



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 17 за 1983 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.

Классические
ортогональные полиномы
дискретной переменной на
неравномерных сетках

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.
Классические ортогональные полиномы дискретной переменной на неравномерных сетках //
Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1983. № 17. 34 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1983-17>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров

КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ
ДИСКРЕТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

Препринт № 17 за 1983 г.

Москва

АННОТАЦИЯ

В работе построена теория классических ортогональных полиномов дискретной переменной на некоторых классах неравномерных сеток, являющаяся обобщением теории полиномов Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье. Частными случаями рассмотренных полиномов являются полиномы, тесно связанные с такими давно известными физическими величинами, как коэффициенты Клебша-Гордана и коэффициенты Рака, которые широко используются в теории представлений групп, в квантовой механике теории момента количества движения, в атомной и ядерной спектроскопии.

По материалам этой работы был сделан обзорный доклад на Международном семинаре "Теоретико-групповые методы в физике" (г.Звенигород, 24-26 ноября 1982 года).

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.	3
1. Разностные уравнения гипергеометрического типа на неравномерных сетках.	3
2. Формула Родрига для полиномиальных решений.	11
3. Свойство ортогональности.	15
4. Возможные виды функций $p(x)$. Классификация сеток.	18
5. Классификация полиномов дискретной переменной.	20
6. Вычисление основных характеристик.	26
Литература.	34

Введение

-3-

В препринте рассматривается обобщение результатов работы [1], в которой была построена теория классических ортогональных полиномов дискретной переменной на сетке с переменным шагом $\Delta x_i = \alpha x_i + \beta$ ($i = 0, 1, \dots$). Построенные в [1] полиномы оказались тесно связанными с давно используемыми в теории представлений групп и атомной физике $3nj$ - символами Вигнера, в частности, с коэффициентами Клебша-Гордана и коэффициентами Рака.

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1]. Предложенное в работе разностное уравнение гипергеометрического типа на неравномерной сетке более общего вида, чем рассмотренной в [1], обладает основным свойством разностных уравнений для классических ортогональных полиномов дискретной переменной: в результате разностного дифференцирования исходного уравнения мы приходим к уравнению того же типа. Это позволило сохранить неизменными все ключевые моменты рассуждений работы [1] и получить с помощью простейших математических средств основные свойства классических ортогональных полиномов дискретной переменной на неравномерных сетках - аналог формулы Родрига, свойство ортогональности, рекуррентные соотношения, формулы дифференцирования и асимптотические представления.

В работе произведена классификация полученных полиномов и указан способ вычисления основных характеристик. Сравнение соотношений ортогональности для полученных полиномов и полиномов, введенных в [2] с помощью обобщения аппарата обобщенных гипергеометрических функций, показывает, что должна существовать простая связь между этими системами полиномов.

1. Разностные уравнения гипергеометрического типа на неравномерных сетках

Классические ортогональные полиномы (полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита) являются частными решениями дифференциального уравнения гипергеометрического типа

$$\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0, \quad (1)$$

где $\tilde{\sigma}(x)$ и $\tilde{\tau}(x)$ - некоторые полиномы не выше второй и первой степени соответственно,

$$\lambda = \lambda_n = -n\tilde{\tau}' - \frac{n(n-1)}{2} \tilde{\sigma}'' \quad (n=0,1,\dots)$$

- собственное значение.

Если от дифференциального уравнения (I) перейти к соответствующему разностному уравнению

$$\tilde{\sigma}(x) \frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2} + \tilde{\tau}(x) \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h} + \lambda y(x) = 0, \quad (2)$$

то при этом в качестве частных решений уравнения (2) возникают так называемые классические ортогональные полиномы дискретной переменной [3].

В [1] рассматривалось следующее обобщение уравнения (2). Независимая переменная x в уравнении (I) была заменена на $\rho(x)$, где $\rho(x)$ - полином второй степени:

$$\tilde{\sigma}(\rho) \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \tilde{\tau}(\rho) \frac{dy}{d\rho} + \lambda y = 0, \quad \rho = \rho(x). \quad (3)$$

Если аппроксимировать левую часть этого дифференциального уравнения разностной схемой с постоянным шагом $\Delta x = h$ второго порядка точности относительно шага h , то в результате возникает разностное уравнение для классических ортогональных полиномов дискретной переменной на сетке с шагом вида

$$\Delta \rho_i = d_i + \beta:$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}[\rho(x)] \frac{1}{\rho(x+\frac{h}{2})-\rho(x-\frac{h}{2})} \left[\frac{y(x+h)-y(x)}{\rho(x+h)-\rho(x)} - \frac{y(x)-y(x-h)}{\rho(x)-\rho(x-h)} \right] + \\ + \frac{1}{2} \tilde{\tau}[\rho(x)] \left[\frac{y(x+h)-y(x)}{\rho(x+h)-\rho(x)} + \frac{y(x)-y(x-h)}{\rho(x)-\rho(x-h)} \right] + \lambda y(x) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Покажем, что свойства, полученные в [1] для полиномиальных решений уравнения (4), сохраняются и при использовании в качестве $\rho(x)$ функций более общего вида, чем полином второй степе-

ни. Для этого предварительно с помощью линейной замены независимой переменной x приведем уравнение (4) к виду

$$\tilde{\sigma}[\rho(x)] \frac{\Delta}{\Delta \rho(x-\frac{1}{2})} \left[\frac{\nabla y(x)}{\nabla \rho(x)} \right] + \frac{1}{2} \tilde{\tau}[\rho(x)] \left[\frac{\Delta y(x)}{\Delta \rho(x)} + \frac{\nabla y(x)}{\nabla \rho(x)} \right] + \lambda y(x) = 0, \quad (5)$$

где

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1),$$

$$\frac{\Delta}{\Delta \rho(x-\frac{1}{2})} f(x) \equiv \frac{\Delta f(x)}{\Delta \rho(x-\frac{1}{2})}.$$

Нам потребуется следующая лемма, являющаяся обобщением леммы из работы [1].

Л е м м а. Для любого полинома $y_n(\rho)$ степени n при $\rho = \rho(x)$ имеют место соотношения

$$\frac{\Delta y_n[\rho(x)]}{\Delta \rho(x)} = P_{n-1} \left[\rho(x + \frac{1}{2}) \right], \quad (6)$$

$$\frac{y_n[\rho(x+1)] + y_n[\rho(x)]}{2} = Q_n \left[\rho(x + \frac{1}{2}) \right] \quad (7)$$

($P_{n-1}(\rho)$ и $Q_n(\rho)$ - некоторые полиномы соответствующих степеней относительно ρ), если справедливо соотношение (7) при $n=1$ и функция $[\Delta \rho(x)]^2$ является полиномом не выше второй степени относительно $\rho(x + \frac{1}{2})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что достаточно доказать справедливость леммы для $y_n(\rho) = \rho^n$. При $n=1$ равенство (6) выполнено при произвольной функции $\rho(x)$, а равенство (7) выполняется в силу первого условия леммы. При $n > 1$ доказательство легко проводится по индукции с помощью соотношений

$$\frac{\Delta \rho^n(x)}{\Delta \rho(x)} = \frac{\rho(x+1) + \rho(x)}{2} \frac{\Delta \rho^{n-1}(x)}{\Delta \rho(x)} + \frac{\rho^{n-1}(x+1) + \rho^{n-1}(x)}{2}, \quad (6a)$$

$$\frac{\rho''(x+1)+\rho''(x)}{2} = \frac{\rho(x+1)+\rho(x)}{2} \frac{\rho^{n-1}(x+1)+\rho^{n-1}(x)}{2} + \frac{1}{4} [\Delta\rho(x)]^2 \frac{\Delta\rho^{n-1}(x)}{\Delta\rho(x)}. \quad (7a)$$

Если функция $\rho(x)$ удовлетворяет условиям леммы, то решения уравнения (5) обладают простым свойством, характерным для классических ортогональных полиномов дискретной переменной: функция $V_1(x) \equiv \frac{\Delta y(x)}{\Delta\rho(x)}$ удовлетворяет уравнению того же вида, что и уравнение (5).

Для доказательства перепишем предварительно уравнение (5) в виде

$$\sigma(x) \frac{\Delta}{\Delta\rho(x-\frac{1}{2})} \left[\frac{\nabla y(x)}{\nabla\rho(x)} \right] + \tau(x) \frac{\Delta y(x)}{\Delta\rho(x)} + \lambda y(x) = 0, \quad (8)$$

где

$$\sigma(x) = \tilde{\sigma}[\rho(x)] - \frac{1}{2} \tilde{\tau}[\rho(x)] \Delta\rho(x - \frac{1}{2}), \quad \tau(x) = \tilde{\tau}[\rho(x)]. \quad (9)$$

Так как

$$\Delta \left[\frac{\nabla y(x)}{\nabla\rho(x)} \right] = \nabla \left[\frac{\Delta y(x)}{\Delta\rho(x)} \right] = \nabla V_1(x), \quad \Delta\rho(x - \frac{1}{2}) = \nabla\rho(x + \frac{1}{2}),$$

то из уравнения (8) вытекает следующая связь между функциями $y(x)$ и $V_1(x)$:

$$\sigma(x) \frac{\nabla V_1(x)}{\nabla\rho(x+\frac{1}{2})} + \tau(x) V_1(x) + \lambda y(x) = 0. \quad (10)$$

Применяя к обоим частям этого равенства оператор $\frac{\Delta}{\Delta\rho(x)}$, получим

$$\sigma(x) \frac{\Delta}{\Delta\rho_1(x-\frac{1}{2})} \left[\frac{\nabla V_1(x)}{\nabla\rho_1(x)} \right] + \tau_1(x) \frac{\Delta V_1(x)}{\Delta\rho_1(x)} + \mu_1 V_1(x) = 0. \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= \rho(x + \frac{1}{2}), \\ \tau_1(x) &= \frac{\Delta\sigma(x)}{\Delta\rho(x)} + \tau(x+1) \frac{\Delta\rho(x+\frac{1}{2})}{\Delta\rho(x)}, \\ \mu_1 &= \lambda + \frac{\Delta\tau(x)}{\Delta\rho(x)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как функция $\tau(x)$ — полином не выше первой степени относительно $\rho(x)$, то величина μ_1 , очевидно, не зависит от x . Перепишем уравнение (11) в виде, аналогичном (5):

$$\bar{\sigma}_1(x) \frac{\Delta}{\Delta\rho_1(x-\frac{1}{2})} \left[\frac{\nabla V_1(x)}{\nabla\rho_1(x)} \right] + \frac{1}{2} \tau_1(x) \left[\frac{\Delta V_1(x)}{\Delta\rho_1(x)} + \frac{\nabla V_1(x)}{\nabla\rho_1(x)} \right] + \mu_1 V_1(x) = 0, \quad (13)$$

где

$$\bar{\sigma}_1(x) = \sigma(x) + \frac{1}{2} \tau_1(x) \Delta\rho_1(x - \frac{1}{2}). \quad (14)$$

Уравнение (13) будет иметь тот же вид, что и уравнение (5), если мы покажем, что

$$\tau_1(x) = \tilde{\tau}_1[\rho_1(x)], \quad \bar{\sigma}_1(x) = \tilde{\sigma}_1[\rho_1(x)],$$

где $\tilde{\tau}_1(\rho_1)$ и $\tilde{\sigma}_1(\rho_1)$ — полиномы не выше первой и второй степени соответственно. Преобразуем выражение для $\tau_1(x)$. Согласно (12) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= \frac{\Delta}{\Delta\rho(x)} \left\{ \tilde{\sigma}[\rho(x)] - \frac{1}{2} \tau(x) \Delta\rho(x - \frac{1}{2}) \right\} + \tau(x+1) \frac{\Delta\rho(x+\frac{1}{2})}{\Delta\rho(x)} = \\ &= \frac{\Delta\tilde{\sigma}[\rho(x)]}{\Delta\rho(x)} + \frac{1}{2\Delta\rho(x)} \left[\tau(x+1) \Delta\rho(x+\frac{1}{2}) + \tau(x) \Delta\rho(x - \frac{1}{2}) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta \tilde{b}[\rho(x)]}{\Delta \rho(x)} + \left[\frac{\tau(x+1) + \tau(x)}{2} \frac{\Delta \rho(x + \frac{1}{2}) + \Delta \rho(x - \frac{1}{2})}{2 \Delta \rho(x)} + \frac{\tau(x+1) - \tau(x)}{\Delta \rho(x)} \frac{\Delta \rho(x + \frac{1}{2}) - \Delta \rho(x - \frac{1}{2})}{4} \right]. \quad (15)$$

Согласно лемме

$$\frac{\rho(x+1) + \rho(x)}{2} = \bar{Q}_1 \left[\rho(x + \frac{1}{2}) \right],$$

где $\bar{Q}_1(\rho)$ — полином первой степени относительно ρ . Поэтому

$$\frac{\Delta \rho(x + \frac{1}{2}) + \Delta \rho(x - \frac{1}{2})}{2 \Delta \rho(x)} = \frac{\Delta \left[\frac{\rho(x + \frac{1}{2}) + \rho(x - \frac{1}{2})}{2} \right]}{\Delta \rho(x)} = \frac{\Delta \bar{Q}_1[\rho(x)]}{\Delta \rho(x)} = \text{const},$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho(x + \frac{1}{2}) - \Delta \rho(x - \frac{1}{2})}{4} &= \frac{\rho(x + \frac{3}{2}) + \rho(x - \frac{1}{2})}{4} - \frac{1}{2} \rho(x + \frac{1}{2}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\rho(x + \frac{3}{2}) + \rho(x - \frac{1}{2})}{2} + \frac{\rho(x + \frac{1}{2}) + \rho(x - \frac{1}{2})}{2} \right] - \rho(x + \frac{1}{2}) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{Q}_1[\rho(x+1)] + \bar{Q}_1[\rho(x)] \right\} - \rho(x + \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

т.е. функция $\frac{1}{4} [\Delta \rho(x + \frac{1}{2}) - \Delta \rho(x - \frac{1}{2})]$ является полиномом не выше первой степени относительно $\rho_1(x) = \rho(x + \frac{1}{2})$.

Так как функции $\tau(x) = \tilde{\tau}[\rho(x)]$ и $\tilde{b}[\rho(x)]$ являются полиномами не выше 1-ой и 2-ой степени соответственно относительно $\rho(x)$, то согласно лемме из формулы (15) получаем, что $\tau_1(x) = \tilde{\tau}_1[\rho_1(x)]$, где $\tilde{\tau}_1(\rho_1)$ — полином не выше первой степени относительно ρ_1 .

Аналогично с помощью (12) и (9) преобразуется выражение для

$$\bar{b}_1(x):$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_1(x) &= \tilde{b}(x) + \frac{1}{2} \tau_1(x) \Delta \rho(x) = \frac{\tilde{b}(x) + \tilde{b}(x+1)}{2} + \frac{1}{2} \tau(x+1) \Delta \rho(x + \frac{1}{2}) = \\ &= \frac{\tilde{b}[\rho(x+1)] + \tilde{b}[\rho(x)]}{2} + \frac{1}{4} \left[\tau(x+1) \Delta \rho(x + \frac{1}{2}) - \tau(x) \Delta \rho(x - \frac{1}{2}) \right] = \\ &= \frac{\tilde{b}[\rho(x+1)] + \tilde{b}[\rho(x)]}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\tau(x+1) + \tau(x)}{2} \frac{\Delta \rho(x + \frac{1}{2}) - \Delta \rho(x - \frac{1}{2})}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau(x+1) - \tau(x)}{\Delta \rho(x)} \frac{\Delta \rho(x + \frac{1}{2}) + \Delta \rho(x - \frac{1}{2})}{4 \Delta \rho(x)} [\Delta \rho(x)]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Так как функция $[\Delta \rho(x)]^2$ является полиномом не выше первой степени относительно $\rho_1(x)$, то из леммы и приведенных выше рассуждений вытекает, что функцию $\bar{b}_1(x)$ можно представить в виде $\tilde{b}_1[\rho_1(x)]$, где $\tilde{b}_1(\rho_1)$ — полином не выше второй степени относительно ρ_1 .

Таким образом, мы показали, что при разностном дифференцировании уравнение (5) сохраняет свой вид, т.е. если функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (5), то функция $\frac{\Delta y(x)}{\Delta \rho(x)}$ будет удовлетворять уравнению

$$\tilde{b}_1[\rho_1(x)] \frac{\Delta}{\Delta \rho_1(x - \frac{1}{2})} \left[\frac{\nabla V_1(x)}{\nabla \rho_1(x)} + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_1[\rho_1(x)] \left[\frac{\Delta V_1(x)}{\Delta \rho_1(x)} + \frac{\nabla V_1(x)}{\nabla \rho_1(x)} \right] + \mu_1 V_1(x) \right] = 0, \quad (16)$$

где $\rho_1(x) = \rho(x + \frac{1}{2})$, $\tilde{b}_1(\rho_1)$ и $\tilde{\tau}_1(\rho_1)$ — некоторые полиномы не выше второй и первой степени относительно ρ_1 .

Справедливо и обратное утверждение: Любое решение уравнения (16) при $\lambda \neq 0$ можно представить в виде $V_1(x) = \frac{\Delta y(x)}{\Delta \rho(x)}$, где $y(x)$ — некоторое решение уравнения (5).

При доказательстве удобно исходить не из уравнений (5) и (16), а из эквивалентных им уравнений (8) и (11). В соответствии с соотношением (10) рассмотрим функцию

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} \left[\delta(x) \frac{\nabla V_1(x)}{\nabla \rho_1(x)} + \tau(x) V_1(x) \right]. \quad (17)$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\frac{\Delta}{\Delta \rho(x)}$, с помощью уравнения (II) для $V_1(x)$ получим $\frac{\Delta y(x)}{\Delta \rho(x)} = V_1(x)$. Поэто-

му из равенства (17) вытекает, что функция $y(x)$ действительно является решением уравнения (8), что и требовалось доказать.

По индукции можно получить, что функция

$$V_\kappa(x) = \frac{\Delta V_{\kappa-1}(x)}{\Delta \rho_{\kappa-1}(x)} \quad (\kappa = 1, 2, \dots),$$

где $\rho_\kappa(x) = \rho(x + \kappa/2)$, $V_0(y) = y(x)$, удовлетворяет уравнению вида

$$\tilde{\delta}_\kappa[\rho_\kappa(x)] \frac{\Delta}{\Delta \rho_\kappa(x - \frac{1}{2})} \left[\frac{\nabla V_\kappa(x)}{\nabla \rho_\kappa(x)} \right] + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\kappa[\rho_\kappa(x)] \left(\frac{\Delta V_\kappa(x)}{\Delta \rho_\kappa(x)} + \frac{\nabla V_\kappa(x)}{\nabla \rho_\kappa(x)} \right) + \mu_\kappa V_\kappa(x) = 0 \quad (18)$$

($\tilde{\delta}_\kappa(\rho_\kappa)$ и $\tilde{\tau}_\kappa(\rho_\kappa)$ - некоторые полиномы относительно ρ_κ не выше второй и первой степени соответственно). Уравнение (18) эквивалентно уравнению

$$\delta(x) \frac{\Delta}{\Delta \rho_\kappa(x - \frac{1}{2})} \left[\frac{\nabla V_\kappa(x)}{\nabla \rho_\kappa(x)} \right] + \tau_\kappa(x) \frac{\Delta V_\kappa(x)}{\Delta \rho_\kappa(x)} + \mu_\kappa V_\kappa(x) = 0. \quad (19)$$

Здесь

$$\delta(x) = \tilde{\delta}_\kappa[\rho_\kappa(x)] \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\kappa[\rho_\kappa(x)] \Delta \rho_\kappa(x - \frac{1}{2}), \quad \tau_\kappa(x) = \tilde{\tau}_\kappa[\rho_\kappa(x)], \quad (20)$$

$$\tau_\kappa(x) = \frac{\Delta \delta(x)}{\Delta \rho_{\kappa-1}(x)} + \tau_{\kappa-1}(x+1) \frac{\Delta \rho_\kappa(x)}{\Delta \rho_{\kappa-1}(x)}, \quad (21)$$

$$\mu_\kappa = \mu_{\kappa-1} + \frac{\Delta \tau_{\kappa-1}(x)}{\Delta \rho_{\kappa-1}(x)}, \quad (22)$$

$$(\tau_0(x) = \tau(x), \quad \mu_0 = \lambda).$$

Справедливо и обратное утверждение: любое решение уравнения (19) при $\mu_{\kappa-1} \neq 0$ можно представить в виде $V_\kappa(x) = \frac{\Delta V_{\kappa-1}(x)}{\Delta \rho_{\kappa-1}(x)}$.

Из (21) и (22) можно получить следующие выражения для $\tau_m(x)$ и μ_m :

$$\begin{aligned} \tau_m(x) &= \frac{1}{\Delta \rho_{m-1}(x)} \left[\delta(x+m) - \delta(x) + \tau(x+m) \Delta \rho_{2m-1}(x) \right], \\ \mu_m &= \lambda + \sum_{\kappa=0}^{m-1} \frac{\Delta \tau_\kappa(x)}{\Delta \rho_\kappa(x)}. \end{aligned} \quad (23)$$

2. Формула Родрига для полиномиальных решений

Рассмотренное выше свойство разностного уравнения (5) позволяет построить семейство частных решений этого уравнения, соответствующих определенным значениям λ . Действительно, уравнение для функции $V_n(x)$

$$\delta(x) \frac{\Delta}{\Delta \rho_n(x - \frac{1}{2})} \left[\frac{\nabla V_n(x)}{\nabla \rho_n(x)} \right] + \tau_n(x) \frac{\Delta V_n(x)}{\Delta \rho_n(x)} + \mu_n V_n(x) = 0$$

при $\mu_n = 0$ имеет частное решение $V_n(x) = \text{const}$.

Покажем, что при $\kappa < n$ функции $V_\kappa(x)$, связанные соотношениями $V_{\kappa+1}(x) = \frac{\Delta V_\kappa(x)}{\Delta \rho_\kappa(x)}$, при дополнительном требовании $\mu_\kappa \neq 0$ ($\kappa = 0, 1, \dots, n-1$) будут полиномами степени $n-\kappa$ относительно $\rho_\kappa(x)$. Доказательство проведем по индукции, предполагая, что функция $V_{\kappa+1}(x)$ является полиномом степени $n-\kappa-1$ относительно $\rho_{\kappa+1}(x)$. Из уравнения (18) имеем

$$V_K(x) = -\frac{1}{\mu_K} \left\{ \tilde{\sigma}_K[\rho_K(x)] \frac{\nabla V_{K+1}(x)}{\nabla \rho_{K+1}(x)} + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_K[\rho_K(x)] [V_{K+1}(x) + V_{K+1}(x-1)] \right\}.$$

Согласно лемме функции $\frac{\nabla V_{K+1}(x)}{\nabla \rho_{K+1}(x)}$ и $[V_{K+1}(x) + V_{K+1}(x-1)]$ являются полиномами относительно $\rho_{K+2}(x-1)$ степени $n-K-2$ и $n-K-1$ соответственно.

Так как $\rho_{K+2}(x-1) = \rho_K(x)$, то функция $V_K(x)$ будет, очевидно, полиномом степени $n-K$ относительно $\rho_K(x)$. Последовательно применяя эти рассуждения при $K=n-1, n-2$ и т.д. мы получим, что существует решение уравнения (5) $y(x) = V_0(x)$ в виде полинома степени n относительно $\rho(x)$ при таком значении $\lambda = \lambda_n$, для которого $\mu_n = 0$.

Чтобы получить явное выражение для полинома $y(x)$, запишем уравнения (8) и (9) в самосопряженном виде:

$$\frac{\Delta}{\Delta \rho(x-\frac{1}{2})} [\delta(x) \rho(x) \frac{\nabla y(x)}{\nabla \rho(x)}] + \lambda \rho(x) y(x) = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\Delta}{\Delta \rho_K(x-\frac{1}{2})} [\delta(x) \rho_K(x) \frac{\nabla V_K(x)}{\nabla \rho_K(x)}] + \mu_K \rho_K(x) V_K(x) = 0. \quad (25)$$

Здесь функции $\rho(x)$ и $\rho_K(x)$ удовлетворяют разностным уравнениям

$$\frac{\Delta}{\Delta \rho(x-\frac{1}{2})} [\delta(x) \rho(x)] = \tau(x) \rho(x), \quad (26)$$

$$\frac{\Delta}{\Delta \rho_K(x-\frac{1}{2})} [\delta(x) \rho_K(x)] = \tau_K(x) \rho_K(x). \quad (27)$$

Используя формулы (21) и (27), получим связь функций $\rho_K(x)$ и $\rho(x)$. Имеем

$$\frac{1}{\rho_K(x)} \frac{\Delta}{\Delta \rho_K(x-\frac{1}{2})} [\delta(x) \rho_K(x)] = \frac{\Delta \delta(x)}{\Delta \rho_{K-1}(x)} + \frac{\Delta \rho_K(x)}{\Delta \rho_{K-1}(x)} \frac{1}{\rho_{K-1}(x)} \frac{\Delta}{\Delta \rho_{K-1}(x-\frac{1}{2})} [\delta(x+1) \rho_{K-1}(x+1)].$$

Так как $\rho_{K-1}(x+\frac{1}{2}) = \rho_K(x)$, $\rho_K(x-\frac{1}{2}) = \rho_{K-1}(x)$, то

$$\frac{\Delta [\delta(x) \rho_K(x)]}{\rho_K(x)} = \Delta \delta(x) + \frac{\Delta [\delta(x+1) \rho_{K-1}(x+1)]}{\rho_{K-1}(x+1)},$$

откуда

$$\frac{\delta(x) \rho_K(x+1)}{\rho_K(x)} = \frac{\delta(x+2) \rho_{K-1}(x+2)}{\rho_{K-1}(x+1)} = C(x),$$

где $C(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом, равным единице. Полагая $C(x) = 1$, находим

$$\rho_K(x) = \delta(x+1) \rho_{K-1}(x+1). \quad (28)$$

Поэтому

$$\rho_K(x) = \rho(x+K) \prod_{s=1}^K \delta(x+s). \quad (29)$$

Формула (28) позволяет записать уравнение (25) в виде простого соотношения, связывающего функции $V_K(x)$ и $V_{K+1}(x)$:

$$\rho_K(x) V_K(x) = -\frac{1}{\mu_K} \frac{\nabla}{\nabla \rho_{K+1}(x)} [\rho_{K+1}(x) V_{K+1}(x)]. \quad (30)$$

Отсюда получаем

$$\rho_K(x) V_K(x) = \frac{A_K}{A_n} \mathcal{D}_K^n [\rho_n(x) V_n(x)]. \quad (31)$$

Здесь

$$A_K = (-1)^K \prod_{s=0}^{K-1} \mu_s, \quad A_0 = 1;$$

$$\mathcal{D}_K^n[f(x)] = \hat{M}_{K+1} \hat{M}_{K+2} \dots \hat{M}_n[f(x)], \quad \hat{M}_K[f(x)] = \frac{\nabla f(x)}{\nabla \rho_K(x)}.$$

Напомним, что по определению

$$V_K(x) = \frac{\Delta V_{K-1}(x)}{\Delta \rho_{K-1}(x)},$$

т.е.

$$V_K(x) = \Lambda^K[y(x)], \quad (32)$$

где

$$\Lambda^K[f(x)] = \hat{L}_{K-1} \hat{L}_{K-2} \dots \hat{L}_0[f(x)], \quad \hat{L}_K[f(x)] = \frac{\Delta f(x)}{\Delta \rho_K(x)}.$$

Если $V_n(x) = C_n$ (C_n - постоянная), то как было показано выше, функция $y(x)$ будет полиномом степени n относительно $\rho(x)$, т.е. $y = y_n(x) = \tilde{y}_n[\rho(x)]$. В этом случае для функции

$$V_{Kn}(x) = \Lambda^K[y_n(x)]$$

из формулы (31) получаем следующее выражение:

$$V_{Kn}(x) = \frac{A_{Kn} B_n}{\rho_K(x)} \mathcal{D}_K^n[\rho_n(x)], \quad (33)$$

где

$$A_{Kn} = A_K(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_n}, \quad B_n = \frac{C_n}{A_{nn}}$$

(B_n - нормировочная постоянная).

В частности, при $K=0$ из (33) получаем аналог формулы Родрига для полинома $y_n(x)$:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \mathcal{D}^n[\rho_n(x)] \quad (\mathcal{D}^n = \mathcal{D}_0^n). \quad (34)$$

Легко убедиться в том, что произвол в выборе периодического множителя для функции $\rho(x)$ не влияет на явный вид полиномов $y_n(x)$, получаемых по формуле Родрига.

3. Свойство ортогональности

Докажем свойство ортогональности для рассмотренных выше полиномиальных решений (34) уравнения (8). Для этого запишем уравнения для полиномов $y_m(x)$ и $y_n(x)$ в самосопряженном виде

$$\frac{\Delta}{\Delta \rho(x - \frac{1}{2})} \left[\delta \rho \frac{\nabla y_m}{\nabla \rho(x)} \right] + \lambda_m \rho y_m = 0,$$

$$\frac{\Delta}{\Delta \rho(x - \frac{1}{2})} \left[\delta \rho \frac{\nabla y_n}{\nabla \rho(x)} \right] + \lambda_n \rho y_n = 0.$$

Умножим первое уравнение на y_n , второе на y_m и вычтем из первого равенства второе:

$$(\lambda_m - \lambda_n) y_m y_n \rho \Delta \rho(x - \frac{1}{2}) = y_m \Delta \left[\delta \rho \frac{\nabla y_n}{\nabla \rho(x)} \right] - y_n \Delta \left[\delta \rho \frac{\nabla y_m}{\nabla \rho(x)} \right].$$

Правую часть полученного соотношения преобразуем при помощи тождества

$$\Delta \left[\delta \rho \left(y_m \frac{\nabla y_n}{\nabla \rho(x)} - y_n \frac{\nabla y_m}{\nabla \rho(x)} \right) \right] =$$

$$= y_m \Delta \left[\delta \rho \frac{\nabla y_n}{\nabla \rho(x)} \right] - y_n \Delta \left[\delta \rho \frac{\nabla y_m}{\nabla \rho(x)} \right].$$

Тогда

$$(\lambda_m - \lambda_n) y_m y_n \rho \Delta \rho(x - \frac{1}{2}) =$$

$$= \Delta \left[\delta \rho \left(y_m \frac{\nabla y_n}{\nabla \rho(x)} - y_n \frac{\nabla y_m}{\nabla \rho(x)} \right) \right].$$

Положим здесь $x = x_i$, $x_{i+k} = x_i + k$ и просуммируем по тем значениям индекса i , для которых $\alpha \leq x_i \leq \beta - 1$:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \sum_i y_m(x_i) y_n(x_i) \rho(x_i) \Delta \rho(x_i - \frac{1}{2}) = \\ = \delta \rho \left(y_m \frac{\nabla y_n}{\nabla \rho(x)} - y_n \frac{\nabla y_m}{\nabla \rho(x)} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Согласно лемме выражение $y_m \frac{\nabla y_n}{\nabla \rho(x)} - y_n \frac{\nabla y_m}{\nabla \rho(x)}$ является линейной комбинацией произведений вида $\rho^k(x) \rho^l(x - \frac{1}{2})$ ($k, l = 0, 1, \dots$). Поэтому при выполнении граничного условия

$$\delta(x) \rho(x) \rho^k(x) \rho^l(x - \frac{1}{2}) \Big|_{x=\alpha, \beta} = 0 \quad (k, l = 0, 1, \dots) \quad (35)$$

подстановка в правой части равна нулю. Таким образом, при $m \neq n$ справедливо равенство

$$\sum_{\alpha \leq x_i \leq \beta-1} y_m(x_i) y_n(x_i) \rho(x_i) \Delta \rho(x_i - \frac{1}{2}) = 0. \quad (36)$$

Проводя аналогичные рассуждения для уравнения (25), легко показать, что для полиномов $V_{ln}(x)$ имеют место следующие соотношения ортогональности: при $m \neq n$

$$\sum_{\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i-1} V_{ln}(x_i) V_{lm}(x_i) \rho_i(x_i) \Delta \rho_i(x_i - \frac{1}{2}) = 0,$$

если выполнено граничное условие

$$\delta(x) \rho_i(x) \rho_i^k(x) \rho_i^l(x - \frac{1}{2}) \Big|_{x=\alpha_i, \beta_i} = 0 \quad (k, l = 0, 1, \dots). \quad (35a)$$

Возможные значения α_i и β_i можно найти, используя условие (35). Согласно (28), (27) и (9) имеем

$$\rho_i(x) = \delta(x+1) \rho(x+1) = \rho(x) \left[\delta(x) + \tau(x) \Delta \rho(x - \frac{1}{2}) \right] = \\ = \rho(x) \left\{ \tilde{\delta}[\rho(x)] + \frac{1}{2} \tilde{\tau}[\rho(x)] \Delta \rho(x - \frac{1}{2}) \right\}.$$

Поэтому

$$\delta(x) \rho_i(x) \rho_i^k(x) \rho_i^l(x - \frac{1}{2}) = \\ = \delta(x) \rho(x) \left\{ \tilde{\delta}[\rho(x)] + \frac{1}{2} \tilde{\tau}[\rho(x)] [\rho(x + \frac{1}{2}) - \rho(x - \frac{1}{2})] \right\} \rho^k(x + \frac{1}{2}) \rho^l(x).$$

Согласно соотношению (7) леммы любая степень функции $\rho(x + \frac{1}{2})$ является линейной комбинацией степеней $\rho(x)$ и $\rho(x - \frac{1}{2})$. Отсюда видно, что выражение

$$\left\{ \tilde{\delta}[\rho(x)] + \frac{1}{2} \tilde{\tau}[\rho(x)] [\rho(x + \frac{1}{2}) - \rho(x - \frac{1}{2})] \right\} \rho^k(x + \frac{1}{2}) \rho^l(x)$$

является линейной комбинацией произведений степеней $\rho(x)$ и $\rho(x - 1/2)$ и, следовательно, условие (35a) будет выполнено, в частности, при $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$.

Покажем, что при конечном значении β условие (35a) выполняется также при $\beta_i = \beta - 1$. Действительно, в силу (9) и (28) имеем

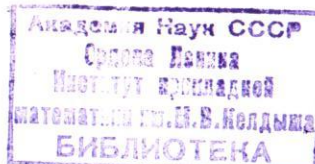
$$\delta(x) \rho_i(x) \rho_i^k(x) \rho_i^l(x - \frac{1}{2}) = \left\{ \tilde{\delta}[\rho(x)] - \frac{1}{2} \tilde{\tau}[\rho(x)] [\rho(x + \frac{1}{2}) - \rho(x - \frac{1}{2})] \right\} \delta(x+1) \rho(x+1) \rho^k(x + \frac{1}{2}) \rho^l(x).$$

Так как согласно лемме любую степень $\rho(x)$ можно представить в виде линейной комбинации степеней $\rho(x + 1/2)$ и $\rho(x + 1)$, и кроме того

$$\rho(x - \frac{1}{2}) = 2\bar{Q}_1[\rho(x)] - \rho(x + \frac{1}{2})$$

($\bar{Q}_1(\rho)$ - полином первой степени относительно ρ), то функцию $\delta(x) \rho_i(x) \rho_i^k(x) \rho_i^l(x - 1/2)$ можно представить в виде линейной комбинации функций вида $\delta(x+1) \rho(x+1) \rho^m(x+1) \rho^n(x+1/2)$. Поэтому в силу условия (35) получим

$$\delta(x) \rho_i(x) \rho_i^k(x) \rho_i^l(x - \frac{1}{2}) \Big|_{x=\beta-1} = 0.$$



По индукции можно аналогичным образом доказать, что при выполнении условия (35) для полиномов $V_{kn}(x)$ имеют место следующие соотношения ортогональности:

$$\sum_{\alpha \neq x_i \leq b-k-1} V_{kn}(x_i) V_{km}(x_i) \rho_k(x_i) \Delta \rho_k(x_i - \frac{1}{2}) = 0 \quad (m \neq n). \quad (37)$$

4. Возможные виды функций $\rho(x)$. Классификация сеток.

Найдем возможные виды функций $\rho(x)$, для которых удовлетворяются условия леммы. Рассмотрим первое условие леммы, эквивалентное условию

$$\frac{\rho(x+1) + \rho(x)}{2} = \bar{Q}_1 \left[\rho \left(x + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (38)$$

где $\bar{Q}_1(\rho)$ - полином не выше 1-ой степени, т.е. $\bar{Q}_1(\rho) = \alpha \rho + \beta$. Условие (38) легко привести к разностному уравнению 2-ого порядка с постоянными коэффициентами

$$f(t+2) - 2\alpha f(t+1) + f(t) = 2\beta, \quad (39)$$

если положить $\rho(x) = f(t)$, $t = 2x$. Общее решение уравнения (39) имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} c_1 + c_2 t + \beta t^2 & \alpha = 1, \\ (c_1 + c_2 t) e^{i\pi t} + \frac{\beta}{2} & \alpha = -1, \\ c_1 q_1^t + c_2 q_2^t + \frac{\beta}{1-\alpha} & \alpha \neq \pm 1. \end{cases}$$

Здесь q_1 и q_2 - корни уравнения $q^2 - 2\alpha q + 1 = 0$, c_1 и c_2 - произвольные периодические функции с периодом, равным единице.

Второе условие леммы эквивалентно требованию, чтобы функция

$[f(t+2) - f(t)]^2$ была полиномом не выше 2-ой степени относительно $f(t+1)$. Покажем, что это условие при $\alpha \neq \pm 1$ будет выполнено, если c_1 и c_2 - постоянные. Имеем

$$f(t+1) = q_1 c_1 q_1^t + q_2 c_2 q_2^t + \frac{\beta}{1-\alpha},$$

$$\begin{aligned} f(t+2) - f(t) &= (q_1^2 - 1) c_1 q_1^t + (q_2^2 - 1) c_2 q_2^t = \\ &= (q_1 c_1 q_1^t - q_2 c_2 q_2^t) (q_1 - q_2), \end{aligned}$$

так как $q_1 q_2 = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} [f(t+2) - f(t)]^2 &= [(q_1 c_1 q_1^t + q_2 c_2 q_2^t)^2 - 4c_1 c_2] (q_1 - q_2)^2 = \\ &= \left\{ [f(t+1) - \frac{\beta}{1-\alpha}]^2 - 4c_1 c_2 \right\} (q_1 - q_2)^2. \end{aligned}$$

Правая часть полученного равенства является полиномом 2-ой степени относительно $f(t+1)$, что и требовалось доказать. Случай $\alpha = 1$ рассматривается аналогично. Если $\alpha = -1$, то второе условие леммы, как легко проверить, выполняется при $c_2 = 0$.

В дальнейшем для простоты мы ограничимся наиболее важным для практики случаем, когда функции $\rho(x)$ принимают вещественные значения, $\alpha > 0$, β - вещественное число. Нетрудно убедиться, что

$$q_1 = \begin{cases} e^\gamma & \text{при } \alpha = \cosh \gamma, \alpha > 1 \quad (\gamma > 0), \\ e^{i\gamma} & \text{при } \alpha = \cos \gamma, 0 < \alpha < 1 \quad (0 < \gamma < \frac{\pi}{2}), \end{cases}$$

$$q_2 = \frac{1}{q_1}.$$

При исследовании решений уравнения (5) удобно воспользоваться тем, что линейные преобразования вида $\rho(x) \rightarrow A\rho(x) + B$ и $x \rightarrow x + C$ переводят уравнение (5) в уравнение того же типа. С помощью подобных преобразований мы можем выражения для $\rho(x)$ привести к следующим видам:

$$1) 0 < \alpha < 1, \quad \rho(x) = \cos 2\gamma x; \quad (\alpha)$$

$$2) \alpha = 1, \quad \rho(x) = \begin{cases} x, \\ x(x+1); \end{cases} \quad (\alpha) \quad (\delta)$$

$$3) \alpha > 1, \quad \rho(x) = \begin{cases} e^{2\gamma x}, \\ e^{-2\gamma x}, \\ \operatorname{sh} 2\gamma x, \\ \operatorname{ch} 2\gamma x. \end{cases} \quad (\alpha) \quad (\delta) \quad (\beta) \quad (\varepsilon)$$

Теория полиномов Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье, соответствующих случаю 2а, рассмотрена в книге [3]. В препринте [1] построена теория полиномов Рака и дуальных полиномов Хана, которые соответствуют случаю 2б. Общая теория полиномов дискретной переменной, соответствующих случаям 3а и 3б, содержится в [4]. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся изучением ортогональных полиномов дискретной переменной на неравномерных сетках для случаев I и 3.

5. Классификация полиномов дискретной переменной.

Рассмотрим ортогональные полиномы дискретной переменной, которые возникают при решении уравнений вида (8). Чтобы получить явное выражение для $\rho(x)$, запишем уравнение (26) в виде

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\phi(x) + \tau(x)\Delta\rho(x-\frac{1}{2})}{\phi(x+1)}. \quad (40)$$

При $\rho(x) = \cos 2\gamma x$ и $\rho(x) = \operatorname{ch} 2\gamma x$ имеем

$$\rho(x) = \rho(-x), \quad \Delta\rho(x-\frac{1}{2}) = -\Delta\rho(t-\frac{1}{2}) \Big|_{t=-x}.$$

Поэтому с помощью соотношения (9) в этом случае получаем

$$\phi(x) + \tau(x)\Delta\rho(x-\frac{1}{2}) = \tilde{\phi}[\rho(x)] + \frac{1}{2}\tilde{\tau}[\rho(x)]\Delta\rho(x-\frac{1}{2}) = \phi(-x),$$

откуда

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\phi(-x)}{\phi(x+1)}. \quad (40a)$$

Аналогично, при $\rho(x) = \operatorname{sh} 2\gamma x$ имеем

$$\rho(x) = \rho(-x + \frac{i\pi}{2\gamma}), \quad \Delta\rho(x-\frac{1}{2}) = -\Delta\rho(t-\frac{1}{2}) \Big|_{t=-x+\frac{i\pi}{2\gamma}},$$

$$\phi(x) + \tau(x)\Delta\rho(x-\frac{1}{2}) = \phi(-x + \frac{i\pi}{2\gamma}),$$

откуда

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\phi(-x + \frac{i\pi}{2\gamma})}{\phi(x+1)}. \quad (40b)$$

Рассмотрим решение уравнения (40а) при $\rho(x) = \cos 2\gamma x$ для точек сетки $x_i = \alpha + i$ ($i = 0, 1, \dots, N; x_N = \beta$). Для этого предварительно преобразуем выражение для $\phi(x)$, используя формулу (9) и представление

$$\rho(x) = \cos 2\gamma x = \frac{1}{2}(q^{2x} + q^{-2x}), \quad q = e^{i\gamma}.$$

Имеем

$$\phi(x) = Aq^{4x} + Bq^{2x} + C + B^*q^{-2x} + A^*q^{-4x}, \quad (41)$$

где A, B, C — некоторые постоянные, причем $C = C^*$. Разложим выражение для $\phi(x)$ на простейшие множители. Если обозначить через $q^{2\tilde{x}_s}$ ($s = 1, 2, 3, 4$) корни уравнения

$$Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + B^*z + A^* = 0,$$

то выражение (41) можно представить в виде

$$\phi(x) = Aq^{-4x} \prod_{s=1}^4 (q^{2x} - q^{2\tilde{x}_s}). \quad (41a)$$

Так как

$$q^{2x} - q^{2\tilde{x}_s} = q^{x+\tilde{x}_s} [q^{x-\tilde{x}_s} - q^{-(x-\tilde{x}_s)}],$$

$$\phi(x) = D \prod_{s=1}^4 \varphi(x - \tilde{x}_s, q), \quad (42)$$

где

$$\varphi(x, q) = \frac{1}{2}(q^x - q^{-x}) \quad (42a)$$

(D - некоторая постоянная).

В силу того, что $\varphi(-x, q) = -\varphi(x, q)$, из (42) и (40a) находим

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\prod_{s=1}^4 \varphi(x + \tilde{x}_s, q)}{\prod_{s=1}^4 \varphi(x+1 - \tilde{x}_s, q)}. \quad (43)$$

Решение уравнения (43) имеет вид

$$\rho(x) = \frac{\prod_{s=1}^4 \Phi(x - \alpha, \alpha + \tilde{x}_s, q)}{\prod_{s=1}^4 \Phi(x - \alpha, \alpha + 1 - \tilde{x}_s, q)}. \quad (44)$$

Здесь $\Phi(t, \delta, q)$ - решение разностного уравнения

$$\frac{\Phi(t+1, \delta, q)}{\Phi(t, \delta, q)} = \varphi(t + \delta, q). \quad (45)$$

В частности, в точках сетки $x_i = \alpha + i$ имеем

$$\rho(x_i) = \frac{\prod_{s=1}^4 \Phi(i, \alpha + \tilde{x}_s, q)}{\prod_{s=1}^4 \Phi(i, \alpha + 1 - \tilde{x}_s, q)}. \quad (46)$$

Для решений разностного уравнения (45) удобно использовать условие нормировки $\Phi(0, \delta, q) = 1$. В этом случае при $i = 1, 2, \dots$ получаем

$$\Phi(i, \delta, q) = \prod_{k=0}^{i-1} \varphi(\delta + k, q). \quad (47)$$

При $\rho(x) = ch 2\gamma x$ все рассуждения, приводящие к формулам (42), (42a), (46) и (47), сохраняют силу, если вместо $q = e^{\frac{i\pi}{2\gamma}}$ использовать $q = e^{\gamma}$. В случае $\rho(x) = sh 2\gamma x$ формулы (42) и (42a) для $\phi(x)$ также сохраняют силу при $q = e^{\gamma}$, однако формулы (46) и (47) для $\rho(x_i)$, вытекающие из уравнения (40a), следует заменить в соответствии с уравнением (40б) на следующие:

$$\rho(x) = \frac{\prod_{s=1}^4 \Phi_2(i, \alpha + \tilde{x}_s, q)}{\prod_{s=1}^4 \Phi_1(i, \alpha + 1 - \tilde{x}_s, q)}, \quad (46a)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(i, \delta, q) &= \prod_{k=0}^{i-1} \varphi(\delta + k, q) = \prod_{k=0}^{i-1} sh \gamma(\delta + k), \\ \Phi_2(i, \delta, q) &= \prod_{k=0}^{i-1} ch \gamma(\delta + k). \end{aligned} \right\} \quad (47a)$$

Граничные условия для функции $\rho(x)$ согласно (35) имеют вид

$$\phi(x) \rho(x) \rho''(x) \rho^{\ell}(x - \frac{1}{2}) \Big|_{\alpha, \beta} = 0 \quad (\kappa, \ell = 0, 1, \dots).$$

Эти граничные условия при $\rho(x) = cos 2\gamma x$ и $\rho(x) = ch 2\gamma x$ с помощью замены $x \rightarrow x-1$ в уравнении (40a) можно переписать следующим образом:

$$\phi(1-x) \rho(x-1) \rho''(x) \rho^{\ell}(x - \frac{1}{2}) \Big|_{\alpha, \beta} = 0. \quad (48)$$

В соответствии с (35) и (48) естественно выбирать значения α и β среди корней полиномов $\phi(x)$ и $\phi(1-x)$, полагая, например, $\tilde{x}_1 = \alpha$, $\tilde{x}_2 = 1 - \beta$.Аналогично, при $\rho(x) = sh 2\gamma x$ граничным условиям для $\rho(x)$ можно удовлетворить, полагая $\tilde{x}_1 = \alpha$, $\tilde{x}_2 = 1 - \beta + \frac{i\pi}{2\gamma}$.При $\rho(x) = cos 2\gamma x$ и $\rho(x) = ch 2\gamma x$, как было показано ранее,

$$\phi(x) = T(x) \Delta \rho(x - \frac{1}{2}) = \phi(-x).$$

С помощью этой формулы и формулы (9) функции $\tilde{\phi}[\rho(x)]$ и $\tilde{\tau}[\rho(x)]$ можно выразить явным образом через функцию $\phi(x)$:

$$\tilde{\phi}[\rho(x)] = \frac{1}{2} [\phi(x) + \phi(-x)], \quad (49)$$

$$\tilde{\tau}[\rho(x)] = \frac{\phi(-x) - \phi(x)}{\Delta \rho(x - \frac{1}{2})}. \quad (50)$$

Так как

$$\rho_{\kappa}(x) = \rho(x + \frac{\kappa}{2}) = \rho(-x - \frac{\kappa}{2}) = \rho_{\kappa}(-x - \kappa),$$

то из соотношения (20) вытекают формулы, аналогичные (49) и (50):

$$\tilde{\sigma}_{\kappa}[\rho_{\kappa}(x)] = \frac{1}{2} [\sigma(x) + \sigma(-x - \kappa)], \quad (49a)$$

$$\tilde{\tau}_{\kappa}[\rho_{\kappa}(x)] = \frac{\sigma(-x - \kappa) - \sigma(x)}{\Delta \rho_{\kappa}(x - \frac{1}{2})}. \quad (50a)$$

Аналогичным образом при $\rho(x) = \text{sh} 2\gamma x$ получаем

$$\tilde{\sigma}_{\kappa}[\rho_{\kappa}(x)] = \frac{1}{2} [\sigma(x) + \sigma(-x - \kappa + \frac{i\pi}{2\gamma})], \quad (51)$$

$$\tilde{\tau}_{\kappa}[\rho_{\kappa}(x)] = \frac{\sigma(-x - \kappa + \frac{i\pi}{2\gamma}) - \sigma(x)}{\Delta \rho_{\kappa}(x - \frac{1}{2})}. \quad (52)$$

Рассмотрим теперь случай $\rho(x) = \cos 2\gamma x$ более подробно. Если потребовать, чтобы функция $\sigma(x)$ принимала вещественные значения при вещественных значениях x , то корни $\tilde{x}_3$ и $\tilde{x}_4$ можно выбрать двумя способами:

- 1) $\tilde{x}_3$ и $\tilde{x}_4$ - вещественные;
- 2) $\tilde{x}_3$ и $\tilde{x}_4$ - комплексно-сопряженные.

В первом случае, если обозначить $\tilde{x}_3 = -c$, $\tilde{x}_4 = d$, приходим к следующим выражениям для $\sigma(x)$ и $\rho(x_i)$ при $\rho(x) = \cos 2\gamma x$:

$$\sigma(x) = \sin \gamma(x-a) \sin \gamma(x+b-1) \sin \gamma(x+c) \sin \gamma(d-x) \quad (53)$$

(мы выбрали нормировочную постоянную в формуле (42) $D = -1$);

$$\rho(x_i) = \frac{\varphi(i, 2a, \gamma) \varphi(i, 1+a-b, \gamma) \varphi(i, a-c, \gamma) \varphi(i, a+d, \gamma)}{\varphi(i, 1, \gamma) \varphi(i, a+b, \gamma) \varphi(i, a+1+c, \gamma) \varphi(i, a+1-d, \gamma)}. \quad (54)$$

Здесь

$$\varphi(a, \delta, \gamma) = 1, \quad \varphi(i, \delta, \gamma) = \prod_{\kappa=0}^{i-1} \sin \gamma(\delta + \kappa). \quad (55)$$

Полиномы дискретной переменной, для которых вес $\rho(x_i)$ определяется по формуле (54), будем обозначать $U_n^{(c,d)}[\rho(x), a, b]$.

Обратимся к случаю, когда корни $\tilde{x}_3$ и $\tilde{x}_4$ - комплексно-сопряженные. Полагая $\tilde{x}_3 = c + id$, $\tilde{x}_4 = c - id$, приходим к следующим выражениям для $\sigma(x)$ и $\rho(x_i)$:

$$\sigma(x) = \sin \gamma(x-a) \sin \gamma(x+b-1) [\sin^2 \gamma(x-c) + \text{sh}^2(\gamma d)], \quad (56)$$

$$\rho(x_i) = \frac{\varphi(i, 2a, \gamma) \varphi(i, 1+a-b, \gamma) \chi(i, a+c, d, \gamma)}{\varphi(i, 1, \gamma) \varphi(i, a+b, \gamma) \chi(i, a+1-c, d, \gamma)}, \quad (57)$$

где

$$\chi(i, \mu, \nu, \gamma) = \prod_{\kappa=0}^{i-1} [\sin^2 \gamma(\mu + \kappa) + \text{sh}^2 \gamma \nu].$$

Соответствующие полиномы дискретной переменной будем обозначать $V_n^{(c,d)}[\rho(x), a, b]$.

Аналогично можно получить явные выражения для возможных видов $\sigma(x)$ и $\rho(x_i)$ при $\rho(x) = \text{ch} 2\gamma x$ и $\rho(x) = \text{sh} 2\gamma x$.

Рассмотрим теперь случаи, когда $\rho(x) = e^{2\gamma x}$ и $\rho(x) = e^{-2\gamma x}$. Повторяя предыдущие рассуждения, мы приходим к следующему выражению для $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) = D_1 q^{2x} \prod_{s=1}^2 \varphi(x - \tilde{x}_s, q), \quad (58)$$

где $\varphi(x, q)$ определяется формулой (42a) при $q = e^{\gamma}$ и $q = e^{-\gamma}$ соответственно. Аналогичным образом получается формула

$$\sigma(x) + \tau(x) \Delta \rho(x - \frac{1}{2}) = D_2 q^{2x} \prod_{s=1}^2 \varphi(x - \tilde{x}_s, q).$$

Поэтому уравнение для $\rho(x)$ принимает вид

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = x \frac{\prod_{s=1}^2 \varphi(x - \tilde{x}_s, q)}{\prod_{s=1}^2 \varphi(x+1 - \tilde{x}_s, q)} \quad (x = \frac{D_2}{D_1}).$$

В результате получаем

$$\rho(x_i) = e^{x_i} \frac{\prod_{s=1}^2 \Phi(i, \alpha - \tilde{x}_s, q)}{\prod_{s=1}^2 \Phi(i, \alpha + 1 - \tilde{x}_s, q)}, \quad (59)$$

где $\Phi(i, \delta, q)$ определяется формулой (47).

6. Вычисление основных характеристик.

Систему полиномов $y_n(\rho)$, ортогональных относительно произвольного скалярного произведения

$$(y_m, y_n) = 0, \quad m \neq n, \quad (60)$$

можно построить, если известны старшие коэффициенты в разложении полиномов по степеням

$$y_n(\rho) = \alpha_n \rho^n + \beta_n \rho^{n-1} + \dots \quad (61)$$

и квадрат нормы $d_n^2 = (y_n, y_n)$, так как эти три величины однозначно определяют первые два полинома $y_0(\rho) = \alpha_0$,

$y_1(\rho) = \alpha_1 \rho + \beta_1$ и коэффициенты α_n , β_n и γ_n рекуррентного соотношения

$$\rho y_n(\rho) = \alpha_n y_{n+1}(\rho) + \beta_n y_n(\rho) + \gamma_n y_{n-1}(\rho) \quad (62)$$

$$\left(\alpha_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n} - \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} \right),$$

которое справедливо для любой системы ортогональных полиномов. Такое рекуррентное соотношение будет выполняться и для полиномов $y_n(\rho)$ по переменной $\rho = \rho(x)$ со свойством ортогональности (36).

С другой стороны, полиномы $y_n(\rho)$ являются решениями разностного уравнения (8) и, следовательно, их можно найти по формуле Родрига. Таким образом, для этих полиномов требуется вычислить значения постоянных α_n , β_n и d_n^2 , а также коэффициенты рекуррентного соотношения α_n , β_n и γ_n по заданным $\phi(x)$, $\tau(x)$ и B_n . В дальнейшем для определенности будем полагать $B_n = (-1)^n / n!$.

Рассмотрим вопрос о вычислении коэффициентов α_n и β_n для случая $\rho(x) = \cos 2\gamma x$. Будем исходить из следующих легко проверяемых соотношений

$$\frac{1}{2}[\rho(x) + \rho(x+1)] = \alpha \rho_1(x + \frac{1}{2}), \quad (63)$$

$$\frac{1}{4}[\Delta \rho(x)]^2 = (1 - \alpha^2)[1 - \rho_1^2(x)] \quad (\alpha = \cos \gamma). \quad (64)$$

С помощью (6а) и (7а) по индукции можно получить формулы

$$\frac{\Delta \rho^n(x)}{\Delta \rho(x)} = A_n \rho_1^{n-1}(x) + B_n \rho_1^{n-3}(x) + \dots, \quad (65)$$

$$\frac{1}{2}[\rho^n(x) + \rho^n(x+1)] = C_n \rho_1^n(x) + D_n \rho_1^{n-2}(x) + \dots, \quad (66)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \alpha A_{n-1} + C_{n-1}, \\ C_n &= \alpha C_{n-1} - (1 - \alpha^2) A_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

$$A_1 = 1, \quad C_1 = \alpha.$$

Решение этой системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$A_n = \frac{\sin \gamma n}{\sin \gamma}, \quad C_n = \cos \gamma n. \quad (68)$$

Таким образом, из (65) и (68) получаем

$$\frac{\Delta \rho^n(x)}{\Delta \rho(x)} = \frac{\sin \gamma n}{\sin \gamma} \rho_1^{n-1}(x) + B_n \rho_1^{n-3}(x) + \dots \quad (69)$$

Так как $y_n(x) = \alpha_n \rho^n(x) + \beta_n \rho^{n-1}(x) + \dots$, то в силу (69)

$$V_n(x) = \frac{\Delta y_n(x)}{\Delta \rho(x)} = \alpha_n \frac{\sin \gamma n}{\sin \gamma} \rho_1^{n-1}(x) + \beta_n \frac{\sin \gamma(n-1)}{\sin \gamma} \rho_1^{n-2}(x) + \dots$$

Аналогичным образом с помощью (69) по индукции можно получить

$$V_{kn}(x) = \alpha_n \frac{\sin \gamma n \sin \gamma(n-1) \dots \sin \gamma(n-k+1)}{\sin^k \gamma} \rho_k^{n-k}(x) + \beta_n \frac{\sin \gamma(n-1) \sin \gamma(n-2) \dots \sin \gamma(n-k)}{\sin^k \gamma} \rho_k^{n-k-1}(x) + \dots \quad (70)$$

Так как согласно (33)

$$V_{nn}(x) = C_n = A_{nn} B_n, \quad V_{n-1,n}(x) = A_{n-1,n} B_n \tilde{T}_{n-1}'[p_{n-1}(x)],$$

то с помощью формулы (70) получаем

$$\alpha_n = A_{nn} B_n \frac{\sin^n \gamma}{\sin \gamma \sin 2\gamma \dots \sin n\gamma}, \quad A_{nn} = (-1)^n \prod_{m=0}^{n-1} \mu_{mn};$$

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{\sin \gamma n}{\sin \gamma} \frac{\tilde{T}_{n-1}'(0)}{\tilde{T}_{n-1}'}.$$

Здесь

$$A_{kn} = A_k(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_n}, \quad \mu_{mn} = \mu_m(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_n} = \lambda_n - \lambda_m, \quad \lambda_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{T}_k'.$$

Для вычисления постоянных $\tilde{T}_k'$ достаточно сравнить коэффициенты при $\exp(4i\gamma x)$ в соотношении

$$[p_k(x) \tilde{T}_k' + T_k(0)] \Delta p_k(x - \frac{1}{2}) = \phi(-x-k) - \phi(x), \quad (71)$$

вытекающем из (52). В частности, для полиномов $U_n^{(c,d)}[\cos 2\gamma x, \alpha, \beta]$ получим

$$\tilde{T}_k' = \frac{1}{8 \sin \gamma} \sin \gamma (\beta - \alpha + c - d - 2k - 1).$$

Для вычисления $\tilde{T}_k(0)$ удобно положить в (71) $x = \frac{\pi}{4\gamma} - \frac{k}{2}$, так как $p_k(\frac{\pi}{4\gamma} - \frac{k}{2}) = 0$.

Аналогично производится вычисление для других видов $p(x)$.

Для вычисления квадрата нормы d_n^2 установим предварительно связь квадратов норм d_{kn}^2 и $d_{k+1,n}^2$, где

$$d_{kn}^2 = \sum_{\alpha \leq x_i \leq \beta - k-1} V_{kn}^2(x_i) p_k(x_i) \Delta p_k(x_i - \frac{1}{2}), \quad d_{0n}^2 = d_n^2.$$

Умножая обе части уравнения (19) при $x = x_i$ и $\lambda = \lambda_n$ на

$V_{kn}(x_i) \Delta p(x_i - 1/2)$ и применяя формулу суммирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \mu_{kn} d_{kn}^2 &= - \sum_i V_{kn}(x_i) \Delta \left[\phi(x_i) p_k(x_i) \frac{\nabla V_{kn}(x_i)}{\nabla p_k(x_i)} \right] = \\ &= -V_{kn}(x_i) \phi(x_i) p_k(x_i) \frac{\nabla V_{kn}(x_i)}{\nabla p_k(x_i)} \Big|_{\alpha}^{\beta-k} + \sum_i \phi(x_{i+1}) p_k(x_{i+1}) \left[\frac{\Delta V_{kn}(x_i)}{\Delta p_k(x_i)} \right]^2 \Delta p_k(x_i) = \\ &= \sum_i V_{k+1,n}^2(x_i) p_{k+1}(x_i) \Delta p_{k+1}(x_i - \frac{1}{2}) = d_{k+1,n}^2. \end{aligned}$$

Отсюда последовательно находим

$$\begin{aligned} d_n^2 &\equiv d_{0n}^2 = \frac{1}{\mu_{0n}} d_{1n}^2 = \frac{1}{\mu_{0n} \mu_{1n}} d_{2n}^2 = \dots = \frac{d_{nn}^2}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} = \\ &= \frac{V_{nn}^2(x)}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} S_n = (-1)^n A_{nn} B_n^2 S_n, \end{aligned}$$

где

$$S_n = \sum_{\alpha \leq x_i \leq \beta - n-1} p_n(x_i) \Delta p_n(x_i - \frac{1}{2}).$$

При $n = N-1$ сумма S_n содержит лишь одно слагаемое и поэтому легко вычисляется:

$$S_{N-1} = p_{N-1}(\alpha) \Delta p_{N-1}(\alpha - \frac{1}{2}).$$

Чтобы вычислить S_n при $n < N-1$ достаточно уметь вычислять отношение S_n/S_{n-1} . Для этого преобразуем выражение для S_n , используя связь функций $p_n(x)$ и $p_{n-1}(x)$:

$$p_n(x) = \phi(x+1) p_{n-1}(x+1) = p_{n-1}(x) [\phi(x) + T_{n-1}(x) \Delta p_{n-1}(x - \frac{1}{2})].$$

Отсюда, с одной стороны

$$S_n = \sum_i \phi(x_i+1) p_{n-1}(x_i+1) \Delta p(x_i - \frac{1}{2}) = \sum_i \phi(x_i) p_{n-1}(x_i) \Delta p_n(x_i - \frac{3}{2}).$$

С другой стороны,

$$S_n = \sum_i p_{n-1}(x_i) [\phi(x_i) + T_{n-1}(x_i) \Delta p_{n-1}(x_i - \frac{1}{2})] \Delta p_n(x_i - \frac{1}{2}).$$

Возьмем полусумму этих выражений:

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_i \rho_{n-1}(x_i) \left\{ \delta(x_i) \left[\Delta \rho_n(x_i - \frac{3}{2}) + \Delta \rho_n(x_i - \frac{1}{2}) \right] + \tau_{n-1}(x_i) \Delta \rho_n(x_i - \frac{1}{2}) \Delta \rho_n(x_i - \frac{1}{2}) \right\}.$$

Выразим $\delta(x)$ и $\tau_{n-1}(x)$ через $\tilde{\delta}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)]$ и $\tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)]$:

$$\tau_{n-1}(x) = \tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)], \quad \delta(x) = \tilde{\delta}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)] - \frac{1}{2} \tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)] \Delta \rho_n(x - \frac{1}{2}).$$

Для дальнейших преобразований удобно воспользоваться соотношением (см. (38) и (39))

$$\frac{1}{2} [\rho(x) + \rho(x+1)] = \alpha \rho(x + \frac{1}{2}) + \beta.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \delta(x) [\Delta \rho_n(x - \frac{3}{2}) + \Delta \rho_n(x - \frac{1}{2})] + \tau_{n-1}(x) \Delta \rho_{n-1}(x - \frac{1}{2}) \Delta \rho_n(x - \frac{1}{2}) = \\ = \tilde{\delta}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)] \Delta [\rho_n(x - \frac{3}{2}) + \rho_n(x - \frac{1}{2})] + \\ + \tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)] \Delta \rho_{n-1}(x - \frac{1}{2}) \left\{ - \frac{\Delta \rho_n(x - \frac{3}{2}) + \Delta \rho_n(x - \frac{1}{2})}{2} + \Delta \rho_n(x - \frac{1}{2}) \right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \Delta [\rho_n(x - \frac{3}{2}) + \rho_n(x - \frac{1}{2})] = 2\Delta [\alpha \rho_n(x-1) + \beta] = 2\alpha \Delta \rho_{n-1}(x - \frac{1}{2}), \\ - \frac{\Delta \rho_n(x - \frac{3}{2}) + \Delta \rho_n(x - \frac{1}{2})}{2} + \Delta \rho_n(x - \frac{1}{2}) = \frac{\rho_n(x - \frac{1}{2}) + \rho_n(x + \frac{1}{2})}{2} + \\ + \frac{\rho_n(x - \frac{3}{2}) + \rho_n(x - \frac{1}{2})}{2} - 2\rho_n(x - \frac{1}{2}) = [\alpha \rho_n(x) + \beta] + [\alpha \rho_n(x-1) + \beta] - 2\rho_n(x - \frac{1}{2}) = \\ = 2\alpha [\alpha \rho_n(x - \frac{1}{2}) + \beta] + 2\beta - 2\rho_n(x - \frac{1}{2}) = 2(\alpha^2 - 1)\rho_{n-1}(x) + 2\beta(\alpha + 1). \end{aligned}$$

то

$$S_n = \sum_i \rho_{n-1}(x_i) \Delta \rho_{n-1}(x_i - \frac{1}{2}) Q_n[\rho_{n-1}(x_i)],$$

где

$$Q_n[\rho_{n-1}(x)] = \alpha \tilde{\delta}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)] + (\alpha + 1) \tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)] [(\alpha - 1)\rho_{n-1}(x) + \beta] \quad (72)$$

- полином не выше 2-ой степени относительно $\rho_{n-1}(x)$. Разложим полином $Q_n(\rho_{n-1})$ по степеням полинома первой степени $\tilde{\tau}_{n-1}(\rho_{n-1})$:

$$Q_n(\rho_{n-1}) = A_n \tilde{\tau}_{n-1}^2(\rho_{n-1}) + B_n \tilde{\tau}_{n-1}(\rho_{n-1}) + C_n. \quad (73)$$

Тогда

$$S_n = S_n^{(1)} + C_n S_{n-1},$$

где

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} = \sum_i \{ A_n \tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x_i)] + B_n \} \tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x_i)] \rho_{n-1}(x_i) \Delta \rho_{n-1}(x_i - \frac{1}{2}) = \\ = \sum_i \{ A_n \tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x_i)] + B_n \} \Delta [\delta(x_i) \rho_{n-1}(x_i)]. \end{aligned}$$

Если воспользоваться суммированием по частям, то получим

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} = \{ A_n \tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x_i)] + B_n \} \delta(x_i) \rho_{n-1}(x_i) \Big|_{\alpha}^{\beta-n} - \\ - A_n \sum_i \delta(x_i + 1) \rho_{n-1}(x_i + 1) \Delta \tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x_i)]. \end{aligned}$$

Так как подстановка равна нулю и

$$\frac{\Delta \tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)]}{\Delta \rho_{n-1}(x)} = \tilde{\tau}'_{n-1} = \text{const},$$

то

$$S_n^{(1)} = -A_n \tilde{\tau}'_{n-1} \sum_i \rho_n(x_i) \Delta \rho_n(x_i - \frac{1}{2}) = -A_n \tilde{\tau}'_{n-1} S_n.$$

Таким образом

$$S_n = -A_n \tilde{\tau}'_{n-1} S_n + C_n S_{n-1},$$

откуда

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{C_n}{1 + A_n \tilde{\tau}'_{n-1}} \quad (74)$$

Для вычисления постоянной A_n достаточно сравнить коэффициенты при $\rho_{n-1}^2(x)$ в равенствах (72) и (73):

$$A_n = \frac{1}{2(\tilde{\tau}'_{n-1})^2} [\alpha \tilde{\sigma}_{n-1}'' + 2(\alpha^2 - 1) \tilde{\tau}'_{n-1}]$$

Постоянную $\tilde{\sigma}_{n-1}'' = \frac{d^2 \tilde{\sigma}_{n-1}(\rho_{n-1})}{d\rho_{n-1}^2}$ можно вычислить тем же способом, что и постоянную $\tilde{\tau}'_{n-1}$.

Для вычисления C_n достаточно положить в (72) и (73) $x = x_n^*$, где x_n^* — какой-либо корень уравнения

$$\tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x_n^*)] \equiv \tau_{n-1}(x_n^*) = 0 :$$

$$C_n = \alpha \tilde{\sigma}_{n-1}[\rho_{n-1}(x_n^*)]$$

Так как

$$\tilde{\sigma}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)] - \frac{1}{2} \tilde{\tau}_{n-1}[\rho_{n-1}(x)] \Delta \rho_{n-1}(x - \frac{1}{2}) = \sigma(x),$$

$$\text{то } \tilde{\sigma}_{n-1}[\rho_{n-1}(x_n^*)] = \sigma(x_n^*), \text{ т.е. } C_n = \alpha \sigma(x_n^*).$$

В заключение рассмотрим некоторые соотношения для разностных производных полиномов $y_n(x)$, вытекающие из формул Родрига (33) и (34). Так как при замене $x \rightarrow x + 1/2$ выражение $D^{n-1}[f(x)]$

переходит в $D_1^n[f(x + 1/2)]$, то формула (33) для $V_{1n}(x)$

будет совпадать с точностью до множителя с формулой для полинома

$\bar{y}_{n-1}(t)$ при $t = x + 1/2$, $\bar{\rho}(t) = \rho_1(x)$, $\bar{\sigma}(t) = \sigma(x)$ в силу того, что при этом $\bar{\rho}_{n-1}(t) = \rho_n(x)$. Поэтому, в частности,

при $\rho(x) = \cos 2\pi x$ имеем

$$\frac{\Delta u_n^{(c,d)}[\rho(x), \alpha, \beta]}{\Delta \rho(x)} \sim u_{n-1}^{(c-\frac{1}{2}, d+\frac{1}{2})}[\rho(t), \alpha + \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2}] \Big|_{t=x+\frac{1}{2}}$$

Коэффициент пропорциональности можно найти из сравнения коэффициентов при $\rho^{n-1}(t) = \rho_1^{n-1}(x)$. Аналогичные формулы для разностных производных можно получить и в других случаях.

Следует отметить, что разностное уравнение (4) было получено из дифференциального уравнения для классических ортогональных полиномов. Поэтому естественно ожидать, что полиномиальные решения уравнения (4) в пределе при $h \rightarrow 0$ будут переходить при соответствующей нормировке в полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Полиномы Рака и дуальные полиномы Хана как обобщение классических ортогональных полиномов. - Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша АН СССР, 1982, № 165.
2. Askey R., Wilson J.A. - A set of orthogonal polynomials that generalize the Racah coefficients or 6j-symbols. - SIAM J. math. Anal., 1979, 10 (1), 1008-1016.
3. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М., Наука, 1978, с. 74-86.
4. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. М., Наука, 1974, с. 143-151.