ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 81 за 1981 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Галактионова О.О.,
Златоустов В.А.

Об одном классе 2π-периодических решений неоднородного уравнения Дюффинга

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Галактионова О.О., Златоустов В.А. Об одном классе 2π-периодических решений неоднородного уравнения Дюффинга // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1981. № 81. 15 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1981-81

Препр.
Г-15

Препр. Галактионова О.
Г-15 и Златоустов В.А
Об одном классе 2π ...
Препр.81 за 1981 г.
1 б/№

1 б/н

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША
АКАДЕМИИ НАУК СССР

О.О.Галактионова, В.А.Златоустов

Об одном классе 2π - периодических решений неоднородного уравнения Дюффинга

Академия Наук СССР
Институт прикладной
математики им.М.В.Келдыша
БИБЛИОТЕКА

Москва, 1981

УДК 517.91/.93:534:

А Н Н О Т А Ц И Я

Исследуется один класс 2π - периодических решений нелинейного неоднородного уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} + \mu(x + ax^3) = e \sin t ,$$

где μ , e и $a<0$ - фиксированные постоянные. На основе теорем о неподвижных точках непрерывных преобразований проводится доказательство существования и определяются области единственности 2π - периодических решений, которые при $e = 0$ переходят в стационарные решения $\pm 1/\sqrt{-a}$. С помощью численных методов проведено фактическое построение всех решений из этого класса.

Ключевые слова и фразы: 2π - периодические решения, уравнение Дюффинга, теоремы о неподвижных точках, точки бифуркации, ветвление.

A B S T R A C T

One class of 2π -periodic solutions of the nonlinear Duffing's equation

$$\ddot{x} + \mu(x + ax^3) = e \sin t$$

(here μ , e and $a<0$ are fixed constants) is investigated. The existence and uniqueness of the solutions which converge with $e \to 0$ to the stationary solutions $\pm 1/\sqrt{-a}$ are proved by fixed point's theorems. Really the properties of these solutions are studied by direct numerical methods.

Key words and phrases: 2π-periodic solutions, Duffing's equation, fixed point's theorems, bifurcation points.

Содержание

Введение 4
I. Об условиях существования и единственности 2π - периодических решений θ_0 5
I.I. Случай $\mu < 0$ 5
I.2. Случай $\mu > 0$ 8
2. Свойства 2π - периодических решений θ_0 и $\theta^{(2)}_{n/1}$ (результаты численного анализа) 10
2.I. 2π - периодические решения при $\mu > -0.5$ 11
2.2. 2π - периодические решения при $\mu \leq -0.5$ 11
Литература 14

Введение

Рассматривается нелинейное дифференциальное неоднородное уравнение Диффинга

$$\ddot{x} + \mu(x + a x^3) = e \sin t , \qquad (I)$$

где μ , e и $a<0$ – фиксированные постоянные.

Это дифференциальное уравнение возникает при описании многочисленных процессов, имеющих самую разнообразную физическую природу [I,2].

В настоящей работе исследуются 2π – периодические решения уравнения (I), для которых порождающими при $e=0$ являются решения $\theta_0 = \pm 1/\sqrt{-a}$ и $\theta^{(z)}_{n/1}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ z=0,1)$*), изученные в [I]. Другие (нечетные) 2π – периодические решения подробно рассматривались в [3]**).

В работе [I] 2π – периодические решения θ_0 и $\theta^{(z)}_{n/1}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ z=0,1)$ при $e=0$ были исследованы на фазовой плоскости, а также была приведена физическая интерпретация соответствующей картины движения. В той же работе были получены интегральные представления функций θ_0 и $\theta^{(z)}_{n/1}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ z=0,1)$ при $e=0$. Для значений параметров в области $E=\{\mu,a,e : |\mu|\leq 10,\ a=-1,\ e=0\}$ нестационарные порождающие решения анализировались на плоскости $(x(\frac{\pi}{2}),\mu)$. С помощью методов Чезари решения θ_0 и $\theta^{(z)}_{n/1}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ z=0,1)$ были определены аналитически при $e \ll 1$ и для их нахождения были сформулированы следующие краевые условия:

$$\dot{x}(\tfrac{\pi}{2}) = \dot{x}(\tfrac{3\pi}{2}) = 0 . \qquad (2)$$

В настоящей работе решения θ_0 и $\theta^{(z)}_{n/1}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ z=0,1)$

---

*) Здесь и далее мы пользуемся обозначениями, принятыми в [I]. Для удобства, решения, соответствующие произвольным $e\neq 0$ и рождающиеся при $e=0$ из θ_0 $(\theta_0^+ = 1/\sqrt{-a},\ \theta_0^- = -1/\sqrt{-a})$, $\theta^{(z)}_{n/1}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ z=0,1)$ будем обозначать соответственно через θ_0 $(\theta_0^+,\ \theta_0^-)$ и $\theta^{(z)}_{n/1}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ z=0,1)$.

**) В настоящей работе завершается изучение всех возможных классов 2π – периодических решений уравнения (I), исследование которых было начато в работах [I,3].

исследуются при произвольных значениях амплитуды возмущающей силы e.

В части I на основе теорем о неподвижных точках непрерывных преобразований [4] проводится доказательство существования и определяются области единственности 2π – периодических решений θ_0.

В части II с помощью численных методов решается краевая задача (I), (2) в области $E'=\{\mu,a,e : -10<\mu<2,\ a=-1,\ 0<e<4\}$. Установлено, что внутри этой области появляются новые решения, которые не имеют порождающих при $e=0$. Исследуется ветвление этих решений.

Авторы благодарны В.А.Сарычеву за постоянное внимание к работе, В.В.Сазонову за полезные обсуждения, а также В.П.Алексеенко за большую помощь при оформлении работы.

I. Об условиях существования и единственности 2π – периодических решений θ_0 $(\theta_0^+,\ \theta_0^-)$

I.I. Случай $\mu<0$

Этот случай представляет наибольший интерес, поскольку при $\mu<0$ существуют как решения, рождающиеся при $e=0$ из стационарных решений θ_0, так и из нестационарных решений $\theta^{(z)}_{n/1}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ z=0,1)$. Следовательно, полученные здесь оценки позволяют провести сравнение решений θ_0 и $\theta^{(z)}_{n/1}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ z=0,1)$ при $e\neq 0$.

Будем искать решение задачи (I), (2) в окрестности стационарного положения равновесия $\theta_0^+ = 1/\sqrt{-a}$.*)

Положим $-a=\nu^2\ (\nu>0)$, $-2\mu=\omega^2>0$. Для удобства введем новую функцию $Y = x-\theta_0^+$, которая, как следует из (I), (2), является решением следующей краевой задачи:

$$\ddot{Y} + \omega^2 Y + \frac{3}{2}\nu\omega^2 Y^2 + \frac{\omega^2\nu^2}{2} Y^3 = e\sin t , \qquad (3)$$

$$\dot{Y}(\tfrac{\pi}{2}) = \dot{Y}(\tfrac{3\pi}{2}) = 0 . \qquad (4)$$

---

*) Построение решения в окрестности положения равновесия $\theta_0^- = -1/\sqrt{-a}$ аналогично и в данной работе не проводится.

Перепишем уравнение (3) в виде

$$\mathcal{L}Y = e\sin t - \frac{\omega^2\nu^2}{2}Y^3 - \frac{3}{2}\nu\omega^2 Y^2, \qquad (5)$$

где линейный оператор $\mathcal{L}$ действует так, что $\mathcal{L}Y = \ddot{Y} + \omega^2 Y$. При $\mu \neq -n^2/2$ (n – любое целое число) оператор $\mathcal{L}$ в (5) является обратимым и поэтому задача (5), (4) эквивалентна следующему интегральному уравнению [5]:

$$Y(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi/2} \mathcal{G}(t,\tau)\left[e\sin\tau - \frac{\omega^2\nu^2}{2}Y^3(\tau) - \frac{3}{2}\nu\omega^2 Y^2(\tau)\right]d\tau. \qquad (6)$$

Здесь $\mathcal{G}(t,\tau)$ – функция Грина рассматриваемой дифференциальной задачи. Она имеет вид [5]

$$\mathcal{G}(t,\tau) = \frac{1}{\omega\cos\frac{\pi}{2}(1-2\omega)}\begin{cases}\sin(\omega t+\varphi_1)\sin(\omega\tau+\varphi_2), & \frac{\pi}{2}<\tau\le t\\ \sin(\omega\tau+\varphi_1)\sin(\omega t+\varphi_2), & t<\tau\le\frac{3\pi}{2}\end{cases} \qquad (7)$$

где $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}(1-\omega)$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}(1-3\omega)$.

Представим правую часть (6) как результат действия некоторого нелинейного оператора M на функцию Y, т.е. запишем уравнение (6) в виде

$$Y(t) = M(Y)(t), \quad \frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}. \qquad (8)$$

Через $C(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ обозначим банахово пространство функций, определенных на отрезке $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, с нормой $\|\cdot\| = \max|\cdot|$.

Нетрудно видеть, что оператор $M: C \to C$ является компактным. Рассмотрим в $C(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ограниченное множество $X = \{\varphi(t) \mid \|\varphi\| \le C_0\}$, где $C_0 > 0$ – фиксированная постоянная. Пусть $\varphi(t) \in X$. Тогда, как следует из (6),

$$\|M(\varphi)\| \le \max_{t,\tau}|\mathcal{G}(t,\tau)|\left\{|e|\int_{\pi/2}^{3\pi/2}|\sin\tau|d\tau + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\frac{\omega^2\nu^2}{2}\varphi^3(\tau) + \frac{3}{2}\nu\omega^2\varphi^2(\tau)\right|d\tau\right\}, \qquad (9)$$

причем (см. (7))

$$\max_{t,\tau}|\mathcal{G}(t,\tau)| = \frac{1}{\omega\left|\cos\frac{\pi}{2}(1-2\omega)\right|}.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{\omega^2\nu^2}{2}z^3 + \frac{3}{2}\nu\omega^2 z^2$, $z>0$. Она является положительной и строго возрастающей, причем $f(z) \le 3\nu\omega^2 z^2$ при $z \le \frac{3}{\nu}$.

Учитывая все вышесказанное, в предположении $C_0 \le \frac{3}{\nu}$ получаем (см. (9))

$$\|M(\varphi)\| \le \frac{1}{\omega\left|\cos\frac{\pi}{2}(1-2\omega)\right|}\left\{2|e| + 3\pi\nu\omega^2 C_0^2\right\}. \qquad (10)$$

Из (10) непосредственно следует, что оператор M переводит X в X, если величина C_0 такова, что

$$\frac{1}{\omega\left|\cos\frac{\pi}{2}(1-2\omega)\right|}\left\{2|e| + 3\pi\nu\omega^2 C_0^2\right\} \le C_0. \qquad (11)$$

Нетрудно показать, что (11) имеет решение при любых e, удовлетворяющих неравенству

$$|e| \le \frac{1}{24\pi\nu}\cos^2\left[\frac{\pi}{2}(1-2\omega)\right]. \qquad (12)$$

Из теоремы Шаудера о неподвижной точке [4] вытекает справедливость следующего утверждения.

<u>Теорема I</u>. Пусть выполняется неравенство (12). Тогда задача (3), (4) имеет, по крайней мере, одно решение $Y(t)$, причем

$$\|Y(t)\| \le \min\left\{\frac{3}{\nu}, \frac{1}{3\pi\nu\omega^2}\left[\left|\cos\frac{\pi}{2}(1-2\omega) - \left\{\cos^2\frac{\pi}{2}(1-2\omega) - 24\pi|e|\nu\right\}^{1/2}\right]\right.\right. \qquad (13)$$

<u>Замечание</u>. Из (13), в частности, следует, что $Y(t) \to 0$ при $e \to 0$ всюду в интервале $(\pi/2, 3\pi/2)$.

Для определения класса единственности решения задачи воспользуемся теоремой Банаха о неподвижной точке [4], т.е. докажем сжимаемость оператора M.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ и $C_0 \le \frac{2}{\nu}$. Тогда из (6) получаем оценку

$$\|M(\varphi_1) - M(\varphi_2)\| \le \|\varphi_1 - \varphi_2\|\frac{6\pi\nu\omega C_0}{\left|\cos\frac{\pi}{2}(1-2\omega)\right|}.$$

Отсюда следует, что оператор M является сжимающим в X, если

$$C_0 < \min\left\{\frac{2}{\nu},\ \frac{\left|\cos\frac{\pi}{2}(1-2\omega)\right|}{6\pi\nu\omega}\right\}. \qquad (I4)$$

Итак доказана следующая

Теорема 2. Пусть выполняется условие (I2). Тогда задача (3), (4) имеет решение, единственное в классе функций

$$\left\{\varphi(t)\,\middle|\,\|\varphi\| \le C_0 < \min\left\{\frac{2}{\nu},\ \frac{\left|\cos\frac{\pi}{2}(1-2\omega)\right|}{6\pi\nu\omega}\right\}\right\}. \qquad (I5)$$

Это решение может быть найдено в результате использования следующего итерационного процесса (метода простой итерации):

$$Y^{(s+1)} = M(Y^{(s)}),\quad s=0,1,\dots;\ Y^{(0)}=0.$$

Для оценки погрешности итерационного процесса будет справедлива формула

$$\|Y^{(s)} - Y\| \le q^s \|Y^{(1)}\|,$$

где

$$q = \frac{6\pi\nu\omega C_0}{\left|\cos\frac{\pi}{2}(1-2\omega)\right|}.$$

Замечание I. Неравенство $\|Y\| \le C_0$ (см. (I5)), где C_0 удовлетворяет (I4), дает оценку амплитуды отклонения решения исходной задачи (I), (2) от решения $\theta_0^+ = 1/\sqrt{-a}$. Также отметим, что в силу теоремы 2 любые другие решения задачи (I), (2) (их существование установлено численными методами в части 2) по амплитуде должны лежать вне полосы $\|x-\theta_0\| \le C_0$.

Кроме того, из теоремы 2 следует, что появление решений, которые не имеют порождающих (см. ч. II), возможно только при значениях e, лежащих вне интервала $|e| < \cos^2\left[\frac{\pi}{2}(1-2\omega)\right]/24\pi\nu$ (см. оценку (I2)).

Замечание 2. Без потери общности в части 2 рассматривается случай $a=-1$ и оценка (I2) принимает следующий вид:

$$|e| \le \frac{1}{24\pi}\cos^2\left[\frac{\pi}{2}\left(1-2\sqrt{2|\mu|}\right)\right]. \qquad (I6)$$

Область допустимых значений e в зависимости от величины μ $(\mu<0)$ схематически изображена на рис. I. Значения $\mu = -n^2/2$ являются точками бифуркации $(n=1,2,3,\dots)$.

I.2. Случай $\mu > 0$

Порождающими решениями для этого случая являются только решения $\theta_0^+ = 1/\sqrt{-a}$ и $\theta_0^- = -1/\sqrt{-a}$ (см. рис. 2).

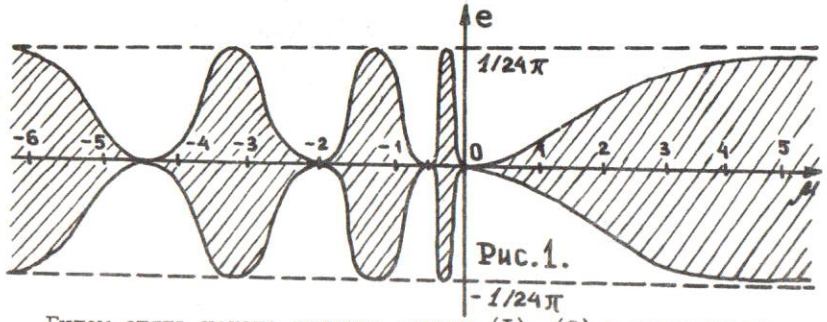

Рис.1.

Будем опять искать решение задачи (I), (2) в окрестности стационарного решения $\theta_0^+ = 1/\sqrt{-a}$ *). Положим $-a = \nu^2 > 0$, $2\mu = \omega^2 > 0$. Вводя новую функцию $Y = x - \theta_0^+$, получим следующую краевую задачу:

$$\ddot{Y} - \omega^2 Y - \frac{3}{2}\omega^2\nu Y^2 - \frac{\omega^2\nu^2}{2}Y^3 = e\sin t, \qquad (I7)$$

$$\dot{Y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dot{Y}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0. \qquad (I8)$$

Сформулированные ниже теоремы доказываются аналогично теоремам I и 2 предыдущего пункта.

Теорема 3. Пусть выполняется неравенство

$$|e| \le \frac{1}{24\pi\nu}\,\frac{\left(e^{2\omega\pi}-1\right)^2}{\left(e^{2\omega\pi}+1\right)^2}. \qquad (I9)$$

Тогда задача (I7), (I8) имеет, по крайней мере, одно решение $Y(t)$, причем

$$\|Y(t)\| \le \min\left\{\frac{3}{\nu},\ \frac{1}{3\pi\omega}\,\frac{\left(e^{2\omega\pi}-1\right)^2}{\left(e^{2\omega\pi}+1\right)^2}\right\}. \qquad (20)$$

Замечание. Из (20) также следует, что $Y(t) \to 0$ при $e \to 0$ всюду в интервале $(\pi/2, 3\pi/2)$.

Теорема 4. Пусть выполняется условие (I9). Тогда задача (I7), (I8) имеет решение, единственное в классе функций

$$\left\{\varphi(t)\,\middle|\,\|\varphi\| \le C_0 < \min\left\{\frac{2}{\nu},\ \frac{\left(e^{2\omega\pi}-1\right)}{6\pi\omega\nu\left(e^{2\omega\pi}+1\right)}\right\}\right\}.$$

---

*) Исследование в окрестности другого стационарного решения $\theta_0^- = -1/\sqrt{-a}$ проводится аналогично.

Как и в случае $\mu < 0$, это решение может быть найдено в результате использования следующего итерационного процесса:

$$Y^{(s+1)} = M(Y^{(s)}), \quad s = 0,1,\dots; \; Y^{(0)} = 0 .$$

Замечание I. В части 2 установлено, что в случае $\mu > 0$, $a = -1$ существуют решения, не имеющие порождающих при $e = 0$. Из теоремы 4 следует, что появление этих решений возможно только при значениях e, лежащих вне интервала

$$\left(-\frac{1}{24\pi\nu}\frac{(e^{2\omega\pi}-1)^2}{(e^{2\omega\pi}+1)^2}, \frac{(e^{2\omega\pi}-1)^2}{(e^{2\omega\pi}+1)^2}\frac{1}{24\pi\nu}\right) . \qquad (21)$$

Замечание 2. Из проведенного анализа можно сделать вывод, что в случае $\mu > 0$ при $e = 0$ и достаточно малых e точки бифуркации 2π - периодических решений отсутствуют (см. рис. I).

2. Свойства 2π - периодических решений θ_0 и $\theta^{(\tau)}_{n/1}$ (результаты численного анализа)

В этой части с помощью результатов работы [I] и теоретических выводов части I изучаются свойства 2π - периодических решений уравнения (I), которые являются непрерывным продолжением в область больших значений e решений $\theta_0(t,e)$ и $\theta^{(\tau)}_{n/1}$ $(n = 1,2,3,\dots;\ \tau = 0,1)$ *). Исследование проводится на основе численного решения краевой задачи (I), (2) в области $E' = \{\mu, a, e : 0 < e < 4, -10 < \mu < 2, a = -1\}$.

Устойчивость 2π - периодических решений $\theta_0(\theta_0^+, \theta_0^-)$ и $\theta^{(\tau)}_{n/1}$ $(n = 1,2,3,\dots;\ \tau = 0,1)$ исследуется в линейном приближении с помощью численного интегрирования соответствующего уравнения в вариациях [3]. Границы областей устойчивости задаются уравнением $|\lambda| = 1$, где λ - коэффициент характеристического уравнения. Для стационарных порождающих решений (случай $e = 0$) $\theta_0 = \pm 1/\sqrt{-a}$ $(a < 0)$ имеет место зависимость

$$\lambda = \begin{cases} \operatorname{ch} 2\pi\sqrt{2\mu}, & \mu > 0, \\ \cos 2\pi\sqrt{-2\mu}, & \mu < 0, \end{cases}$$

*) На рис. 2 приведена картина порождающих решений с соответствующими обозначениями [I], которые, как уже указывалось, сохраняются для решений при произвольных e. Для удобства изложения все решения, расположенные в верхней полуплоскости, снабжены знаком "+", а в нижней полуплоскости - соответственно знаком "-".

которая представлена на рис. 3.

При произвольных $e \neq 0$ из области E' участки устойчивости 2π - периодических решений θ_0^+, θ_0^- и $\theta^{(\tau)}_{n/1}$ $(n = 1,2,3,4;\ \tau = 0,1)$ отмечены на рисунках 7,9-12,14-16 штриховкой.

2.I. 2π - периодические решения при $\mu > -0.5$

В этом случае при $e = 0$ существует два стационарных порождающих решения $\theta_0^+ = 1/\sqrt{-a}$ и $\theta_0^- = -1/\sqrt{-a}$ (рис. 2).

В результате решения однопараметрической краевой задачи (I), (2) при $e \neq 0$ в области E' были найдены значения $x(\frac{\pi}{2})$, которые определяют 2π - периодические решения θ_0^+ и θ_0^- (рис.4). Было обнаружено, что наряду с двумя этими решениями при $\mu \geqslant 0.22$ существует еще два решения, которые при $e = 0$ не имеют порождающих. Их появление можно объяснить нелинейными свойствами уравнения (I). Как показывает локальный анализ решения исходной задачи, проделанный в части I, они не могут появиться при достаточно малых e (см. оценку (2I) при $a = -1$).

На рис. 5 указано разбиение области E' на подобласти, в которых существует одинаковое число решений краевой задачи (I), (2). В области, обозначенной E'_k, существует k решений. Кривые, осуществляющие это разбиение, являются кривыми разветвления. Вдоль кривой P_0P_1 сливаются решения θ_0^+ и θ_0^-. Участку кривой разветвления P_1P_2 соответствуют точки, где склеиваются новые решения. Из точки P_1 $(\mu_* = 0.22,\ e_* = 0.738)$ начинается кривая разветвления P_1P_3, на которой склеиваются попарно все четыре решения.

2.2. 2π - периодические решения при $\mu \leqslant -0.5$

В этом случае при $e = 0$ наряду со стационарными решениями θ_0^+ и θ_0^- существуют нестационарные порождающие решения $\theta^{(\tau)}_{n/1}$ $(n = 1,2,3,\dots;\ \tau = 0,1)$ (рис. 2). В результате численного решения краевой задачи (I), (2) эти решения были продолжены для произвольных $e \neq 0$ из области E'. Результаты численного анализа представлены на рис. 5-I6.

Решения $\theta^{+(1)}_{1/1}$, $\theta^{-(0)}_{1/1}$. Эти решения существуют в диапазоне $\mu \leqslant -0.5$, причем точка $(e = 0, \mu = -0.5)$ является их точкой бифуркации. На рис. 6 представлена зависимость $x(\frac{\pi}{2})$ от e при различных значениях μ.

Значения $x(\frac{\pi}{2})$, лежащие выше пунктирной линии, соответствуют решению $\theta^{+(1)}_{1/1}$, а отрицательные значения $x(\frac{\pi}{2})$ ниже пунктирной линии соответствуют решению $\theta^{-(0)}_{1/1}$. Эти решения сливаются вдоль бифуркационной кривой (пунктирная линия) (рис. 6), которой в плоскости (μ, e) соответствует кривая разветвления P_0P_4 (рис. 5). Эта кривая является непрерывным продолжением кривой разветвления P_0P_1 для решений θ^+_0 и θ^-_0 при $\mu > -0.5$.

Решения $\theta^{+(0)}_{1/1}$, θ^+_0, $\theta^{+(0)}_{2/1}$. В точке бифуркации $(\mu = -2.0, e = 0)$ появляются решения $\theta^{+(0)}_{2/1}$. Результаты численного исследования краевой задачи (I), (2) для решений $\theta^{+(0)}_{1/1}, \theta^+_0, \theta^{+(0)}_{2/1}$ представлены на рис. 7, где изображена зависимость $x(\frac{\pi}{2})$ от e при различных μ. В диапазоне $-0.5 > \mu \geqslant -2$ решение $\theta^{+(0)}_{1/1}$ сливается с решением θ^+_0 вдоль пунктирной линии, которой в плоскости (μ, e) соответствует участок кривой разветвления L_0L_1 (рис. 8). Следует отметить, что точка L_0 $(\mu = -0.5, e = 0)$ является точкой бифуркации решения $\theta^{+(0)}_{1/1}$, а точка $(\mu = -2, e = 0)$ – точкой бифуркации решения $\theta^{+(0)}_{2/1}$. В диапазоне $-10 < \mu < -2$ решение $\theta^{+(0)}_{1/1}$ склеивается с решением $\theta^{+(0)}_{2/1}$ вдоль пунктирной линии, которой на рис. 8 соответствует участок кривой разветвления L_1L_2.

Сделаем замечание. Пусть для параметра e выполнено (I6), тогда из теоремы 2 части I следует, что только амплитуда решения θ^+_0 удовлетворяет оценке (I5).

Решения $\theta^{+(1)}_{2/1}$, θ^+_0, $\theta^{+(1)}_{3/1}$. Зависимость $x(\frac{\pi}{2})$ от e при различных μ для этих решений изображена на рис. 9. В диапазоне $-4.5 \leqslant \mu < -2$ решения $\theta^{+(1)}_{2/1}$ и θ^+_0 сливаются между собой вдоль пунктирной линии, которой в плоскости параметров (μ, e) соответствует участок кривой разветвления U_0U_1 (рис. 8). Кривая разветвления начинается в точке U_0 $(\mu = -2, e = 0)$, которая является точкой бифуркации для решения $\theta^{+(1)}_{2/1}$. В точке $(\mu = -4.5, e = 0)$ появляется решение $\theta^{+(1)}_{3/1}$. При $-10 < \mu < -2$ оно сливается с решением $\theta^{+(1)}_{2/1}$ вдоль пунктирной линии, которой на рис. 8 соответствует участок U_1U_2 кривой разветвления.

Решения $\theta^{+(0)}_{3/1}$, θ^+_0, $\theta^{+(0)}_{4/1}$. Решение $\theta^{+(0)}_{3/1}$ существует в диапазоне $-10 \leqslant \mu < -4.5$, а решение $\theta^{+(0)}_{4/1}$ существует в диапазоне $-10 \leqslant \mu < -8$, причем точка $(\mu = -4.5, e = 0)$

является точкой бифуркации решения $\theta^{+(0)}_{3/1}$, а точка $(\mu = -8, e = 0)$ – точкой бифуркации решения $\theta^{+(0)}_{4/1}$. В диапазоне $-8 \leqslant \mu < -4.5$ решение $\theta^{+(0)}_{3/1}$ сливается с решением θ^+_0 (рис. I0) вдоль бифуркационной кривой, которой в плоскости (μ, e) соответствует участок кривой разветвления K_0, K_1 (рис. 8). В диапазоне $-10 \leqslant \mu < -8$ участку кривой разветвления K_1K_2 (рис. 8) соответствует бифуркационная кривая, на которой сливаются решения $\theta^{+(0)}_{3/1}$ и $\theta^{+(0)}_{4/1}$ (рис. I0).

Для амплитуд решений θ^+_0 и $\theta^{+(0)}_{3/1}$ справедливо замечание предыдущего пункта.

Решения θ^+_0 и $\theta^{+(1)}_{4/1}$. Начальные значения $x(\frac{\pi}{2})$ для этих решений представлены на рис. II. Точка $(\mu = -8, e = 0)$ является точкой бифуркации решения $\theta^{+(1)}_{4/1}$, которое при $-8 > \mu > -10$ сливается с решением θ^+_0 вдоль бифуркационной кривой. В плоскости (μ, e) ей соответствует кривая разветвления M_0M_1 (рис. 8).

На рис. 8 для решений θ^+_0, $\theta^{+(r)}_{n/1}$ $(n = 1, 2, 3, 4;\ r = 0, 1)$ указано разбиение области E' на подобласти, где существует одинаковое число решений краевой задачи (I), (2).

Решения θ^-_0, $\theta^{-(1)}_{1/1}$, $\theta^{-(0)}_{2/1}$. Зависимость $x(\frac{\pi}{2})$ от e при различных μ для этих решений представлена на рис. I2. Решения θ^-_0 и $\theta^{-(1)}_{1/1}$ склеиваются вдоль бифуркационной кривой в диапазоне $-2 < \mu < -0.5$, которой в плоскости (μ, e) соответствует участок кривой разветвления B_0B_1 (рис. I3). Точка B_0 $(\mu = -0.5, e = 0)$ является точкой бифуркации решения $\theta^{-(1)}_{1/1}$, а точка $(\mu = -2, e = 0)$ – точкой бифуркации решения $\theta^{-(0)}_{2/1}$. Это решение в диапазоне $-10 < \mu < -2$ склеивается с решением $\theta^{-(1)}_{1/1}$ на бифуркационной кривой (рис. I2), которой на рис. I3 соответствует участок кривой разветвления B_1B_2.

Решения θ^-_0, $\theta^{-(1)}_{2/1}$, $\theta^{-(0)}_{3/1}$. Зависимость $x(\frac{\pi}{2})$ от e для этих решений представлена на рис. I4. В диапазоне $-4.5 < \mu < -2$ решения θ^-_0 и $\theta^{-(1)}_{2/1}$ склеиваются между собой на бифуркационной кривой, которой в плоскости (μ, e) соответствует участок кривой разветвления C_0C_1 (рис. I3). Эта кривая начинается в точке $(e = 0, \mu = -2)$, являющейся точкой бифуркации решения $\theta^{-(1)}_{2/1}$. В точке бифуркации $(\mu = -4.5, e = 0)$ появляется решение $\theta^{-(0)}_{3/1}$, которое при $-10 < \mu < -4.5$ сливается с решением $\theta^{-(1)}_{2/1}$. Этому участку бифуркационной кривой соответствует кривая разветвления C_1C_2 в плоскости (μ, e) (рис. I3).

Решения $\theta_0^-, \theta_{3/1}^{-(1)}, \theta_{4/1}^{-(0)}$. Эти решения представлены на рис. I5, где изображена зависимость $x(\frac{\pi}{2})$ от e при различных μ. В диапазоне $-8 \leq \mu < -4.5$ вдоль бифуркационной кривой сливаются решения θ_0^- и $\theta_{3/1}^{-(1)}$. В плоскости (μ, e) этой кривой соответствует кривая разветвления $G_0 G_1$ (рис. I3), которая начинается в точке $(e=0,\ \mu=-4.5)$, являющейся точкой бифуркации решения $\theta_{3/1}^{-(1)}$. В точке бифуркации $\mu = -8, e = 0$ рождается решение $\theta_{4/1}^{-(0)}$, которое в диапазоне $-10 < \mu < -8$ сливается с решением $\theta_{3/1}^{-(1)}$ вдоль бифуркационной кривой, которой на рис. I3 соответствует участок кривой разветвления $G_1 G_2$.

Решения θ_0^- и $\theta_{4/1}^{-(1)}$. Решение $\theta_{4/1}^{-(1)}$ существует в области E' при $\mu < -8.0$. В этом диапазоне оно склеивается с решением θ_0^- вдоль бифуркационной кривой (рис. I6), которой в плоскости (μ, e) соответствует кривая разветвления $F_0 F_1$ (рис. I3).

На рис. I3 для решений θ_0^- и $\theta_{n/1}^{-(\varepsilon)}$ $(n=1,2,3,4;\ \varepsilon=0,1)$ указано разбиение области E' на подобласти, в которых существует одинаковое число решений краевой задачи (I), (2).

Литература

I. О.О.Галактионова, В.А.Златоустов. 2π - периодические решения уравнения Дюффинга при малых значениях амплитуды вынуждающей силы, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В.Келдыша АН СССР, I980, № 33.

2. К.В.Фролов, Ф.А.Фурман. Прикладная теория виброзащитных систем, М., Машиностроение, I980.

3. О.О.Галактионова, В.А.Златоустов. 2π - периодические решения уравнения Дюффинга, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В.Келдыша АН СССР, I980, № I28.

4. Ф.Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Мир, I970.

5. В.С.Владимиров. Уравнения математической функции, М., Наука, I97I.

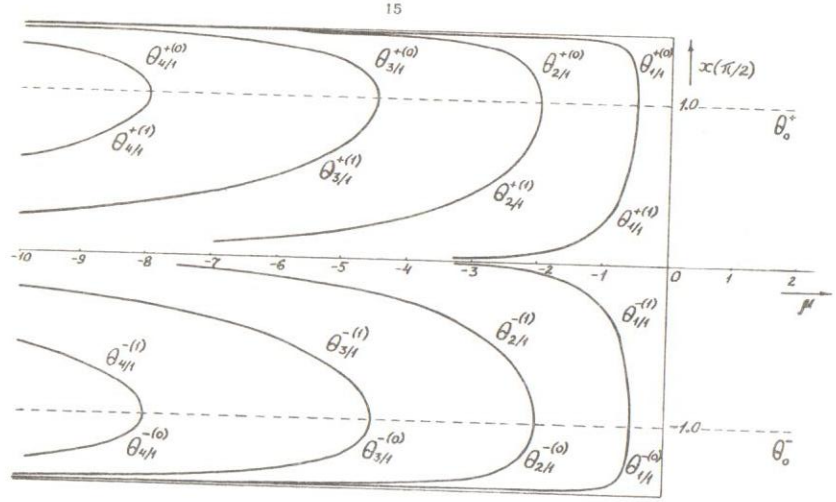

Рис. 2

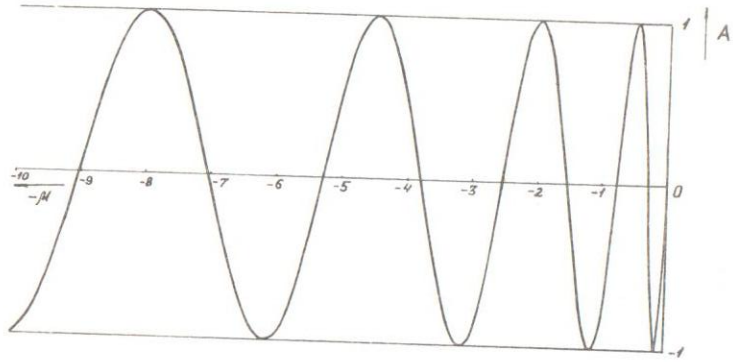

Рис 3

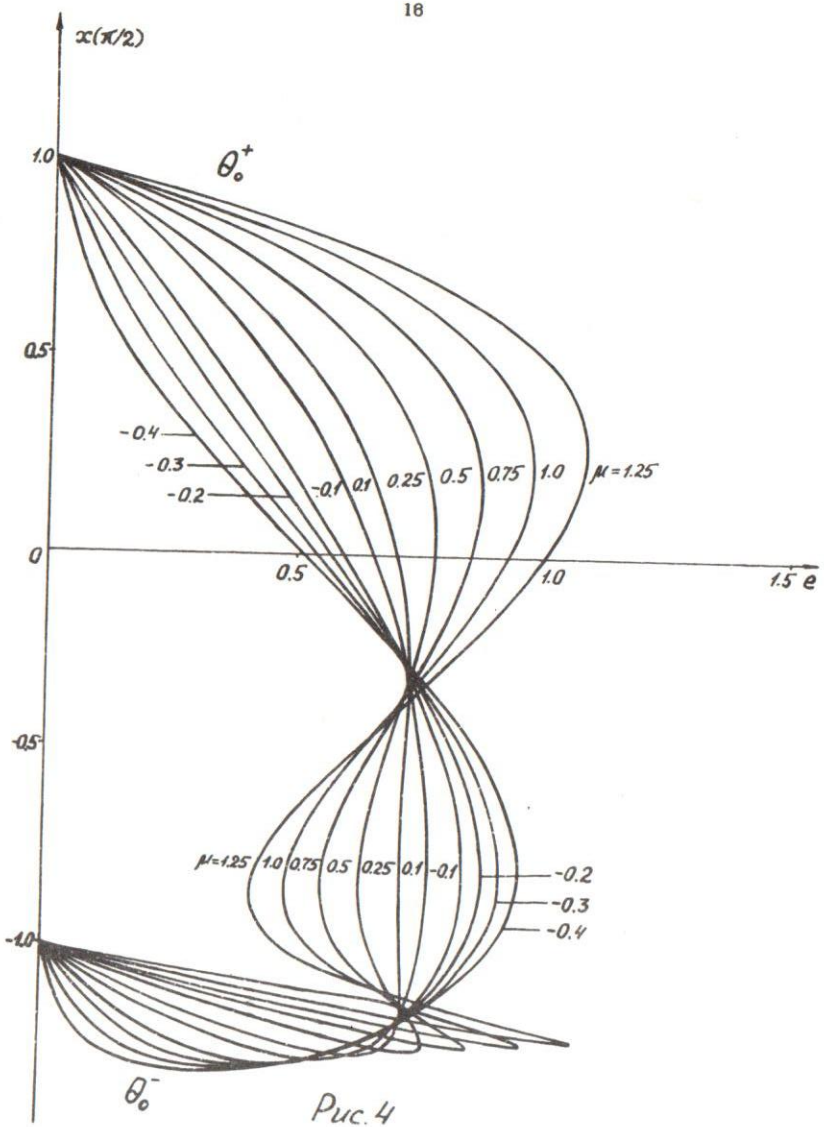

Рис. 4

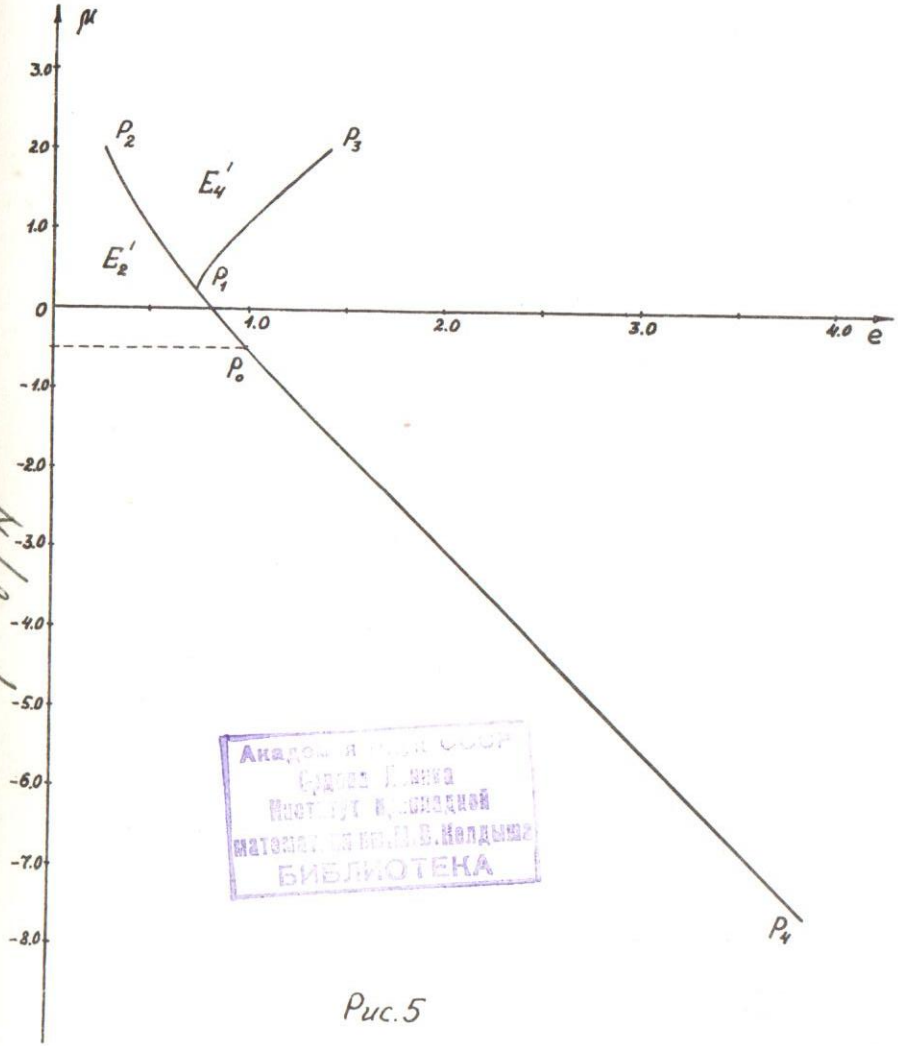

Рис. 5

Академия наук СССР
Сектор Ленина
Институт прикладной
математики им. М.В. Келдыша
БИБЛИОТЕКА

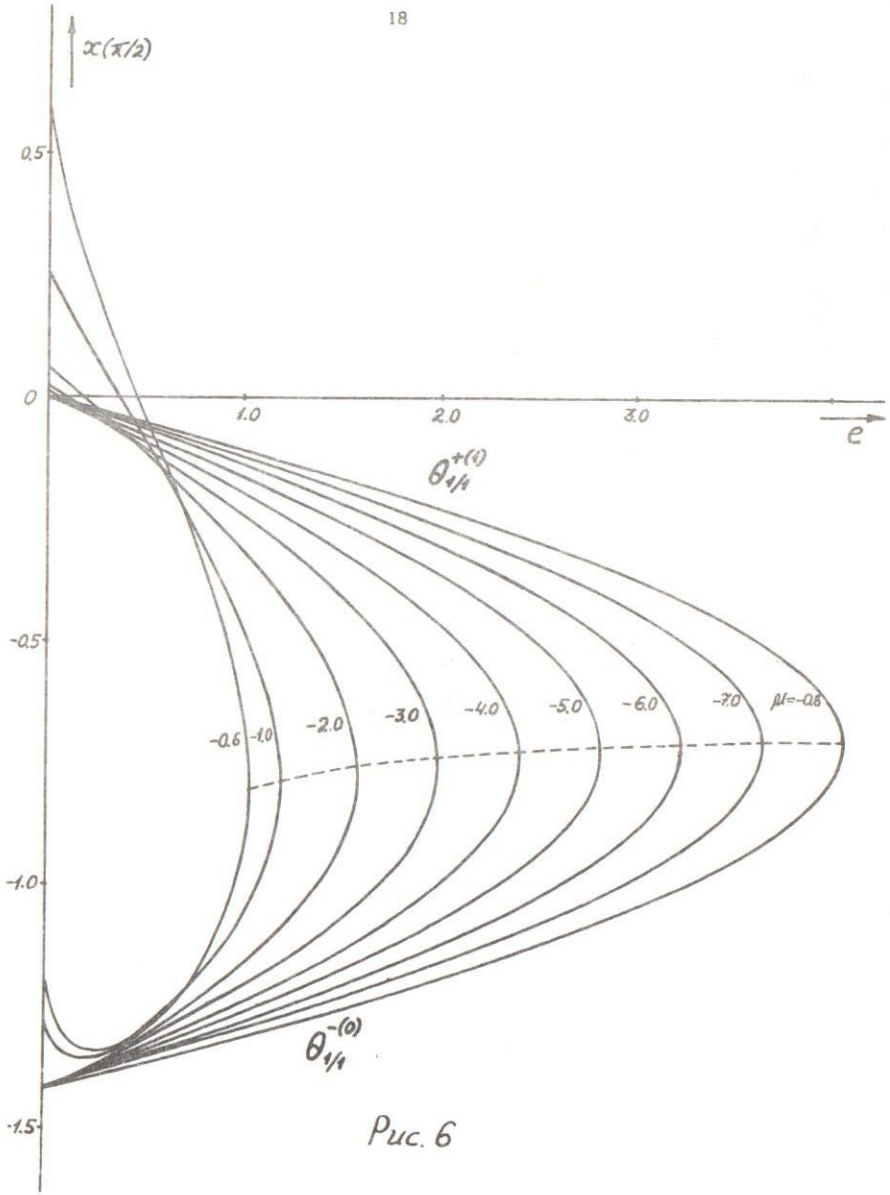
x(π/2)
0.5
0
-0.5
-1.0
-1.5
1.0
2.0
3.0
e
θ+(1)1/1
θ-(0)1/1
-0.6
-1.0
-2.0
-3.0
-4.0
-5.0
-6.0
-7.0
μ=-0.8

Рис. 6

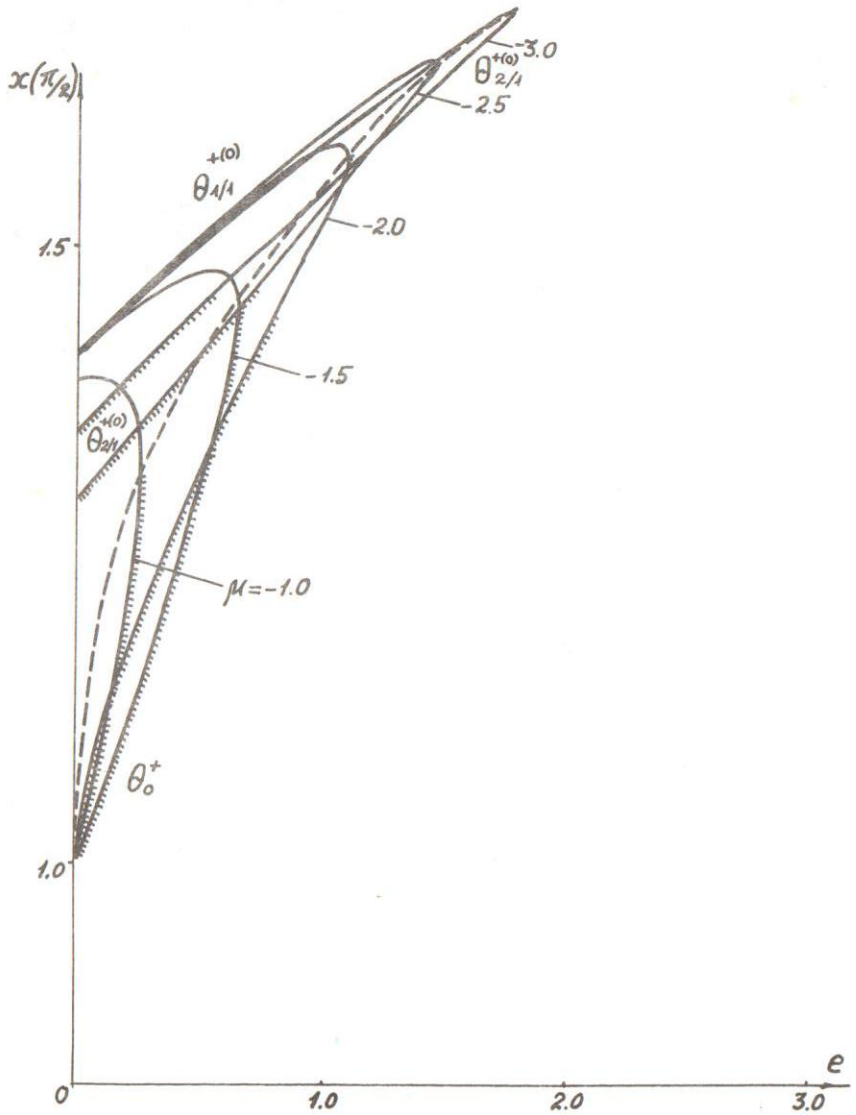
x(π/2)
1.5
1.0
0
1.0
2.0
3.0
e
θ+(0)1/1
θ+(0)2/1
θ+(0)2/1
θ+0
-3.0
-2.5
-2.0
-1.5
μ=-1.0

Рис. 7

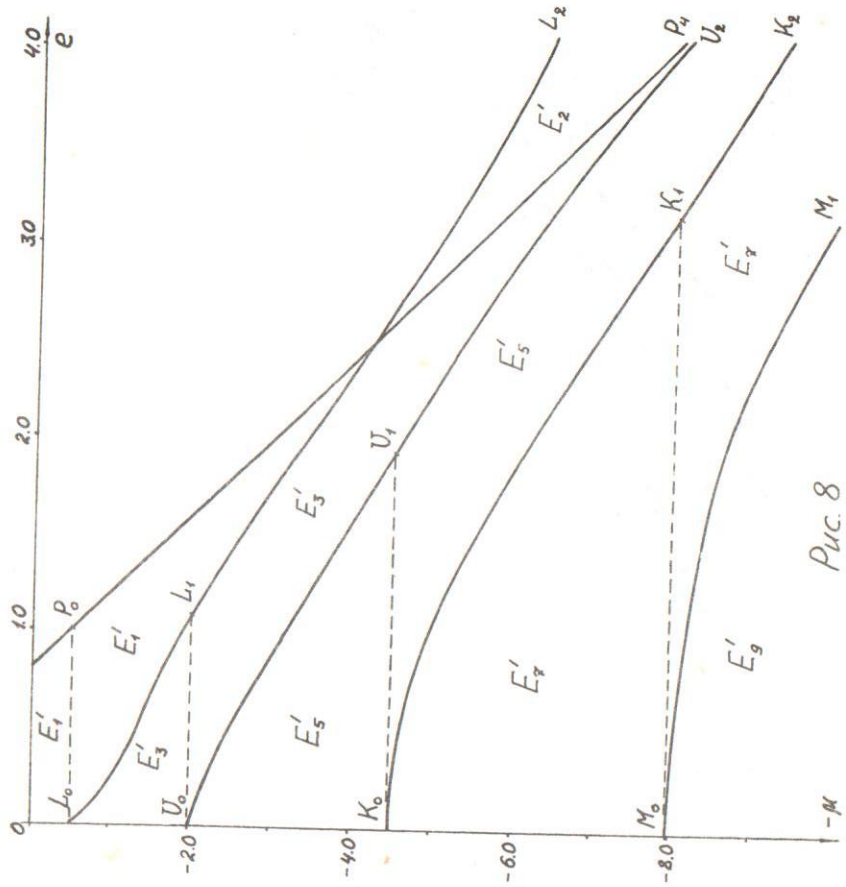
e
4.0
3.0
2.0
1.0
0
-2.0
-4.0
-6.0
-8.0
-μ
P_0
L_1
U_1
K_1
M_1
P_1
U_2
K_2
L_2
J_0
U_0
K_0
M_0
E_1'
E_3'
E_5'
E_7'
E_9'

Рис. 8

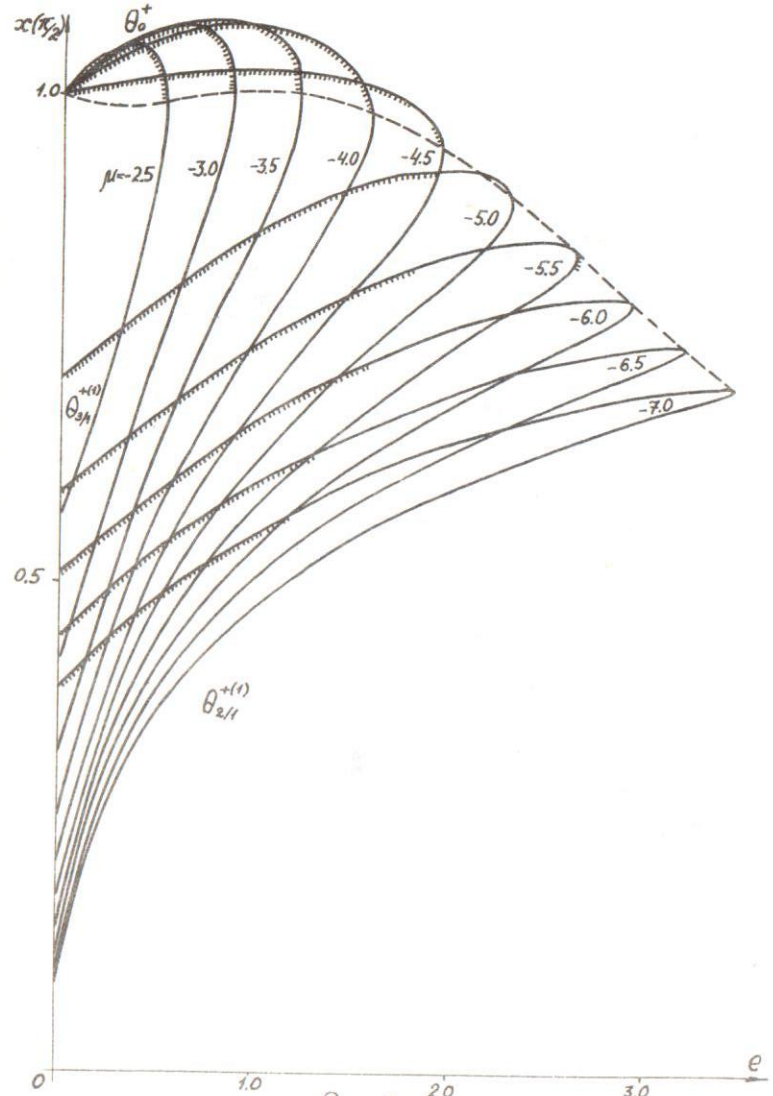
$x(\pi/2)$
θ_0^+
1.0
0.5
0
1.0
2.0
3.0
e
μ=-2.5
-3.0
-3.5
-4.0
-4.5
-5.0
-5.5
-6.0
-6.5
-7.0
$\theta_{3/1}^{+(1)}$
$\theta_{2/1}^{+(1)}$

Рис. 9

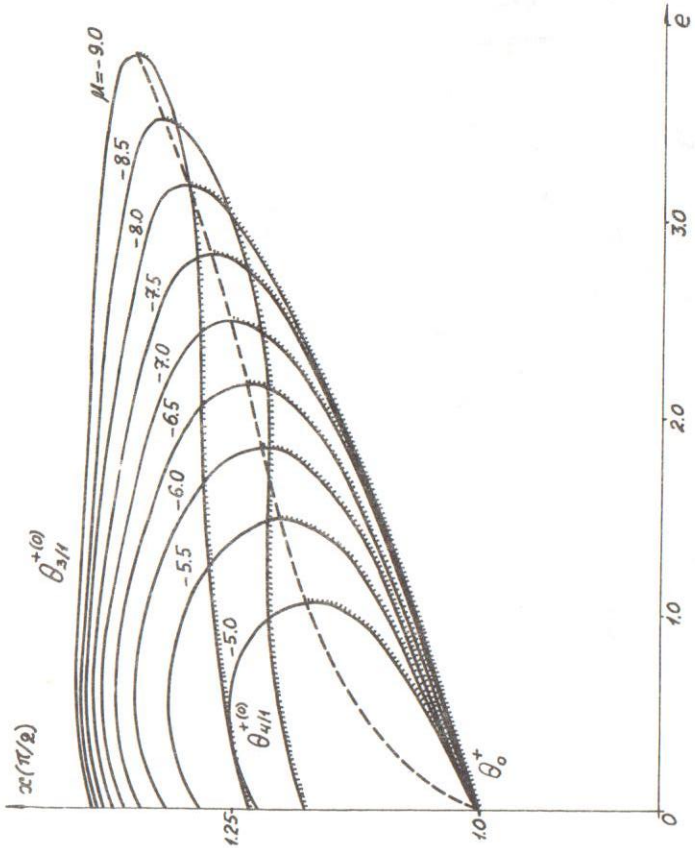
$x(\pi/2)$
$\mu=-9.0$
-8.5
-8.0
-7.5
-7.0
-6.5
-6.0
-5.5
-5.0
$\theta_{3/1}^{+(0)}$
$\theta_{4/1}^{+(0)}$
θ_0^+
1.25
1.0
0
1.0
2.0
3.0
e

Рис. 10

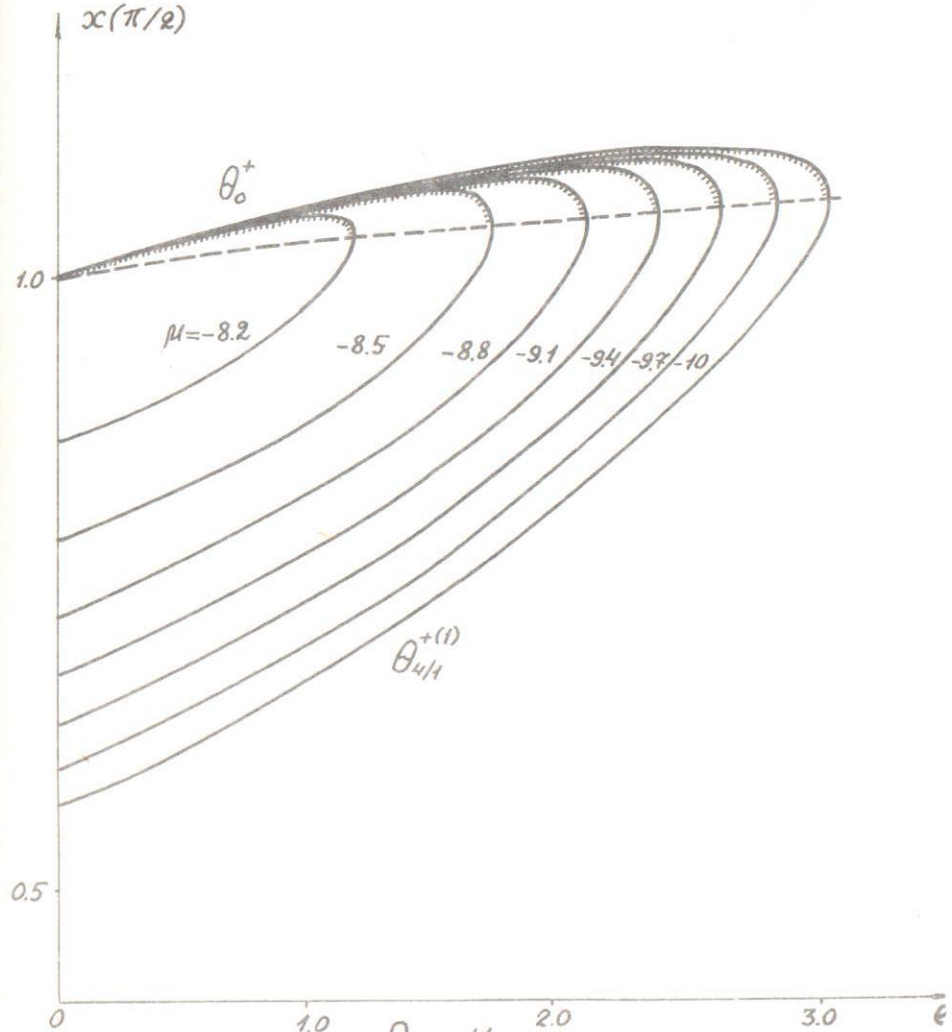
$x(\pi/2)$
θ_0^+
1.0
0.5
$\mu=-8.2$
-8.5
-8.8
-9.1
-9.4
-9.7
-10
$\theta_{4/1}^{+(1)}$
0
1.0
2.0
3.0
e

Рис. 11

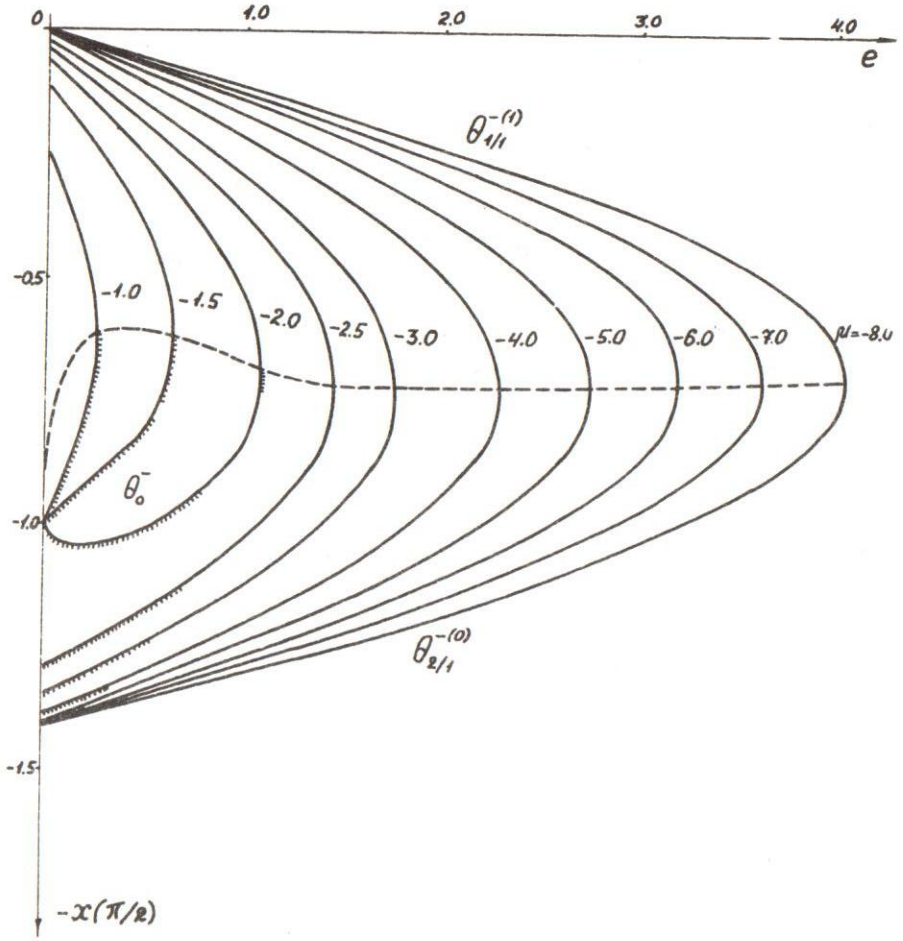
0
1.0
2.0
3.0
4.0
e
$\theta_{1/1}^{-(1)}$
-0.5
-1.0
-1.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-3.0
-4.0
-5.0
-6.0
-7.0
$\mu=-8.0$
θ_0^-
$\theta_{2/1}^{-(0)}$
$-x(\pi/2)$

Рис. 12

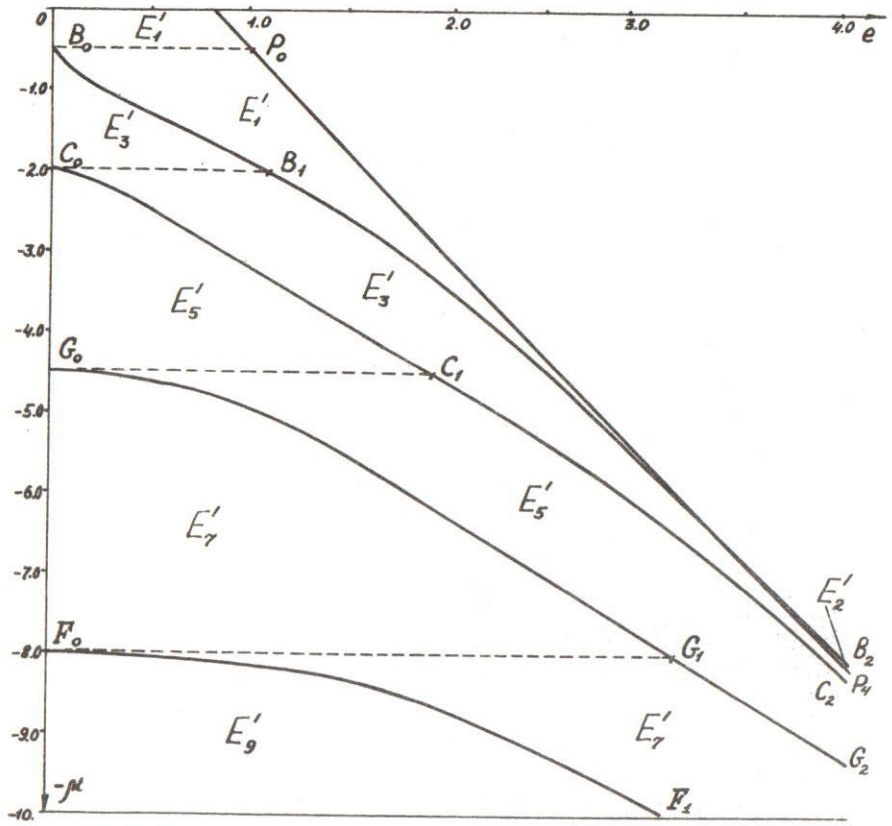
0
1.0
2.0
3.0
4.0
e
-1.0
-2.0
-3.0
-4.0
-5.0
-6.0
-7.0
-8.0
-9.0
-10.
$-\mu$
B_0
P_0
C_0
B_1
G_0
C_1
F_0
G_1
F_1
B_2
P_1
C_2
G_2
E_1'
E_3'
E_5'
E_7'
E_9'
E_2'

Рис. 13

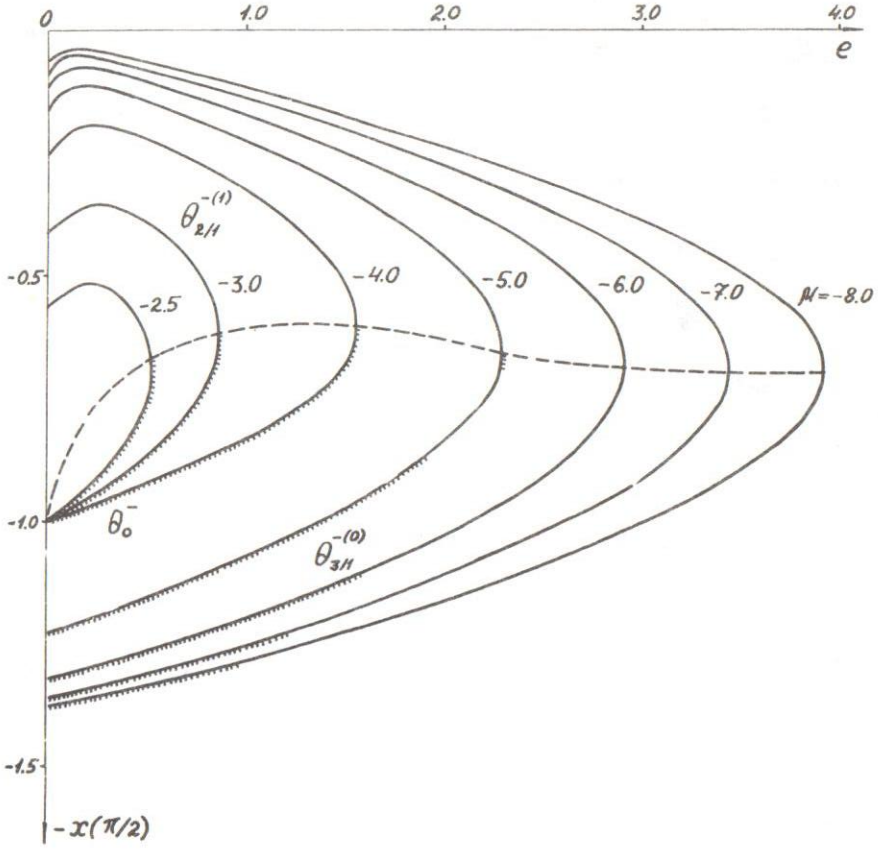
0
1.0
2.0
3.0
4.0
e
-0.5
-1.0
-1.5
$\theta_{2/1}^{-(1)}$
-2.5
-3.0
-4.0
-5.0
-6.0
-7.0
μ=-8.0
θ_0^-
$\theta_{3/1}^{-(0)}$
-x(π/2)

Рис. 14

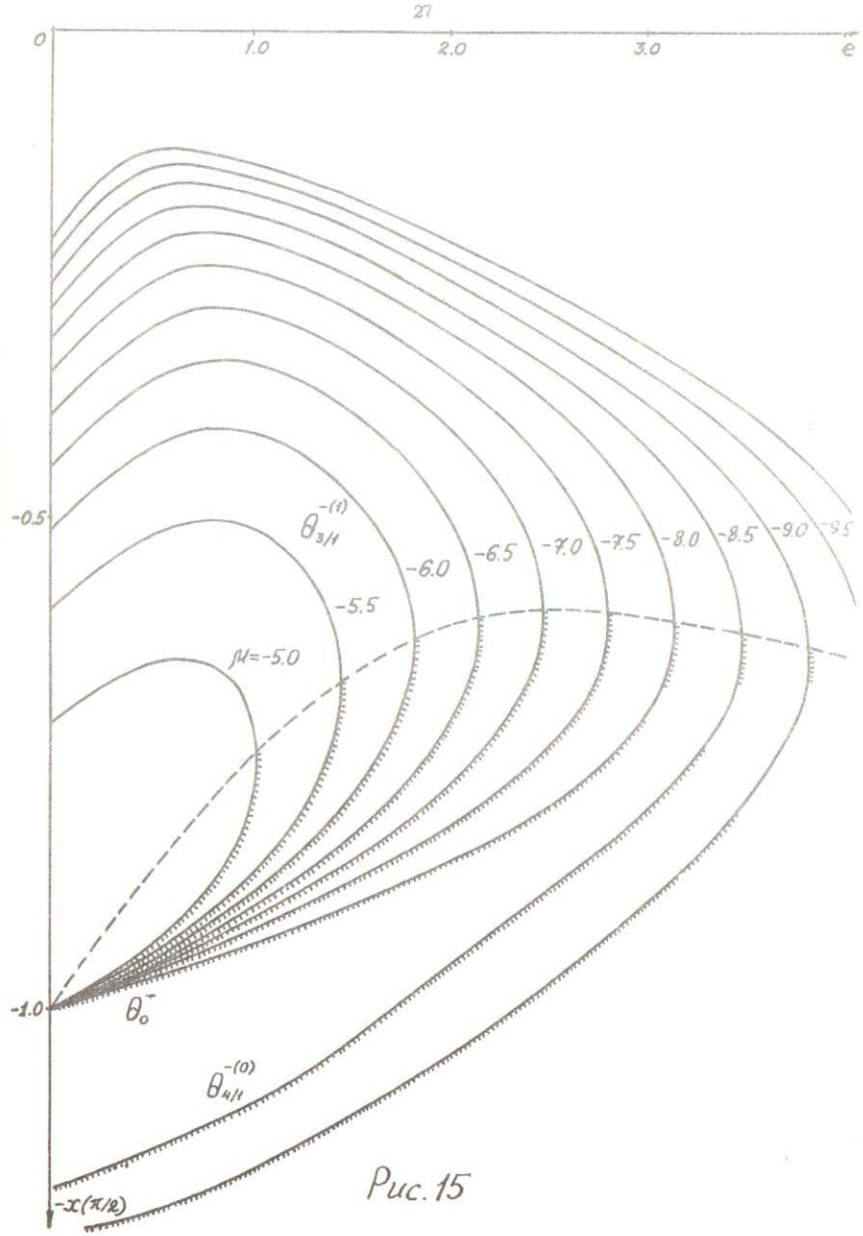
0
1.0
2.0
3.0
e
-0.5
-1.0
$\theta_{3/1}^{-(1)}$
-5.5
-6.0
-6.5
-7.0
-7.5
-8.0
-8.5
-9.0
-9.5
μ=-5.0
θ_0^-
$\theta_{4/1}^{-(0)}$
-x(π/2)

Рис. 15

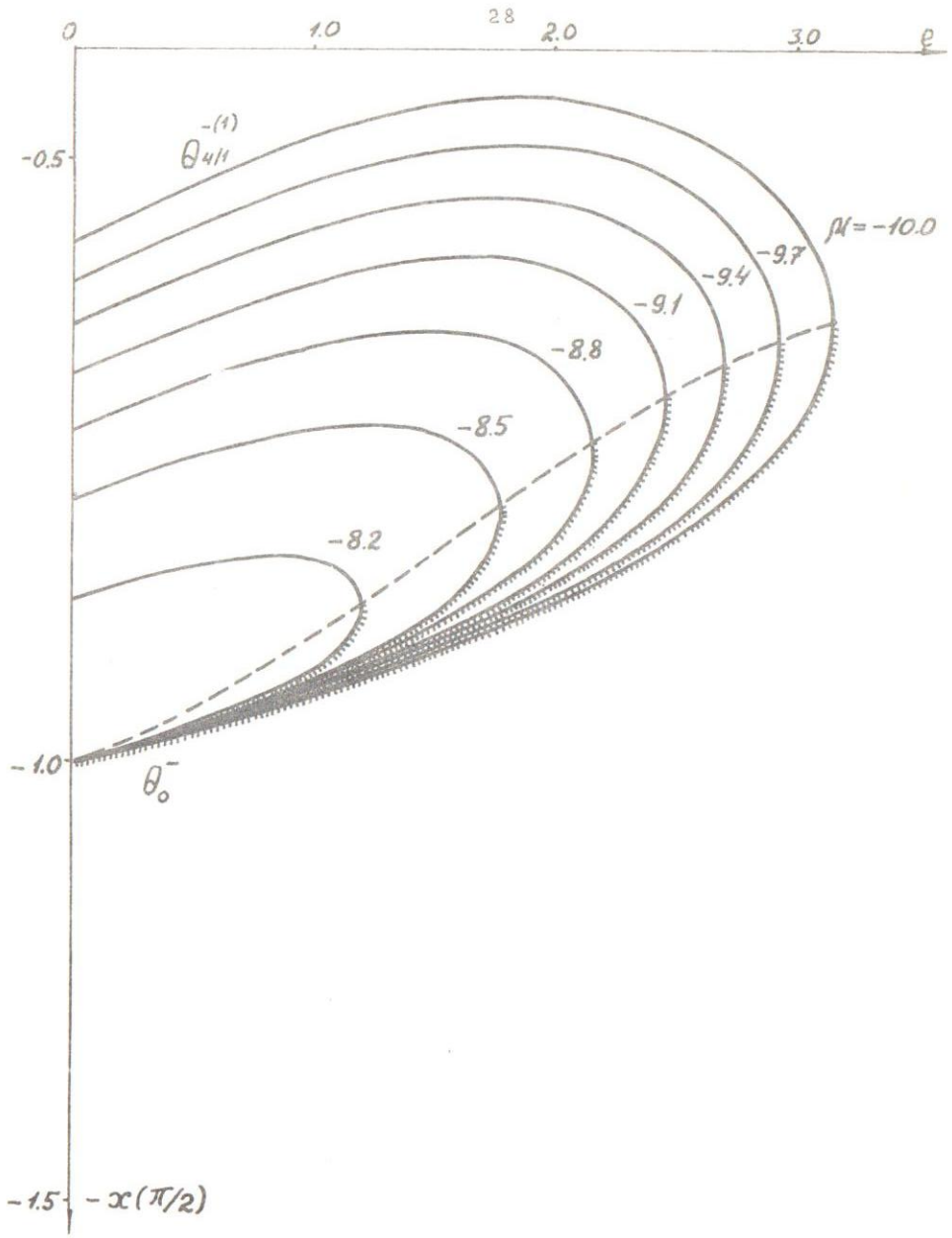

Рис. 16

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме: и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Adress: USSR, I25047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.