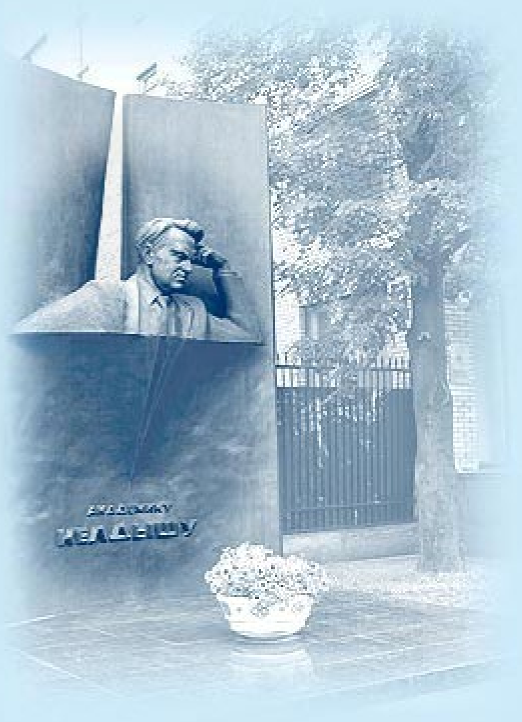
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 43 за 1981 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.Я. Гольдин, А.В. Шильков

Уравнения высокотемпературной радиационной газодинамики в квазидиффузионном виде

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гольдин В.Я., Шильков А. В. Уравнения высокотемпературной радиационной газодинамики в квазидиффузионном виде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1981. № 43. 9 с. https://doi.org/10.20948/prepr-1981-43
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1981-43

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
А к а д е м и и н а у к С С С Р

В.Я. Гольдин, А.В. Шильков

Уравнения высокотемпературной радиационной газодинамики в квазидиффузионном виде

Москва — 1981

Гольдин В.Я., Шильков А.В.

Уравнения высокотемпературной радиационной газодинамики в квазидиффузионном виде

Препринт Института прикладной математики им.М.В. Келдыша АН СССР 1981, № 43.

Получены уравнения РГД приспособленные для расчетов на ЭВМ без априорных предположений о распределении фотонов для нерелятивистского газодинамического движения, пригодные для условий, когда эффекты рассеяния не является доминирующими.

Ключевые слова: высокотемпературная радиационная газовая динамика, численные методы

Goldin V.Ya., Shilkov A.V.

High-temperature radiation gas dynamics equations in quasi-diffusion form

Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics of the USSR Academy of Sciences, 1981, No 43.

Nonrelativistic equations of radiation gas dynamics are obtained, adapted for calculations on computers without assumptions about the distribution of photons. These equations are suitable for problems in which the processes of scattering do not prevail over the processes of emission and absorption of photons.

Key words: high-temperature radiation gas dynamics, numerical methods

Общая система уравнений радиационной газодинамики (РГД) в однотемпературном приближении для газа дана в [1]. Однако эта система слишком сложна для реализации. В [2]-[4] были получены упрощенные системы РГД, в которых предположено, что угловое распределение достаточно близко к изотропному, а спектр – к равновесному или серому. В [1]-[4] приводится обширная литература.

Ниже, основываясь на квазидиффузионном методе [5], [6], мы получим достаточно простую систему РГД без априорных предположений о распределении фотонов. При этом мы ограничимся случаем нерелятивистского газодинамического движения и условиями, в которых можно пренебречь эффектами комптонизации и индуцированного рассеяния. Более подробно эти условия рассмотрим ниже.

Для нерелятивистского движения в двухтемпературном приближении (для среды) аналогично [1] можно получить уравнения

$$\frac{d\rho}{\partial t} + \rho\, div\, \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{du^k}{dt} + \frac{\partial [P_e + P_i]}{\partial r^k} + \frac{\partial P_r^{kl}}{\partial r^l} = 0,$$

$$\rho \frac{d\varepsilon_e}{dt} + P_e \rho \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho}\right] + \frac{\partial [W_{T,e}^k + W^k]}{\partial r^k} - u^k \frac{\partial P_r^{kl}}{\partial r^l} + \frac{\partial U}{\partial t} = Q_{i\to e} + Q_e,$$

$$\rho \frac{d\varepsilon_i}{dt} + P_i \rho \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho}\right] + \frac{\partial W_{T,i}^k}{\partial r^k} = -Q_{i\to e} + Q_i.$$

Здесь d/dt – лагранжева производная, пространственные производные относятся к эйлеровым переменным. ε_e, ε_i, P_e, P_i, $\mathbf{W}_{T,e}$, $\mathbf{W}_{T,i}$ – соответственно удельная внутренняя энергия, давление и теплопроводный поток электронной (e) и ионной (i) компонент. $Q_{i\to e}$ – поток энергии от ионной к электронной компоненте. Q_e, Q_i – объемные источники энергии. К уравнениям (1) присоединяются уравнения состояния и выражения для теплопроводных потоков [7].

Неравновесные радиационные величины: объемная плотность энергии излучения U, поток энергии $\mathbf{W}$ и тензор давления излучения P_r^{kl} определяются через интенсивность излучения $I(\nu, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t)$

$$U(\mathbf{r},t)=\frac{1}{c}\int I\,d\Omega d\nu\,,\quad \mathbf{W}(\mathbf{r},t)=\int \mathbf{\Omega} I\,d\Omega d\nu\,,\quad P_r^{kl}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{c}\int \Omega^k\Omega^l I\,d\Omega d\nu\,. \tag{2}$$

Интенсивность I относится к инерциальной лабораторной системе координат K и удовлетворяет кинетическому уравнению переноса [3]

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t}+\Omega^k\frac{\partial I}{\partial r^k}=J_{st}\,,\qquad J_{st}=-\varkappa I+\varepsilon\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}I\right]+S_c\,, \tag{3}$$

$$S_c=\int f(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}\int d\sigma\left[-I(\nu,\mathbf{\Omega})+\left[\frac{\nu}{\nu'}\right]^3 I(\nu',\mathbf{\Omega}')\exp\left(-\frac{h[\nu-\nu']}{kT_e}\right)\right].$$

Интеграл столкновений J_{st} в (3) пока не конкретизирован, т.к. коэффициент поглощения $\varkappa$, коэффициент испускания ε и функция распределения электронов $f(\mathbf{p})$ относительно просто задаются в K_0 – собственной (локально-инерциальной) системе координат, связанной с веществом, а $d\sigma$ в K_1 – собственной системе координат рассеивающего электрона. Связь между величинами в K и K_0, K_0 и K_1 определяется преобразованиями Лоренца. Поэтому мы сформулируем интеграл столкновений J_{st} в системе K_0, а затем перейдем в лабораторную с.к. K. Принимая, что в K_0 справедлив закон Кирхгофа и, следуя [2], [3], получим

$$J_{st}^0=-\varkappa'(\nu_0,T_e,\rho)\,I_0(\nu_0,\mathbf{\Omega}_0,\mathbf{r},t)+\varkappa'(\nu_0,T_e,\rho)\,I_{Pl}(\nu_0,T_e)+S_c^0\,, \tag{4}$$

$$S_c^0=\int f_0(\mathbf{p}_0)\,d\mathbf{p}_0\int d\sigma_0\left[-I_0(\nu_0,\mathbf{\Omega}_0)+\left[\frac{\nu_0}{\nu_0'}\right]^3 I_0(\nu_0',\mathbf{\Omega}_0')\exp\left(-\frac{h[\nu_0-\nu_0']}{kT_e}\right)\right], \tag{5}$$

$$d\sigma_0=L_0\,d\sigma_1\,,\quad L_0=1-\boldsymbol{\beta}_0\mathbf{\Omega}_0\,,\quad \boldsymbol{\beta}_0=\mathbf{p}_0/m_e c\,,\quad d\Omega_0'=[L_0']^3 d\Omega_1', \tag{6}$$

$$I_{Pl}(\nu_0,T_e)=\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT_e}-1}\,.$$

Здесь $I_{Pl}(\nu_0,T_e)$ – распределение Планка, $\varkappa'$ – коэффициент поглощения с поправкой на вынужденное испускание излучения, $f_0(\mathbf{p}_0)$ – распределение Максвелла. Сечение рассеяния $d\sigma_1$ дается формулой Томсона

$$d\sigma_1 = \frac{3\sigma_e}{16\pi}\left[1+[\mathbf{\Omega}_1\mathbf{\Omega}_1']^2\right]\delta(\nu_1-\nu_1')\, d\Omega_1' d\nu_1', \qquad \sigma_e = \frac{8\pi}{3}\left[\frac{e^2}{m_e c^2}\right]^2. \quad (7)$$

В [8] и косвенно в [3] было показано, что при интегрировании в (5) по $\mathbf{p}_0$ обращаются в нуль все члены порядка β_0 и $[kT_e/m_e c^2]^{1/2}$ (для сечения Клейна-Нишины-Тамма). Прямые вычисления в нашем случае подтвердили этот результат для (5)-(7). В результате (5) принимает вид

$$S_c^0 = -N_e\sigma_e I_0(\nu_0,\mathbf{\Omega}_0) + \frac{3N_e\sigma_e}{16\pi}\iint\left[1+[\mathbf{\Omega}_0\mathbf{\Omega}_0']^2\right] I_0(\nu_0',\mathbf{\Omega}_0')\delta(\nu_0'-\nu_0)\, d\Omega_0' d\nu_0'\,. \quad (8)$$

Из (8) видно, что в рассматриваемом приближении тепловое движение электронов не оказывает влияния на рассеяние света. Заметим однако, что при рассеянии нейтронов на ядрах, тепловое движение ядер приводит к термализации нейтронов. Аналогичные эффекты возникают при рассеянии других частиц конечной массы.

Переход в K получается с помощью соотношений, вытекающих из преобразований Лоренца [1]-[3]:

$$J_{st} = J_{st}^0 L^{-2}, \qquad \nu = \nu_0 L^{-1}, \qquad I(\nu,\mathbf{\Omega}) = L^{-3} I_0(\nu_0,\mathbf{\Omega}_0), \qquad d\Omega' = [L']^2 d\Omega_0', \quad (9)$$

$$\mathbf{\Omega}_0 = \left[\mathbf{\Omega} - \frac{\mathbf{u}}{c}\right]L^{-1}, \quad \mathbf{\Omega}_0' = \left[\mathbf{\Omega}' - \frac{\mathbf{u}}{c}\right][L']^{-1}, \quad L = 1 - \frac{\mathbf{u}\mathbf{\Omega}}{c}, \quad L' = 1 - \frac{\mathbf{u}\mathbf{\Omega}'}{c}.$$

Из (3), (4), (8) и (9) следует уравнение переноса в K

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} + \Omega^k \frac{\partial I}{\partial r^k} = J_{st}\,, \quad (10)$$

$$J_{st} = -L\varkappa'(\nu L, T_e, \rho) I(\nu,\mathbf{\Omega}) + L^{-2}\varkappa'(\nu L, T_e,\rho) I_{Pl}(\nu L, T_e) + S_c\,,$$

$$S_c = -LN_e\sigma_e I(\nu,\mathbf{\Omega}) + \frac{3N_e\sigma_e}{16\pi}\int\left[1+[\mathbf{\Omega}_0\mathbf{\Omega}_0']^2\right]\frac{L'}{L^2} I(\nu\frac{L}{L'},\mathbf{\Omega}')\, d\Omega'.$$

Величины $\sim u/c$ приводят к перераспределению излучения по углам и частотам и к изменению потока энергии излучения (существенному вблизи локального термодинамического равновесия [4], [9]). Заметим, что перераспределение по частотам, связанное с тепловым движением частиц учитывается в расчетах коэффициентов поглощений (допплеровское уширение линий).

Допплеровское смещение частоты за счет газодинамического движения может играть важную роль при переносе в линиях, приводя к уменьшению самопоглощения. Учет смещения требует детального знания коэффициентов поглощения и спектров, что пока нереально в рамках общей задачи РГД и многогруппового приближения. Поэтому мы не учитываем такие эффекты. В этом приближении многогрупповая система уравнений переноса принимает вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I^g}{\partial t}+\Omega^k\frac{\partial I^g}{\partial r^k}=-L\varkappa^g I^g+L^{-3}\varkappa^g_{Pl}I^g_{Pl}-LN_e\sigma_e I^g+ \tag{11}$$

$$+\frac{3N_e\sigma_e}{16\pi}\left[1+\Omega^k\Omega^l D^g_{kl}\right]cU^g+\frac{3N_e\sigma_e}{16\pi}\left[3\mathbf{u\Omega}+5\mathbf{u\Omega}\,\Omega^k\Omega^l D^g_{kl}-2u^k\Omega^l D^g_{kl}\right]U^g+$$

$$-\frac{3N_e\sigma_e}{16\pi}\left[2\frac{\mathbf{uW}^g}{c}+2\frac{\mathbf{u\Omega}}{c}\mathbf{\Omega W}^g\right].$$

Здесь

$$I^g=\int\limits_{\nu^g}^{\nu^{g+1}}I\,d\nu,\quad U^g=\frac{1}{c}\int\limits_{4\pi}I^g d\Omega,\quad \mathbf{W}^g=\int\mathbf{\Omega}I^g d\Omega,\quad D^g_{kl}=\int\Omega^k\Omega^l I^g d\Omega\Big/\int I^g d\Omega,$$

а $\varkappa^g$, $\varkappa^g_{Pl}$ – групповые коэффициенты поглощения. Отметим, что прямое вычисление $\mathbf{W}^g$ и $\mathbf{W}$ интегрированием по телесному углу $\mathbf{W}^g=\int\mathbf{\Omega}I^g d\Omega$, $\mathbf{W}=\sum\mathbf{W}^g$ приводит к большой потере точности, особенно вблизи равновесия. Кроме того расчет РГД даже с упрощенным уравнением (11) чрезвычайно трудоемок.

Эти трудности снимаются применением метода квазидиффузии [5], [6]. Интегрируя (11) с весом 1 и $\mathbf{\Omega}$, получаем [5], [6]

$$\frac{\partial U^g}{\partial t}+div\mathbf{W}^g=-c\varkappa^g U^g+c\varkappa^g_{Pl}U^g_{Pl}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial W^g_k}{\partial t}+c\frac{\partial[D^g_{kl}U^g]}{\partial r^l}=-\varkappa^g W^g_k+\varkappa^g u^l D^g_{kl}U^g+\varkappa^g_{Pl}u^k U^g_{Pl}-$$
$$-N_e\sigma_e W^g_k+N_e\sigma_e[u^k+u^l D^g_{kl}]U^g$$

с граничным условием [6]

$$\mathbf{nW}^g\Big|_\Gamma = C_\Gamma^g U^g\Big|_\Gamma . \qquad (13)$$

При нахождении уравнений квазидиффузии (12), (13) помимо величин $\sim u^2/c^2$ опущены величины $\sim u/c$, стремящиеся к нулю при приближении излучения к равновесию в движущейся среде. Для многих задач в (12) можно также пренебречь членом $\partial\mathbf{W}^g/c\partial t$ [6]. В этом приближении

$$W_k^g = -\frac{c}{\varkappa^g + N_e\sigma_e}\frac{\partial[D_{kl}^g U^g]}{\partial r^l} + u^k\frac{\varkappa_{Pl}^g U_{Pl}^g + N_e\sigma_e U^g}{\varkappa^g + N_e\sigma_e} + u^l D_{kl}^g U^g . \qquad (14)$$

Отметим, что из трансформационных соотношений (9) следует связь

$$W_k^g = W_{0.k}^g + [u^k + u^l D_{kl}^g]U^g ,$$

где $W_{0.k}^g$ – поток энергии излучения в системе K_0, движущейся с веществом.

Суммирование (12), (14) по группам «g» сводит задачу к эффективной одногрупповой квазидиффузии [6], [11]. Слабая зависимость входящих в нее осредненных коэффициентов от функций распределения I^g позволяет существенно уменьшать объем расчета. Полученная система РГД (1), (2), (12)-(14) для оптически толстого тела в однотемпературном приближении и без учета рассеяния переходит в известную систему уравнений РГД [9], а для низких температур в обычную систему уравнений низкотемпературной РГД. Мы здесь не будем обсуждать численные методы решения, заметим лишь, что они в основе близки к методам, развитым для низкотемпературной РГД [6], [10], [11].

Приведем условия применимости полученного приближения.

а) Малость релятивистских поправок обеспечивается условиями

$$\beta^2 \ll 1, \qquad kT_e/m_e c^2 \ll 1, \qquad h\langle\nu\rangle/m_e c^2 \ll 1,$$

где $h\langle\nu\rangle$ – средняя по спектру энергия фотонов. При уменьшении роли комптоновского рассеяния по сравнению с поглощением эти требования ослабляются.

б) Эффекты комптонизации существенны, если фотон за время жизни может потерять (или приобрести) заметную долю энергии за счет комптоновских столкновений. Поэтому условие малости эффектов комптонизации можно записать в виде

$$\varkappa' \geq \frac{h\langle\nu\rangle}{m_e c^2 p_0} N_e \sigma_e, \qquad p_0 \sim 0.05,$$

где p_0 – доля изменения энергии фотона, приводящая к комптонизации. Условие должно выполняться в основной части спектра излучения.

в) Оценку малости эффектов индуцированного рассеяния для случая спектрально широкого излучения можно получить из [12] в виде

$$\left| \frac{3N_e\sigma_e}{8\pi} L \frac{h\nu}{m_e c^2} \int \frac{\partial [c^2 I(\nu,\mathbf{\Omega}')/h\nu]}{\partial \nu^2} [1 - \mathbf{\Omega\Omega}'] \left[1 + [\mathbf{\Omega\Omega}']^2 \right] d\mathbf{\Omega}' \right| \ll 1,$$

Здесь L – характерная длина в задаче. Для задач РГД в простейшем предположении $I \sim I_{Pl}$ отсюда получаем

$$0.1 \frac{h\langle\nu\rangle}{m_e c^2} N_e \sigma_e L \ll 1.$$

Литература

[1] *Прокофьев В.А.* Уравнения релятивистской радиационной гидродинамики // Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 5, с. 1033-1036. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=25630

[2] *Имшенник В.С., Морозов Ю.И.* Релятивистски ковариантные уравнения взаимодействия излучения с веществом // Астрон. журн., 1969, т. 46, № 4, с. 800-809.
Imshennik V.S. and Morozov Yu.I. Relativistically covariant equations for the coupling of radiation with matter // Soviet Astronomy, 1970, v. 13, No. 4, pp. 628-634. http://adsabs.harvard.edu/pdf/1970SvA....13..628I

[3] *Морозов Ю.И.* Эффекты комптоновского рассеяния в движущемся газе // Астрон. журн., 1972, т. 49, № 5, с. 954-964.
Morozov Yu.I. Compton-scattering effects in a moving gas // Soviet Astronomy, 1973, v. 16, No 5, pp. 782-789. http://adsabs.harvard.edu/pdf/1973SvA....16..782M

[4] *Имшенник В.С.* Комптоновская радиационная газодинамика // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 1976, № 86. https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1976-86

[5] *Гольдин В.Я.* Квазидиффузный метод решения кинетического уравнения // ЖВМ и МФ, 1964, т. 4, №6, с. 1078-1087.
http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7676
Gol'din V.Ya. A quasi-diffusion method of solving the kinetic equation // USSR Comp. Mathematics and Math. Physics, 1964, v. 4, No 6, pp. 136-149.
https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90085-0

[6] *Гольдин В.Я.* О математическом моделировании задач сплошной среды с неравновесным переносом // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 1980, № 145. https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1980-145

[7] *Калиткин Н.Н.* Свойства вещества и МРГД-программы // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 1978, № 85.
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1978-85

[8] *Babuel-Peyrissac J.P., Rouvillois G.* Radiative transfer in an LTE atmosphere: An integral kernel formulation of the Compton scatter source term // J. of Quant. Spectroscopy and Rad. Transfer, 1970, v. 10, No 12, pp.1277-1290.
https://doi.org/10.1016/0022-4073(70)90010-5

[9] *Беленький С.З.* Об уравнениях гидродинамики с учетом излучения // Тр. ФИАН СССР, 1958, т. 10, с. 15-22. https://proceedings.lebedev.ru/0010-1958/

[10] *Гольдин В.Я., Четверушкин Б.Н.* Методы расчета переноса излучения в одномерных задачах низкотемпературной плазмы // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 1970, № 12. https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1970-12
В сб. Численные методы в физике плазмы. М.: Наука, 1977, с. 239-248.

[11] *Волчинская М.И., Четверушкин Б.Н.* Решение двумерных нестационарных задач радиационной газовой динамики // ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, № 5, с. 1262-1275.
http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=5307
Volchinskaya M.I., Chetverushkin B.N. The solution of two-dimensional non-stationary problems of radiation gas dynamics // USSR Comp. Mathematics and Math. Physics. 1979, v. 19, No 5, pp. 176-189.
https://doi.org/10.1016/0041-5553(79)90108-3

[12] *Гольдин В.Я., Сюняев Р.А., Четверушкин Б.Н.* Сужение и расхождение пучка излучения при индуцированном комптоновском рассеянии // ЖЭТФ, 1975, т. 68, № 1, с. 36-43.
Gol'din V.Ya., Syunyaev R.A., and Chetverushkin B.N. Narrowing and spreading of a radiation beam incident to induced Compton scattering // Soviet Physics JETP, 1975, v. 41, No 1, pp. 18-21. http://jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_041_01_0018.pdf