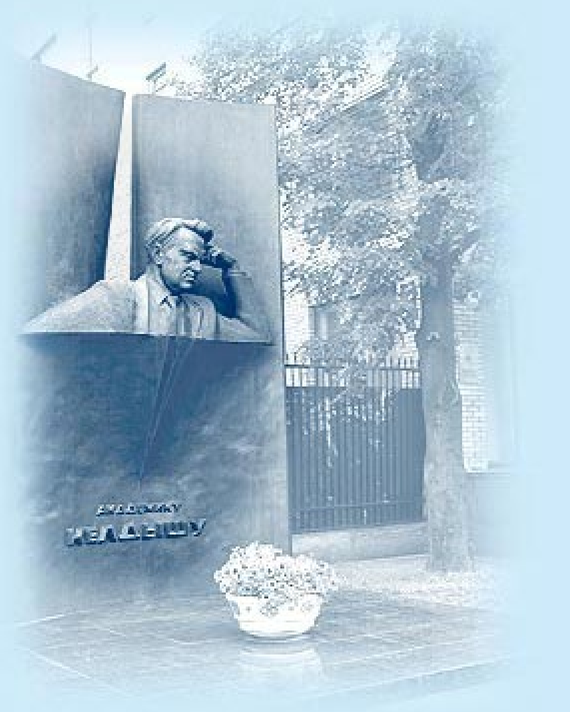
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 102 за 1984 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.Я. Гольдин, Д.А. Гольдина, А.В. Колпаков, А.В. Шильков

О моделировании задач высокотемпературной РГД

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: О моделировании задач высокотемпературной РГД / В.Я. Гольдин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1984. № 102. 17 с. https://doi.org/10.20948/prepr-1984-102
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1984-102

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
А к а д е м и и   н а у к   С С С Р

В.Я. Гольдин, Д.А. Гольдина,
А.В. Колпаков, А.В. Шильков

О моделировании задач высокотемпературной РГД

Москва — 1984

Гольдин В.Я., Гольдина Д.А., Колпаков А.В., Шильков А.В.

О моделировании задач высокотемпературной РГД

Препринт Института прикладной математики им.М.В. Келдыша АН СССР 1984, № 102.

В работе рассмотрены математические модели ВРГД, показана возможность неустойчивости контактных границ при высокой плотности энергии излучения, последовательно получено трехтемпературное приближение, рассмотрены численные методы решения задач ВРГД.

Ключевые слова: высокотемпературная радиационная газовая динамика, численные методы

Goldin V.Ya., Goldina D.A., Kolpakov A.V., Shilkov A.V.

On modeling the problems of high-temperature radiation gas dynamics

Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics of the USSR Academy of Sciences, 1984, No 102.

Mathematical models of High-Temperature Radiation Gas Dynamics (HTRGD) are considered. The possibility of instability of contact boundaries at a high radiation energy density is shown. Equations of the three-temperature approximation are consistently derived. Numerical methods for solving the problems of HTRGD are discussed.

Key words: high temperature radiation gas dynamics, numerical methods

Оглавление

Введение

Движение излучающей плазмы при высоких температурах (~ Кэв) в значительной мере определяется обменом энергией и импульсом с собственным неравновесным излучением [1]. Общая система уравнений высокотемпературной радиационной газовой динамики (ВРГД) [1], [2] слишком сложна для численной реализации. Поэтому ранее численная реализация ВРГД выполнялась при существенных априорных предположениях для функции распределения излучения.

В работе [3] была построена квазидиффузионная форма уравнений ВРГД для нерелятивистского газодинамического движения, пригодная для температур ~ Кэв и условий, в которых несущественны процессы комптонизации излучения. Соответствующая разностная аппроксимация для одномерной сферической геометрии получена в [4]. Здесь использовано параболическое приближение для нестационарных уравнений квазидиффузии.

Дальнейший анализ модели и численных расчетов привел к обнаружению возможности неустойчивости контактных границ при высоком давлении излучения, а тагже показал необходимость частичного учета процесса комптонизации и гиперболичности в уравнениях квазидиффузии. Учет этих факторов в полном объеме пока нереален из-за существенного усложнения расчетов.

1. Уравнения ВРГД

Мы по-прежнему ограничимся случаем $h\langle\nu\rangle \ll mc^2$, где $\langle\nu\rangle$ – характерная частота основной части спектра излучения. Для учета комптонизации воспользуемся интегралом столкновений [5][1]. При этом учтем дополнительно доплер-эффект, связанный с газодинамическим движением. Принимаем, что формирование равновесной функции распределения определяется в основном поглощением и испусканием фотонов, число актов рассеяния на электронах между испусканием и поглощением недостаточно для установления бозе-эйнштейновского распределения.

В этом случае при аппроксимации интеграла столкновений плотность энергии излучения $U(\nu,\mathbf{r},t)$ в пределах g-ой спектральной группы можно локально аппроксимировать планковской функцией $U_{Pl}(\nu,\theta^g)$ с эффективной температурой θ^g.

Пользуясь [3] и [5], получаем систему уравнений ВРГД для одномерной геометрии в несколько преобразованном (по сравнению с [3]) виде

---

[1] При этом предполагается, что изменение энергии $h\Delta\nu$ в акте рассеяния мало ($h\Delta\nu \ll h\nu$), а распределение излучения изотропно. Более точное приближение для спонтанных процессов получено в [6], а для индуцированных в [7]. Однако, они слишком трудоемки для применения в многогрупповой модели ВРГД.

$$\rho \frac{d}{\partial t}\left[\frac{1}{\rho}\right] = \frac{1}{r^n}\frac{\partial [r^n u]}{\partial r}, \tag{1}$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial [P_e + P_i]}{\partial r} - \sum_g \frac{\varkappa_2^g(\theta^g)}{c\rho}[W_0^g - u\delta U^g] = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} + P_i\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho}\right] + \frac{1}{\rho r^n}\frac{\partial [r^n W_{T,i}]}{\partial r} = -Q_{i\to e} + Q_i, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_e}{dt} + P_e\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho}\right] + \frac{1}{\rho r^n}\frac{\partial [r^n W_{T,e}]}{\partial r} + u\sum_g \frac{\varkappa_2^g(\theta^g)}{c\rho}[W_0^g - u\delta U^g] = \\ = Q_{r\to e} + Q_{r\to e} + Q_{i\to e} + Q_e.\end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения состояния, определяющие давление P_e, P_i и внутреннюю энергию единицы массы ε_e, ε_i для электронной (e) и ионной (i) компонент плазмы; коэффициенты теплопроводности, определяющие потоки тепла $W_{T,e}$, $W_{T,i}$, а также обменный член между ионной и электронной компонентами $Q_{i\to e}$ описаны в [8]. Показатель «n» соответственно для плоской, цилиндрической и сферической симметрии равен 0, 1 и 2.

Последний член в (2) определяет ускорение плазмы давлением излучения, четвертый член в (4) – обмен между внутренней и кинетической энергией за счет давления излучения, $Q_{r\to e}$ – скорость обмена энергией между полем излучением и электронной компонентой за счет поглощения и испускания фотонов атомами и ионами, $Q_{r\to e}$ – аналогичная скорость обмена за счет комптоновского рассеяния излучения на свободных электронах, Q_e и Q_i – плотность источников энергии в электронной и ионной компонентах.

Излучение описывается многогрупповой квазидиффузионной системой уравнений [3], [9]

$$D^g(r,t) = \int_{-1}^{1} \mu^2 I^g(\mu,r,t)\,d\mu \Bigg/ \int_{-1}^{1} I^g(\mu,r,t)\,d\mu, \qquad n=0,\ n=2, \tag{5}$$

$$D^g(r,t) = \int_0^1 [1-\gamma^2]\int_{-1}^{1} \mu^2 I^g(\mu,\gamma,r,t)\frac{d\mu d\gamma}{[1-\mu^2]^{1/2}} \Bigg/ \int_0^1\int_{-1}^{1} I^g(\mu,\gamma,r,t)\frac{d\mu d\gamma}{[1-\mu^2]^{1/2}}, \quad n=1,$$

$$D_z^g(r,t)=\int_0^1\gamma^2\int_{-1}^1 I^g(\mu,\gamma,r,t)\frac{d\mu d\gamma}{[1-\mu^2]^{1/2}}\bigg/\int_0^1\int_{-1}^1 I^g(\mu,\gamma,r,t)\frac{d\mu d\gamma}{[1-\mu^2]^{1/2}},\qquad n=1,$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{U^g}{\rho}\right]+\frac{1}{\rho r^n}\frac{\partial[r^n W_0^g]}{\partial r}+D^g U^g\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho}\right]+\frac{u}{\rho}\frac{\partial[D^g U^g]}{\partial r}=-Q_{r\to e}^g-Q_{r\to e}^g, \tag{6}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial W^g}{\partial t}+c\left[\frac{\partial[D^g U^g]}{\partial r}+\frac{B_n^g U^g}{r}\right]+\varkappa_2^g(\theta^g)[W_0^g-u\delta U^g]=0, \tag{7}$$

$$W^g=W_0^g+u[1+D^g]U^g. \tag{8}$$

К уравнениям квазидиффузии присоединяются граничные условия

$$W^g\Big|_\Gamma=C_\Gamma^g U^g\Big|_\Gamma.$$

Здесь U^g и W^g – плотность и поток энергии излучения в группе «g», определяемой границами по частоте ν^g и ν^{g+1}; W_0^g – поток энергии излучения в системе отсчета, движущейся вместе с веществом; $D^g(r,t)$ и $D_z^g(r,t)$ – коэффициенты квазидиффузии; $B_n^g(r,t)$ определяются уравнениями

$$B_n^g=0\ (n=0),\qquad B_n^g=2D^g+D_z^g-1\ (n=1),\qquad B_n^g=3D^g-1\ (n=2).$$

Параметр θ^g аналогичен яркостной температуре и находится из соотношения

$$U^g(r,t)=U_{Pl}^g(\theta^g)=\int_{\nu^f}^{\nu^{g+1}}U_{Pl}(\nu,\theta^g)\,d\nu=4\sigma^g(\theta^g)[\theta^g]^4,\qquad \theta^g=\theta^g(r,t), \tag{9}$$

$$U_{Pl}(\nu,\theta)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k\theta}-1}.$$

Эффективные температуры θ^g не имеют термодинамического смысла, а являются параметрами интерполяции. Для групповых коэффициентов осреднением исходного кинетического уравнения по частоте получаем

$$\varkappa_1^g(\theta^g, T_e, \rho) = \int\limits_{\nu^g}^{\nu^{g+1}} \varkappa(\nu, T_e, \rho) U_{Pl}(\nu, \theta^g)\, d\nu \Bigg/ \int\limits_{\nu^g}^{\nu^{g+1}} U_{Pl}(\nu, \theta^g)\, d\nu, \qquad (10)$$

$$\varkappa_2^g(\theta^g, T_e, \rho) = \int\limits_{\nu^p}^{\nu^{p+1}} \frac{\partial U_{Pl}(\nu, \theta^g)}{\partial \theta^g} d\nu \Bigg/ \int\limits_{\nu^p}^{\nu^{p+1}} \frac{\partial U_{Pl}(\nu, \theta^g) / \partial \theta^g}{\varkappa(\nu, T_e, \rho) + N_e \sigma_e} d\nu,$$

где $\varkappa(\nu, T_e, \rho)$ – коэффициент поглощения с учетом вынужденного испускания, $N_e \sigma_e$ – коэффициент рассеяния на свободных электронах, N_e – число свободных электронов, σ_e – томсоновское сечение рассеяния.

Скорость обмена энергией между полем излучения и свободными электронами с участием в элементарных процессах атомов и ионов равна

$$Q_{r \to e}^g = \frac{c}{\rho} \left[\varkappa_1^g(\theta^g, T_e, \rho) U^g - \varkappa_1^g(T_e, T_e, \rho) U_{Pl}^g(T_e) \right], \qquad Q_{r \to e} = \sum_g Q_{r \to e}^g. \qquad (11)$$

Для скорости обмена энергией в процессах комптоновского рассеяния из [5] получаем

$$Q_{r \to e}^g = \frac{4 c N_e \sigma_e}{\rho} \frac{k\theta^g - kT_e}{m_e c^2} [U^g + V^g], \qquad (12)$$

$$V^g = \frac{1}{2} \left[R(\nu^g, \theta^g) + R(\nu^g, \theta^{g-1}) - R(\nu^{g+1}, \theta^g) - R(\nu^{g+1}, \theta^{g+1}) \right],$$

$$R(\nu, \theta) = \frac{\nu}{4} U_{Pl}(\nu, \theta) \left[1 + \frac{h\nu}{k\theta} \left[1 + \frac{1}{e^{h\nu/k\theta}} \right] \right].$$

Здесь V^g описывает обмен энергией группы g с группами $g-1$ и $g+1$.

Величина δU^g в уравнениях (2), (4) определяет диссипацию излучения к равновесному спектру с температурой электронов:

$$\delta U^g = \alpha^g(T_e) U_{Pl}^g(T_e) - \alpha^g(\theta^g) U^g + \delta U^g, \qquad (13)$$

$$\alpha^g(\theta^g) = 1 - N_e \sigma_e \big/ \varkappa_2^g(\theta^g), \qquad 0 \le \alpha^g(\theta^g) \le 1.$$

При преобладающем поглощении $\alpha^g \approx 1$ и $\delta U^g = U^g_{Pl}(T_e) - U^g$. При преобладающем рассеянии $\alpha^g \approx 0$ и $\delta U^g \approx \delta U^g$ определяется комптонизацией

$$\delta U^g = \frac{4N_e\sigma_e}{\varkappa_2^g(\theta^g)}\frac{kT_e - k\theta^g}{m_e c^2}[U^g + V^g]. \qquad (14)$$

Коэффициенты квазидиффузии $D^g(r,t)$, $D^g_z(r,t)$ величины $B^g_n(r,t)$, а также коэффициенты $C^g_\Gamma(t)$ в краевых условиях определяются по интенсивности $I^g(\mu,r,t)$ ($I^g(\mu,\gamma,r,t), n=1$), удовлетворяющей уравнению переноса. Исходным является слаборелятивистское уравнение, найденное в [3]. В нем следует опустить члены порядка u/c, т.к. численное определение I^g с такой точностью нереально, а для вычисления D^g, B^g_n, D^g_z и C^g_Γ и не нужно.

Для сферической геометрии уравнение имеет вид ($n = 2$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial I^g}{\partial t} + \mu\frac{\partial I^g}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial I^g}{\partial \mu} + [\varkappa_1^g(\theta^g) + N_e\sigma_e]I^g = \varkappa_1^g(T_e)I^g_{Pl}(T_e) + \\ + \frac{3N_e\sigma_e}{16\pi}cU^g\left[\frac{3-\mu^2}{2} + \frac{3\mu^2-1}{2}D^g\right],\end{aligned} \qquad (15)$$

$$I^g_{Pl}(T_e) = \int\limits_{\nu^g}^{\nu^{g+1}} \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{d\nu}{e^{h\nu/kT_e}-1} = \frac{\sigma^g(T_e)}{\pi}T_e^4.$$

В плоской геометрии ($n = 0$) выпадает третье слагаемое в левой части уравнения. В цилиндрической геометрии ($n = 1$) уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial I^g}{\partial t} + \sqrt{1-\gamma^2}\left[\mu\frac{\partial I^g}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial I^g}{\partial \mu}\right] + [\varkappa_1^g(\theta^g) + N_e\sigma_e]I^g = \\ = \varkappa_1^g(T_e)I^g_{Pl}(T_e) + \frac{3N_e\sigma_e}{16\pi}cU^g\left[1 + \Omega_k\Omega_l D^g_{kl}\right],\end{aligned} \qquad (16)$$

$$\Omega_k\Omega_l D^g_{kl} = [1-\gamma^2][1-\mu^2] + \left[\gamma^2 - [1-\gamma^2][1-\mu^2]\right]D^g_z + [1-\gamma^2][2\mu^2-1]D^g,$$

где $\gamma = \mathbf{z\Omega}$ – косинус угла между направлением полета кванта $\mathbf{\Omega}$ и направляющим вектором оси симметрии $\mathbf{z}$.

В приведенной системе уравнений приближенно учтена комптонизация поля излучения на свободных электронах. Приближение обосновано, если излучение имеет слабую анизотропию или, если $Q_{r\to e} \ll Q_{r\to e}$. В остальных случаях приближение является экстраполяцией.

2. Возможность неустойчивости контактных границ

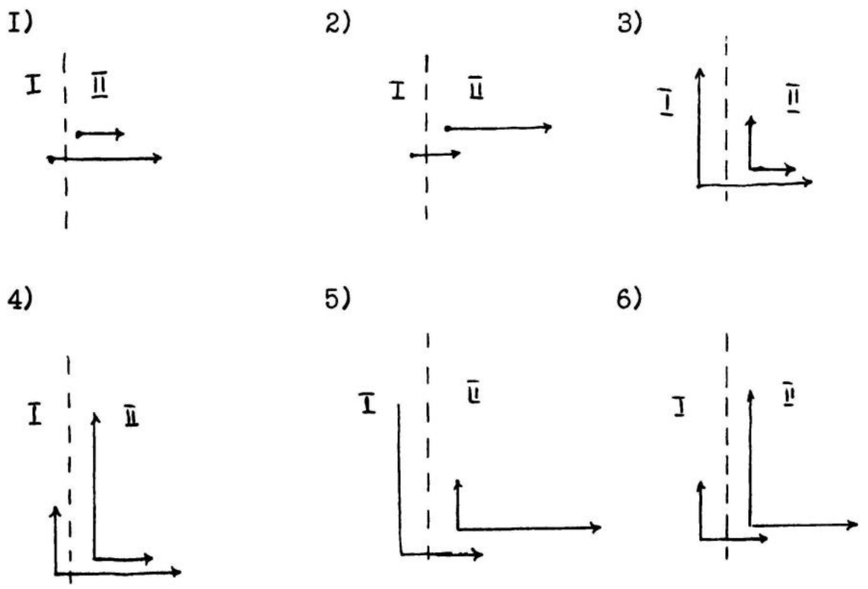
Анализ модели показал, что в высокотемпературной плазме при интенсивном взаимодействии с излучением может возникнуть турбулентное перемешивание контактных границ.

Рассмотрим контактную границу, на которой резко меняются параметры взаимодействия плазмы с излучением. Уравнение движения (2) запишем для произвольной геометрии

$$\frac{du_k}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial[P_e + P_i]}{\partial r_k} + \sum_g \frac{\varkappa_2^g(\theta^g)}{c\rho}[W_k^g - u_k U^g - u_l D_{kl}^g U^g - u_k \delta U^g].$$

Ускорение, сообщаемое излучением, на контактной границе разрывно при наличии разрыва в $\varkappa_2^g(\theta^g)\big/\rho$. Если излучение играет заметную роль в ускорении, то этот разрыв может приводить к неустойчивости.

Возможны следующие типичные ситуации:



На рисунках стрелками схематично изображены относительная величина и направление проекций ускорения излучением перпендикулярно и вдоль границы раздела. В ситуациях 1), 3), 4) граница неустойчива. Ситуации 3) и 4) сопровождаются развитием скольжения, также вызывающим перемешивание. В ситуациях 2), 5), 6) возникает тенденция к понижению плотности в среде II вплоть до отрыва среды II. В ситуациях 5), 6) перемешивание, возникающее при скольжении, может затруднить отрыв.

Описанные явления могут, по-видимому, сопровождать развитие неустойчивостей в высокотемпературной плазме с большим давлением излучения на границе раздела материалов, а также при сильной зависимости коэффициентов поглощения от T_e и ρ, например при перегревной неустойчивости. Следует отметить, что аналогичные явления возможны при взаимодействии плазмы с другими полями, ускоряющими плазму, в зонах резких изменений соответствующих параметров взаимодействия.

3. Трехтемпературное приближение

Для расчета задач ВРГД в 50 годах было предложено «трехтемпературное приближение» (см. в [10]). Оно также рассматривалось в [11]-[13]. Для нахождения условий применимости приближения получим его последовательно из системы квазидиффузионных уравнений ВРГД. В (1)-(14) следует положить $D^g = D_z^g = 1/3$, $B_n^g = 0$, перейти к параболическому приближению $\partial W^g / c\partial t = 0$, а осреднение проводить по всему спектру (т.е. рассматривать не многогрупповое, а одногрупповое приближение). При этом плотность энергии излучения аппроксимируется планковским распределением с эффективной температурой θ, определяемой из условия

$$U(r,t) = 4\sigma\theta^4(r,t)/c.$$

Эффективная температура θ аналогична яркостной температуре и термодинамического смысла не имеет. Само по себе, без взаимодействия с веществом, излучение не может стать равновесным.

Если в системе преобладающую роль играет многократное комптоновское рассеяние, трехтемпературное приближение, как и квазидиффузионная система ВРГД, теряет применимость. В этом случае равновесная интенсивность излучения дается бозе-эйнштейновским распределением с химическим потенциалом, отличным от нуля; меняется функция источников в уравнении переноса излучения. Однако, ввиду использования одногруппового осреднения, трехтемпературное приближение нарушается раньше, чем многогрупповая квазидиффузионная модель ВРГД (1)-(16). Отметим, что модель ВРГД в приближении полной комптонизации фотонов рассмотрена в [1].

Далее, приближение $D^g = D_z^g = 1/3$, $B_n^g = 0$ соответствует случаю слабой анизотропии поля излучения. При наличии оптически толстой и оптически тонкой зон приближение нарушается. В этих условиях также нарушается и применимость параболического приближения.

В некоторых работах отдельные члены уравнений трехтемпературного приближения не были указаны. Приведем систему уравнений трехтемпературного приближения, следующую из системы ВРГД

$$\rho\frac{d}{\partial t}\left[\frac{1}{\rho}\right]=\frac{1}{r^n}\frac{\partial[r^n u]}{\partial r}, \qquad (17)$$

$$\frac{du}{dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial[P_e+P_i+U/3]}{\partial r}=0,$$

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt}+P_i\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho}\right]+\frac{1}{\rho r^n}\frac{\partial[r^n W_{T,i}]}{\partial r}=-Q_{i\to e}+Q_i,$$

$$\frac{d\varepsilon_e}{dt}+P_e\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho}\right]+\frac{1}{\rho r^n}\frac{\partial[r^n W_{T,e}]}{\partial r}-\frac{u}{3\rho}\frac{\partial U}{\partial r}=Q_{r\to e}+Q_{r\to e}+Q_{i\to e}+Q_e,$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{U}{\rho}\right]+\frac{1}{\rho r^n}\frac{\partial[r^n W_0]}{\partial r}+\frac{U}{3}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho}\right]+\frac{u}{3\rho}\frac{\partial U}{\partial r}=-Q_{r\to e}-Q_{r\to e},$$

$$W_0=-\frac{c}{3\varkappa_2(\theta)}\frac{\partial U}{\partial r}+u\,\delta U,$$

$$\delta U=\alpha(T_e)U_{Pl}(T_e)-\alpha(\theta)U+\delta U, \qquad \alpha(\theta)=1-\frac{N_e\sigma_e}{\varkappa_2(\theta)}.$$

Обменные члены и θ определяются уравнениями

$$\theta=\left[\frac{cU}{4\sigma}\right]^{1/4}, \qquad Q_{r\to e}=\frac{c}{\rho}\left[\varkappa_1(\theta,T_e,\rho)U-\varkappa_1(T_e,T_e,\rho)U_{Pl}(T_e)\right], \qquad (18)$$

$$Q_{r\to e}=\frac{4cN_e\sigma_e}{\rho}\frac{k\theta-kT_e}{m_e c^2}U, \qquad \delta U=\frac{4N_e\sigma_e}{\varkappa_2(\theta)}\frac{kT_e-k\theta}{m_e c^2}U.$$

Коэффициенты поглощения равны

$$\varkappa_1(\theta,T_e,\rho)=\int\varkappa(\nu,T_e,\rho)U_{Pl}(\nu,\theta)\,d\nu\Big/\int U_{Pl}(\nu,\theta)\,d\nu\,, \tag{19}$$

$$\varkappa_2(\theta,T_e,\rho)=\int\frac{\partial U_{Pl}(\nu,\theta)}{\partial\theta}d\nu\Bigg/\int\frac{\partial U_{Pl}(\nu,\theta)/\partial\theta}{\varkappa(\nu,T_e,\rho)+N_e\sigma_e}d\nu\,.$$

Методы расчета $\varkappa(\nu,T_e,\rho)$ описаны в [14], [15].

4. Приближения, используемые при построении разностной схемы

Применение разностных методов непосредственно к полученной системе уравнений ВРГД связано с большими трудностями, в первую очередь резким увеличением используемой памяти ЭВМ. Поэтому целесообразно, учитывая характер решения, несколько упростить задачу.

В задачах ВРГД рассматривается распространение собственного (теплового) излучения. Поэтому здесь не возникает очень резких фронтов распространения излучения. Это позволяет с учётом малого параметра u/c в большинстве задач использовать параболическое приближение для групповых уравнений квазидиффузии и квазистационарное приближение для уравнения переноса (т.е. в (7) и (15) полагаем $\partial W^g/c\partial t=0$, $\partial I^g/c\partial t=0$).

Однако при распространении волны излучения в оптически тонкой среде при быстром нарастании интенсивности это приближение грубо. В расчётах оно приводит к распространению волны со сверхсветовой скоростью. Использование полной постановки приводит к необходимости хранения сеточных массивов $I^g(\mu,r,t-\Delta t)$ ($I^g(\mu,\gamma,r,t-\Delta t)$ для $n=1$) и $W^g(r,t-\Delta t)$, т.е. к увеличению используемой памяти ЭВМ в десятки раз.

В то же время нам достаточно учесть лишь главную часть производных $\partial W^g/c\partial t$ и $\partial I^g/c\partial t$ в районе распространения волны излучения. В этой зоне мы предполагаем, что газодинамическое движение еще не развито и скорости u малы. Поэтому

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I^g}{\partial t}\approx\frac{1}{c}\frac{dI^g}{dt}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial W^g}{\partial t}\approx\frac{1}{c}\frac{dW_0^g}{dt}.$$

Учтём эти члены в квазирегулярном приближении [9]. Будем считать, что I^g и W_0^g в течение шага по времени $t_q<t\le t_{q+1}$ растут по экспоненте. Тогда можно положить

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I^g}{\partial t} \approx \frac{1}{c}\frac{dI^g}{dt} \approx \frac{\lambda_q^g(r)}{c} I^g, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial W^g}{\partial t} \approx \frac{1}{c}\frac{dW_0^g}{dt} \approx \frac{\lambda_q^g(r)}{c} W_0^g, \qquad t_q < t \le t_{q+1}.$$

Показатель $\lambda_q^g(r)$ определим по скорости роста U^g

$$\lambda_q^g(r) \approx \frac{d \ln U^g(r,t)}{dt}, \qquad t_q < t \le t_{q+1}. \tag{20}$$

В результате получаем (для $n = 2$)

$$\mu\frac{\partial I^g}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial I^g}{\partial \mu} + [\varkappa_1^g(\theta^g) + N_e\sigma_e + \frac{\lambda_q^g}{c}]I^g = \varkappa_1^g(T_e)I_{Pl}^g(T_e) + \\ + \frac{3N_e\sigma_e}{16\pi}cU^g\left[\frac{3-\mu^2}{2} + \frac{3\mu^2-1}{2}D^g\right], \tag{15a}$$

$$c\left[\frac{\partial[D^g U^g]}{\partial r} + \frac{B_n^g U^g}{r}\right] + \left[\varkappa_2^g(\theta^g) + \frac{\lambda_q^g}{c}\right]W_0^g - \varkappa_2^g(\theta^g)u\delta U^g = 0, \tag{7a}$$

При этом член λ_q^g/c следует учитывать при $\lambda_q^g \ge 0$, а при $\lambda_q^g < 0$ полагаем в (15а) и (7а) $\lambda_q^g = 0$.

Методические расчёты для системы (6), (7) и (6), (7а), выполненные В.А. Дегтярёвым, показали, что такой учёт $\partial W^g / c\partial t$ дает заметное улучшение по сравнению с параболическим приближением.

5. Описание методики расчёта

1. Вся система уравнений естественно разбивается на части I, II, V. В части I решается многогрупповая система квазистационарных уравнений переноса (раз в К временных шагов) [16] и определяются коэффициенты квазидиффузии. На каждом временном шаге определяются групповые коэффициенты поглощения $\varkappa_1^g$, $\varkappa_2^g$ и рассчитываются групповые уравнения квазидиффузии (6), (7а). С помощью полученных групповых плотностей энергии излучения U^g определяются эффективные одногрупповые коэффициенты поглощения, квазидиффузии и другие величины, необходимые для расчёта одной группы.

В части II решается неявная схема для осреднённого одногруппового уравнения квазидиффузии, в котором учитывается член dW_0/cdt, и уравнений энергии. При этом для разрешения неявной схемы используется линеаризация по Ньютону, позволяющая свести задачу к одной скалярной прогонке с учётом электронной теплопроводности. Это достигается за счёт построения разностной схемы уравнений квазидиффузии с помощью квазианалитической интерполяции [17].

В части V по известному распределению температур и излучения находятся газодинамические величины методом интегрирования плотности [18].

Между частями II и V делается несколько итераций.

В настоящее время реализован несколько упрощенный вариант методики, в котором $\theta^g = T_e$, не учитываются комптониэация и ионная теплопроводность. Не учитывается также явление перемешивания, возникающее на контактных границах.

2. Рассмотрим основные новые элементы методики.

При решении уравнения переноса излучения существенные трудности связаны с малым параметром при старшей производной. Это соответствует большим значениям коэффициентов поглощения в оптически толстых зонах.

Использование квазидиффузионного метода позволяет, в основном, снять трудности, связанные с малым параметром в уравнении переноса (15а). Для решения уравнения переноса используется метод [16] и тот факт, что в оптически толстых зонах $D^g = 1/3$.

При построении разностных схем уравнений квазидиффузии используется квазианалитическая интерполяция. Она позволяет корректно учесть большие значения коэффициентов поглощения на грубой сетке [17].

Проиллюстрируем основные моменты, связанные с построением схемы, на простейшем примере

$$\frac{dW}{dx} + \varkappa U = \varkappa U_{Pl}, \tag{21}$$

$$\frac{1}{3}\frac{dU}{dx} + \varkappa W = 0. \tag{22}$$

Вводя функцию $\Phi = U - U_{Pl}$ и исключая из уравнений (21), (22) поток W, получаем:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3\varkappa}\frac{d\Phi}{dx}\right] - \varkappa\Phi = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3\varkappa}\frac{dU_{Pl}}{dx}\right].$$

Найдём решение этого уравнения на интервале разностной сетки $[x_i, x_{i+1}]$ с граничными условиями $\Phi(x_i + 0) = \Phi_i^+$, $\Phi(x_{i+1} - 0) = \Phi_{i+1}^-$, полагая значения коэффициента $\varkappa$ и dU_{Pl}/dx постоянными на интервале. Введение значений $\Phi(x_i \pm 0)$ связано с принятым заданием функции U_{Pl} в центре интервалов, что делает неоднозначным выбор интерполяции правой части (21) в узел сетки. Получаемое выражение

$$\Phi(x) = \Phi_{i+1}^{-} \frac{\sinh(\sqrt{3}\varkappa[x - x_i]/2)}{\sinh(\sqrt{3}\varkappa h_i/2)} + \Phi_i^{+} \frac{\sinh(\sqrt{3}\varkappa[x_{i+1} - x]/2)}{\sinh(\sqrt{3}\varkappa h_i/2)}, \tag{23}$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$, используется в качестве интерполяционной формулы при построении разностной схемы. Введение величины

$$\langle \Phi_i \rangle = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi(x)\, dx$$

и использование ее наряду с (23) для аппроксимации односторонней производной $d\Phi(x_i + 0)/dx$ позволяет выписать аппроксимацию справа от узла x_i для потока W_i

$$3\varkappa_i W_i = \frac{2}{h_i}\left[-\langle \Phi_i \rangle \frac{\tau_i}{\sinh \tau_i} \frac{0.5\tau_i}{\tanh(0.5\tau_i)} + \Phi_i^{+} \frac{0.5\tau_i}{\tanh(0.5\tau_i)} - U_{Pl,i} + U_{Pl}(x_i + 0) \right],$$

где $\tau_i = \sqrt{3}\varkappa h_i/2$. Аналогично выписывается аппроксимация слева от узла.

Переходя от Φ к U и U_{Pl} (при этом полагаем $\langle \Phi_i \rangle = \langle U_i \rangle - U_{Pl,i}$) и исключая из полученной пары уравнений значение U в узле, получаем аппроксимацию потока в узле сетки. Выбор значений $U_{Pl,i}(x_i \pm 0)$ основан на следующих соображениях. В пределе малых оптических интервалов эти члены выпадают. В случае больших оптических толщин интервалов и малых градиентов температуры по оптической толщине требование перехода к разностной аппроксимации потока лучистой теплопроводности даёт интерполяцию в узел сетки для U_{Pl}. При этом $U_{Pl}(x_i - 0) = U_{Pl}(x_i + 0)$. При сильных скачках коэффициентов (например, вследствие больших градиентов температуры или на контактных границах) возникают пограничные слои и в этом случае полагается $U_{Pl}(x_i + 0) = U_{Pl,i}$.

Окончательно схема имеет вид:

$$W_{i+1} - W_i + \varkappa_i h_i \langle U_i \rangle = \varkappa_i h_i U_{Pl,i},$$

$$W_i = -2\frac{\langle U_i\rangle\dfrac{\tau_i}{\sinh\tau_i} - \langle U_{i-1}\rangle\dfrac{\tau_{i-1}}{\sinh\tau_{i-1}} + U_{Pl,i}\left[\alpha - \dfrac{\tau_i}{\sinh\tau_i}\right] - U_{Pl,i-1}\left[\alpha - \dfrac{\tau_{i-1}}{\sinh\tau_{i-1}}\right]}{\sqrt{3}[\tanh(0.5\tau_i) + \tanh(0.5\tau_{i-1})]} -$$

$$-[1-\alpha]\frac{U_{Pl,i} - U_{Pl,i-1}}{1.5[\varkappa_i h_i + \varkappa_{i-1} h_{i-1}]},$$

где α определяется по градиенту температуры на оптической толщине. $\alpha = 0$ соответствует заданию U_{Pl} по лучистой теплопроводности, $\alpha = 0$ – постоянным на интервалах. Второе из уравнений можно записать в общем виде

$$W_i = A_i\langle U_{i-1}\rangle - B_i\langle U_i\rangle + a_i U_{Pl,i-1} - b_i U_{Pl,i}.$$

В этом выражении, сохраняющем свой вид и после осреднения по группам, при приближении к лучистой теплопроводности основную роль играют члены, содержащие $U_{Pl,i}$. Именно эти члены в потоке берутся на новой ньютоновской итерации при совместном решении неявных разностных уравнений энергии и квазидиффузии. Возникает возможность объединить члены, описывающие лучистый поток и поток электронной теплопроводности, что сводит решение совместной задачи к одной скалярной прогонке.

Литература

[1] *Имшенник В.С., Морозов Ю.И.* Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений. – М.: Атомиздат, 1981, 88 с. https://www.studmed.ru/imshennik-vs-morozov-yui-radiacionnaya-relyativistskaya-gazodinamika-vysokotemperaturnyh-yavleniy_e1de7904103.html
Imshennik V.S., Morozov Yu.I. Radiation relativistic gas dynamics of high-temperature phenomena. - Moscow: Atomizdat, 1981, 88 pp. (in Russian)

[2] *Прокофьев В.А.* Уравнения релятивистской радиационной гидродинамики // Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 5, с. 1033-1036. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=25630

[3] *Гольдин В.Я., Шильков А.В.* Уравнения высокотемпературной радиационной газодинамики в квазидиффузионном виде // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 1981, № 43, 8 с. https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1981-43

[4] *Гольдин В.Я., Колпаков А.В., Шильков А.В.* О решении задач высокотемпературной РГД // Прогр. и тезисы докл. 5-ой Всес. конф. Динамика излучающего газа, Москва, 1983, с. 18-19.

[5] *Компанеец А.С.* Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами // ЖЭТФ, 1956, т. 31, № 5, с. 876-885.

Kompaneets A.S. Establishment of thermal equilibrium between quanta and electrons // Soviet Physics JETP, 1957, v. 4, No 5, pp 730-737. http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_004_05_0730.pdf

[6] *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. – М.: ИЛ, 1953, 432 с. https://www.studmed.ru/chandrasekar-s-perenos-luchistoy-energii_40dab0c2903.html
Chandrasekhar S. Radiative transfer. – Oxford: Clarendon Press, 1950, 393 pp. New York: Dover Publ. 1960, 393 pp. https://www.google.ru/search?tbm=bks&hl=ru&q=Chandrasekhar+S.+Radiative+transfer.+%E2%80%93+New+York%3A+Dover+Publ.+1960

[7] *Зельдович Я.Б., Левич Е.В., Сюняев Р.А.* Индуцированное комптоновское взаимодействие максвелловских электронов со спектрально узким излучением // ЖЭТФ, 1972, т. 62, № 4, с. 1392-1408.
Zel'dovich Ya.B., Levich E.V., and Syunyaev R. A. Stimulated Compton Interaction Between Maxwellian Electrons and Spectrally Narrow Radiation // Soviet Physics JETP, 1972, v. 35, No 4, pp 733-740. http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_035_04_0733.pdf

[8] *Калиткин Н.Н.* Свойства вещества и МРГД-программы // В кн. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики, ред. А.Н. Тихонов. М.: Наука, 1982, с. 170-182; / Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. – 1978, № 85. https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1978-85

[9] *Гольдин В.Я.* О математическом моделировании задач сплошной среды с неравновесным переносом // В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики, ред. А.Н. Тихонов. М.: Наука, 1982, с. 113-127; / Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 1980, № 145. https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1980-145

[10] *Афанасьев Ю.В., Гамалий Е.Г., Розанов В.Б.* Основные уравнения динамики и кинетики лазерной плазмы // Тр. ФИАН СССР, 1982, т. 134 Теория нагрева и сжатия низкоэнтропийных термоядерных мишеней, с. 10-31. https://proceedings.lebedev.ru/0134/

[11] *Fraley G.S., Linnebur E,J., Mason R.J., Morse R.L.* Thermonuclear bum characteristics of compressed deuterium-tritium microspheres // Phys. Fluids, 1974, v. 17, No 2, pp. 474-489. https://doi.org/10.1063/1.1694739

[12] *Барышева Н.М., Зуев А.И., Карлыханов Н.Г., Лыков В.А., Черняков В.Е.* Неявная схема для численного моделирования физических процессов в лазерной плазме // ЖВМ и МФ, 1982, т. 22, № 2, с. 401-410. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=5771
Barysheva N.M., Zuev A.I., Karlykhanov N.G., Lykov V.A., Chernyakov V.E. An implicit scheme for the numerical modelling of physical processes in a laser plasma // USSR Comp. Mathematics and Math. Physics, 1982, v. 22, No 2, pp. 156-166. https://doi.org/10.1016/0041-5553(82)90045-3

[13] *Волосевич П.П., Карпов В.Я., Леванов Е.И., Маслянкин В.И., Шелапутин И.И.* САФРА. Функциональное наполнение. Расчёт переноса излучения в трёхтемпературном приближении // Препринты ИПМ

им.М.В.Келдыша. — 1983, № 77. https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1983-77
[14] *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Вычисление непрозрачности звезд с учетом поглощения света в спектральных линиях // Докл. АН СССР, 1970, т.191, №1, с. 47-49.
http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=35259
[15] *Новиков В.Г., Орлов Н.Ю.* Некоторые методы расчёта свойств вещества в теплофиэических установках. – М.: ЦНИИ информ. и техникоэконом. ис-след. по атомной науке и технике, 1984.
Novikov V.G., Orlov N.Yu. Some methods for calculating the properties of a substance in thermal power plants. – M .: TsNII inform. and a tech.-econ. is-sled. on nuclear science and technology, 1984. (in Russian)
[16] *Гольдин В.Я., Данилова Г.В., Четверушкин Б.Н.* Приближенный метод расчета нестационарного кинетического уравнения // В кн.: Вычислительные методы в теории переноса, ред. Г.И. Марчук. М.: Атомиздат, 1969, с. 50-58.
[17] *Гольдин В.Я., Колпаков А.В.* // Тезисы лекций и докладов Всес. школы молодых учёных «Численные методы решения задач математической физики, г. Львов, 1983», М.: Знание, 1983, ч. II, с. 54-55.
[18] *Волчинская М.И., Гольдин В.Я., Гольдина Д.А., Калиткин Н.Н., Кузюк В.А.* Газодинамическая схема интегрирования плотности // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 1979, № 116. https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1979-116