



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 124 за 1985 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Златоустов В.А., Шиповских Т.А.

**2 π -периодические решения
асимметричного уравнения
Дюффинга**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Златоустов В.А., Шиповских Т.А.
2 π -периодические решения асимметричного уравнения Дюффинга // Препринты ИПМ
им. М.В.Келдыша. 1985. № 124. 13 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1985-124>

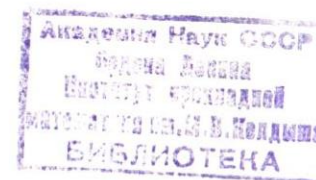
Препр. Златоустов В.А.
 3-67 Шиповских Т.А.
 2 π - периодические
 решения асимметрич-
 ного уравнения ДЮФ-
 ФИНГА. Препр. № 124 за
 I 6/12

1 8/12

ОРДЕНА ЛЕНИНА
 ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
 им. М. В. Келдыша
 АКАДЕМИИ НАУК СССР

В.А. Златоустов, Т.А. Шиповских

2 π -ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ АСИММЕТРИЧНОГО
 УРАВНЕНИЯ ДЮФИНГА



Златоустов Виктор Анатольевич, Шиповских Татьяна Анатольевна
 "2 π - периодические решения асимметричного уравнения ДЮФ-
 ФИНГА."

Редактор В.А. Сарычев.

Корректор Ю.А. Садов.

Подписано к печати 24.07.85 г. № Т - 16400. Заказ № 304.
 Формат бумаги 60x90 1/16. Тираж 196 экз.

Объем 1,2 уч.-издл. Цена 9 коп.

Отпечатано на ротационных в Институте прикладной математики АН СССР

Москва, Миусская пл. 4.

Москва 1985г.

АННОТАЦИЯ

В работе проведено исследование асимметричного уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} + \mu(x + bx^2 + ax^5) = e \cos \nu t.$$

Методом малого параметра Пуанкаре найдены 2π -периодические решения данного уравнения при $e \ll 1$. При произвольных значениях параметра e 2π -периодические решения найдены в результате численного решения однопараметрической краевой задачи.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
I. Метод разложения по малому параметру	4
I.1. Нерезонансный случай	4
I.2. Резонансный случай	6
2. Результаты численного построения 2π -периодических решений уравнения (0.1)	7
Л и т е р а т у р а	11

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуются 2π -периодические решения асимметричного уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} + \mu(x + \beta x^2 + \alpha x^3) = e \cos \nu t \quad (0.1)$$

при произвольных значениях определяющих параметров μ, β, α, e .

В разделе I данной работы найдены 2π -периодические решения уравнения (0.1) при $e \ll 1$ в нерезонансном случае в виде разложения по целым степеням параметра e / I / (разд. I.1), а также в резонансном случае в виде разложения по дробным степеням параметра e (разд. I.2).

В разделе 2 приведены результаты численного нахождения четных 2π -периодических решений уравнения (0.1) при $\nu = 1$, $\beta = 1$ в результате решения краевой задачи

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0. \quad (0.2)$$

Исследование порождающих $2\pi m/n$ -периодических решений при $m=1$ проведено в работе / 2 /, где найдено общее решение уравнения (0.1) при $e=0$ в эллиптических функциях Якоби, выделены классы порождающих решений, найдены точки бифуркации для каждого класса порождающих решений, сформулирована краевая задача (0.2).

Необходимо отметить, что обозначения для решений при $e \neq 0$, найденных в результате решения краевой задачи (0.1), (0.2), совпадают с обозначениями для соответствующих порождающих решений / 2 /. Устойчивость найденных 2π -периодических решений исследовалась в линейном приближении. В некоторых случаях было обнаружено существование 2π -периодических решений уравнения (0.1), не имеющих порождающих решений при $e=0$. Существование этих решений обусловлено нелинейными свойствами уравнения (0.1).

Авторы выражают благодарность В.А.Саричеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

I. Метод разложения по малому параметру

I.1. Нерезонансный случай

Будем искать 2π -периодическое решение уравнения (0.1) при $e \ll 1$ в окрестности произвольного стационарного решения однородного уравнения

$$\ddot{x} + \mu(x + \beta x^2 + \alpha x^3) = 0 \quad (I.1)$$

с помощью метода Пуанкаре / I,4 / в виде

$$x = x_0 + e x_1 + e^2 x_2 + e^3 x_3 + \dots \quad (I.2)$$

Подставляя (I.2) в уравнение (0.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях e , получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + F(x_0) &= 0; \\ \ddot{x}_1 + F'(x_0)x_1 &= \cos \nu t; \\ \ddot{x}_2 + F'(x_0)x_2 &= -F''(x_0)x_1^2/2; \\ \ddot{x}_3 + F'(x_0)x_3 &= -F''(x_0)x_1x_2 - \beta x_1^3; \\ \ddot{x}_4 + F'(x_0)x_4 &= -F''(x_0)x_1x_3 - F''(x_0)x_2^2/2 - 3\beta x_1^2x_2; \\ \ddot{x}_5 + F'(x_0)x_5 &= -F''(x_0)(x_1x_4 + x_2x_3) - 3\beta(x_1^2x_3 - x_1x_2^2); \end{aligned} \quad (I.3)$$

где $F(x_0) = \mu x_0 + \alpha x_0^2 + \beta x_0^3$, $F'(x_0) = \mu + 2\alpha x_0 + 3\beta x_0^2$,
 $F''(x_0) = 2\alpha + 6\beta x_0$, $\alpha = \mu\beta$, $\beta = \mu\alpha$.

Решая последовательно систему дифференциальных уравнений (I.3), найдем 2π -периодическое решение в виде

$$\begin{aligned} x = & \frac{e \cos \nu t}{F(x_0) - \nu^2} - e^2 \frac{[F'(x_0)(F'(x_0) - 4\nu^2) + F(x_0)F''(x_0) \cos 2\nu t]}{4F'(x_0)(F'(x_0) - \nu^2)(F'(x_0) - 4\nu^2)} + (e^3 \cos \nu t) \times \\ & \times \left\{ \frac{(F''(x_0))^2 [8(F'(x_0) - 4\nu^2) + F(x_0)] - 24\beta F'(x_0)(F'(x_0) - 4\nu^2)}{32F'(x_0)(F'(x_0) - \nu^2)^4 (F'(x_0) - 4\nu^2)} \right\} - \\ & - e^3 \frac{F''(x_0)^2 - 2\beta(F'(x_0) - 4\nu^2)}{8(F'(x_0) - \nu^2)^3 (F'(x_0) - 4\nu^2)(F'(x_0) - 9\nu^2)} \cos 3\nu t. \end{aligned} \quad (I.4)$$

В окрестности нулевого стационарного решения уравнения (I.1) разложение (I.4) имеет вид

$$x = \frac{e \cos \nu t}{\mu - \nu^2} - e^2 \frac{8[(\mu - 4\nu^2) + 2\mu \cos 2\nu t]}{(\mu - \nu^2)(\mu - 4\nu^2)} + e^3 \left\{ \frac{\mu^2 [8(\mu - 4\nu^2) + \mu]}{8(\mu - \nu^2)^4} - \right. \quad (I.5)$$

$$\left. - \frac{6\mu\alpha(\mu - 4\nu^2)}{(\mu - 4\nu^2)} \cos \nu t + \frac{2\mu^2\beta^2 - \mu\alpha(\mu - 4\nu^2) \cos 3\nu t}{4(\mu - \nu^2)^3 (\mu - 4\nu^2)(\mu - 9\nu^2)} \right\} + O(e^4).$$

Формула (I.5) описывает решение в окрестности нуля при любых значениях параметров α и β .

Уравнение (0.1) имеет стационарное решение $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $\dot{x}_0 = 0$ при $2 = b^2 - 4a = 0$. Система для определения коэффициентов

x_1, x_2, x_3, x_4 в разложении (I.2) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 &= \cos \nu t, \\ \ddot{x}_2 &= \alpha x_1^2, \\ \ddot{x}_3 &= \alpha x_1 x_2 - \beta x_1^3, \\ \ddot{x}_4 &= \alpha x_1 x_3 + \alpha x_2^2/2 - 3\beta x_1^2 x_2, \\ \ddot{x}_5 &= \alpha(x_1 x_4 + x_2 x_3) - 3\beta(x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2).\end{aligned}\quad (\text{I.6})$$

Из (I.6) получаем

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}, \quad x_1 = -\frac{\cos \nu t}{\nu^2}, \quad x_2 = \frac{\alpha}{2\nu^4} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{\cos 2\nu t}{4\nu^2} \right). \quad (\text{I.7})$$

Выражение для x_2 содержит вековой член и, следовательно, искомое решение не является периодическим. Таким образом, решение $x_0 = -\beta/2\alpha$, $\dot{x}_0 = 0$, которому на фазовой плоскости соответствует точка возврата / 2 /, не является продолжаемым в область $e > 0$.

Необходимо отметить, что условия $F'(x_0) = \nu^2$, $F'(x_0) = 4\nu^2$, $F'(x_0) = 9\nu^2$, (I.8) при которых знаменатели в разложении (I.4) равны нулю, являются условиями резонансов, а также определяют точки бифуркации периодических решений. Причем условие главного резонанса имеет вид $F'(x_0) = \nu^2$.

I.2. Резонансный случай

Вблизи главного резонанса ($F'(x_0) = \nu^2$) периодические решения уравнения (0.1) находятся в виде разложения по дробным степеням параметра e :

$$x = x_0 + x_1 e^{1/3} + x_2 e^{2/3} + x_3 e + \dots \quad (\text{I.9})$$

Система для определения $x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$ имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + F(x_0) &= 0, \\ \ddot{x}_1 + F'(x_0)x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + F'(x_0)x_2 &= -F''(x_0)x_1^2/2, \\ \ddot{x}_3 + F'(x_0)x_3 &= -F''(x_0)x_1x_2 - \beta x_1^3 + \cos \nu t, \\ \ddot{x}_4 + F'(x_0)x_4 &= -F''(x_0)x_1x_3 - F''(x_0)x_2^2/2 - 3\beta x_1^2x_2, \\ \ddot{x}_5 + F'(x_0)x_5 &= -F''(x_0)(x_1x_4 + x_2x_3) - 3\beta(x_1^2x_3 + x_1x_2^2).\end{aligned}\quad (\text{I.10})$$

Находим решения x_0, x_1, x_2 системы (I.10) и, подставляя их в (I.9), получаем разложение в резонансном случае

$$x = x_0 + e^{1/3} \sqrt[3]{\frac{24\nu^2}{18\beta\nu^2 - 5(F''(x_0))^2} \cos^3 \nu t} + e^{2/3} \left[\frac{F''(x_0) \cos 2\nu t - 3F''(x_0)}{12\nu^2} \right] x + \dots \quad (\text{I.11})$$

$$+ \left[\frac{24\nu^2}{18\beta\nu^2 - 5(F''(x_0))^2} \right]^{2/3} + O(e),$$

$$\text{где } x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2 - 4\alpha^2}{2\alpha}}, \quad F'(x_0) = 2\alpha + 6\beta x_0, \quad \alpha = \mu\beta, \quad \beta = \mu\alpha.$$

2. Результаты численного построения 2π -периодических решений уравнения (0.1)

В работе / 2 / введено следующее разбиение плоскости на области (рис.1)

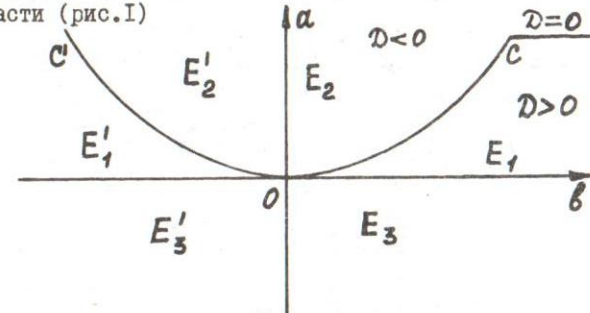


Рис.1

В работе / 2 / также показано, что достаточно решить краевую задачу (0.1), (0.2) при $\nu = 1$, $\beta = 1$.

Численное решение краевой задачи (0.1), (0.2) проводилось при следующих значениях определяющих параметров: в области E_1 при $\nu = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 1/5$, $|\mu| < 10$ в области E_2 при $\nu = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$, $-2 < \mu < 10$; в области E_3 при $\nu = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = -1$, $|\mu| < 15$; на кривой OC при $\nu = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 1/4$, $|\mu| < 17$.

Порождающие решения в областях E_i ($i = 1, 2, 3$) и на кривой OC изображены на рис.2-5. Решения при произвольных значениях e будем обозначать аналогично соответствующим порождающим решениям. Зависимость $x(0)$ от e для найденных 2π -периодических решений уравнения (0.1) при $e \neq 0$ представлена на рис.6-55. Участки изолиний, удовлетворяющих условию устойчивости $|A| < 1$ [3], обозначены штриховкой.

Решения $x_z(t, e)$, $x_0(t, e)$, $x_{n/1}^{(z)}(t, e)$ ($n=1, 2, 3$; $z=0, 1$) представлены на рис. 6–10. При $0 < \mu \leq 1$ решение $x_0(t, e)$ сливается с решением $x_z(t, e)$ вдоль бифуркационной кривой (рис. 6). Точки бифуркации для решений $x_{n/1}^{(z)}$ имеют вид $\mu = n^2 / 2$ ($n=1, 2, 3$) / 2 /. В точках бифуркации возникают решения $x_{n/1}^{(z)}$ ($n=1, 2, 3$; $z=0, 1$) (рис. 2). При $\mu > 1$ решение $x_{1/1}^{(0)}(t, e)$ сливается с решением $x_0(t, e)$. Решение $x_{1/1}^{(1)}(t, e)$ сливается с решением $x_z(t, e)$ при $1 < \mu \leq 4$ и с решением $x_{2/1}^{(1)}(t, e)$ при $\mu > 4$ (рис. 7). Решение $x_z(t, e)$ сливается с решением $x_{2/1}^{(0)}(t, e)$ при $4 < \mu \leq 9$, а при $\mu > 9$ решение $x_{2/1}^{(0)}$ сливается с решением $x_{3/1}^{(0)}(t, e)$ (рис. 8). Решения $x_{1/1}^{(0)}(t, e)$, $x_{2/1}^{(0)}(t, e)$ сливаются при $\mu > 4$ (рис. 9). На рис. 10 представлены решения $x_{3/1}^{(1)}(t, e)$ и $x_z(t, e)$ при $\mu > 9$. Они сливаются вдоль бифуркационной кривой, обозначенной штрихованной линией, которая проходит через точки изолиний, где касательные к изолиниям вертикальны.

Решения $\alpha_0(t, e)$, $\beta_{1/1}^{(0)}(t, e)$, $\alpha_{n/1}^{(z)}(t, e)$ ($n=1, 2, 3$; $z=0, 1$) представлены на рис. 11–14. Точки бифуркации для решений $\alpha_{n/1}^{(z)}$ имеют вид $\mu = n^2 / z_2(2z_2\alpha + \beta) \approx 0.62n^2$, где $z_2 = -\beta / 2\alpha - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha^2} / 2\alpha \approx -3.618$, ($\alpha = 1/5$, $\beta = 1$) / 2 /. При $0 < \mu < 1 / z_2(2z_2\alpha + \beta)$ сливаются решения $\alpha_0(t, e)$ и $\beta_{1/1}^{(0)}(t, e)$, а при $\mu > 1 / z_2(2z_2\alpha + \beta)$ решения $\beta_{1/1}^{(0)}(t, e)$ сливаются с решением $\alpha_{1/1}^{(0)}$ вдоль бифуркационной кривой (рис. 11). Решение $\alpha_0(t, e)$ сливается с решением $\alpha_{1/1}^{(1)}(t, e)$ при $1 / z_2(2z_2\alpha + \beta) < \mu \leq 4 / z_2(2z_2\alpha + \beta)$ (рис. 12), с решением $\alpha_{2/1}^{(1)}(t, e)$ при $4 / z_2(2z_2\alpha + \beta) < \mu \leq 9 / z_2(2z_2\alpha + \beta)$ (рис. 13), с решением $\alpha_{3/1}^{(1)}(t, e)$ при $9 / z_2(2z_2\alpha + \beta) < \mu < 10$ (рис. 14).

Решение $\alpha_{2/1}^{(0)}(t, e)$ во всей области существования сливается с решением $\alpha_{1/1}^{(1)}(t, e)$ (рис. 12), а решение $\alpha_{3/1}^{(0)}(t, e)$ — с решением $\alpha_{2/1}^{(1)}(t, e)$ (рис. 13).

Решения $\beta_{1/1}^{(1)}(t, e)$, $\beta_{2/1}^{(1)}(t, e)$ ($z=0, 1$), $\beta_{3/1}^{(1)}(t, e)$ представлены на рис. 15, 16. Решение $\beta_{2/1}^{(0)}(t, e)$ сливается с решением $\beta_{1/1}^{(1)}(t, e)$ (рис. 15), а решение $\beta_{2/1}^{(1)}(t, e)$ — с решением $\beta_{3/1}^{(1)}(t, e)$ (рис. 16). Все перечисленные решения представляют интерес в связи с тем, что внутри области их существования возникают новые решения, не имеющие аналогов в классе порождающих решений. Рассмотрим, например, изолинию $\mu = 0.33$ (рис. 15). Новые решения возникают на участке (P_1, P_3) изолинии $\mu = 0.33$. В точке P_1 ($e = 13.8$, $\mu = 0.33$) возникает новое решение, которое является устойчивым. В точке P_2 ($e = 9.5$,

$\mu = 0.33$) это решение сливается со вторым новым решением, являющимся неустойчивым. Возникновение новых решений обусловлено нелинейными свойствами уравнения (0.1).

Решения $x_z(t, e)$, $x_0(t, e)$, $\alpha_0(t, e)$, $\delta_{n/1}^{(z)}(t, e)$ ($n=1, 2, 3$; $z=0, 1$) представлены на рис. 17–21. Точки бифуркации для решений $\delta_{n/1}^{(z)}$ ($n=1, 2, 3$; $z=0, 1$) имеют вид $\mu = n^2 / z_1(2z_1\alpha + \beta) \approx -1.66n^2$, где $z_1 = -\beta / 2\alpha + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha^2} / 2\alpha \approx -1.38$, $\alpha = 1/5$, $\beta = 1$ / 2 /. Решение $x_z(t, e)$ сливается с решением $\delta_{1/1}^{(0)}(t, e)$ при $\mu > 1 / z_1(2z_1\alpha + \beta)$ (рис. 17, 18). Решение $\delta_{1/1}^{(1)}(t, e)$ сливается с решением $x_0(t, e)$ при $4 / (2z_1\alpha + \beta) \times x_1 \leq \mu < 1 / z_1(2z_1\alpha + \beta)$ и с решением $\delta_{2/1}^{(0)}(t, e)$ при $\mu < 4 / z_1(2z_1\alpha + \beta)$ (рис. 17). Решение $\delta_{2/1}^{(1)}(t, e)$ в диапазоне $9 / z_1(2z_1\alpha + \beta) \leq \mu < 4 / z_1(2z_1\alpha + \beta)$ сливается с решением $x_0(t, e)$, а при $\mu < 9 / z_1(2z_1\alpha + \beta)$ — с решением $\delta_{3/1}^{(0)}(t, e)$ (рис. 19). На рис. 20 представлены решения $\delta_0(t, e)$ и $\delta_{3/1}^{(1)}(t, e)$, сливающиеся при $-18 < \mu < 9 / z_1(2z_1\alpha + \beta)$. Решение $\alpha_0(t, e)$ при различных значениях μ представлено на рис. 21. Соответствующее ему порождающее решение α_0 (рис. 2) является изолированным порождающим решением, поэтому в данном случае не наблюдается слияние решения $\alpha_0(t, e)$ с каким-либо другим решением.

Решения $\delta_0(t, e)$, $\delta_{n/1}^{(z)}(t, e)$ ($n=1, 2, 3$; $z=0, 1$), $\xi_{n/1}^{(z)}(t, e)$ представлены на рис. 22–28. Точки бифуркации для решений $\delta_{n/1}^{(z)}$ (рис. 3) имеют вид $\mu = n^2 / 2$ /. Слияние перечисленных решений между собой аналогично слиянию решений $x_z(t, e)$, $x_{n/1}^{(z)}(t, e)$ ($n=1, 2, 3$; $z=0, 1$), $x_0(t, e)$. Решение $\delta_0(t, e)$ при произвольных значениях $\mu < 0$ представлено на рис. 28. Здесь краевая задача (0.1), (0.2) имеет единственное решение.

Решения $\varphi_{1/1}^{(1)}(t, e)$, $\xi_{2/1}^{(0)}(t, e)$ представлены на рис. 27. Внутри области существования этих решений есть диапазон, в котором краевая задача (0.1), (0.2) имеет четыре решения. На изолинии $\mu = 0.4$ два новых решения являются устойчивыми и сливаются между собой и с решениями $\xi_{n/1}^{(0)}(t, e)$ ($n=1, 2$) в точках Φ_1 ($e = 10.1$, $\mu = 0.4$) и Φ_2 ($e = 8.9$, $\mu = 0.4$).

Решение $\alpha_0(t, e)$ при различных значениях $0 < \mu < 16$ сливается с разными решениями $x_{n/1}^{(z)}$ ($n=1, 2, 3$; $z=0, 1$) (рис. 31–37). При $\mu < 0$ решение $\alpha_0(t, e)$ является единственным ре-

шением краевой задачи (0.1), (0.2) (рис.40).

Решения $x_{n/1}^{(1)}(t, e), x_{n/1}^{(2)}(t, e)$ ($n = 1, 2, 3; \tau = 0, 1$) при малых значениях параметра μ представлены на рис.29, 30, 38, 39. Внутри области существования этих решений есть диапазоны существования новых решений, не имеющих порождающих при $e = 0$. Рассмотрим, например, изолинию $\mu = 0.14$ (рис.29). В точке G_1 ($e = 8.7, \mu = 0.14$) возникает новое решение, которое является устойчивым. В точке G_2 оно сливается со вторым новым решением, являющимся неустойчивым. В точках G_1 и G_3 новые решения сливаются с решениями $x_{n/1}^{(1)}(t, e), x_{n/1}^{(2)}(t, e)$.

Решения $\theta_0(t, e), \eta_0(t, e), \theta_{n/1}^{(1)}(t, e)$ ($n = 1, 2, 3; \tau = 0, 1$) представлены на рис.41, 42, 44, 45. Слияние решений из класса $\theta_{n/1}^{(1)}(t, e)$ с решениями $\theta_0(t, e), \eta_0(t, e)$ аналогично слиянию между собой решений $\eta_0(t, e), x_2(t, e), x_{n/1}^{(1)}(t, e)$, которое было описано выше.

Решение $\theta_0(t, e)$ при $\mu > 0$ представлено на рис.43. Представляет интерес изолиния $\mu = 1$. Здесь наблюдается появление новых решений. Новые решения сливаются между собой в точке K_2 ($\mu = 1, e = 1.7$), а с решением $\theta_0(t, e)$ в точках K_1 и K_3 ($e = 1.92; \mu = 1$).

Решения $\theta_0(t, e), \theta_{n/1}^{(1)}(t, e), \theta_{n/1}^{(2)}(t, e)$ ($n = 2, 3; \tau = 0, 1$) представлены на рис.46-48. Эти решения сливаются между собой аналогично решениям $x_2(t, e), x_{n/1}^{(1)}(t, e), x_{n/1}^{(2)}(t, e)$ ($n = 2, 3; \tau = 0, 1$).

Решения $\theta_0(t, e), \eta_0(t, e), \eta_{n/1}^{(1)}(t, e)$ ($n = 1, 2, 3; \tau = 0, 1$) (рис.49-52) сливаются попарно так же, как и решения $x_2(t, e), \eta_0(t, e), \eta_{n/1}^{(1)}(t, e)$ ($n = 1, 2, 3; \tau = 0, 1$), которые были подробно описаны выше.

Решение $\psi_{1/1}^{(1)}(t, e)$ при $-0.252 < \mu < 0$ сливается с решением $\theta_0(t, e)$, а при $\mu < -0.252$ с решением $\theta_{1/1}^{(1)}(t, e)$ (рис.53).

Решения $\psi_{1/1}^{(1)}(t, e), \psi_{2/1}^{(1)}(t, e), \psi_{2/1}^{(2)}(t, e)$ ($\tau = 0, 1$) представлены на рис.54-55. Здесь также появляются новые решения, не имеющие порождающих. Видно, что эти решения устойчивы в случае ветвления решений $\psi_{2/1}^{(1)}(t, e)$ и $\psi_{1/1}^{(1)}(t, e)$ (рис.54) и неустойчивы в случае ветвления решений $\psi_{3/1}^{(1)}(t, e), \psi_{2/1}^{(2)}(t, e)$ (рис.55). Диапазон существования новых решений уменьшается по мере возрастания параметра μ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва, 1956г.
2. Златоустов В.А., Шиповских Т.А. 2π -периодические решения асимметричного уравнения Дюффинга при малых значениях амплитуды вынуждающей силы. Препринт ИПМ № 1985г.
3. Златоустов В.А., Шиповских Т.А. Вынужденные 2π -периодические колебания системы с несимметричной восстанавливающей силой. Препринт ИПМ № 124, 1984г.
4. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. Москва, 1969г.

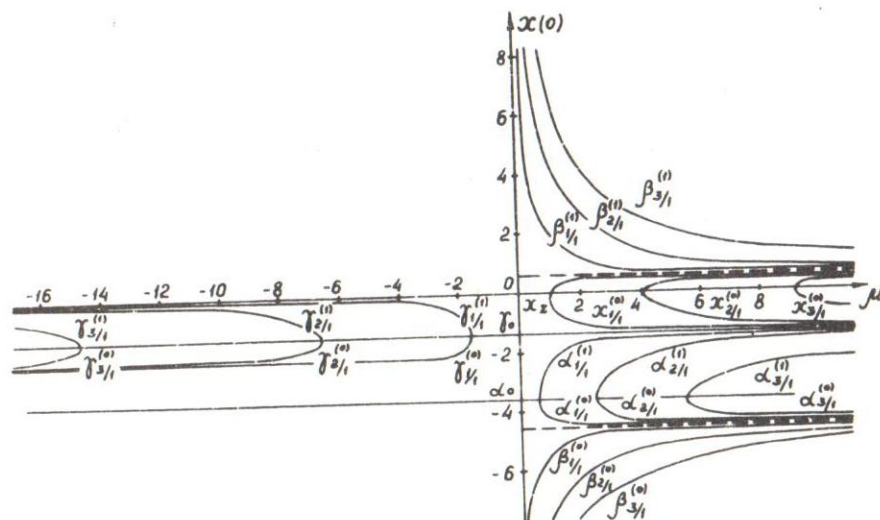


Рис. 2

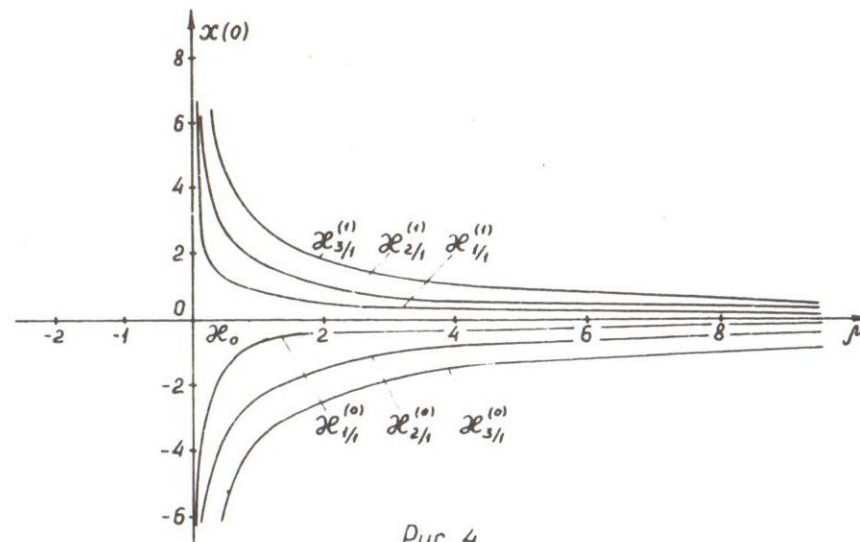


Рис. 4

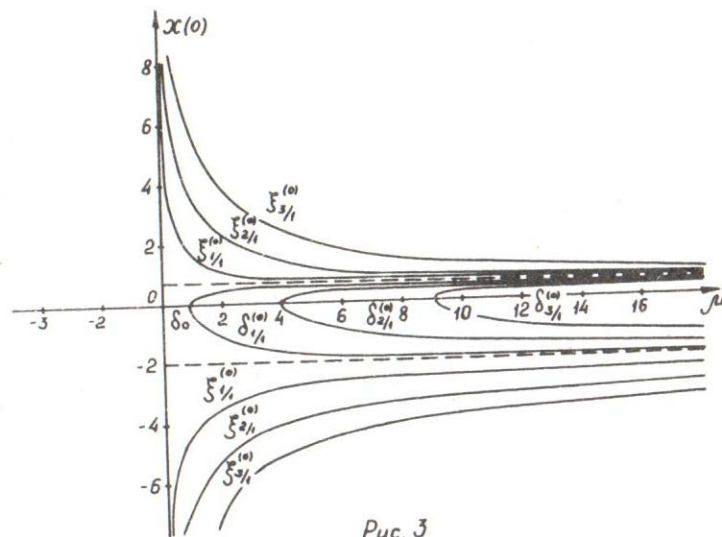


Рис. 3

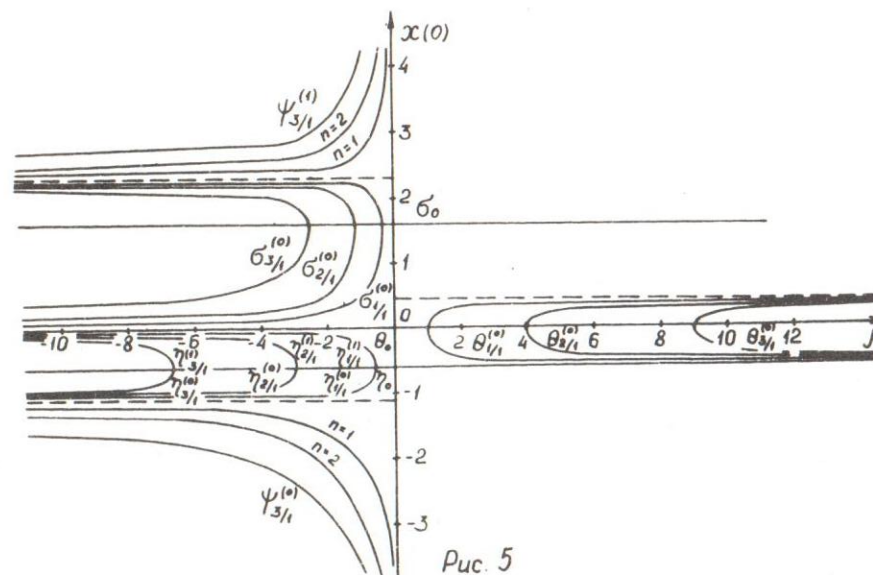
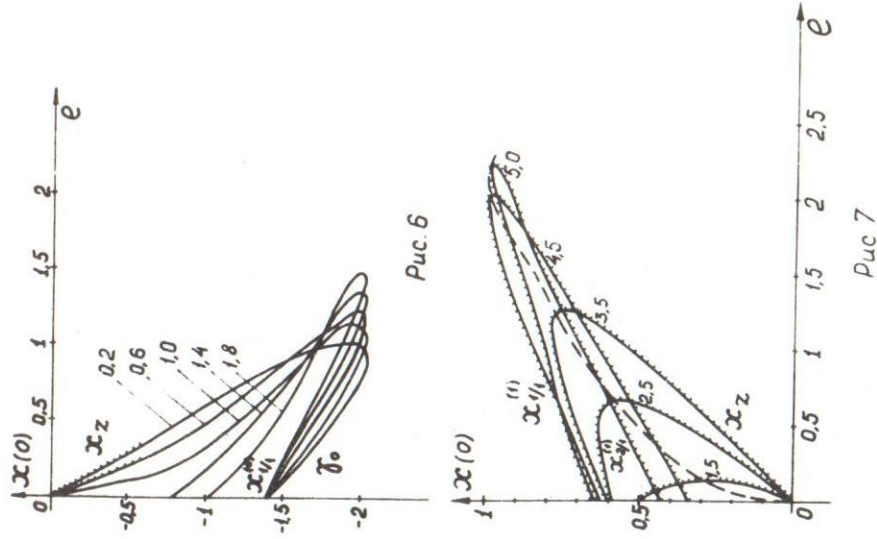
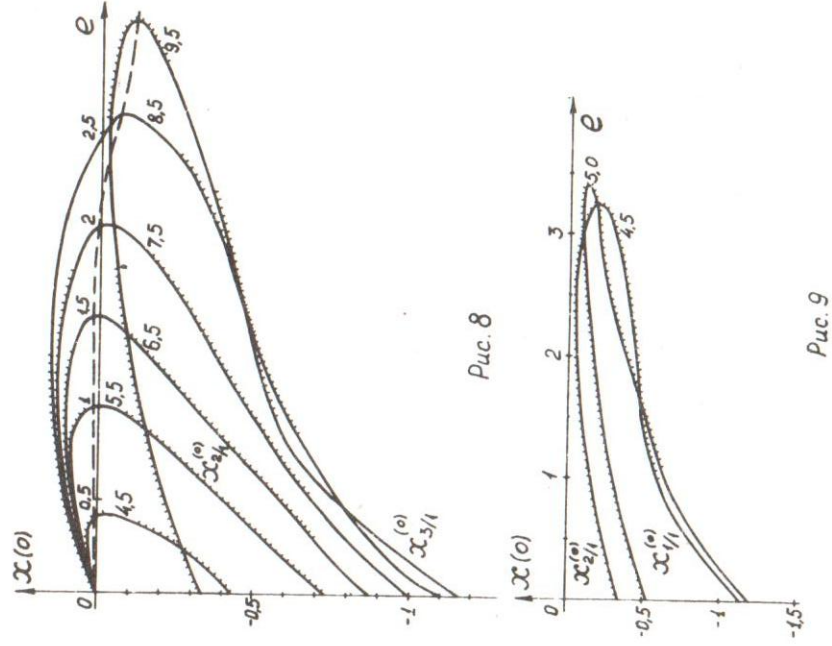


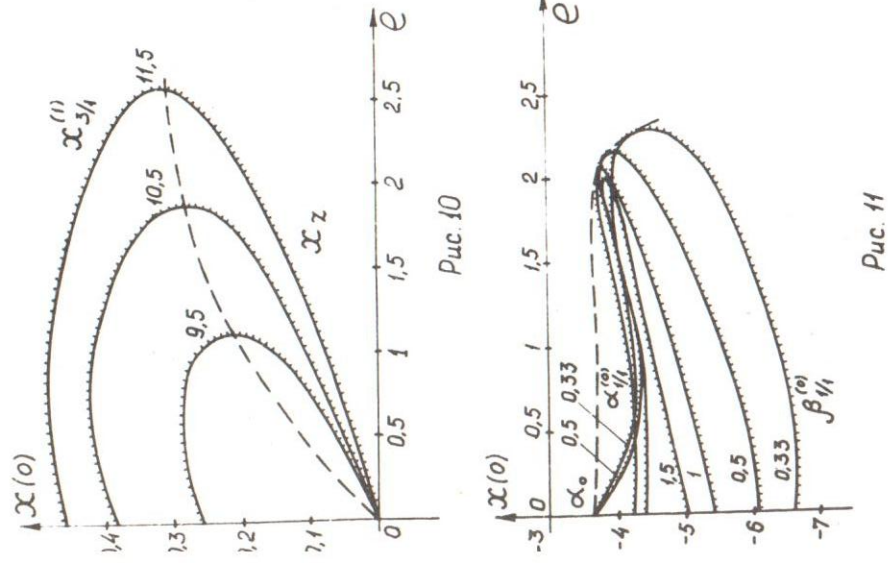
Рис. 5



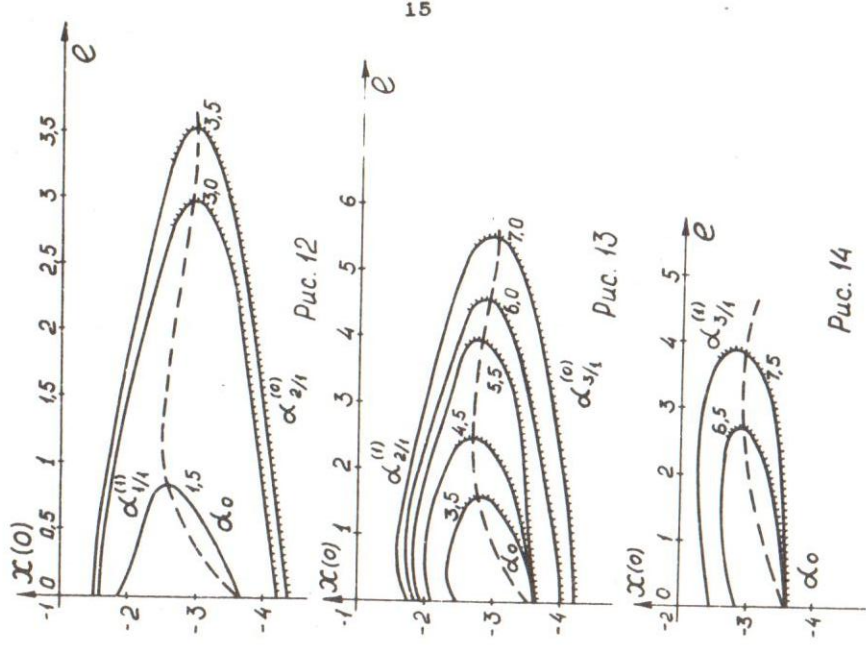
14



Puc. 9

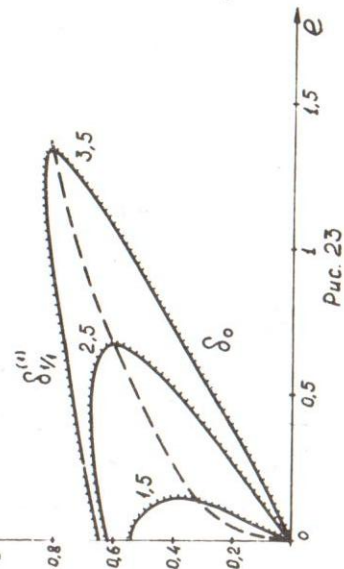
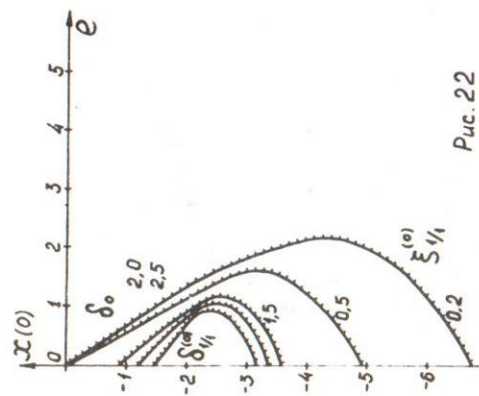
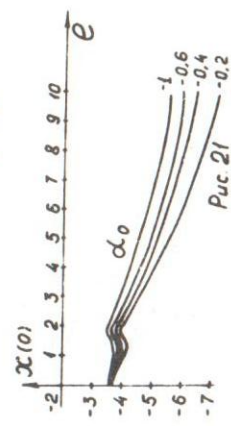
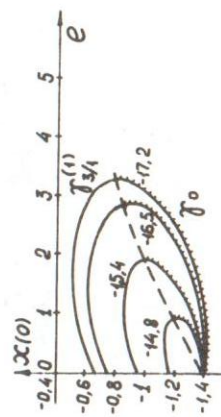
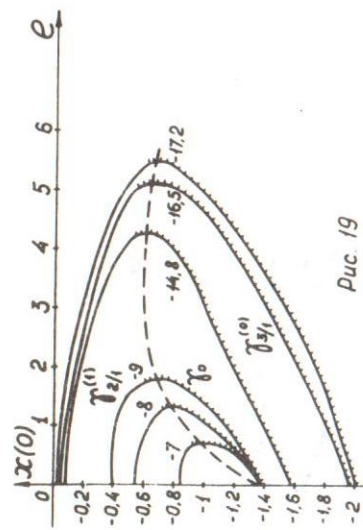
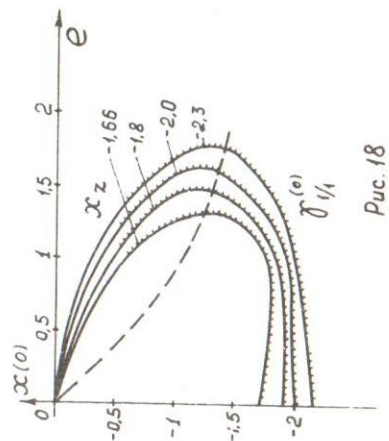
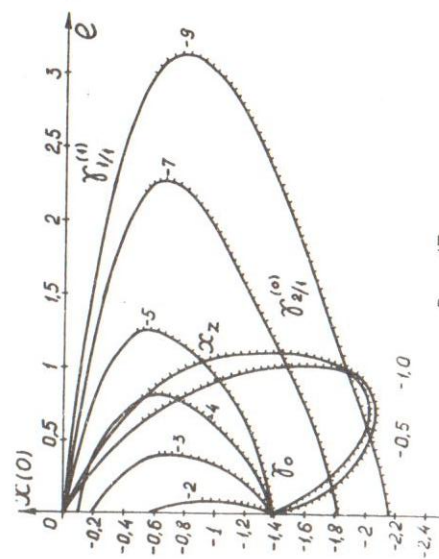
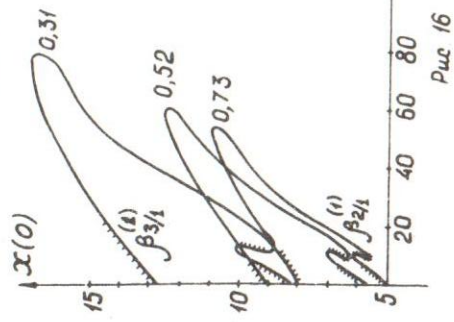
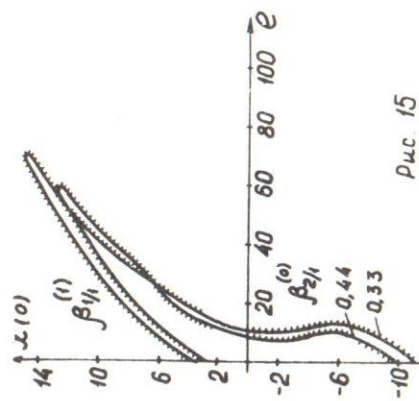


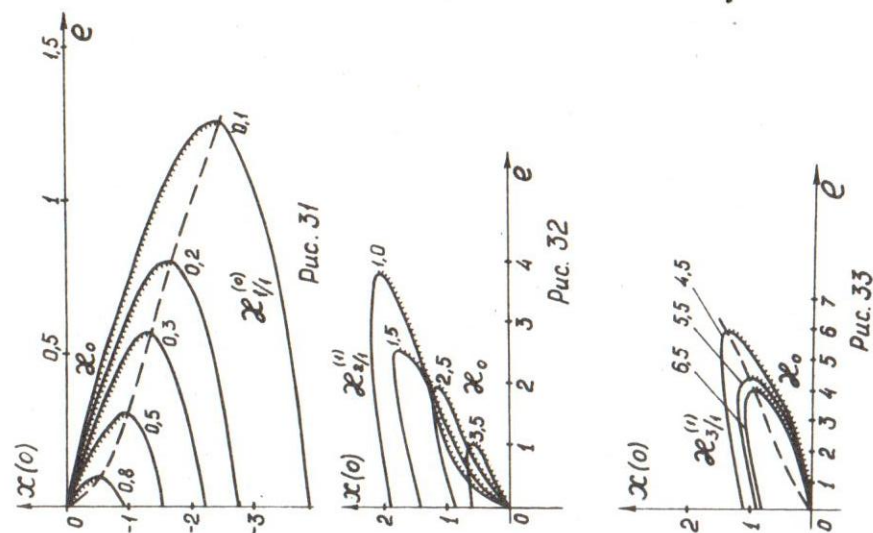
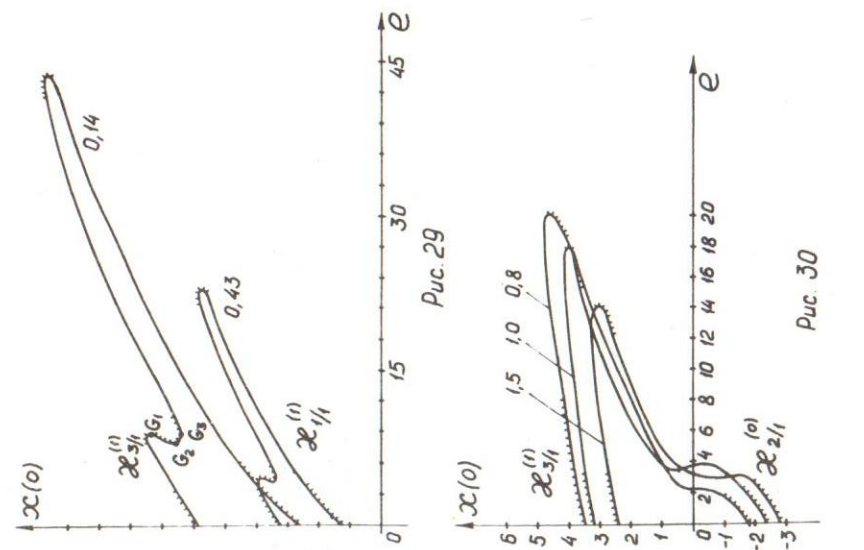
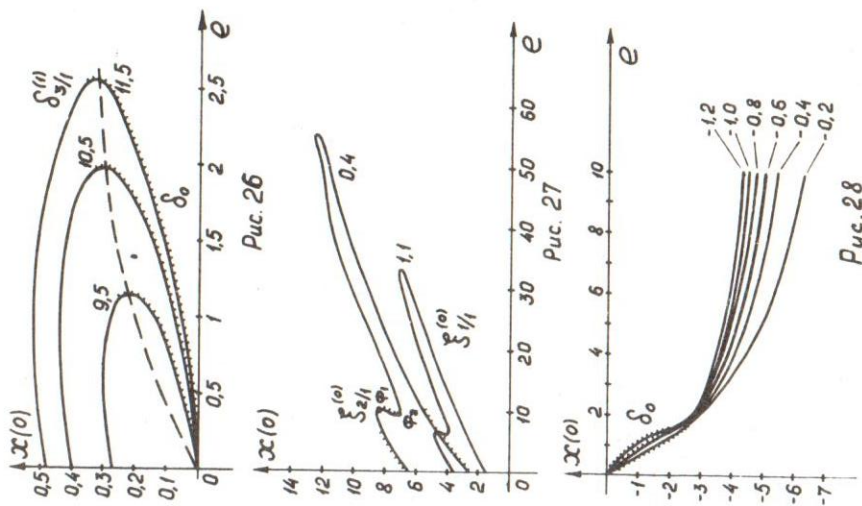
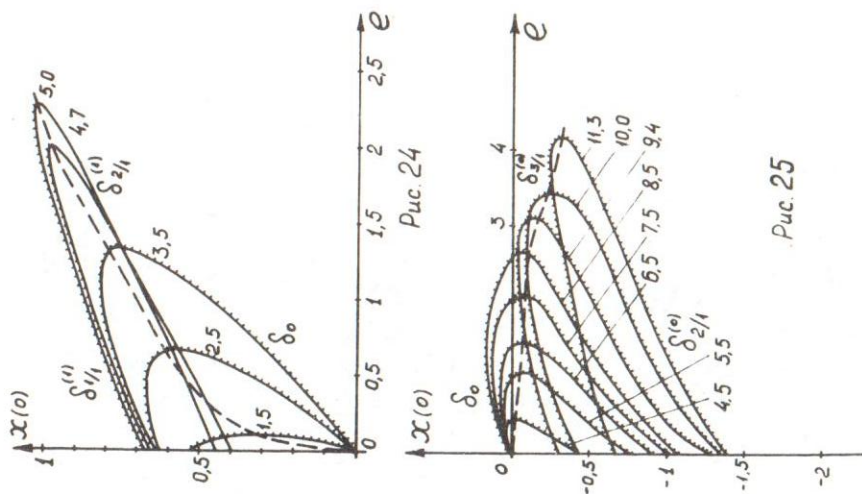
Puc. 10

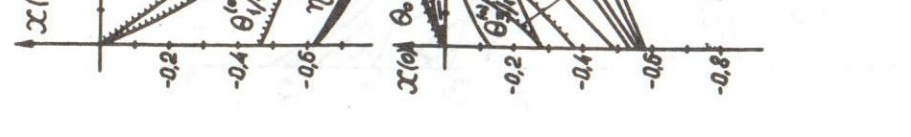
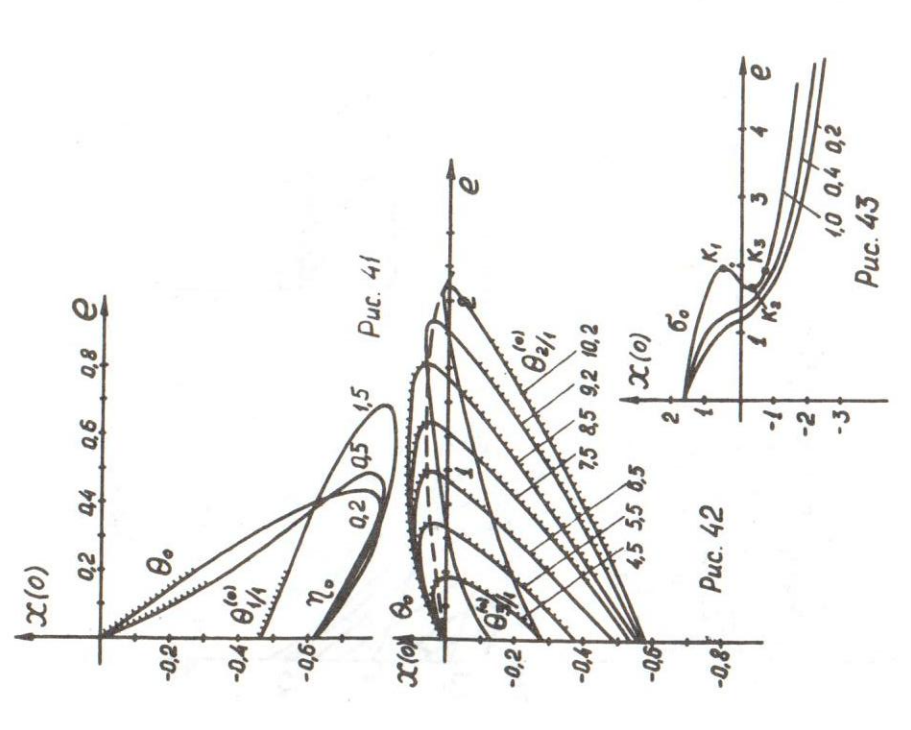
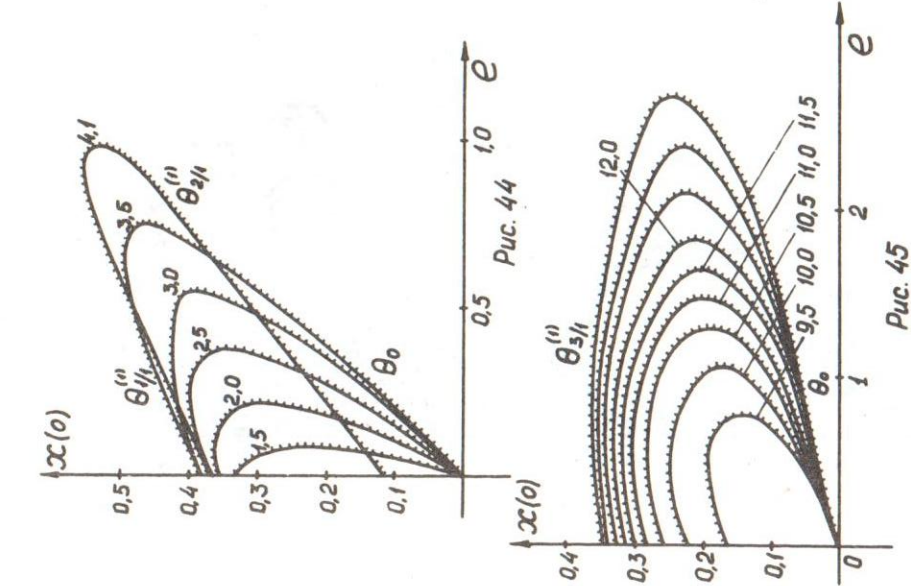
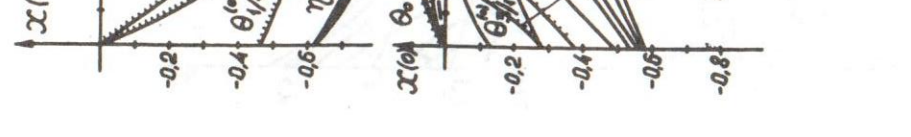
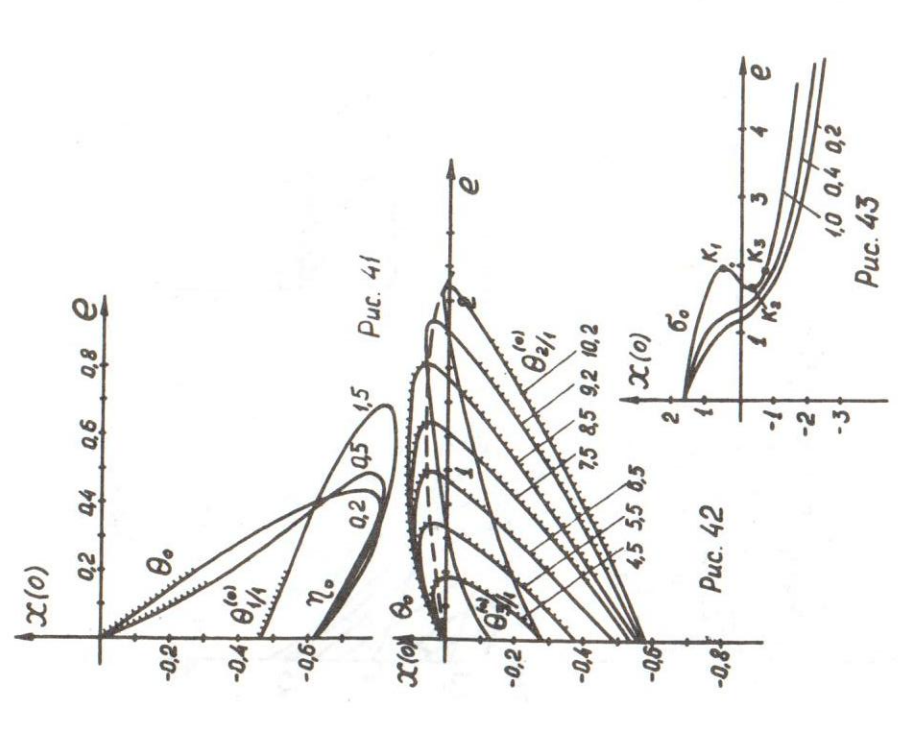
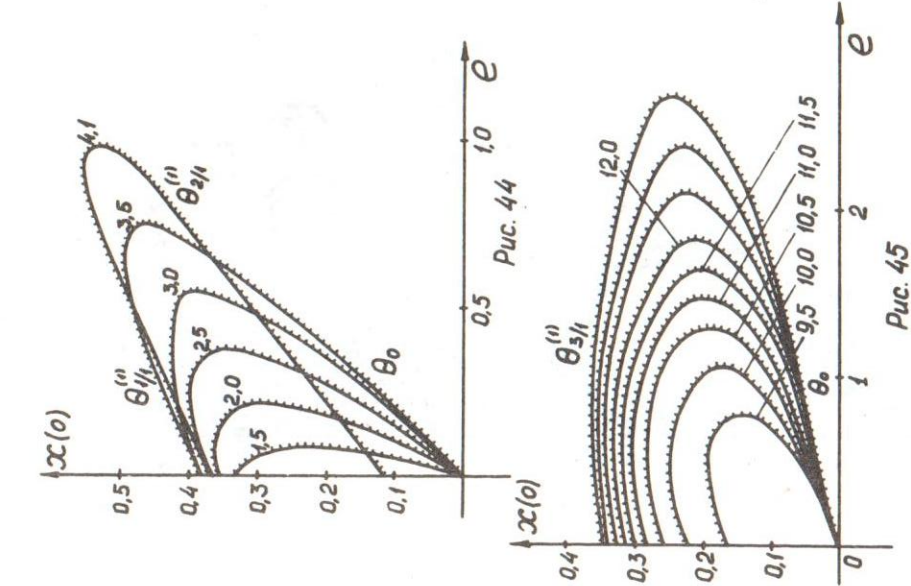
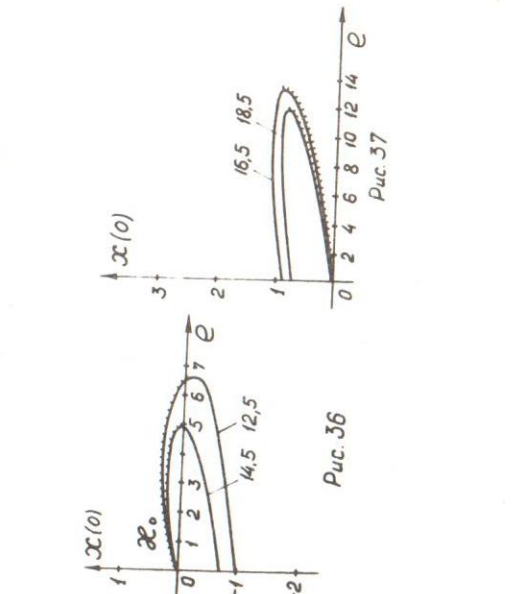
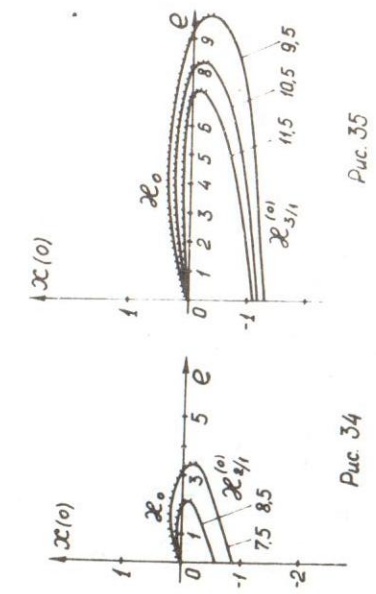
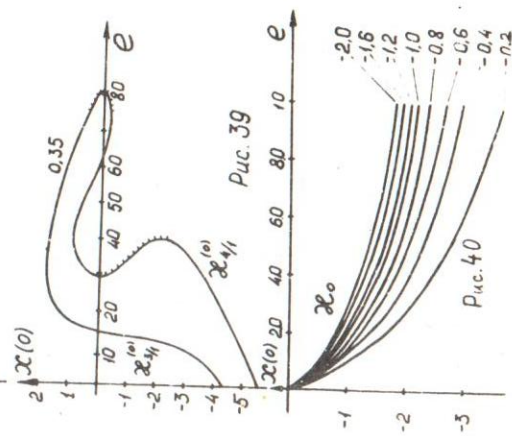
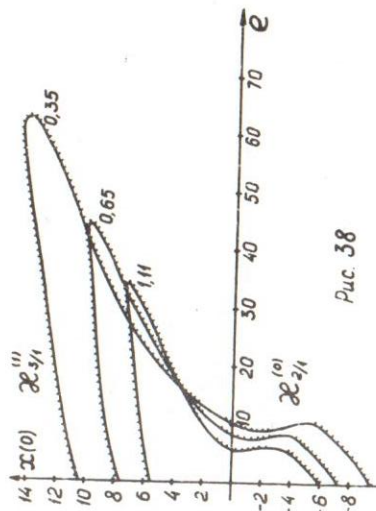


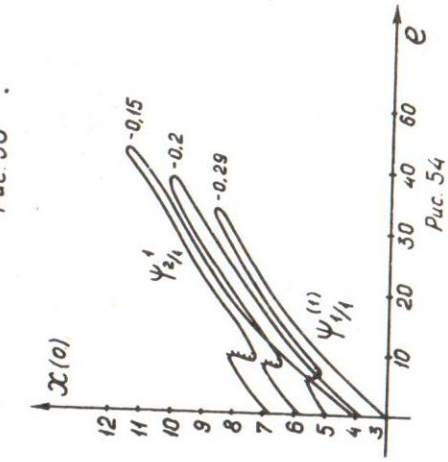
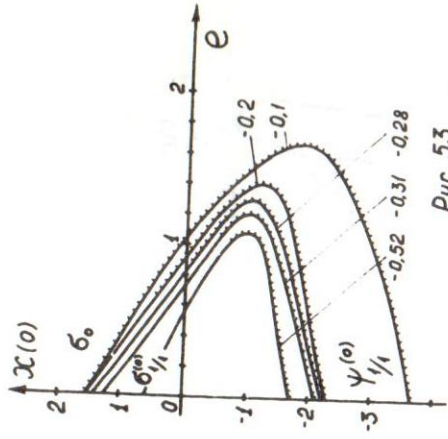
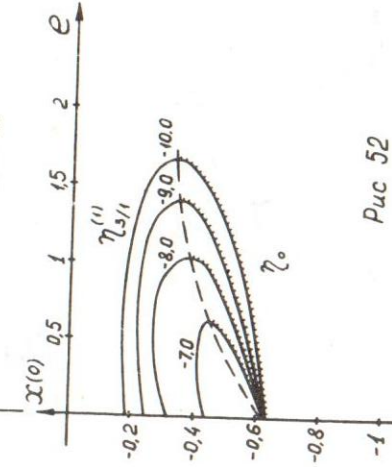
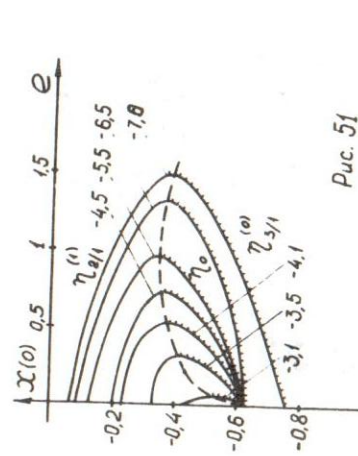
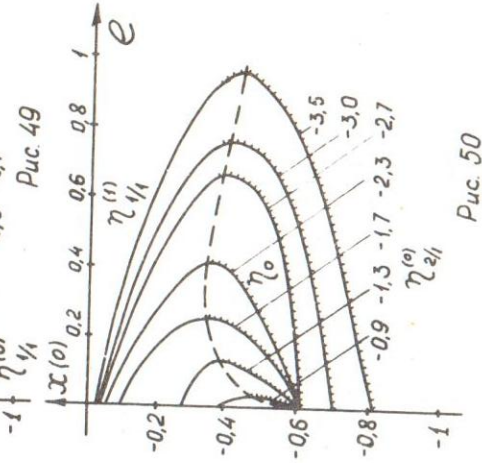
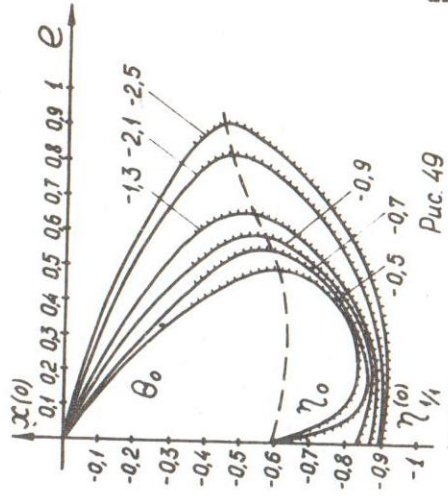
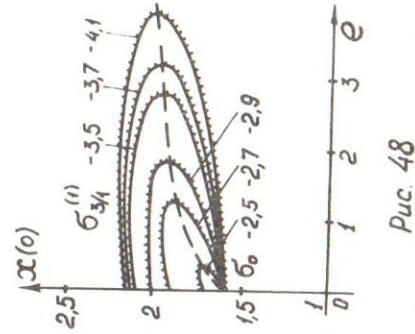
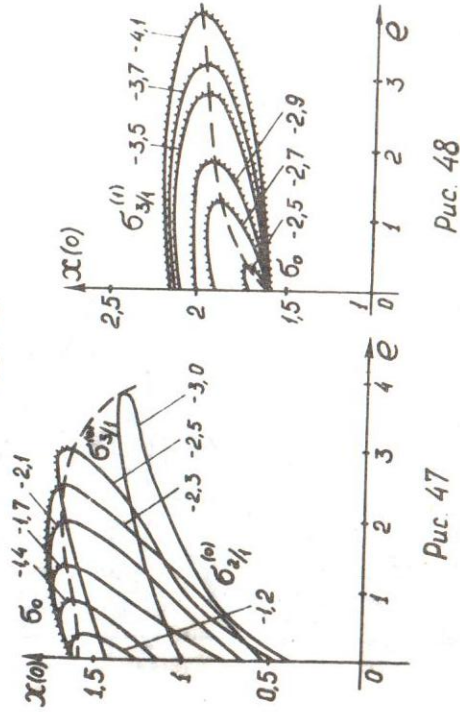
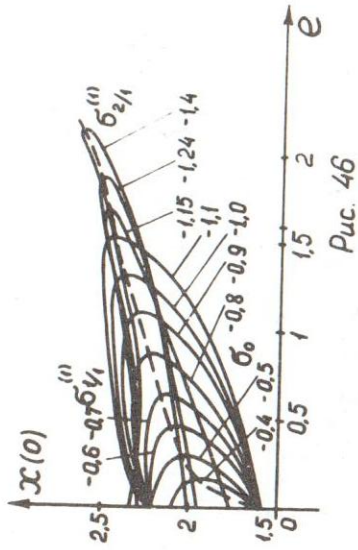
Puc. 14

15









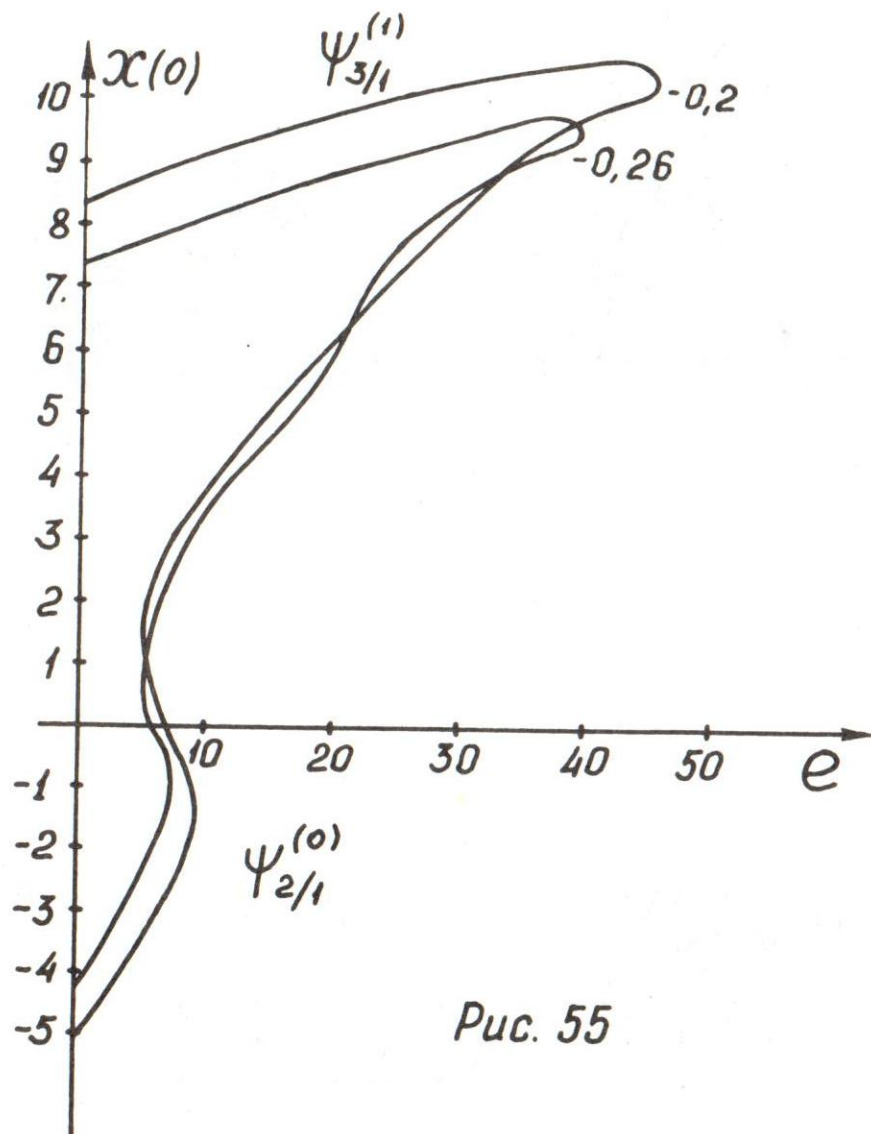


Рис. 55

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме: и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Address: USSR, 125047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.