$$(0 \le k^2 < 1)$$

I.4. Классы порождающих решений

Будем исследовать порождающие периодические решения уравнения (I), т.е. такие периодические решения при $e = 0$, которые остаются периодическими и при ненулевом значении малого параметра e . Выделим среди общих решений невозмущенного уравнения (6) те, которые могут являться порождающими для периодических решений уравнения (I).

Уравнение (6) при $a<0$ имеет стационарные решения (8), (9), определяемые соотношениями

$$\dot{x}=0\ ,\quad \mu(x+ax^3)=0\ .$$

Решение (9) будем обозначать через θ_0. При $a>0$ существует одно стационарное решение (8).

Используя метод малого параметра, можно доказать, что стационарные решения (8), (9) являются порождающими для 2π - периодических решений уравнения (I) при $e\ll 1$.

Среди общих решений уравнения (6) выделим теперь нестационарные порождающие периодические решения. Для этих решений выполняются условия периодичности

$$T_0=2\pi m/n\ , \tag{19}$$

где m, n - взаимно простые натуральные числа. Соотношение (I9) определяет постоянную k и выделяет, тем самым, для каждого значения m и n однопараметрическое семейство решений, описываемое формулами (I5), (I6), (I7), (I8) и зависящее от параметра t_0. Постоянная t_0 будет определена позже. Любое порождающее решение из этого семейства переходит в $2\pi m$ - периодическое решение при достаточно малом e. Искомые решения уравнения (I) будем называть решениями вида m/n.

2. Исследование 2π - периодических решений уравнения Дюффинга при $e\ll 1$

Рассмотрим периодические колебания при малых амплитудах e возмущающей силы $e\sin t$.

Если $\mu\neq(2s+1)^2$ $(s=0,1,2,\dots)$, то при достаточно малых e, существует единственное 2π - периодическое решение уравнения (I) $x_z(t,e)$, аналитически зависящее от e и переходящее при $e=0$ в решение (8). Используя теорему Банаха о неподвижной точке [I2] также можно доказать, что при $\mu\neq(2s+1)^2$, $|e|<4\sqrt{6}/\{\pi[1+|\mathrm{tg}\sqrt{\mu}\frac{\pi}{2}|]\}^{3/2}9\mu^{-1}|a|^{1/2}$ существует единственное 2π - - периодическое решение $x_z(t,e)$, переходящее при $e=0$ в стационарное порождающее решение $x_z=0$. Точки $\mu=(2s+1)^2$ при $e=0$ являются точками бифуркации.

Для этого решения справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x_z(t+\pi,e)&=-x_z(t,e)\ ,\\ x_z(t,-e)&=-x_z(t,e)\ ,\\ x_z(-t,e)&=-x_z(t,e)\ . \end{aligned} \tag{20}$$

Используя результаты [II], докажем последнее соотношение (20). Для этого представим уравнение (I) в виде $\ddot{x}+\mu x=\varphi(x,t,e)$, где $\varphi(x,t,e)=-\mu a x^3+e\sin t$. В [II] показано, что если выполняется $\varphi(x,t,e)=-\varphi(-x,-t,e)$, то решение $x_z(t,e)$ является нечетным.

Отыскание 2π - периодических решений $x_z(t,e)$ сводится к решению краевой задачи

$$x_0(0)=x(2\pi)=0\ ,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}(2\pi)=0 \tag{21}$$

для уравнения (I). Вследствие нечетности решений $x_z(t,e)$ краевые условия (2I) можно заменить условием

$$x(0)=x(\pi)=0 \tag{22}$$

Если $\mu\neq-s^2/2$ $(s=1,2,\dots)$, то существует единственное 2π - периодическое решение $\theta_0(t,e)$, аналитически зависящее от e и переходящее при $e=0$ в стационарное порождающее решение $\theta_0=\pm 1/\sqrt{-a}$.

Численное определение решений $\theta_0(t,e)$ сводится к решению краевой задачи

$$\dot{x}(\pi/2)=\dot{x}(3\pi/2)=0\ . \tag{23}$$

Для решений $x_z(t,e)$ краевые условия (22), (23) можно объединить и записать в виде

$$x(0)=\dot{x}(\pi/2)=0\ . \tag{24}$$

При исследовании $2\pi m$ - периодических решений уравнения (I) в случае $e\ll 1$, которые при $e=0$ переходят в $2\pi\frac{m}{n}$ - периодические решения, воспользуемся методами [6], [7].

Рассмотрим сначала случаи I, II и III. Будем использовать общее решение $x_0(t+t_0)$ в случаях I, II в виде (I5), (I6), а в случае III - в виде (I7). Функции $x_0(t+t_0)$ являются $2\pi\frac{m}{n}$ - - периодическими и зависят от двух постоянных k и t_0. Постоянная k была определена с помощью (I9). Для определения постоянной t_0 применяется метод Чезари - Хейла. Используя этот метод, а также, следуя [7], [II], рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{aligned} &\ddot{x}+\mu(x+ax^3)=e\sin t-p\,\dot{x}_0(t+t_0)\ ,\\ &\int_0^{2\pi m} x\,\dot{x}_0(t+t_0)\,dt=0\ , \end{aligned} \tag{25}$$

где x - неизвестная функция, p - неизвестная постоянная, t_0 - - искомая постоянная. При достаточно малых e система (25) имеет единственное $2\pi m$ - периодическое решение

$$x=x(t,t_0,e)\ ,\quad p=p(t_0,e) \tag{26}$$

удовлетворяющее соотношениям $x(t,t_0,0)=x_0(t+t_0)$, $p(t_0,e)=0$.
В [7] показано, что исследование $2\pi m$ - периодических решений уравнения (I) при $e\ll 1$ сводится к определению корней $t_0=t_0(e)$ так называемого бифуркационного уравнения

$$p(t_0,e)=0 . \qquad (27)$$

Отсюда следует, что $x(t,e)=x(t,t_0(e),e)$ - $2\pi m$ - периодическое решение уравнения (I). Используя свойства симметрии (3), а также нечетность функции $x_0(t)$, можно установить следующие соотношения [7]:

$$\begin{aligned} &x(t+\pi,t_0,e)=x(t,t_0+\pi,-e)\\ &p(t_0+\pi,e)=p(t_0,-e)\\ &x(t,t_0+\pi m/n,e)=-x(t,t_0,-e)\\ &p(t_0+\pi m/n,e)=p(t_0,-e) . \end{aligned} \qquad (28)$$

Функция $p(t_0,e)$ имеет период $2\pi/n$ и является нечетной. Следовательно, бифуркационное уравнение (27) имеет $2m$ тривиальных корней

$$t_0^{(z)}=\pi z/n \qquad (z=0,1,\ldots,2m-1), \qquad (29)$$

которым соответствуют периодические решения

$$x^{(z)}_{n/m}(t,e)=x(t,t_0(e),e) . \qquad (30)$$

В случае m = I численное определение этих решений сводится к решению для уравнения (I) при $e\neq 0$ однопараметрической краевой задачи (22). Нетрудно показать, что в случае, если одно из чисел m или n четно, то имеет место соотношение

$$p(t_0+\pi/n,e)=p(t_0,e) \qquad (31)$$

и бифуркационное уравнение (27), кроме корней (29), имеет еще $2m$ корней вида

$$\bar t_0^{(z)}=\pi(2z+1)/2n \qquad (z=0,1,\ldots,2m-1) . \qquad (32)$$

Им соответствуют периодические решения

$$\bar x^{(z)}_{n/m}=x(t,\bar t_0^{(z)},e) , \qquad (33)$$

которые при m =I удовлетворяют краевым условиям (23). Условия (22) и (23) можно объединить при нечетных n в одно условие (24).

Рассмотрим теперь случай IУ $(\mu<0, a<0, -|\mu|/4|a|\le E<0)$. В этом случае общее решение $x_0(t+t_0)$ выражается в виде (18) и является четной функцией $t+t_0$. Поэтому в соответствии с [7] перейдем к уравнению

$$\ddot x+\mu(x+ax^3)=ef(t) , \qquad (34)$$

где $f(t)=\cos t$.
В [7] показано, что если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &f(t)=f(-t) ,\\ &x(-t,t_0,0)=x(t,t_0,0), \end{aligned} \qquad (35)$$

то решение вспомогательной системы

$$\begin{aligned} &\ddot x+\mu(x+ax^3)=e\cos t-p\dot x_0(t+t_0) ,\\ &\int_0^{2\pi m} x\dot x_0(t+t_0)\,dt=0 \end{aligned} \qquad (36)$$

удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &x(-t,t_0,e)=x(t,-t_0,e) ,\\ &p(-t_0,e)=-p(t_0,e) . \end{aligned} \qquad (37)$$

Для доказательства рассмотрим $2\pi m$ - периодическую функцию $\varphi(t,e)=x(-t,t_0,e)$. Легко получить равенства

$$\ddot\varphi(t,e)=\ddot x(-t,t_0,e)=-F[x(-t,t_0,e)]+ef(-t)-p(t_0,e)\dot x_0(t-t_0),$$

$$\int_0^{2\pi m} x(-t,t_0,e)\dot x_0(-t+t_0)\,dt=\int_0^{2\pi m}\varphi(t,e)\dot x_0(t-t_0)\,dt=0 ,$$

$$\varphi(t,0)=x_0(t-t_0) .$$

Здесь использовались соотношения (3) и четность функции $x_0(t)$. Так как $2\pi m$ - периодическое решение системы (36) единственно, то

$$\varphi(t,e)=x(t,-t_0,e) , \quad p(t_0,e)=-p(-t_0,e)$$

и соотношения (37) доказаны. Функция $p(t_0,e)$ является нечетной $2\pi/n$ - периодической и бифуркационное уравнение имеет $2m$ тривиальных корней

$$t_0^{(z)}=\pi z/n \qquad (z=0,1,2,\ldots,2m-1) . \qquad (38)$$

Из (37) следует, что

$$\dot x(t,-t_0,e)=-\dot x(-t,t_0,e)$$

и поэтому при m =I для уравнения (34) справедливы соотношения [II]

$$\dot x(0)=\dot x(\pi)=0 . \qquad (39)$$

Уравнение (I) получается из уравнения (34) заменой t на $t+\pi/2$, поэтому краевые условия, которым должны удовлетворять решения $x^{(z)}_{n/m}$ в случае IУ, имеют вид (23). Для удобства изложения решения $x^{(z)}_{n/m}$ в этом случае будем обозначать по аналогии с (9) через $\theta^{(z)}_{n/m}$.

3. Начальные условия для порождающих $2\pi\frac{m}{n}$ - периодических решений

Порождающие $2\pi\frac{m}{n}$ - периодические решения построены только для случая m =I, так как при $e\ll$ I исследуются

2π - периодические решения уравнения (I). В этом случае значение $\varepsilon = 0,I$.

3.I. Решения $x_{n/m}^{(\varepsilon)}$.

Используя значения постоянной $t_0^{(\varepsilon)}$ (29), получим начальные условия (значения $x_0(0)$ и $\dot{x}_0(0)$) для порождающих решений $x_{n/m}^{(\varepsilon)}$ в случаях I, II, III, которые имеют следующий вид:

Случай I $(\mu > 0, a > 0, E \geq 0, 0 \leq k^2 < 1/2)$.

$$\delta = 4K^2(k)n^2/\pi^2 m^2, \quad \mu = \delta(1 - 2k^2),$$
$$x_0(0) = 0, \qquad (40)$$
$$\dot{x}_0(0) = \pm\sqrt{(\delta^2 - \mu^2)/2\mu a}$$

Случай II $(\mu < 0, a < 0, E > 0, 1/2 < k^2 < 1)$.

$$\delta = 4K^2(k)n^2/\pi^2 m^2, \quad \mu = \delta(1 - 2k^2) \qquad (41)$$
$$x_0(0) = 0,$$
$$\dot{x}_0(0) = \pm\sqrt{(\delta^2 - \mu^2)/2\mu a}.$$

Случай III $(\mu > 0, a < 0, 0 \leq E < \mu/4|a|, 0 \leq k^2 < 1)$.

$$\delta = 4K^2(k)n^2(1 - k^2)/\pi^2 m^2, \quad \mu = \frac{4K^2(k)n^2(1 + k^2)}{\pi^2 m^2},$$
$$x_0(0) = 0 \qquad (42)$$
$$\dot{x}_0(0) = \pm\sqrt{(\delta^2 - \mu^2)/2\mu a}.$$

Здесь при $m = 1$ верхний знак соответствует значению $\varepsilon = 0$, а нижний знак - $\varepsilon = 1$.

Проанализируем эти формулы в предельных случаях.

В случае I при $k^2 = 0$ имеем $K(0) = \frac{\pi}{2}$, $\mu = \delta = \frac{n^2}{m^2}$, $\dot{x}_0(0) = 0$. Таким образом, в точках бифуркации $\mu = n^2/m^2$ $(\mu = I, 4, 9, \ldots$ при $m = 1)$ из стационарного решения (8) рождаются два нестационарных порождающих решения $x_{n/m}^{(\varepsilon)}$ с периодом $T_0 = 2\pi\frac{m}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ При $k^2 \to 1/2$ получаем, что $\mu \to 0$, $|\dot{x}(0)| \to \infty$. При $k^2 \ll 1$ получается явная зависимость

$$\dot{x}(0) = \pm\frac{2n}{m}\sqrt{(n/m)^2 - \mu}\,/\sqrt{3\mu a} \qquad (43)$$

Из (43) следует, что нестационарные порождающие решения существуют в диапазоне $0 < \mu \leq n^2/m^2$.

В случае II при $k^2 \to 1/2$ имеем $\mu \to 0$ и $|\dot{x}(0)| \to \infty$, а при $k^2 \to 1$ получаем $\mu \to \infty$ и $|\dot{x}(0)| \to 0$. Следовательно, в рассматриваемом случае нестационарные порождающие решения существуют в диапазоне $0 < \mu < \infty$ и точки бифуркации отсутствуют.

В случае III при $k^2 = 0$ в точках бифуркации $\mu = n^2/m^2$ $(\mu = 1, 4, 9, \ldots$ при $m = 1)$ из стационарного решения (8) рождаются два нестационарных порождающих решения $x_{n/m}^{(\varepsilon)}$ с периодом $T_0 = 2\pi m/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. При $k^2 \to 1$ получаем уравнение сепаратрисы $\dot{x}(0) = \pm\sqrt{\mu/2(-a)}$, которая является параболой и начинается в начале координат. При $k^2 \ll 1$ имеет место соотношение

$$\dot{x}(0) = \pm\frac{2n}{m}\sqrt{\mu - (n/m)^2}\,/\sqrt{3\mu(-a)}, \qquad (44)$$

из которого следует, что нестационарные порождающие решения в этом случае существуют при $\mu \geq (n/m)^2$.

Описываемая с помощью формул (40), (4I), (42) зависимость $\dot{x}(0)$ от μ для различных значений $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $m = 1$ приведена на рис. 6. Значению $\varepsilon = 0$ соответствуют положительные ветви, а значению $\varepsilon = 1$ - отрицательные ветви. При $\mu > 0$ $(a > 0$ и $a < 0)$ кривые начинаются в точках бифуркации $\mu = 1$ $(n = 1)$, $\mu = 4$ $(n = 2)$ и $\mu = 9$ $(n = 3)$. При $\mu < 0, a < 0$ точек бифуркации нет. Введем для нестационарных порождающих решений $x_{n/1}^{(\varepsilon)}$ $(\varepsilon = 0, 1)$ и соответствующих им 2π - периодических решений при $e \neq 0$ следующие обозначения: $\alpha_{n/1}^{(\varepsilon)}$ (при $\mu > 0$, $a > 0$), $\beta_{n/1}^{(\varepsilon)}$ (при $\mu < 0, a < 0$) и $x_{n/1}^{(\varepsilon)}$ (при $\mu > 0, a < 0$).

Периодические решения при $e \neq 0$, рождающиеся из стационарного решения $x_z = 0$, будем обозначать через x_z^+ при $1 < \mu < \infty$ и через x_z^- при $-\infty < \mu < 1$. Решению $x_z = 0$ на рис. 6 соответствует ось абсцисс.

3.2. Решения $\bar{x}_{n/m}^{(\varepsilon)}$

Эти решения существуют при четных n. Используя значения постоянной $\bar{t}_0^{(\varepsilon)}$ (32), получим начальные условия (значения $x(\pi/2)$ и $\dot{x}(\pi/2)$) для порождающих решений $\bar{x}_{n/m}^{(\varepsilon)}$ из формул (I5)-(I7).

Случай I ($\mu > 0,\ a > 0,\ E \geqslant 0,\ 0 \leqslant k^2 < 1/2$).

$$\delta = 4K^2(k)\,n^2/\pi^2 m^2\ ,\quad \mu = \delta(1-2k^2)$$

$$x(\pi/2) = \pm\sqrt{(\delta-\mu)/\mu a}\ , \tag{45}$$

$$\dot{x}(\pi/2) = 0.$$

Случай II ($\mu < 0,\ a < 0,\ E > 0,\ 1/2 < k^2 < 1$).

$$\delta = 4K^2(k)\,n^2/\pi^2 m^2\ ,\quad \mu = \delta(1-2k^2)\ ,$$

$$x(\pi/2) = \pm\sqrt{(\delta-\mu)/\mu a}\ ,$$

$$\dot{x}(\pi/2) = 0\ . \tag{46}$$

Случай III ($\mu > 0,\ a < 0,\ 0 \leqslant E < \mu/4|a|,\ 0 \leqslant k^2 < 1$).

$$\delta = \frac{1-k^2}{1+k^2}\mu\ ,\quad \mu = \frac{4K^2(k)n^2}{\pi^2 m^2}(1+k^2)\ ,$$

$$x(\pi/2) = \pm\sqrt{(\delta-\mu)/\mu a}\ ,$$

$$\dot{x}(\pi/2) = 0\ . \tag{47}$$

Здесь снова при m =I верхний знак соответствует значению ε =0, а нижний знак – ε = I.

Проанализируем эти формулы в предельных случаях. В случае I при k^2 =0 имеем точки бифуркации $\mu = (n/m)^2$, в которых $x(\pi/2) = 0$. При $k^2 \to$ I/2 имеем $\mu \to 0$ и $|x(\pi/2)| \to \infty$. Если $k^2 \ll 1$, то можно получить явную зависимость $x(\pi/2)$ от μ

$$x(\pi/2) = \pm 2\sqrt{(n/m)^2-\mu}\,/\sqrt{3\mu a}\ . \tag{48}$$

Из (48) следует, что решения существуют при $0 < \mu \leqslant (n/m)^2$. В случае II при $k^2 \to 1/2$ получаем $\mu \to 0$, $|x(\pi/2)| \to \infty$. При $k^2 \to 1$ параметр μ будет стремиться к бесконечности, а $|x(\pi/2)|$ – к нулю. Точек бифуркации в этом случае нет.

В случае III при $k^2 = 0$ имеем точки бифуркации $\mu = (n/m)^2$, в которых $x(\pi/2) = 0$. При $k^2 \to 1$ параметр μ стремится к бесконечности, а величина $|x(\pi/2)| \to 1/\sqrt{-a}$. Если $k^2 \ll 1$, то

$$x(\pi/2) = \pm 2\sqrt{\mu-(n/m)^2}\,/\sqrt{3\mu(-a)}\ . \tag{49}$$

Решения в этом случае существуют при $\mu \geqslant (n/m)^2$.

Начальные значения при m =I и n =2 представлены на рис. 7. При $\mu > 0$ ($a > 0$ и $a < 0$) имеется точка бифуркации μ =4, в которой появляются попарно нестационарные порождающие решения с периодом $T_0 = \pi$.

3.3. Решения $\theta^{(\varepsilon)}_{n/m}$.

Начальные условия для порождающих решений $\theta^{(\varepsilon)}_{n/m}$ имеют следующий вид:

Случай IV ($\mu < 0,\ a < 0,\ -|\mu|/4|a| \leqslant E < 0,\ 0 \leqslant k^2 < 1$).

$$\delta = n^2 k^2 K^2(k)/\pi^2 m^2\ ,\quad \mu = \delta(1-2k^{-2})\ .$$

При m =I получаем в случае ε =0

$$\theta^{(0)}(\pi/2) = \pm\sqrt{(\delta-\mu)/\mu a} \tag{50}$$

а в случае ε =I

$$\theta^{(1)}(\pi/2) = \pm\sqrt{-(\delta+\mu)/\mu a} \tag{51}$$

Здесь $\theta^{(0)}$, $\theta^{(1)}$ обозначают различные ветви решения $\theta_{n/1}$.

Из формул (50), (5I) имеем приближенные зависимости $\theta^{(\varepsilon)}$ (ε =0, I) от μ

$$\theta^{(0)}(\pi/2) = \pm\frac{n}{2}\sqrt{\frac{2}{\mu a}}\ ,$$

$$\theta^{(1)}(\pi/2) = \pm\sqrt{-2\left(\mu+\frac{n^2}{4}\right)}\,\frac{1}{\sqrt{\mu a}}$$

Точки бифуркации находятся из условия $\theta^{(0)} = \theta^{(1)}$ и имеют вид

$$\mu = -n^2/2 \tag{52}$$

В точках бифуркации (52) $\theta^{(\varepsilon)} = \pm 1/\sqrt{-a}$. Пусть $k^2 \to 1$, тогда $\mu \to -\delta$, $\theta^{(0)} \to \pm\sqrt{2/(-a)}$, $\theta^{(1)} \to 0$.

Зависимость $\theta(\pi/2)$ от μ для нестационарных порождающих решений $\theta^{(\ell)}_{n/1}$ (ℓ =0,I), описываемых с помощью формул (50), (5I), изображена на рис. 8 при значениях n =I,2,3,4. Кривые $\theta^{(\ell)}_{n/1}$ начинаются в точках бифуркации μ =-I/2(n =I), μ = -2(n =2), μ =-4,5(n =3), μ = -8(n =4). Пунктирные линии на рис. 8 соответствуют стационарным решениям $\theta_0 = \pm 1/\sqrt{-a}$, из которых в точках бифуркации рождаются нестационарные порождающие решения $\theta^{(0)}$ и $\theta^{(1)}$. Эти решения сливаются при значениях $\theta^{(0)} = \theta^{(1)} = \pm 1/\sqrt{-a}$ $(a=-1)$. Решение $\theta^{(1)}$ имеет своей асимптотой ось абсцисс, а решение $\theta^{(0)}$ имеет своими асимптотами значения $\theta = \pm\sqrt{2/(-a)}$.

Литература

I. Duffing G., Erzwungene Schwingungen bei veranderlicker Eigenfrequnz und ihre techniche Bedeutung, Braunscheig, 1918.

2. Гард Р.М., Применение метода наименьших квадратов в приближении многочленом к решению нелинейных дифференциальных уравнений для электрических цепей и других нелинейных физических систем, Механика, М., Мир, 1971, 3 ж 127.

3. Чарушин В.А., О количественной оценке вынужденных колебаний нелинейной механической системы, Труды инж. Горьк. инст., 1969, вып. 54.

4. Сарычев В.А., Златоустов В.А. Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты, препринт № 48, ИПМ, 1975.

5. Сарычев В.А., Сазонов В.В., Златоустов В.А. Вынужденные периодические колебания математического маятника, Препринт № 32, ИПМ, 1977.

6. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Мир, 1964.

7. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Об одном методе исследования периодический решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Препринт № 105, ИПМ, 1976.

8. Каудерер Г. . Нелинейная механика, ИЛ, М., 1961.

9. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле, М., Наука, 1967.

10. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям, АН СССР, М., 1941.

11. Сарычев В.А., Златоустов В.А., Сазонов В.В. Численное исследование периодических решений дифференциальных уравнений второго порядка, Отчет ИПМ, 1977.

12. Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Мир, М., 1970.

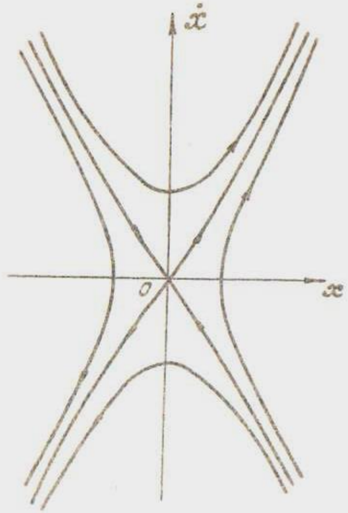

Рис.1 $\mu<0,\ a>0$

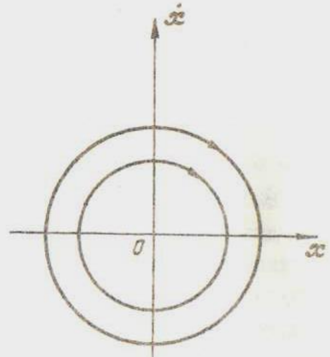

Рис.2 $\mu>0,\ a>0$

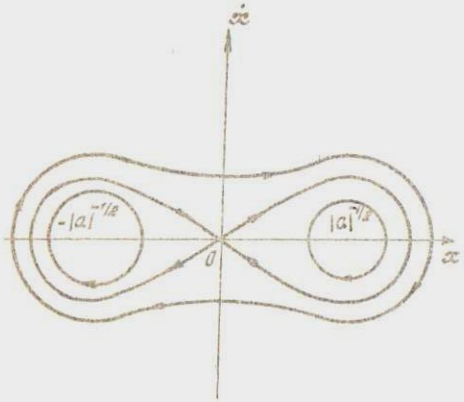

рис.3 $\mu<0,\ a<0$

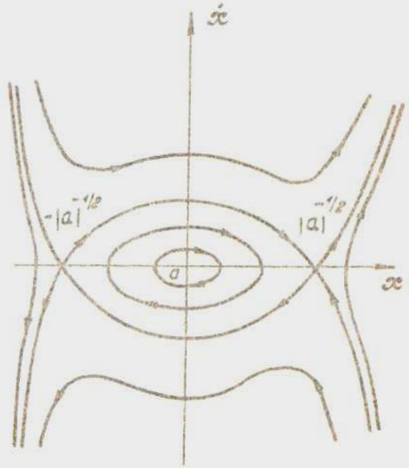

рис.4 $\mu>0,\ a<0$

Фазовая плоскость уравнения Дюффинга при $e=0$

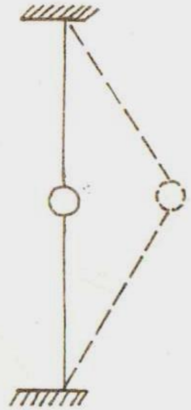

рис. 5а

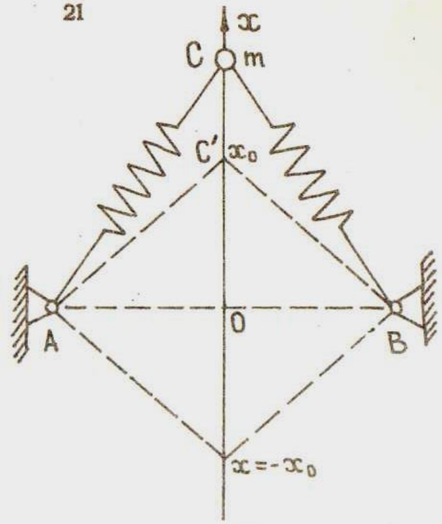

рис. 5в

рис. 5с

ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КАРТИНЫ ДВИЖЕНИЯ

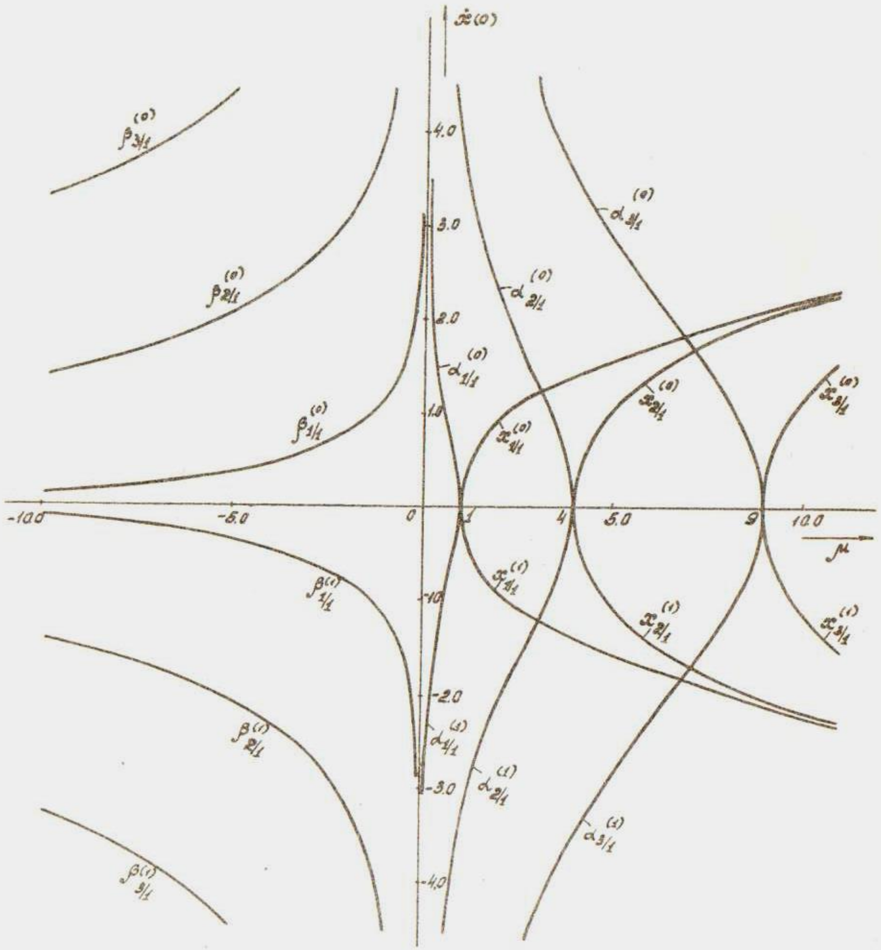

Рис.6. Нестационарные порождающие $2\pi\frac{m}{n}$ - -периодические решения $x^{(z)}_{n/m}$, $\alpha^{(z)}_{n/m}$, $\beta^{(z)}_{n/m}$ при $|a|=1$ $(m=1,\ n=1,2,3;\ z=0,1)$.

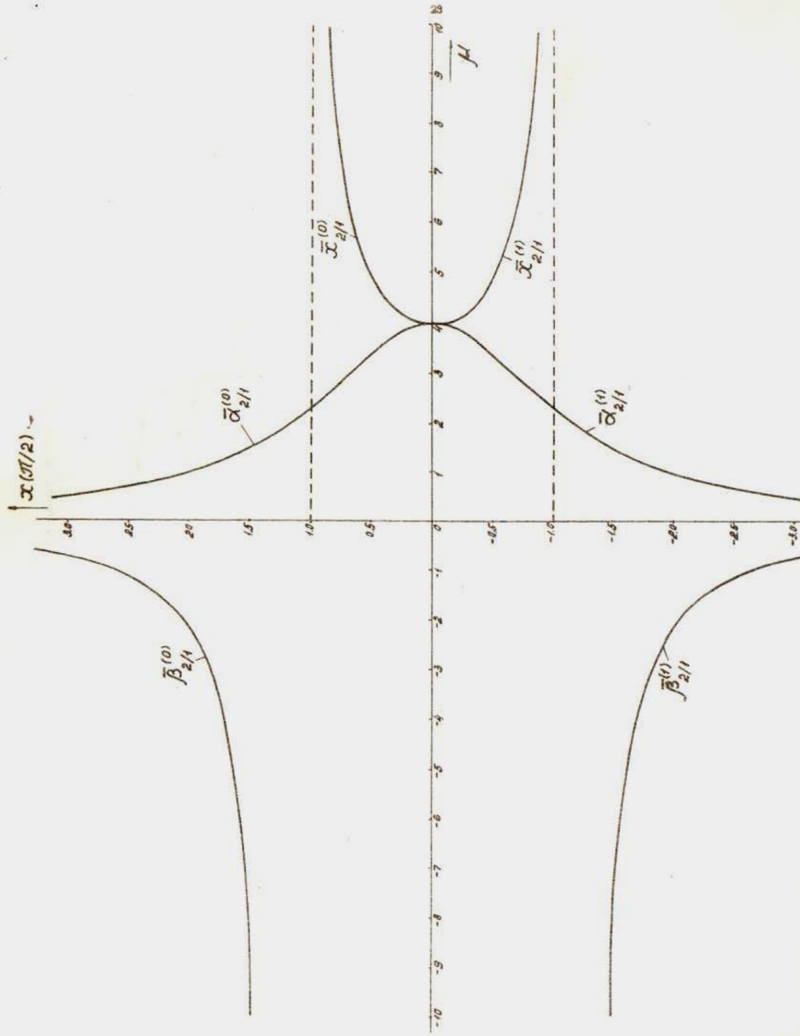

Рис.7. Нестационарные порождающие $2\pi\frac{m}{n}$-периодические решения $\bar{x}^{(z)}_{n/m}$, $\bar{\alpha}^{(z)}_{n/m}$, $\bar{\beta}^{(z)}_{n/m}$, при $|a|=1$ $(m=1,\ n=2;\ z=0,1)$.

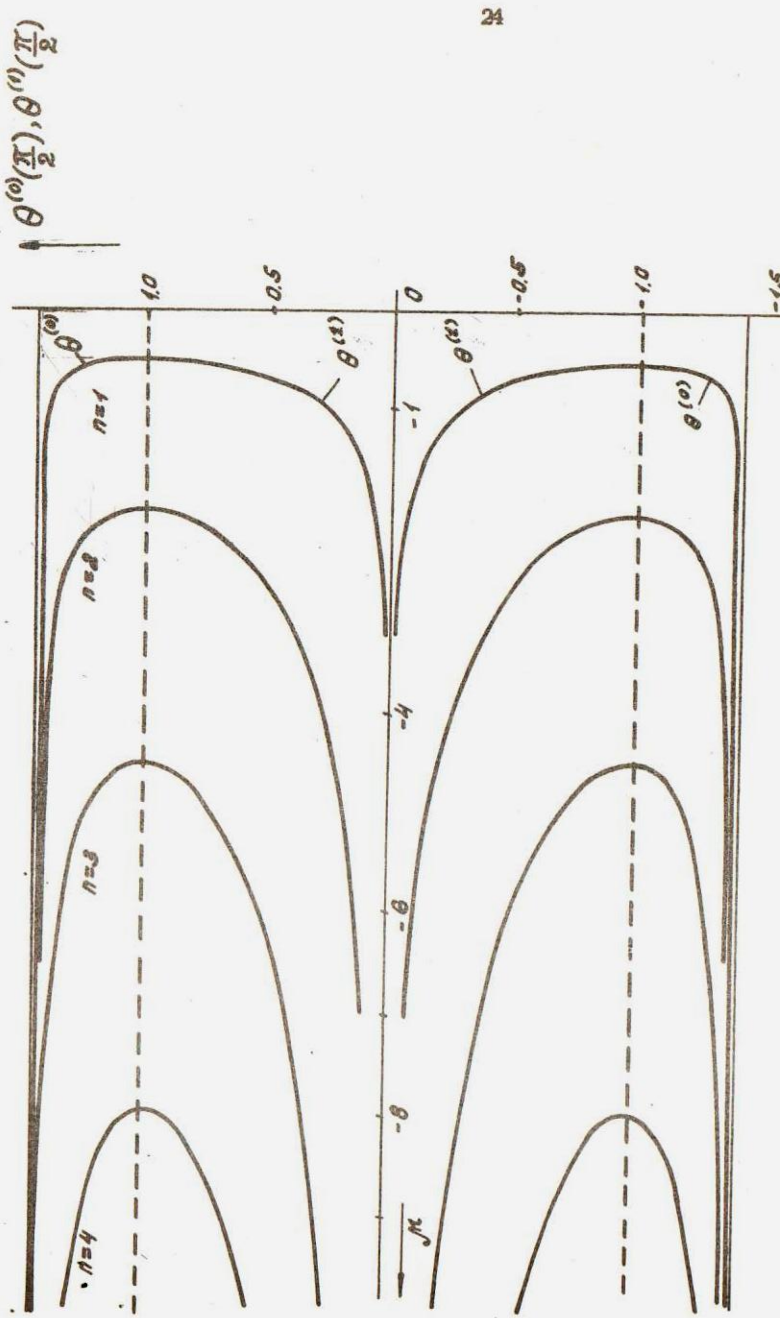

Рис.8 Нестационарные порождающие $2\pi \frac{m}{n}$ - периодические решения $\Theta^{(s)}_{n/m}$ при a=-1 (m=1, n=1,2,3,4; ε=0.1)

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме: и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Adress: USSR, 125047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.