



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Садов Ю.А.

Использование переменных
действие—угол в задачах
возмущённого движения
твёрдого тела относительно
центра масс

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Садов Ю.А. Использование переменных действие—угол в задачах возмущённого движения твёрдого тела относительно центра масс // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1984. № 33. 31 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1984-33>



Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша,
Академии Наук СССР

Ю.А. Садов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ
В ЗАДАЧАХ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ
ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

Препринт № 33 за 1984 г.

Москва.

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им. М.В.КЕЛДЫША
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Ю. А. Садов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ В ЗАДАЧАХ
ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО
ЦЕНТРА МАСС

Москва
1984 г.

АННОТАЦИЯ

При решении задач динамики в переменных действие-угол особенно наглядной становится структура решения невозмущенной системы, упрощается теория и техника использования методов возмущения, повышается эффективность численного интегрирования. Однако, практическая реализация этих преимуществ во многом зависит от фактической сложности введения переменных действие-угол, трудности пересчета их в непосредственно наблюдаемые параметры движения, громоздкости соответствующих алгоритмов.

В данной работе приводятся формулы и методические приемы, которые позволяют упростить технику аналитических исследований и строить более эффективные численные алгоритмы при решении задач возмущенного движения твердого тела относительно центра масс в переменных действие-угол.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	4
2. Переменные действие-угол в движении Эйлера-Пуансо	5
3. Возмущенное движение в переменных действие-угол	8
4. Вычисление функций, определенных на фазовом пространстве системы, в переменных действие-угол	10
5. Вычисление направляющих косинусов	12
6. Вычисление $\sigma(x, \lambda)$	15
7. Исследование функции $V(x, \lambda)$	17
8. Степенные ряды для функции $V_i(x, \lambda)$	21
9. Вычисление элементов матрицы Якоби	24
Литература	27
Приложение	28

I. Введение

Переменными действие-угол I_κ, ω_κ ($\kappa = 1, \dots, n$, где n - число степеней свободы) для интегрируемых гамильтоновых систем называются [1] канонические переменные со следующими свойствами: 1) фазовое пространство системы периодически по всем углам ω_κ с периодом 2π , 2) все угловые переменные - циклические, так что гамильтониан $\mathcal{H} = \mathcal{H}(I_1, \dots, I_n)$ не зависит от ω_κ .

Уравнения движения системы имеют в этих переменных очень простой вид

$$\dot{I}_\kappa = 0, \quad \dot{\omega}_\kappa = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_\kappa} = Q_\kappa(I) \quad (1.1)$$

и легко интегрируются. Главный смысл использования таких переменных состоит, однако, не в простоте интегрирования исходной (невозмущенной) системы, а в удобстве исследования с их помощью поведения близких (возмущенных) систем, которые могут быть записаны в виде

$$\dot{I}_\kappa = \varepsilon F_\kappa(I, \omega), \quad \dot{\omega}_\kappa = Q_\kappa(I) + \varepsilon R_\kappa(I, \omega), \quad (1.2)$$

где ε - малый параметр.

В переменных действие-угол особенно наглядной становится структура решения невозмущенной системы, упрощается теория и техника использования методов возмущения, повышается эффективность численного интегрирования, которое можно проводить с увеличенным шагом, так как в уравнения движения все члены, содержащие быстро меняющиеся углы ω_κ , входят с малой амплитудой.

Практическая реализация перечисленных выше преимуществ во многом зависит от фактической сложности вычисления переменных действие-угол, трудности пересчета их в непосредственно наблюдаемые параметры движения, громоздкости получающихся при этом алгоритмов.

Формулы и методические приемы, приводимые в данной работе, позволяют упростить технику аналитических исследований и строить более эффективные численные алгоритмы при решении задач возмущенного движения свободного твердого тела относительно центра масс.

2. Переменные действие-угол в движении Эйлера-Пуансо

Принципиальные вопросы введения переменных действие-угол в интегрируемых задачах динамики выяснены В.И. Арнольдом [2]. В [3] указан путь решения этой задачи для движения свободного твердого тела относительно неподвижной точки (случай Эйлера-Пуансо). Фактическое построение переменных действие-угол для этого случая, доведенное до необходимых расчетных формул, выполнено в [4] и содержится также в монографии [5]. Сводка результирующих формул дана в заметке [6]. В обзоре [7] приведены сведения о построении и использовании других систем переменных, сходных по некоторым свойствам с переменными действие-угол. В данном разделе кратко описываются переменные, введенные в [4].

В качестве исходной системы канонических переменных выберем переменные Андуайе G, H, L, g, h, ℓ . Здесь G - модуль кинетического момента, H - проекция вектора кинетического момента $\vec{G}$ на ось Oz неподвижной системы координат Oxy , L - проекция $\vec{G}$ на ось $O\xi$ связанной с телом системы координат $O\xi\eta\zeta$. Пусть плоскость OMN перпендикулярна вектору $\vec{G}$, причем OM лежит в плоскости Oxy , а ON - в плоскости $O\xi\eta$. Тогда $h = \angle MOx$, $g = \angle MON$, $\ell = \angle NO\xi$. Построение переменных Андуайе и доказательство их каноничности детально изложены в статье [8]. Введем еще вспомогательные углы δ и ϑ , которые связаны с основными переменными посредством формул

$$H = G \cos \delta, \quad L = G \cos \vartheta. \quad (2.1)$$

Уравнения свободного невозмущенного движения твердого тела имеют в этих переменных гамильтонову форму

$$\begin{aligned} \dot{G} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial g}, & \dot{H} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial h}, & \dot{L} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \ell}, \\ \dot{g} &= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial G}, & \dot{h} &= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial H}, & \dot{\ell} &= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L} \end{aligned} \quad (2.2)$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H}_0 = \frac{G^2 L^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \ell}{A} + \frac{\cos^2 \ell}{B} \right) + \frac{L^2}{2C}, \quad (2.3)$$

где A, B, C - моменты инерции тела относительно осей $O\xi, O\eta, O\zeta$.

Фазовое пространство системы разбивается сепаратрисами движения Эйлера-Пуансо $G^2 - 2B\mathcal{H}_0 = 0$ (B - средний момент инерции тела) на четыре области I, II, III, IV, в каждой из которых существует аналитическое преобразование от переменных Андуайе G, H, L, g, h, ℓ к переменным действие-угол G, H, I, v, h, f и обратно. Три новых переменных G, H, h совпадают с соответствующими исходными, а для записи формул преобразования остальных переменных удобно ввести параметры

$$\varkappa = \sqrt{\frac{C(B-A)}{A(C-B)}}, \quad \lambda = \varkappa \sqrt{\frac{2C\mathcal{H}_0 - G^2}{G^2 - 2A\mathcal{H}_0}}. \quad (2.4)$$

Параметр $\varkappa$ зависит лишь от моментов инерции рассматриваемого тела и для конкретной задачи не изменяется при движении системы. Величина же λ при возмущенном движении является, вообще говоря, переменной, причем $0 \leq \lambda < 1$ в областях I и II, и $\lambda > 1$ в областях III и IV. В связи с этим для рассматриваемых далее функций мы будем опускать обозначение их функциональной зависимости от параметра $\varkappa$.

Величина λ легко вычисляется через исходные переменные согласно (2.3), (2.4). Действие I может быть затем вычислено по формуле

$$I = GV(\lambda), \quad (2.5)$$

причем аналитическое выражение функции $V(\lambda)$ имеет разный вид в областях $\lambda < 1$ и $\lambda > 1$ и включает в себя полные эллиптические интегралы первого и третьего родов. Угловые переменные v и f выражаются через исходные формулами вида

$$v = g + v_i^*(\ell, \lambda), \quad f = f_i^*(\ell, \lambda), \quad (2.6)$$

где функции v_i^* и f_i^* по-разному записываются в областях I, II, III, IV и включают в себя неполные эллиптические интегралы первого и третьего родов.

Обратный переход от переменных действие-угол к переменным Андуайе требует в первую очередь обращения функции V из (2.5) для того, чтобы найти

$$\lambda = \Lambda(I/G). \quad (2.7)$$

Сделать это возможно, так как $V(\lambda)$ при вещественных положительных λ представляет собой монотонно убывающую от I до 0 функцию, аналитическую всюду за исключением точки $\lambda = 1$. Соответственно,

функция Λ определена при $0 < I/G \leq 1$, дифференцируема внутри этого интервала и аналитична внутри него всюду за исключением точки $I/G = \frac{2}{\pi} \arctg x$. После этого переменные g, ℓ, Λ находятся по формулам

$$g = v - \Delta^*(f, \lambda), \quad \ell = \ell^*(f, \lambda), \quad \Lambda = \Lambda^*(G, f, \lambda), \quad (2.8)$$

причем функции $\Delta^*, \ell^*, \Lambda^*$ записываются по-разному в областях I, II, III, IV и включают в себя эллиптические интегралы и функции Якоби. Зависимость от G, I входит в (2.8) через λ согласно (2.7).

Невозмущенный гамильтониан в новых переменных принимает вид

$$\mathcal{H}_0 = \frac{G^2}{2AC} \frac{Ax^2 + C\lambda^2}{x^2 + \lambda^2}, \quad (2.9)$$

где $\lambda = \Lambda(I/G)$. Уравнения невозмущенного движения выглядят очень просто

$$\begin{aligned} \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial v} = 0, \quad \dot{h} = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial h} = 0, \quad \dot{f} = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial f} = 0, \\ \dot{v} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial G} = Q_1(G, I), \quad \dot{h} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial h} = 0, \quad \dot{f} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} = Q_2(G, I) \end{aligned} \quad (2.10)$$

и легко интегрируются. Q_1 и Q_2 представляют собой частоты прецессии и собственного вращения при движении Эйлера-Пуансо. В уравнениях (2.10) отмечена их функциональная зависимость только от переменных G, I , хотя они зависят также от моментов инерции тела. Эти частоты связаны с G и I очень простым соотношением

$$GQ_1 + IQ_2 = 2\mathcal{H}_0. \quad (2.11)$$

Для доказательства заметим, что, согласно (2.7) λ является однородной функцией нулевой степени переменных G и I . Тогда из (2.9) следует, что $\mathcal{H}_0$ является однородной функцией второй степени от тех же переменных. Согласно теореме Эйлера об однородных функциях

$$G \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial G} + I \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} = 2\mathcal{H}_0$$

что, в силу (2.10) эквивалентно (2.11).

3. Возмущенное движение в переменных действие-угол

Для записи в переменных действие-угол уравнений возмущенного движения разделим возмущения на гамильтонову и негамильтонову компоненты, так что исходные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{G} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g} + \varphi_G, & \dot{g} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} + \varphi_g, \\ \dot{H} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} + \varphi_H, & \dot{h} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} + \varphi_h, \\ \dot{L} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \ell} + \varphi_L, & \dot{\ell} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} + \varphi_\ell,\end{aligned}\quad (3.1)$$

где $\mathcal{H}(G, H, L, g, h, \ell, t) = \mathcal{H}_0(G, L, \ell) + \mathcal{H}_1(G, H, L, g, h, \ell, t)$.
 $\mathcal{H}_0$ - гамильтониан невозмущенного движения (2.3), $\mathcal{H}_1$ - возмущенная часть гамильтониана, $\varphi_\alpha(G, H, L, g, h, \ell, t)$ - негамильтонова часть возмущения.

Так как переход к переменным действие-угол осуществляется каноническим преобразованием, то гамильтонова компонента уравнений (3.1) сохраняет в новых переменных гамильтонову форму. Негамильтонова же компонента преобразуется как общее векторное поле

$$\begin{aligned}\dot{H} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} + \varphi_H, & \dot{h} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} + \varphi_h, & \dot{G} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} + \varphi_G, \\ \dot{v} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} + \varphi_g + \frac{\partial v}{\partial G} \varphi_G + \frac{\partial v}{\partial L} \varphi_L + \frac{\partial v}{\partial \ell} \varphi_\ell, \\ \dot{I} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} + \frac{\partial I}{\partial G} \varphi_G + \frac{\partial I}{\partial L} \varphi_L + \frac{\partial I}{\partial \ell} \varphi_\ell, & \dot{f} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} + \frac{\partial f}{\partial G} \varphi_G + \frac{\partial f}{\partial L} \varphi_L + \frac{\partial f}{\partial \ell} \varphi_\ell.\end{aligned}\quad (3.2)$$

В этих формулах уже использованы сведения о конкретном виде преобразования к переменным G, H, I, v, h, f , содержащиеся в формулах (2.3) - (2.6). $I(G, L, \ell)$ обозначает функцию, определенную согласно (2.5) с учетом того, что $\lambda = \lambda(G, L, \ell)$ из (2.3), (2.4).

При практическом использовании уравнений (3.2) для исследования задач возмущенного движения необходимо бывает представить в "удобном" для решения задачи виде известные функции $\mathcal{H}, \varphi_\alpha$ от исходных переменных через переменные действие-угол и найти "удобные" же выражения через эти переменные элементы матрицы перехода $\| \partial y / \partial x \|$, где $x = (G, H, L, g, h, \ell)$ - исходные переменные, $y = (G, H, I, v, h, f)$ - новые переменные. Такая необходимость вызвана тем, что прямое использование формул (2.7), (2.8) для пе-

перехода к новым переменным приводит к выражениям, которые нельзя признать "удобными" ни для численного решения задач, ни для их аналитического исследования. Дополнительные осложнения связаны с тем, что функция Λ в (2.7) определена только неявно, как обращение функции V из (2.5).

Для различных задач "удобными" оказываются различные способы описания задачи и представления одних и тех же величин. Формулы и методические рекомендации, приводимые в данной работе, рассчитаны в основном на использование для целей численного изучения возмущенного движения твердого тела относительно центра масс и для его аналитического исследования с применением методов усреднения.

Отметим, прежде всего, что каноничность преобразования от переменных G, H, L, g, h, ℓ к переменным G, H, I, v, h, f дает возможность несколько упростить вычисление элементов матрицы $\| \partial y / \partial x \|$, входящих в уравнения (3.2). Действительно, если имеется каноническое преобразование от переменных (q, p) к переменным (Q, P) , то элементы матриц Якоби прямого и обратного преобразований связаны соотношениями [9]

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_\kappa} = \frac{\partial p_\kappa}{\partial P_i}, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial p_\kappa} = -\frac{\partial q_\kappa}{\partial P_i}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial q_\kappa} = -\frac{\partial p_\kappa}{\partial Q_i}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial p_\kappa} = \frac{\partial q_\kappa}{\partial Q_i}.$$

В рассматриваемом случае это приводит к следующим не тавтологичным равенствам

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \ell} &= \frac{\partial L}{\partial G}, & \frac{\partial v}{\partial G} &= \frac{\partial \Delta}{\partial G}, & \frac{\partial v}{\partial L} &= -\frac{\partial \ell}{\partial G}, \\ \frac{\partial I}{\partial \ell} &= -\frac{\partial L}{\partial f}, & \frac{\partial I}{\partial G} &= -\frac{\partial \Delta}{\partial f}, & \frac{\partial I}{\partial L} &= \frac{\partial \ell}{\partial f}, \\ \frac{\partial f}{\partial \ell} &= \frac{\partial L}{\partial I}, & \frac{\partial f}{\partial G} &= \frac{\partial \Delta}{\partial I}, & \frac{\partial f}{\partial L} &= -\frac{\partial \ell}{\partial I}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Получить выражения правых частей этих равенств в переменных действие-угол проще, чем левых, так как имеются явные формулы (2.8) для функций L, Δ, ℓ от этих переменных и остается лишь продифференцировать их.

С учетом (3.3) получаем следующие уравнения для I, v, f

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} - \frac{\partial \Delta}{\partial f} \varphi_G + \frac{\partial \ell}{\partial f} \varphi_L - \frac{\partial L}{\partial f} \varphi_\ell, \\ \dot{v} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} + \varphi_g + \frac{\partial \Delta}{\partial G} \varphi_G - \frac{\partial \ell}{\partial G} \varphi_L + \frac{\partial L}{\partial G} \varphi_\ell, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\dot{f} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} + \frac{\partial \Delta}{\partial I} \varphi_G - \frac{\partial \varrho}{\partial I} \varphi_L + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I} \varphi_e.$$

Оставшиеся три уравнения системы (3.2) сохраняют свой вид. Развернутые выражения для производных, входящих в уравнения (3.4), и вычислительные формулы для них выводятся в разделе 9.

Одной из особенностей формул (2.8), задающих преобразование переменных, является то, что переменная I входит в эти формулы только через параметр λ , который является трудно вычисляемой функцией от отношения I/G . Последнее обстоятельство не очень мешает при теоретических исследованиях, но достаточно неприятно при проведении численных расчетов, так как нужно вычислять значение этой функции на каждом шаге интегрирования. К счастью, для вычислительных задач обычно не очень существенна близость структуры системы (3.2), (3.4) к гамильтоновой. Это дает возможность упростить вычисления, используя при интегрировании вместо переменной I переменную λ , то-есть решая задачу в переменных G, H, λ, v, h, f . Уравнение для λ при этом получается таким

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{G} \frac{d\Lambda}{dZ} (\dot{I} - Z\dot{G}), \quad (3.5)$$

где $Z \equiv I/G = V(\lambda)$ согласно (2.5). Как Z , так и $d\Lambda/dZ = (dV/d\lambda)^{-1}$, эффективно вычисляются как функции от λ (см. разделы 7, 8).

Перейдем теперь непосредственно к описанию вычислительных процедур, полезных для рассматриваемых задач.

4. Вычисление функций, определенных на фазовом пространстве системы, в переменных действие-угол

Выведем, прежде всего, явные выражения для функций (2.8), связывающих исходные переменные с переменными действие-угол ([4], [5]). При $\lambda < 1$

$$\operatorname{tg} \varrho = \mp \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \mathcal{L} = \pm \frac{Gx}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}} \operatorname{dn} u, \quad (4.1)$$

$$g = v - \frac{\sqrt{(1+x^2)(\lambda^2 + x^2)}}{x} \left[\Pi(\operatorname{am} u, x^2, \lambda) - \frac{2f}{\pi} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, x^2, \lambda\right) \right].$$

При $\lambda > 1$

$$\operatorname{tg} \varrho = \mp \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \mathcal{L} = \pm \frac{Gx}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}} \operatorname{cn} u, \quad (4.2)$$

$$g = v - \frac{\sqrt{(1+x^2)(x^2+\lambda^2)}}{x\lambda} \left[\Pi(am\lambda, \frac{x^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}) - \frac{2f}{\pi} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{x^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right) \right].$$

Здесь $\lambda = 2Kf/\pi$, модуль эллиптических интегралов и функций равен λ при $\lambda < 1$ и равен $1/\lambda$ при $\lambda > 1$. В формулах с двойным знаком знак выбирается в зависимости от направления вращения.

Параметр λ в формулах (4.1), (4.2) является функцией от переменной $Z = I/G$. Эта функция определяется неявным образом из соотношения (2.5)

$$Z = V(\lambda), \quad (4.3)$$

причем

$$V(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{\lambda^2+x^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi}}{1+x^2 \sin^2 \varphi} d\varphi & (\lambda \leq 1) \\ \frac{2}{\pi} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{\lambda\sqrt{\lambda^2+x^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(1+x^2 \lambda^2 \sin^2 \varphi)\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi}} & (\lambda > 1). \end{cases} \quad (4.4)$$

Имея формулы (4.1), (4.2), принципиально несложно по любой известной функции $F(G, H, L, g, h, \ell)$ исходных переменных получить функцию

$$F^*(G, H, \lambda, v, h, f) = F(G, H, L(G, \lambda, f), v - \Delta(\lambda, f), h, \ell(\lambda, f)) \quad (4.5)$$

Искомое выражение функции F в переменных действие-угол получается затем, если рассматривать λ как функцию I/G .

$$\tilde{F}(G, H, I, v, h, f) = F^*(G, H, \Lambda(I/G), v, h, f). \quad (4.6)$$

Основная трудность при выполнении первой части такого преобразования по формуле (4.5) состоит в сложном виде выражений (4.1), (4.2), связывающих углы g и f , если учесть к тому же, что преобразуемые функции F зависят от g , как правило, через трансцендентные (тригонометрические) функции. Чтобы справиться с этой трудностью, учтем, что зависимость функций F от переменных g, h, ℓ , определяющих положение системы в конфигурационном пространстве, относительно проще выражается через направляющие косинусы a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) связанных с телом осей в неподвижной системе координат. Во всяком случае, обычно такая зависимость выражается алгебраическими функциями (а зачастую, и полиномами) от направля-

ющих косинусов. Поэтому удобное представление в переменных действие-угол направляющих косинусов a_{ij} открывает практическую возможность получения и вычисления соответствующих функций F^* согласно (4.5).

Как показано в [4], нужные представления направляющих косинусов действительно можно найти. Для получения аналитических результатов удобно пользоваться приведенными в [4], [5] разложениями направляющих косинусов в ряды Фурье по углам v и f . Для наиболее эффективного вычисления a_{ij} лучше пользоваться их представлениями через ϑ -функции. Соответствующие вычислительные формулы приведены в разделе 5.

Переход от функции F^* к $\tilde{F}$ по формуле (4.6) сопряжен с другой трудностью, которая порождается сложным характером соотношений (4.3), (4.4), связывающих Z с λ . С вычислительной точки зрения она является довольно существенной. Формулы, приводимые в разделах 7 и 8, позволяют строить достаточно эффективные алгоритмы вычислений функции $V(\lambda)$ и полезны при аналитических исследованиях (например, когда искомое решение строится в виде ряда по степеням λ). Трудности, связанные с необходимостью обращения функции $V(\lambda)$ для определения λ по Z , во многих случаях можно обойти, если использовать, как указано в разделе 3, λ в качестве независимой переменной вместо I . Если же это нежелательно, λ приходится определять как неявную функцию из соотношения $Z = V(\lambda)$ каким-нибудь численным методом (например, методом Ньютона). Применение таких методов в данном случае не вызывает никаких затруднений, так как функция $V(\lambda)$ монотонна во всей области ее определения и эффективно вычисляется вместе со своей производной.

5. Вычисление направляющих косинусов

В данном разделе приведены формулы для вычисления направляющих косинусов осей, связанных с телом, в неподвижной системе координат, основанные на представлении этих величин в виде отношения ϑ -функций.

Матрицу S направляющих косинусов системы $O\xi\eta\zeta$ в системе $Oxyz$ можно записать в виде $S = S_{12} S_3$, причем

$$S_{12} = \begin{vmatrix} \cosh \cos v - \sinh \cos \delta \sin v & -\cosh \sin v - \sinh \cos \delta \cos v & \sinh \sin \delta \\ \sinh \cos v + \cosh \cos \delta \sin v & -\sinh \sin v + \cosh \cos \delta \cos v & -\cosh \sin \delta \\ \sin \delta \sin v & \sin \delta \cos v & \cos \delta \end{vmatrix}$$

где

$$\cos \delta = \frac{H}{G}, \quad \sin \delta = \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}}. \quad (5.1)$$

Представления элементов матрицы $S_3 = S_3(\lambda, f)$ в виде рядов Фурье по углу f приведены в [4], [5], [6]. С вычислительной точки зрения удобнее пользоваться их выражениями через ϑ -функции Якоби. В указанных работах приведены также метод получения таких выражений и отчасти их вид. Ниже соответствующие формулы выписаны полностью (S_{ij} - элементы матрицы S_3).

При $\lambda < 1$

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_4(0)}{2i\vartheta_1(i\delta)} \frac{\vartheta_1(f+i\delta) + \vartheta_1(f-i\delta)}{\vartheta_4(f)}, \\ S_{21} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_4(0)}{2\vartheta_1(i\delta)} \frac{\vartheta_1(f+i\delta) - \vartheta_1(f-i\delta)}{\vartheta_4(f)}, \\ S_{31} &= \pm \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_2(f)}{\vartheta_4(f)}, \\ S_{12} &= \mp \frac{\vartheta_4(0)}{2\vartheta_2(i\delta)} \frac{\vartheta_2(f+i\delta) + \vartheta_2(f-i\delta)}{\vartheta_4(f)}, \\ S_{22} &= \pm \frac{\vartheta_4(0)}{2i\vartheta_2(i\delta)} \frac{\vartheta_2(f+i\delta) - \vartheta_2(f-i\delta)}{\vartheta_4(f)}, \\ S_{32} &= - \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} \frac{\vartheta_1(f)}{\vartheta_4(f)}, \\ S_{13} &= - \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_4(0)}{2i\vartheta_4(i\delta)} \frac{\vartheta_4(f+i\delta) - \vartheta_4(f-i\delta)}{\vartheta_4(f)}, \\ S_{23} &= - \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_4(0)}{2\vartheta_4(i\delta)} \frac{\vartheta_4(f+i\delta) + \vartheta_4(f-i\delta)}{\vartheta_4(f)}, \\ S_{33} &= \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)} \frac{\vartheta_3(f)}{\vartheta_4(f)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для того, чтобы получить аналогичные формулы для $\lambda > 1$, достаточно в формулах (5.2) всюду заменить функцию ϑ_2 на ϑ_3 и обратно- ϑ_3 на ϑ_2 . Так, например,

$$S_{31} = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)} \frac{\vartheta_3(f)}{\vartheta_4(f)}, \quad S_{32} = - \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_1(f)}{\vartheta_4(f)} \text{ и т.д.}$$

Напомним, что модуль ν -функций κ равен

$$\kappa = \begin{cases} \lambda, & \lambda < 1 \\ 1/\lambda, & \lambda > 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Для параметра δ имеем выражения

$$\delta = \begin{cases} \frac{\pi}{2K(\lambda)} F(\operatorname{arctg} \frac{x}{\lambda}, \lambda'), & 0 < \lambda < 1 \\ \frac{\pi}{2K(1/\lambda)} F(\operatorname{arctg} x, \lambda''), & \lambda > 1, \end{cases} \quad (5.4)$$

где $F(\varphi, \kappa)$ - эллиптический интеграл I рода, $K(\kappa)$ - полный эллиптический интеграл I рода,

$$\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad \lambda'' = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - 1}. \quad (5.5)$$

Отметим, что из (5.4) следует

$$0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2} \frac{K'}{K} \quad (K'(\kappa) = K(\kappa')). \quad (5.6)$$

Формулы (5.2) очень удобны для вычислений, так как ν -функции разлагаются в чрезвычайно быстро сходящиеся ряды по степеням параметра $q = \exp(-\pi K'/K)$ (см., например, [10]). Для расчетов эти формулы целесообразно записать в следующем виде ($\lambda < 1$):

$$\begin{aligned} S_{11} &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\theta_{40} \theta_{13}}{\theta_{11} \theta_{42}}, & S_{21} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\theta_{40} \theta_{14}}{\theta_{11} \theta_{42}}, \\ S_{12} &= + \frac{\theta_{40} \theta_{23}}{\theta_{21} \theta_{42}}, & S_{22} &= + \frac{\theta_{40} \theta_{24}}{\theta_{21} \theta_{42}}, \\ S_{13} &= -\frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\theta_{40} \theta_{44}}{\theta_{41} \theta_{42}}, & S_{23} &= -\frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}} \frac{\theta_{40} \theta_{43}}{\theta_{41} \theta_{42}}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} sh(2n+1)\delta, & \theta_{23} &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} ch(2n+1)\delta \cos(2n+1)f, \\ \theta_{21} &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} ch(2n+1)\delta, & \theta_{13} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} ch(2n+1)\delta \sin(2n+1)f, \\ \theta_{40} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}, & \theta_{14} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} sh(2n+1)\delta \cos(2n+1)f. \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}\theta_{41} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \operatorname{ch} 2n\delta, \quad \theta_{24} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \operatorname{sh}(2n+1)\delta \sin(2n+1)f, \\ \theta_{42} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nf, \quad \theta_{44} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{n^2} \operatorname{sh} 2n\delta \sin 2nf, \\ \theta_{43} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \operatorname{ch} 2n\delta \cos 2nf.\end{aligned}$$

Нетрудно выписать соответствующие формулы для остальных направляющих косинусов, а также для случая $\lambda > 1$. Для оценки скорости сходимости рядов (5.8) полезно учитывать, что, как следует из (5.6), $qe^{2\delta} \leq 1$, а сама величина q практически при всех значениях модуля κ заметно меньше 1. Поэтому даже при $\kappa = 0,99$ учет в рядах (5.8) членов с $n \leq 3$ позволяет вычислять величины θ_{ij} с погрешностью $\sim 10^{-8}$.

Несколько осложняет использование формул (5.8) входящая в них величина δ . Выражения (5.4), которыми она определяется, не очень удобны ни для вычислений, ни для аналитического исследования, так как, например, имеют существенную особенность при $\lambda = 0$, где физически никаких особенностей обычно не наблюдается. В следующем разделе указываются некоторые преобразования формул (5.4), позволяющие преодолеть эти трудности и построить эффективный алгоритм вычисления δ .

6. Вычисление $\delta(x, \lambda)$.

Как уже упоминалось, одним из недостатков выражения (5.4) для δ является то, что оно не определено при $\lambda = 0$ и вовсе не очевиден характер особенности в этой точке. Это затрудняет анализ формул (5.7), (5.8) для направляющих косинусов и, в частности, сравнение их с формулами, дающими разложение S_{ij} в тригонометрические ряды ([4], [6]).

Для преобразования выражения (5.4) к более удобному виду при $\lambda < 1$ воспользуемся формулой, связывающей значения эллиптического интеграла I рода при двух значениях аргументов:

если величины φ и ψ таковы, что

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\kappa}, \quad \text{и } 0 < \varphi + \psi < \pi,$$

то

$$F(\varphi, \kappa) + F(\psi, \kappa) = K(\kappa). \quad (6.1)$$

Эта формула легко доказывается соответствующей заменой перемен-

ной в интеграле, определяющем $F(\varphi, \kappa)$.

Воспользовавшись (6.1), находим, что при $\lambda < 1$

$$\sigma(x, \lambda) = \frac{\pi}{2} \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\pi}{2\kappa} F(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \lambda') . \quad (6.2)$$

Это выражение анализировать проще, так как вычитаемое остается ограниченным при $\lambda \rightarrow 0$ и $x \neq 0$. Так, например, используя известное разложение $F(\varphi, \kappa')$ по κ [10], находим при малых λ

$$e^{\sigma} = q^{-1/2} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{4} \frac{\lambda^2}{x^2} + \dots \right\} . \quad (6.3)$$

Эффективный вычислительный алгоритм для σ можно построить, если использовать для вычисления $F(\varphi, \kappa)$ преобразование Ландена

$$F(\varphi, \kappa) = \frac{1}{1+\kappa'} F(\varphi_1, \kappa_1) , \quad (6.4)$$

$$\text{где } \kappa_1 = \frac{1-\kappa'}{1+\kappa'} , \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(1+\kappa') \operatorname{tg} \varphi}{1-\kappa' \operatorname{tg}^2 \varphi} ,$$

причем $0 \leq \varphi_1 < \pi$ при $0 \leq \varphi < \pi/2$.

Особенностью преобразования (6.4) является чрезвычайно быстрая сходимость последовательных значений модуля κ к нулю. Так, например, при $\kappa < 0.8$ достаточно трех итераций этого преобразования, чтобы получить модуль $\kappa < 10^{-4}$, для которого погрешность формулы $F(\varphi, \kappa) = \varphi$ не превышает 10^{-8} . Другим ценным свойством преобразования (6.4) является то, что $\operatorname{tg} \varphi_1$ рационально выражается через $\operatorname{tg} \varphi$, и поэтому на каждой итерации кроме нескольких арифметических операций нужно выполнить лишь одно извлечение квадратного корня (для вычисления κ'). Некоторое осложнение вносится тем обстоятельством, что преобразование Ландена переводит интервал $[0, \pi/2)$ значений аргумента φ в интервал $[0, \pi)$ и поэтому приходится следить, в какой квадрант попадают значения преобразованного аргумента. Для построения регулярного алгоритма предпочтительней ограничить область изменения аргумента интервалом $[0, \pi/2)$, положив

$$\operatorname{tg} \varphi_{n+1} = \left| \frac{(1+\kappa'_n) \operatorname{tg} \varphi_n}{1-\kappa'_n \operatorname{tg}^2 \varphi_n} \right| . \quad (6.5)$$

При этом, однако, связь между двумя последовательными значениями F будет несколько сложнее.

Если $d_n = 1 - \kappa'_n \operatorname{tg}^2 \varphi_n$, то

$$F(\varphi_n, \kappa_n) = \frac{1}{1 + \kappa'_n} \times \begin{cases} F(\varphi_{n+1}, \kappa_{n+1}), & d_n > 0 \\ K(\kappa_{n+1}), & d_n = 0 \\ 2K(\kappa_{n+1}) - F(\varphi_{n+1}, \kappa_{n+1}), & d_n < 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Итерируя преобразование, задаваемое формулами (6.5), (6.6), получаем после n итераций следующее выражение для вычисления $F(\varphi, \kappa) \equiv F(\varphi_0, \kappa_0)$. Пусть $m_1, m_2, \dots, m_p$ - последовательность номеров ℓ тех итераций, для которых $d_\ell < 0$. Таким образом, при $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ $m_i < n$, $d_{m_i} < 0$ и, если $i < j$, то $m_i < m_j$. Тогда

$$F(\varphi, \kappa) = A \{ (-1)^p F(\varphi_n, \kappa_n) + \sum_{j=1}^p (-1)^j 2^{-m_j} K(\kappa_n) \}. \quad (6.7)$$

где
$$A = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{2}{1 + \kappa'_j}.$$

При выводе этой формулы учитывается, что

$$K(\kappa_n) = \frac{2}{1 + \kappa'_n} K(\kappa_{n+1}) \quad (6.8)$$

и предполагается, что d_ℓ не обращается в нуль при $\ell < n$.

В приложении приведена фортранная программа, реализующая с несущественными модификациями алгоритм, представленный формулой (6.7). Для вычисления $\mathcal{G}$ этот алгоритм можно еще несколько упростить, учитывая, что тангенс аргумента F согласно формуле (5.4) фактически известен, и нужное значение F лежит в диапазоне $0 \leq F < K$.

7. Исследование функции $V(x, \lambda)$

Займемся теперь изучением функции V , в первую очередь, для построения достаточно эффективных методов ее вычисления. При этом в следующих двух разделах удобно будет указывать в явном виде зависимость V также и от параметра x , то-есть рассматривать V как функцию двух переменных x и λ . Согласно формуле (4.4) функция $V(x, \lambda)$ определяется разными аналитическими выражениями при $\lambda \leq 1$ и при $\lambda > 1$.

$$V(x, \lambda) = V_1(x, \lambda) \quad (\lambda \leq 1), \quad V(x, \lambda) = V_2(x, \lambda) \quad (\lambda > 1). \quad (7.1)$$

Приводя входящие в (4.4) интегралы к стандартному виду, приходим к выражениям функций V_1 , V_2 через полные эллиптические интегралы

$$V_1(x, \lambda) = \frac{2}{\pi x} \sqrt{\frac{1+x^2}{\lambda^2+x^2}} \left[(\lambda^2+x^2) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, x^2, \lambda\right) - \lambda^2 K(\lambda) \right], \quad (7.2)$$

$$V_2(x, \lambda) = \frac{2}{\pi x \lambda} \sqrt{\frac{1+x^2}{\lambda^2+x^2}} \left[(\lambda^2+x^2) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{x^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right) - \lambda^2 K\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right].$$

Эти выражения уже позволяют получить достаточно удобные вычислительные формулы для V_1 , V_2 , если использовать представление эллиптического интеграла III-го рода через ϑ -функции, а именно

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, \kappa\right) = \left(1 + \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{Z}(\alpha)}{\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}\right) K(\kappa), \quad (7.3)$$

где $Z(u)$ - дзета-функция Якоби

$$Z(u) = \frac{\pi}{2K} \frac{\vartheta'_4(\pi u/2K)}{\vartheta_4(\pi u/2K)} \quad (7.4)$$

и параметр α определяется из уравнения

$$\operatorname{sn}^2 \alpha = -n/\kappa^2. \quad (7.5)$$

Подставляя сюда значения n и κ из формул (7.2), находим

$$\alpha = \frac{2K}{\pi} i\phi, \quad (7.6)$$

где ϕ - знакомая нам величина, определяемая формулами (5.4).

Используя (7.3), (7.4) с учетом (7.6) и представляя ϑ_4 в виде ряда, находим из (7.2) вычислительную формулу для $V(x, \lambda)$

$$V(x, \lambda) = \frac{2K}{\pi} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{\lambda^2+x^2}} d - 2R, \quad (7.7)$$

где

$$R = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n q^{n^2} \operatorname{sh} 2n\phi}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \operatorname{ch} 2n\phi}, \quad d = \begin{cases} 1, & \lambda < 1 \\ 1/\lambda, & \lambda > 1. \end{cases}$$

Дополнительные преобразования позволяют получить еще более компактные формулы для V . Заметим предварительно, что из (7.5), (7.6) и (5.6) следует, что

$$\operatorname{sn} \alpha = i \frac{x}{\lambda}, \quad \operatorname{cn} \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + \lambda^2}}{\lambda}, \quad \operatorname{dn} \alpha = \sqrt{1+x^2} \quad (\lambda < 1). \quad (7.8)$$

$$\operatorname{sn} \alpha = i\alpha, \quad \operatorname{cn} \alpha = \sqrt{1+\alpha^2}, \quad \operatorname{dn} \alpha = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}}{\lambda} \quad (\lambda > 1).$$

С учетом (7.3) это позволяет переписать (7.2) в виде

$$\begin{aligned} V_1(\alpha, \lambda) &= \frac{2iK}{\pi} \left(Z(\alpha) - \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha} \right), \\ V_2(\alpha, \lambda) &= \frac{2iK}{\pi} \left(Z(\alpha) - \kappa^2 \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha} \right) \quad (\kappa = \frac{1}{\lambda}). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Заметим далее, что

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} = - \frac{d(\ell \operatorname{cn} u)}{du} = \frac{\pi}{2K} \left(\frac{\vartheta_4'(\frac{\pi u}{2K})}{\vartheta_4(\frac{\pi u}{2K})} - \frac{\vartheta_2'(\frac{\pi u}{2K})}{\vartheta_2(\frac{\pi u}{2K})} \right). \quad (7.10)$$

Используя эту формулу, получаем из (7.9)

$$V_1(\alpha, \lambda) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) q^{n(n+1)} \operatorname{sh}(2n+1)\delta}{\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \operatorname{ch}(2n+1)\delta}. \quad (7.11)$$

Совершенно аналогично для V_2 имеем

$$V_2(\alpha, \lambda) = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n^2} \operatorname{sh} 2n\delta}{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \operatorname{ch} 2n\delta}. \quad (7.12)$$

Формулы (7.7), (7.11), (7.12) позволяют построить эффективные алгоритмы для вычисления $V(\alpha, \lambda)$. При аналитических исследованиях иногда предпочтительнее иметь выражение V непосредственно через α и λ , не включающее промежуточных параметров q и δ . Мы получим такие выражения в виде степенных рядов в следующем разделе. Здесь же предварительно найдем некоторые полезные формулы, позволяющие производить замену аргументов функций V_1, V_2 .

Прежде всего продифференцируем выражения (4.4) по λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial \lambda} &= - \frac{2}{\pi} \frac{\alpha \lambda \sqrt{1+\alpha^2}}{(\alpha^2 + \lambda^2)^{3/2}} K'(\lambda) \\ \frac{\partial V_2}{\partial \lambda} &= - \frac{2}{\pi} \frac{\alpha \sqrt{1+\alpha^2}}{(\alpha^2 + \lambda^2)^{3/2}} K\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Относительно простой вид формул (7.13) позволяет легко вычислять наряду с V и $\partial V / \partial \lambda$, особенно, если для вычисления V пользоваться формулой (7.7). При этом можно эффективно применять метод Ньютона для обращения V как функции λ .

Введем на время функцию $V_2'(x, \kappa) = V_2(x, 1/\kappa)$ ($0 < \kappa < 1$). Тогда

$$\frac{\partial V_2'}{\partial \kappa} = -\frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial V_2}{\partial \lambda} = \frac{2}{\pi} \frac{x \kappa \sqrt{1+x^2}}{(1+\kappa^2 x^2)^{3/2}} K(\kappa).$$

Пусть $x_1 = 1/x$. Легко видеть, что

$$\frac{\partial V_2'(x, \kappa)}{\partial \kappa} = \frac{2}{\pi} \frac{x_1 \kappa \sqrt{1+x_1^2}}{(x_1^2 + \kappa^2)^{3/2}} K(\kappa) = -\frac{\partial V_1(x_1, \kappa)}{\partial \kappa}. \quad (7.14)$$

Интегрируя (7.14) по κ и учитывая, что при $\kappa \rightarrow 0$ $V_1 \rightarrow 1$, $V_2' \rightarrow 0$, находим простое соотношение, связывающее функции V_1 и V_2 .

$$V_1(x, \lambda) + V_2\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\lambda}\right) = 1. \quad (7.15)$$

Формула (7.15) позволяет свести изучение функции $V(x, \lambda)$ к случаю $\lambda < 1$. В дальнейшем мы ограничимся этим случаем, т.е. будем рассматривать функцию $V_1(x, \lambda)$.

Из интегральных выражений (4.4) для V_1 и V_2 нетрудно получить

$$V_1(x, \lambda) - V_2\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{x(1-\lambda^2)}{\sqrt{(1+x^2)(\lambda^2+x^2)}} \frac{2K(\lambda)}{\pi}. \quad (7.16)$$

С учетом (7.15) это дает

$$V_1(x, \lambda) + V_1\left(\frac{\lambda}{x}, \lambda\right) = 1 + \frac{x(1-\lambda^2)}{\sqrt{(1+x^2)(\lambda^2+x^2)}} \frac{2K(\lambda)}{\pi}. \quad (7.17)$$

или в симметричном виде:

при $x_1 x_2 = \kappa$

$$V_1(x_1, \kappa) + V_1(x_2, \kappa) = 1 + \frac{\kappa'^2}{\sqrt{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}} \frac{2K(\kappa)}{\pi}. \quad (7.18)$$

Формула (7.18) связывает значения функции V_1 с одним и тем же модулем κ , но разными аргументами x_1 , x_2 и позволяет рассматривать функцию $V_1(x, \kappa)$ при значениях аргумента x , заключенных в одном из интервалов $(0, \sqrt{\kappa}]$ или $[\sqrt{\kappa}, \infty)$.

Сложнее выводятся формулы, связывающие значения $V_1(x, \kappa)$ при разных модулях κ . Не воспроизводя здесь довольно громоздких

выкладок, укажем лишь, что, выполняя в (4.4) замену переменной под знаком интеграла по формуле преобразования Ландена

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(1+\kappa') \operatorname{tg} \psi}{1-\kappa' \operatorname{tg}^2 \psi} \quad (7.19)$$

находим

$$V_1(x, \kappa) = V_1(x_3, \kappa_1) - \frac{2\kappa'\kappa_1 x}{(1+\kappa')\sqrt{(\kappa^2+x^2)(\kappa_1^2+x_3^2)}} \frac{2K(\kappa_1)}{\pi}, \quad (7.20)$$

где

$$\kappa_1 = \frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}, \quad x_3 = \frac{x}{1+\kappa'} \sqrt{\frac{\kappa^2+x^2}{1+x^2}}. \quad (7.21)$$

Еще одна формула, позволяющая производить то же самое преобразование модулей, получается обращением преобразования Гаусса

$$\sin \varphi = \frac{(1+\kappa_1) \sin \chi}{1+\kappa_1 \sin^2 \chi}, \quad (7.22)$$

где κ_1 определяется согласно (7.21). Этой формуле можно придать такой вид

$$V_1(x, \kappa) = V_1(x_2, \kappa_1) - V_1(x_1, \kappa_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2} \frac{(1-\kappa_1)^2}{\sqrt{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}} \frac{2K(\kappa_1)}{\pi}. \quad (7.23)$$

Здесь

$$x_1 = \frac{\sqrt{\kappa^2+x^2} - x}{1+\kappa'}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{\kappa^2+x^2} + x}{1+\kappa'}. \quad (7.24)$$

Заметим, что $x_1 x_2 = \kappa_1$, поэтому $V_1(x_1, \kappa_1)$ и $V_1(x_2, \kappa_1)$ связаны друг с другом соотношением (7.18).

Соотношения (7.15), (7.18), (7.20), (7.23) предоставляют определенную свободу при оперировании функциями V_1 , V_2 и дают возможность получать наиболее удобные и эффективные для конкретной задачи формулы и алгоритмы.

8. Степенные ряды для функции $V_2(x, \lambda)$

Перейдем теперь к построению степенных рядов для функции $V_2(x, \lambda)$, с помощью которых она выражается непосредственно через переменные x , λ без вспомогательных параметров b , q . Подробный вывод приводимых здесь формул довольно громоздок, поэтому ниже указаны только основные его этапы.

Согласно первой из формул (7.13) имеем

$$V_1(x, \lambda) = 1 - \frac{2}{\pi} x \sqrt{1+x^2} \int_0^{\lambda} \frac{z K(z) dz}{(z^2+x^2)^{3/2}} \quad (8.1)$$

и, пользуясь известным разложением полного эллиптического интеграла $K(z)$ по модулю z , находим

$$V_1(x, \lambda) = 1 - x \sqrt{1+x^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right]^2 Q_m(x, \lambda), \quad (8.2)$$

где

$$Q_m(x, \lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{z^{2m+1} dz}{(z^2+x^2)^{3/2}}. \quad (8.3)$$

В формуле (8.2) и последующих полагаем по определению

$$1!! = 1, \quad 0!! = 1, \quad (-1)!! = 1, \quad (-3)!! = -1. \quad (8.4)$$

Для интеграла (8.3) можно найти выражение

$$Q_m(x, \lambda) = \frac{x^{2m}}{\sqrt{x^2+\lambda^2}} \frac{(-1)^m (2m)!!}{(2m-1)!!} \left\{ \sqrt{1+\frac{\lambda^2}{x^2}} + \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \left(\frac{\lambda}{x} \right)^{2n} \right\}. \quad (8.5)$$

Формулы (8.2), (8.5) дают первое из искомых разложений, начальные члены которого имеют вид

$$V_1(x, \lambda) = 1 - \frac{x \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2+\lambda^2}} \left\{ \left(\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{x^2}} - 1 \right) - \frac{1}{2} x^2 \left(\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{x^2}} - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{x} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 \left(\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{x^2}} - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{x} \right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{\lambda}{x} \right)^4 \right) - \dots \right\}. \quad (8.6)$$

Хотя ряд (8.6) сходится при $0 \leq \lambda < 1$ и всех $x > 0$, удобнее было бы иметь разложение, расположенное по степеням λ . Для получения его нужно произвести перегруппировку членов в (8.6). Такая перегруппировка проводится по-разному при $\lambda > x$ и $\lambda < x$, но в результате получаем один и тот же, сходящийся при $0 \leq \lambda < 1$ и $x > 0$ ряд

$$V_1(x, \lambda) = - \frac{x \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2+\lambda^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \left(\frac{\lambda}{x} \right)^{2n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} x^{2m} \right\}. \quad (8.7)$$

В развернутом виде

$$V_1(x, \lambda) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2+\lambda^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{x} \right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 + \frac{1}{2} x^2 \right) \left(\frac{\lambda}{x} \right)^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 \right) \left(\frac{\lambda}{x} \right)^6 - \dots \right\}. \quad (8.8)$$

Формулы (8.7), (8.8) можно преобразовать к виду, в котором более явно виден характер зависимости отдельных членов ряда от x . Для этого заметим сначала, например, с помощью непосредственной проверки при небольших n , что выражение

$$Z_n(x^2) = \sqrt{1+x^2} \sum_{\kappa=0}^n (-1)^\kappa \frac{(2\kappa-1)!!}{(2\kappa)!!} x^{2\kappa-1} \quad (8.9)$$

делится на $(\sqrt{1+x^2}-1)^{n+1}$. Точнее говоря, оказывается, что

$$Z_n(x^2) = (-1)^n 2t^{n+1} D_n(u), \quad (8.10)$$

где $D_n(u)$ - полином степени n от u

$$t = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2}, \quad u = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2} \quad (8.11)$$

Уточняя вид этого полинома, находим окончательно

$$Z_n(x^2) = (-1)^n 2t^{n+1} \sum_{\kappa=0}^n C_{n+\kappa}^\kappa u^\kappa. \quad (8.12)$$

Формула (8.12) доказывается индукцией по n . При этом надо учитывать, что

$$x^2 = 4ut, \quad \sqrt{1+x^2} = 2t+1, \quad u-1=t \quad (8.13)$$

и использовать рекуррентное соотношение

$$Z_n(x^2) = Z_{n-1}(x^2) + (-1)^n C_{2n}^n t^n u^n (2t+1) \quad (8.14)$$

Используя (8.12), получаем из (8.7)

$$V_1(x, \lambda) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\lambda^2}} \left\{ 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} w^{n+1} \sum_{\kappa=0}^n C_{n+\kappa}^\kappa u^\kappa \right\} \quad (8.15)$$

или подробнее

$$V_1(x, \lambda) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\lambda^2}} \left\{ 1 - w - \frac{1}{4} w^2 (1+2u) - \frac{1}{8} w^3 (1+3u+6u^2) - \dots \right\}, \quad (8.16)$$

причем $w = \lambda^2 \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^2}$, $u = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2}$. (8.17)

Ряд (8.15) сходится при $x > 0$ и $0 \leq \lambda \leq 1$. Действительно, из (8.17) $u > 1$ и поэтому

$$\sum_{k=0}^n C_{n+k}^k u^k < u^n \sum_{k=0}^n C_{n+k}^k = C_{2n+1}^n u^n$$

и далее, используя то, что $uw = \frac{1}{4} \lambda^2$ и $\lambda \leq 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} C_{2n+1}^n w^{n+1} u^n = 2w \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! (2n+1)!!}{[(2n+2)!!]^2} \lambda^{2n} <$$

$$< 2w \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \lambda^{2n} \leq 2w \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = 2w.$$

Последнее равенство следует из формулы

$$\sum_{n=0}^m \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = 1 - \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty.$$

Формулы (8.2), (8.5), (8.7), (8.15) дают искомые разложения функции V_l .

9. Вычисление элементов матрицы Якоби

Приведенные в разделах 4 - 8 алгоритмы и формулы позволяют получить достаточно удобные и эффективные способы представления и вычисления функций от фазовых переменных системы через переменные действие-угол. Займемся теперь вычислением элементов матрицы Якоби, входящих в уравнения (3.4), если возмущенная система не гамильтонова. Ради краткости, выкладки и результаты приведены только для случая $\lambda < 1$.

Поскольку выражения $\mathcal{L}$, g , ℓ через G , I , f известны (см. формулы (4.1)), то вычисление матрицы Якоби $\| \partial x / \partial y \|$ сводится лишь к преодолению некоторых технических трудностей, связанных с дифференцированием сложных функций. В результате получаем следующие выражения для производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} &= -\frac{2K}{\pi} \frac{Gx\lambda^2}{\sqrt{x^2+\lambda^2}} \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \\ \frac{\partial \ell}{\partial f} &= \frac{2K}{\pi} \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} \operatorname{dn} u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta}{\partial f} &= \frac{2K}{\pi} \frac{\sqrt{(1+x^2)(x^2+\lambda^2)}}{x} \left(\frac{1}{1+x^2 \operatorname{sn}^2 u} - \frac{\Pi}{K} \right) \\
\frac{\partial \Delta}{\partial I} &= \frac{\pi}{2K} \frac{dnu}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\pi}{2K} \frac{x^2+\lambda^2}{\lambda^2 \sqrt{1+x^2}} (Z(u) \operatorname{cn} u - \operatorname{sn} u dnu) \operatorname{sn} u \\
\frac{\partial \ell}{\partial I} &= \frac{\pi}{2K} \frac{(x^2+\lambda^2)^{3/2}}{G x \lambda^2 \lambda^2} \frac{Z(u) dnu - \lambda^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{1+x^2 \operatorname{sn}^2 u} \quad (9.1) \\
\frac{\partial \Delta}{\partial I} &= \frac{\pi}{2K} \frac{x^2+\lambda^2}{G \lambda^2 \lambda^2} \frac{(Z(u) dnu - \lambda^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u) dnu}{1+x^2 \operatorname{sn}^2 u} \\
\frac{\partial \Delta}{\partial G} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+\lambda^2}} dnu - \frac{I}{G} \frac{\partial \Delta}{\partial I} \\
\frac{\partial \ell}{\partial G} &= -\frac{I}{G} \frac{\partial \ell}{\partial I}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial G} = -\frac{I}{G} \frac{\partial \Delta}{\partial I}.
\end{aligned}$$

Здесь $Z(u)$ - дзета-функция Якоби, Π - полный эллиптический интеграл третьего рода

$$Z(u) = E(\operatorname{am} u) - \frac{E}{K} u, \quad \Pi = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, x^2, \lambda\right). \quad (9.2)$$

Процесс вывода формул (9.1) покажем на примере получения производной $\partial \Delta / \partial I$. Запишем выражение для $\Delta = \nu - g$ из (4.1) следующим образом

$$\Delta = \Delta^*(f, \lambda) = \tilde{\Delta}(\xi, f, \lambda) = \frac{\sqrt{(1+x^2)(x^2+\lambda^2)}}{x} \left[\Pi(\xi, x^2, \lambda) - \frac{2\Pi f}{\pi} \right], \quad (9.3)$$

где $\xi = \xi(f, \lambda) = \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} f$. Δ зависит от I только через λ . Поэтому

$$\frac{\partial \Delta}{\partial I} = \frac{\partial \Delta^*}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial I} = \left(\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial I}. \quad (9.4)$$

$\frac{\partial \lambda}{\partial I}$ вычисляем как производную неявно определенной функции (2.7), используя (7.13).

$$\frac{\partial \lambda}{\partial I} = -\frac{\pi}{2K} \frac{(x^2+\lambda^2)^{3/2}}{G x \lambda \sqrt{1+x^2}}. \quad (9.5)$$

Из известного выражения для эллиптического интеграла третьего рода

$$\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{(1+x^2)(x^2+\lambda^2)}}{x} \frac{1}{(1+x^2 \operatorname{sn}^2 u) dnu}. \quad (9.6)$$

Несколько сложнее найти, что

$$\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial \lambda} = \frac{\lambda \sqrt{1+x^2}}{x \lambda'^2 \sqrt{x^2 + \lambda^2}} \left(Z(u) - \lambda^2 \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right). \quad (9.7)$$

Производную $\partial \xi / \partial \lambda$ проще всего вычислить из уравнения

$$F(\xi, \lambda) = 2K(\lambda) \frac{f}{\pi},$$

что дает

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{2f}{\pi} \frac{dK}{d\lambda}}{\frac{\partial F}{\partial \xi}} = - \frac{1}{\lambda \lambda'^2} (Z(u) \operatorname{dn} u - \lambda^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u) \quad (9.8)$$

Подставляя (9.5) - (9.8) в (9.4), приходим к приведенному в (9.1) выражению для $\partial \Delta / \partial \lambda$.

Формулы (9.1), определяя выражения элементов матрицы Якоби через хорошо изученные функции, дают возможность исследовать аналитические свойства этих элементов и производить дальнейшие преобразования над ними. Можно, в частности, получить их выражения через $\mathcal{V}$ -функции, аналогичные формулам (5.2) для направляющих косинусов, что позволяет найти эффективные алгоритмы вычисления этих величин. Можно также вычислить разложения элементов матрицы Якоби в ряды Фурье по углу f .

Приведенные в данной работе формулы и алгоритмы помогают преодолеть значительную часть трудностей, связанных с применением переменных действие-угол в задачах возмущенного движения твердого тела относительно неподвижной точки, и эффективно использовать при этом как аналитические, так и численные методы.

В заключение благодарю С.Ю. Садова за помощь в проведении нелегких и неочевидных выкладок раздела 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голдстейн Г. Классическая механика. - М.: Наука, 1975.
2. Арнольд В.И. Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики. - Сиб. матем. журнал, 1963, т. 4, № 2, с. 471-474.
3. Арнольд В.И. Доказательство теоремы А.Н.Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. - УМН, 1963, т. 18, № 5, с. 13-39.
4. Садов Ю.А. Переменные действие-угол в задаче Эйлера-Пуансо. - Препринт Ин. прикл. матем. им. М.В.Келдыша АН СССР, 1970, № 22.
5. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. - М.: Наука, 1977.
6. Садов Ю.А. Переменные действие-угол в задаче Эйлера-Пуансо. - ПММ, 1970, т. 34, № 5, с. 962-964.
7. Баркин Ю.В., Демин В.Г., Марков Ю.Г., Панкратов А.А. Переменные Пуассона, Андуайе и Шарлье в небесной механике и динамике твердого тела. - Сб. научно-методических работ по теоретической механике. Вып. 12, с. 92-100. - М.: Высшая школа, 1982.
8. Депри А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. - Механика, сб. переводов, 1968, № 2, с. 3-9.
9. Парс Л.А. Аналитическая динамика. - М.: Наука, 1971.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1963.

Приложение. Программа вычисления неполного эллиптического интеграла I рода с помощью преобразования Ландена

FUNCTION ELI1N(FI,K1)

C НЕПОЛНЫЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

C FI - АРГУМЕНТ, K1 - ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

REAL K1

N=FI/3.1415926535+0.5

FO=FI-3.1415926535*N

S=SIGN(1.,FO) \$ FO=ABS(FO)

I=1 \$ A=1. \$ B=K1

R=1. \$ P=1. \$ Q=0.

C=SIN(FO)

IF (C.NE.1.) GOTO 1

I=0 \$ GOTO 2

1 T=C/SQRT(1.-C*C)

2 IF (A-B-1.E-10) 9,3,3

3 C=A+B

IF (I.EQ.0) GOTO 8

D=A-B*T*T

IF (D) 5,4,6

4 I=0 \$ GOTO 7

5 Q=Q+P*R \$ P=-P \$ D=-D

6 T=C*T/D

7 R=R*0.5

8 B=SQRT(A*B) \$ A=C*0.5 \$ GOTO 2

9 CONTINUE

IF (I.NE.0) GOTO 10

D=1.5707963268 \$ GOTO 11

10 D=ATAN(T)

11 ELI1N=(N*3.1415926535+S*(Q*1.5707963268+P*R*D))/A

RETURN

END

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме:
и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша
АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form:
initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Adress: USSR, I25047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.

Садов Юрий Андреевич * Использование переменных действе-
-угол в задачах возмущенного движения твердого тела отно-
сительно центра масс. *

Редактор В.А. Сарычев.

Корректор В.В. Сазонов.

Подписано к печати 16.01.84 г. № Т - 00563. Заказ № 65.

Формат бумаги 60X90 1/16. Тираж 210 экз.

Объем 1,4 уч.-издл. Цена 10 коп.

055 (02)2



Отпечатано на роталпринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.