



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 136 за 1985 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Златоустов В.А., Шиповских Т.А.**

**2 $\pi$ -периодические решения  
асимметричного уравнения  
Дюффинга при малых  
значениях амплитуды  
вынуждающей силы**

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Златоустов В.А., Шиповских Т.А. 2 $\pi$ -периодические решения асимметричного уравнения Дюффинга при малых значениях амплитуды вынуждающей силы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1985. № 136. 15 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1985-136>

Препр. Златоустов В.А.  
З-67 и Шиповских Т.А.  
 $2\pi$  - периодические  
решения асимметричного  
уравнения Люфбинга...

Препр. № 136 за 1985 г.  
I 6/15

18/2

ОРДЕНА ЛЕНИНА

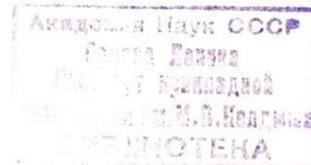
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

им. М.В.Келдыша

АКАДЕМИИ НАУК СССР

В.А.Златоустов, Т.А.Шиповских

$2\pi$ -ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ АСИММЕТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ  
ЛЮФБИНГА ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ АМПЛИТУДЫ ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛЫ



Москва 1985г.

## А Н Н О Т А Ц И Я

Исследованы  $2\pi$ -периодические решения асимметричного уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} + \mu(x + vx^2 + ax^3) = e \cos t.$$

При  $e = 0$  получено общее решение уравнения при различных значениях определяющих параметров  $\mu, v, a$ . Построена полная картина порождающих решений, что является необходимым для нахождения  $2\pi$ -периодических решений исследуемого уравнения при  $e \neq 0$ .

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Введение .....	4
I. Исследование периодических решений однородного уравнения .....	5
I.1. Фазовая плоскость .....	5
I.2. Вывод формул общего решения уравнения $\ddot{x} + \mu(x + vx^2 + ax^3) = 0$ .....	8
I.3. Вырожденные случаи асимметричного уравнения Дюффинга .....	11
2. Порождающие $2\pi m/n$ -периодические решения .....	12
2.1. Стационарные порождающие решения .....	12
2.2. Нестационарные порождающие решения .....	12
2.3. Начальные условия для порождающих решений .....	13
Литература .....	17

## ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуются  $2\pi$ -периодические решения асимметричного уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} + F(x) = e f(t), \quad (0.1)$$

где  $F(x) = \mu(x + \beta x^2 + \alpha x^3)$ ,  $f(t) = e \cos t$ .

Уравнение (0.1) описывает колебания в механической системе под действием гармонической вынуждающей силы с амплитудой  $e$ . Восстанавливающая сила  $F(x)$  представлена нелинейной функцией. Уравнение (0.1) исследовалось ранее при различных выражениях для восстанавливающей силы  $F(x)$  /1-6/. В разделе I.3 приведена связь между различными вырожденными случаями уравнения (0.1).

В разделе I.1 методом фазовой плоскости исследованы области существования периодических решений однородного уравнения (I.1). Общее решение однородного уравнения в эллиптических функциях Якоби приведено в разделе I.2.

При  $e \ll 1$  периодические решения уравнения (0.1) исследованы в разделе 2, где выделены классы порождающих решений и сформулирована краевая задача для численного нахождения  $2\pi$ -периодических решений уравнения (0.1) при  $e \neq 0$ .

Нетрудно видеть, что изменение  $e$  на  $-e$  равносильно сдвигу  $t$  на  $\pi$ , поэтому исследование  $2\pi$ -периодических решений уравнения (0.1) достаточно проводить только при  $e \geq 0$ .

Уравнение (0.1) обладает симметрией по  $\beta$ . Это позволяет проводить численные расчеты только при  $\beta > 0$ . Действительно рассмотрим уравнения

$$\ddot{x} + \mu(x + \beta x^2 + \alpha x^3) = e \cos t, \quad (0.2)$$

$$\ddot{x} + \mu(x - \beta x^2 + \alpha x^3) = e \cos t'. \quad (0.3)$$

Нетрудно показать, что

$$x = -x, \quad t' = t + \pi, \quad (0.4)$$

где  $x$  - решение уравнения (0.1) при  $\beta > 0$ , а  $x$  - решение уравнения (0.1) при  $\beta < 0$ .

Если в уравнении (0.1) сделать замену переменных

$$x = \beta^2 x, \quad e = \beta^2 e, \quad \alpha = \beta^2 \alpha, \quad (0.5)$$

то получим уравнение

$$\ddot{x} + \mu(x \pm x^2 + \rho x^3) = \varepsilon \cos t. \quad (0.6)$$

Уравнение (0.1) совпадает с уравнением (0.6) при  $\beta^2 = 1$ , поэтому численное построение  $2\pi$ -периодических решений проводилось при  $\beta = 1$ . Случай  $\beta = -1$  можно получить с помощью (0.4).

Отметим, что в некоторых случаях для уравнения (0.1) можно получить некоторые аналитические решения. При  $\mu = 0$  уравнение (0.1) имеет  $2\pi$ -периодическое решение  $x = -e \sin t$ , а при  $\alpha = \beta = 0$  - решение  $x = (e \cos t) / (\mu - 1)$ , если  $\mu \neq 1$ . При  $e = \sqrt{2(9 + 2\mu(9^2 - 4\mu)) / 3^5 \beta^2 \mu'}$  и  $\alpha = 2\beta^2 / 9$  уравнение (0.1) имеет  $6\pi$ -периодическое решение  $x = A + B \cos t / 3$ , где  $A = -3/2\beta$ ,  $B = \sqrt{18e / \mu \beta^2}$ .

Все результаты данной работы справедливы также и для уравнения

$$\ddot{x}_t + \mu'(x + \beta x^2 + \alpha x^3) = e' \cos \nu t', \quad (0.7)$$

т.к. при замене переменных  $\mu' = \nu^2 \mu$ ,  $e' = \nu^2 e$ ,  $t = \nu t'$  уравнение (0.7) переходит в уравнение (0.1). При этом периоды решений уравнения (0.1) и (0.7) связаны соотношением  $T' = T / \nu$ .

Авторы искренне признательны В.А.Сарычеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

## I. Исследование периодических решений однородного уравнения.

При  $e = 0$  уравнение (0.1) имеет вид

$$\ddot{x} + F(x) = 0, \quad F(x) = \mu(x + \beta x^2 + \alpha x^3). \quad (I.1)$$

Вопрос о существовании периодических решений однородного уравнения (I.1) исследуем методом фазовой плоскости.

## I.1. Фазовая плоскость.

Для уравнения (I.1) справедлив интеграл энергии

$$E_k + E_n = E, \quad (I.2)$$

где  $E = \text{const}$ ,  $E_k = \dot{x}^2 / 2$ ,  $E_n = \mu(x^2 / 2 + \beta x^3 / 3 + \alpha x^4 / 4)$ .

Уравнение (I.1) имеет следующие стационарные решения:

$$\dot{x} = 0, \quad x = 0; \quad (I.3)$$

$$\dot{x} = 0, \quad x = x_1 = -\beta / 2\alpha + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha} / 2\alpha; \quad (I.4)$$

$$\dot{x} = 0, \quad x = x_2 = -\beta / 2\alpha - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha} / 2\alpha. \quad (I.5)$$

Стационарное решение (I.3) существует при любых значениях параметров  $a$  и  $b$ . При  $D = b^2 - 4a > 0$  существуют стационарные решения (I.3)–(I.5). При  $D = 0$  стационарные решения (I.4) и (I.5) переходят в решение

$$\dot{x} = 0, \quad x = x_0 = -b/2a. \quad (I.6)$$

При  $D < 0$  уравнение (I.1) имеет действительное решение (I.3) и два комплексно-сопряженных решения. Таким образом всю плоскость определяющих параметров  $a$  и  $b$  можно разбить на области  $E_1, E_2, E_3, E'_1, E'_2, E'_3$  (рис. I).

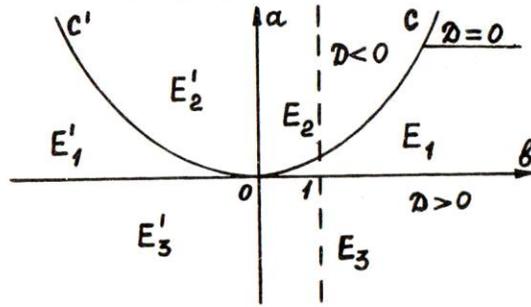


Рис. I.

В областях  $E_1, E'_1$  имеем  $D = b^2 - 4a > 0$ , и значение  $\rho$  изменяется в пределах  $0 < \rho < 1/4$ . На кривой  $c'oc$  имеем  $D = 0$  и  $\rho = 1/4$ , и в областях  $E_2$  и  $E'_2$  имеем  $D < 0$  и  $\rho > 1/4$ . В областях  $E_3$  и  $E'_3$  имеем  $D > 0$  и  $\rho < 0$ . Такое разбиение плоскости  $a, b$  на области справедливо для различных значений параметра  $\mu$ . Необходимо отметить, что данные области не включают оси координат  $a = 0$  и  $b = 0$ . Эти случаи являются вырожденными для уравнения (I.1) и будут рассмотрены ниже в разделе I.3.

Для исследования поведения фазовых траекторий в окрестности особых точек, которыми являются стационарные решения уравнения (I.1), воспользуемся теоремой Лежен-Дирихле для консервативных систем:

Если в состоянии равновесия потенциальная энергия есть минимум, то состояние равновесия устойчиво,

и обратной теоремой Ляпунова:

Если в состоянии равновесия потенциальная энергия не минимум, то состояние равновесия неустойчиво.

В случае минимальной потенциальной энергии состояние равновесия является особой точкой типа центра. Если потен-

циальная энергия имеет максимум, то состояние равновесия является особой точкой типа седла / 7 /. Состояние равновесия неустойчиво и в случае, когда потенциальная энергия имеет точку перегиба, которой на фазовой плоскости соответствует точка возврата первого рода / 7 /.

Исследуем поведение фазовых траекторий при различных значениях параметров  $\mu, a, b$ , используя разбиение плоскости  $a, b$  на области  $E_i, E'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (рис. I).

Случай  $\mu > 0, a > 0$ . Этому случаю при  $b > 0$  на рис. I соответствуют области  $E_1, E_2$  и кривая  $oc$ , а при  $b < 0$  области  $E'_1, E'_2$  и кривая  $c'o$ .

В области  $E_1$  уравнение (I.1) имеет три стационарных решения (I.3), (I.4), (I.5). Эти решения являются точками экстремумов функции потенциальной энергии  $E_n$  (рис. 2б). В соответствии с классификацией особых точек / 7 / на фазовой плоскости имеем следующие особые точки: точка  $(0, x_2)$  является особой точкой типа центра и окружена замкнутыми интегральными кривыми, которым соответствуют периодические решения уравнения (I.1) (рис. 2г); точка  $(0, 0)$  также является центром; точка  $(0, x_1)$  является седловой особой точкой, через которую проходит сепаратриса, разделяющая семейства периодических решений между собой. Замкнутым фазовым кривым вокруг особой точки  $(0, x_2)$  соответствуют периодические решения, существующие при  $E(x_2) \leq E < E(x_1)$ , а замкнутым траекториям вокруг центра  $(0, 0)$  – периодические решения, существующие при  $0 \leq E < E(x_1)$ . Через седловую особую точку проходит сепаратриса  $E = E(x_1)$ . Она разделяет указанные семейства периодических решений как между собой, так и от класса периодических решений, существующих при  $E > E(x_1)$ .

В области  $E_2$  уравнение (I.1) имеет одно стационарное решение (I.3), которому на фазовой плоскости (рис. 4г) соответствует особая точка типа центра. Периодические решения существуют при  $E \geq 0$ .

На кривой  $oc$  уравнение (I.1) имеет два стационарных решения (I.3) и (I.6). Особая точка  $(0, 0)$  является центром (рис. 3г), а точка  $(0, x_0)$  является точкой возврата первого рода. Через точку возврата проходит сепаратриса  $E = E(x_0)$ , разделяющая два класса периодических решений.

Нетрудно видеть, что поведение фазовых траекторий в зависимости от знака параметра  $b$  подчиняется соотношениям

(0.4) (рис.5-7). Поэтому поведение фазовых траекторий при  $\nu < 0$  (рис.11-13, 15, 17) в дальнейшем описываться не будет.

Случай  $\mu < 0, \alpha > 0$ . Фазовые траектории в этом случае при  $\nu > 0$  представлены на рис.8г-10г.

В области  $E_1$  уравнение (I.1) имеет три стационарных решения (I.3)-(I.5). Особая точка  $(0, x_1)$  является центром. Семейство периодических решений вокруг этой точки существует при  $E(x_1) \leq E < 0$  и ограничено на фазовой плоскости (рис.8г) сепаратрисой  $E = 0$ , проходящей через седловую особую точку  $(0, 0)$ . Особая точка  $(0, x_2)$  также является седловой.

В области  $E_2$  уравнение (I.1) имеет единственное стационарное решение (I.3) (рис.10а). Особая точка  $(0, 0)$  является седлом, интегральные кривые вблизи нее разомкнуты и нестационарных периодических решений не существует (рис.10г).

На кривой  $OC$  уравнение (I.1) имеет два стационарных решения (I.3) и (I.6). Особая точка  $(0, 0)$  является седловой точкой, а точка  $(0, x_0)$  точкой возврата первого рода (рис.10г). Нестационарных периодических решений в этом случае нет.

Случай  $\mu > 0, \alpha < 0$ . Этому случаю на рис.1 при  $\nu > 0$  соответствует область  $E_3$ , а при  $\nu < 0$  область  $E'_3$ . В области  $E_3$  уравнение (I.1) имеет три стационарных решения (I.3), (I.4), (I.5). Особая точка  $(0, 0)$  является центром. При  $0 \leq E < E(x_1)$  (рис.14б) ее окружает семейство периодических решений (рис.14г). Сепаратриса, выделяющая этот класс периодических решений, проходит через особую точку  $(0, x_1)$ . Особая точка  $(0, x_2)$  является седловой.

Случай  $\mu < 0, \alpha < 0$ . Вид потенциальной энергии  $E_n$  представлен на рис.16б. На фазовой плоскости (рис.16г) существует три семейства периодических решений, разделенные сепаратрисой  $E = 0$ . Особые точки  $(0, x_1)$  и  $(0, x_2)$  являются центрами.

## I.2. Вывод формул общего решения уравнения (I.1)

Из выражения для интеграла энергии (I.2) следует

$$dx/dt = \pm \sqrt{\mu \cdot \alpha \cdot P_4(x, E) / 2^2}, \quad (I.7)$$

где

$$P_4(x, E) = \begin{cases} -x^4 - 4\beta x^3 / 3\alpha - 2x^2/\alpha + 4E/\mu\alpha & \text{при } \mu\alpha > 0, \\ x^4 + 4\beta x^3 / 3\alpha + 2x^2/\alpha - 4E/\mu\alpha & \text{при } \mu\alpha < 0. \end{cases}$$

Далее

$$\pm \sqrt{\mu \alpha / 2^2} \cdot dt = dx / \sqrt{P_4(x, E)}. \quad (I.8)$$

Интегрируя I.8, получим периодические решения уравнения (I.1) в эллиптических функциях Якоби. Возможны следующие случаи разложения полинома  $P_4(x, E)$  на множители.

Случай  $\mu\alpha > 0$ . Полином  $P_4(x, E)$  имеет четыре действительных корня в области  $E_1$  при  $0 \leq E < E(x_1)$  (рис.2г) и в области  $E_3$  при  $E(x_1) \leq E < 0$  (рис.16г). В этом случае, интегрируя (I.8), получаем

$$\pm \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\mu \alpha}{2}} dt = \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{(x_4-x)(x_3-x)(x-x_2)(x-x_1)}} = \frac{2F(\beta, k)}{\sqrt{(x_4-x_2)(x_3-x_1)}}, \quad (I.9)$$

где

$$x_1 < u \leq x_2 < x_3 < x_4, \quad \beta = \arcsin \sqrt{\frac{(x_4-x_2)(u-x_1)}{(x_2-x_1)(x_4-u)}}, \quad k = \sqrt{\frac{(x_4-x_2)(x_3-x_1)}{(x_4-x_2)(x_3-x_1)}}$$

$F(\beta, k)$  - эллиптический интеграл первого рода. Пределы интегрирования в правой части (I.9) обусловлены условием  $P_4(x, E) > 0$ . Пусть  $x = \sqrt{\mu \alpha (x_4-x_2)(x_3-x_1)} / \delta (t-t_0)$ , тогда из (I.9) имеем

$$x = \pm F(\beta, k). \quad (I.10)$$

Следовательно

$$\operatorname{sn} x = \sin \beta = \sqrt{(x_4-x_2)(u-x_1) / (x_2-x_1)(x_4-u)}. \quad (I.11)$$

Из (I.11) находим решение уравнения (I.1) в виде

$$x_0 = u = \frac{x_1(x_4-x_2) + x_4(x_2-x_1) \operatorname{sn}^2 x}{(x_4-x_2) + (x_2-x_1) \operatorname{sn}^2 x}, \quad (I.12)$$

$$\dot{x}_0 = \frac{2(x_2-x_1)(x_4-x_1)(x_4-x_2) \operatorname{sn} x \cdot \operatorname{cn} x \cdot \operatorname{dn} x}{[(x_4-x_2) + (x_2-x_1) \operatorname{sn}^2 x]^2},$$

где

$$x = \delta(t-t_0), \quad \delta = \sqrt{\mu \alpha (x_4-x_2)(x_3-x_1)}, \quad T_0 = 2K(k) / \delta,$$

$k = \sqrt{(x_4-x_2)(x_2-x_1) / (x_4-x_2)(x_3-x_1)}$ ,  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  - действительные корни полинома  $P_4(x, E) = -x^4 - 4\beta x^3 / 3\alpha - 2x^2/\alpha + 4E/\mu\alpha$ .

Условие  $P_4(x, E) > 0$  выполняется также на отрезке

$x_3 \leq u \leq x_4$ . Тогда из (I.8) следует

$$\pm \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\mu \alpha}{2}} dt = \int_{x_3}^x \frac{dx}{\sqrt{(x_4-x)(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)}} = \frac{2F(\lambda, k)}{\sqrt{(x_4-x_2)(x_2-x_1)}}, \quad (I.13)$$

где  $x_1 < x_2 < x_3 < u \leq x_4$ ,  $x = \sqrt{\mu \alpha (x_4-x_2)(x_3-x_1)} / \delta (t-t_0) = \pm F(\lambda, k)$ ,

$$\operatorname{sn} x = \sin \lambda = \sqrt{(x_4-x_2)(u-x_3) / (x_4-x_3)(u-x_2)}. \quad (I.14)$$

Из (I.14) находим

$$x_0 = u = \frac{x_3(x_4 - x_2) - (x_4 - x_3)\sin^2 z}{(x_4 - x_2) - (x_4 - x_3)\sin^2 z}, \quad (I.15)$$

$$\dot{x}_0 = \frac{(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_3 - 1)\sin z \cdot \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z}{[(x_4 - x_2) - (x_4 - x_3)\sin^2 z]^2},$$

где все обозначения совпадают с обозначениями в формуле (I.12). Во всех других диапазонах  $E$  полином  $P_4(x, E)$  имеет два действительных и два комплексно-сопряженных корня. Следовательно (I.8) можно представить в виде

$$\pm \sqrt{\frac{\mu a}{2}} \int_{t_0}^t dt = \int_{x_1}^u \frac{dx}{\sqrt{P_4(x, E)}} = F\left(\operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{q(x_2 - u)}{p(u - x_1)}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 - (p - q)^2}{pq}}\right) / \sqrt{pq}. \quad (I.16)$$

Здесь  $x_1 < u < x_2$ ,  $x_1, x_2$  — действительные корни полинома  $P_4(x, E)$ , а  $\lambda \pm i\delta$  — его комплексные корни,  $p^2 = (\lambda - x_2)^2 + \delta^2$ ,  $q^2 = (\lambda - x_1)^2 + \delta^2$ .

Выражение (I.16) представим в виде

$$z = \pm F(\psi, k), \quad (I.17)$$

где  $z = \sqrt{pq} \mu a / 2(t - t_0)$ ,  $\psi = \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{q(x_2 - u)}{p(u - x_1)}}$ ,  $k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 - (p - q)^2}{pq}}$ . Следовательно

$$\sin \psi = \sin z = \frac{2\sqrt{q(x_2 - u)/p(u - x_1)}}{1 + q(x_2 - u)/p(u - x_1)}. \quad (I.18)$$

Преобразуя это выражение, получаем

$$x_0 = u = \frac{px_1(1 \pm \operatorname{cn} z)^2 + qx_2 \sin^2 z}{p(1 \pm \operatorname{cn} z)^2 + q \sin^2 z}, \quad (I.19)$$

$$\dot{x}_0 = \frac{2pq(1 \mp \operatorname{cn} z)\sin^3 z \operatorname{dn} z (x_1 - x_2)}{[p(1 \pm \operatorname{cn} z)^2 + q \sin^2 z]^2},$$

где  $z = \sqrt{pq} \mu a / 2(t - t_0)$ ,  $p^2 = (\lambda - x_2)^2 + \delta^2$ ,  $q^2 = (\lambda - x_1)^2 + \delta^2$ ,

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 - (p - q)^2}{pq}}, \quad T_0 = 4K(k) / \sqrt{pq} \mu a / 2}.$$

Случай  $\mu a < 0$ . Полином  $P_4(x, E)$  представляется в виде  $P_4(x, E) = x^4 + 4bx^3/3a + 2x^2/a - 4E/\mu a$  и имеет четыре действительных корня в области  $E_1$  при  $E(x_1) \leq E \leq 0$  (рис. 8в) и в области  $E_3$  при  $E(x_1) \geq E \geq 0$  (рис. 14в). Причем  $P_4(x, E) \geq 0$  на отрезке  $x_4 \leq u \leq x_3$ . В остальных диапазонах  $E$  полином  $P_4(x, E)$  имеет два действительных и два комплексно-сопряженных корня, и общее решение уравнения (I.1) выражается в виде (I.19). В случае четырех действительных корней, интегрируя (I.8), получаем

$$\pm \int_{t_0}^t \frac{\mu a}{2} dt = \int_{x_2}^u \frac{dx}{x_2(x_4 - x)(x_3 - x)(x_2 - x)(x - x_1)} = \frac{2F(\delta, k)}{\sqrt{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}}, \quad (I.20)$$

где  $x_1 < x_2 < u \leq x_3 < x_4$ ,  $\delta = \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{(x_3 - x_1)(u - x_2)}{(x_3 - x_2)(u - x_1)}}$ ,  $k = \sqrt{\frac{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}{(x_4 - x_2)(x - x_1)}}$ .

Общее решение находим в виде

$$x_0 = u = \frac{x_2(x_3 - x_1) - x_1(x_3 - x_2)\sin^2 z}{(x_3 - x_1) - (x_3 - x_2)\sin^2 z}, \quad (I.21)$$

$$\dot{x}_0 = \frac{2\sin z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z [x_1^2(x_3 - x_2) + x_2^2(x_1 - x_3) + x_3^2(x_2 - x_1) + x_1(x_3 - x_2)(x_1 - 1)\sin^2 z]}{[(x_3 - x_1) - \sin^2 z(x_3 - x_2)]^2},$$

где  $z = \delta(t - t_0)$ ,  $\delta = \sqrt{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)\mu a / p'}$ ,  $T_0 = 2K(k) / \delta$ .

### I.3. Вырожденные случаи асимметричного уравнения Дюффинга

Ранее было показано (разд. I.1), что особыми точками на фазовой плоскости являются корни полинома  $F(x) = \mu(x + \beta x^2 + \alpha x^3)$ . Значение корней полинома  $F(x)$  зависит от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

Полином  $F(x)$  имеет три различных действительных корня в областях  $E_1, E'_1, E_3, E'_3$  и на полуоси  $\beta = 0, \alpha < 0$  (рис. 1, 2а, 5а, 8а, 11а, 14а, 15а, 16а, 17а). Случай  $\beta = 0$  соответствует уравнению Дюффинга

$$\ddot{x} + \mu(x + \alpha x^3) = e \sin t, \quad (I.22)$$

$2\pi$ -периодические решения которого исследованы, например, в работах / 1, 2, 3 /. Области  $E_1, E'_1, E_3, E'_3$  исследуются в настоящей работе.

Полином  $F(x)$  имеет три действительных корня, два из которых равны, на кривой  $C'O'C$  (рис. 1, 3а, 6а, 9а, 12а), при этом двукратный корень является ненулевым, а однократный равен нулю. Случай, когда двукратный корень равен нулю, соответствует уравнению

$$\ddot{x} + \mu(x^2 + \alpha x^3) = e \cos t, \quad (I.23)$$

исследованное в работе / 6 /. В случае, когда нулевой корень является трехкратным, уравнение (I.22) переходит в вырожденное уравнение Дюффинга / II /.

$$\ddot{x} + \beta x^3 = e \sin t. \quad (I.24)$$

Полином  $F(x)$  имеет один действительный нулевой корень и два комплексно-сопряженных в областях  $E_2, E'_2$  (рис. 1, 4а, 7а, 10а, 13а) и на полуоси  $\beta = 0, \alpha > 0$ .

Полином  $F(x)$  имеет два действительных корня на оси  $\alpha = 0$  (рис. 1). В этом случае уравнение (0.1) переходит в уравнение

$$\ddot{x} + \mu(x + \beta x^2) = e \cos t, \quad (I.25)$$

которое исследовано в работе / 5 /.

В случае, когда  $F(x)$  имеет двухкратный нулевой корень, уравнение (0.1) переходит в уравнение / 6 /

$$\ddot{x} + \alpha x^2 = e \cos t. \quad (I.26)$$

И, наконец, рассмотрим случай  $\beta = \alpha = 0$ . Уравнение (0.1) переходит в линейное уравнение  $\ddot{x} + \mu x = e \cos t$ . Следует отметить, что к этому уравнению сводится исследование характера особых точек в случае нелинейной функции  $F(x)$ .

## 2. Порождающие $2\pi m/n$ -периодические решения.

Необходимо выделить среди всех периодических решений (I.12), (I.15), (I.19), (I.21) уравнения (I.1) порождающие решения, т.е. такие  $2\pi m/n$ -периодические решения однородного уравнения (I.1), которые переходят в  $2\pi m$ -периодические решения уравнения (0.1) при  $e \neq 0$ .

### 2.1. Стационарные порождающие решения

Уравнение (I.1) имеет стационарные решения (I.3)-(I.6). Аналогично / 9,4,5 / можно показать, что стационарные решения (I.3), (I.4), (I.5) являются порождающими независимо от характера особых точек, которым они соответствуют. Отыскание  $2\pi$ -периодических решений уравнения (0.1), переходящих при  $e=0$  в стационарные решения (I.3)-(I.5), сводится к решению однопараметрической краевой задачи / 9,5 /

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0. \quad (2.1)$$

Стационарное решение (I.6), существующее при  $\alpha = \beta^2 - 4\alpha = 0$ , не является порождающим решением, т.к. соответствует на фазовой плоскости точке возврата первого рода / 6 /.

### 2.2. Нестационарные порождающие решения

Для нестационарных решений должно выполняться условие периодичности

$$T = 2\pi m/n. \quad (2.2)$$

Этим условием в каждом случае (I.12), (I.15), (I.19), (I.21) выделяется однопараметрическое семейство решений для различных значений  $m$  и  $n$ , зависящих от параметра  $t_0$ . Для

определения постоянной  $t_0$  используется метод Чезари-Хейла / 9,10 /, согласно которому рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + \mu(x + \beta x^2 + \alpha x^3) = e \cos t - \rho \dot{x}_0(t+t_0), \\ \int_0^{2\pi m} x \cdot x_0(t+t_0) dt = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $x_0$  - решение однородного уравнения (I.1) с периодом  $T_0 = 2\pi m/n$ ,  $x$  - неизвестная функция,  $\rho$  - неизвестная постоянная,  $t_0$  - искомая постоянная. При достаточно малых  $e$  система (2.3) имеет единственное  $2\pi m$ -периодическое решение  $x = x(t, t_0, e)$ ,  $\rho = \rho(t_0, e)$ . Аналогично / 9 / можно показать, что исследование  $2\pi m$ -периодических решений уравнения (0.1) сводится к определению корней  $t = t_0(e)$  сифуркационного уравнения  $\rho(t_0, e) = 0$ . Это уравнение при  $f(t) = \cos t$  имеет  $2m$  корней

$$t_0^{(\nu)} = \pi \nu / n, \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2m-1) \quad (2.4)$$

которым соответствуют  $2\pi m$ -периодические решения уравнения (0.1). Численное нахождение этих решений сводится к решению при  $e \neq 0$ ,  $m=1$  для уравнения (0.1) однопараметрической краевой задачи / 9 /

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0. \quad (2.5)$$

### 2.3. Начальные условия для порождающих решений.

Начальные условия для порождающих решений достаточно построить при  $\beta=1$  в областях  $E_1, E_2, E_3$  и на кривой  $OC$ . Воспользуемся формулами (I.12), (I.15), (I.19), (I.21) с учетом (2.2); (2.4).

Случай  $\mu > 0, \alpha > 0$ . Решения, существующие в области  $E_1$ , обозначены через  $x_{n/m}^{(\nu)}, x_x, \alpha_n^{(\nu)}, \alpha_0, \beta_{n/m}^{(\nu)}, \gamma_0$ .

Решения  $x_{n/m}^{(\nu)}, x_x$  существуют при  $0 \leq E < E(\nu)$  (рис. 2г). Решение  $x_x = 0$  является стационарным порождающим решением. Начальные условия для решений  $x_{n/m}^{(\nu)}$  определяются с помощью формул (I.15), (2.2), (2.4) в виде неявной зависимости от  $E$

$$\dot{x}_0(0) = 0, x_0 = \begin{cases} x_3, \nu=0, \\ x_4, \nu=1, \end{cases} \mu = \frac{8k^2(k)n^2}{(x_4 - x_2)(x_3 - x_4)4\pi^2 m^2}, \quad (2.6)$$

где  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  - действительные корни полинома  $P_4(x, E) = -x^4 - 4\beta x^3/3\alpha - 2x^2/\alpha + 4E/\mu\alpha$ ,  $k = \sqrt{(x_4 - x_2)(x_2 - x_1)}$ . Они

изобразены при  $m=1$ ,  $n=1,2,3$  на рис.18. Здесь  $\nu=1$ ,  $\alpha = \rho\beta^2 = 1/5$ . Точки бифуркации находятся из условия  $x_{n/m}^{(0)} = x_n^{(1)} = x_n = 0$ . В точках бифуркации  $x_3 = x_4 = 0$ ,  $k=0$ ,  $x_1, x_2 = 2/\alpha$  и следовательно

$$\mu = n^2/m^2. \quad (2.7)$$

Решения  $\alpha_{n/m}^{(r)}$ ,  $\alpha_0$  существуют при  $E(x_2) \leq E < E(x_1)$  (рис.2г). Решение  $\alpha_0 = x_2$  является решением (I.5) однородного уравнения (I.1). В диапазоне  $E(x_2) \leq E < 0$  полином  $P_4(x, E)$  имеет два действительных и два комплексно-сопряженных корня (рис.2в), поэтому начальные условия получим из формул (I.19), (2.2), (2.4) в виде

$$\dot{x}_0(0)=0, x_0(0) = \begin{cases} x_1, \tau=0 \\ x_2, \tau=1 \end{cases}, \mu = \delta K^2(k) n^2 / \pi^2 m^2 a \rho q \quad (2.8)$$

где  $x_1 < x_2$ ,  $x_{3,4} = \lambda \pm i\delta$ ,  $k = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 - (\rho - q)^2] / 4\rho q}$ ,  $\rho^2 = (\lambda - x_2)^2 + \delta^2$ ,  $q^2 = (\lambda - x_1)^2 + \delta^2$ . В точках бифуркации  $\alpha_{n/m}^{(0)} = \alpha_{n/m}^{(1)} = \alpha_0 = x_2$ ,  $k=0$ ,  $\rho^2 = q^2 = (\lambda - x_2)^2 + \delta^2$ . Значения  $\lambda$  и  $\delta$  определим из условия

$$-(x - x_2)^2 ((x - \lambda)^2 + \delta^2) = -(x^4 + 4bx^3 + 3a - 2x^2/a + 4E/\mu a) \quad (2.9)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим систему уравнений для определения  $\lambda$  и  $\delta$  в точках бифуркации

$$\begin{cases} -2(\lambda - x_2) = 4b/3a, \\ \lambda^2 + \delta^2 + 4x_2\lambda + x_2^2 = 2/a, \\ -2x_2(\lambda^2 + \delta^2 + \lambda x_2) = 0, \\ x_2(\lambda^2 + \delta^2) = -4E(x_2)/\mu a \end{cases} \quad (2.10)$$

и следовательно

$$\lambda = -x_2 - 2b/3a, \delta^2 = -\lambda^2 - x_2\lambda. \quad (2.11)$$

Тогда  $\rho q = (\lambda - x_2)^2 + \delta^2 = 4x_2^2 + 2x_2b/a$  и окончательно для точек бифуркации получаем

$$\mu = n^2/m^2 x_2 (12x_2 a + b). \quad (2.12)$$

При  $\alpha = 1/5$ ,  $\nu = 1$  имеем  $\mu \approx 0.61 n^2/m^2$  (рис.18).

При  $0 \leq E < E(x_1)$  полином  $P_4(x, E)$  имеет четыре действительных корня и начальные условия для решений  $\alpha_{n/m}^{(r)}$  получаем из формул (I.12), (2.2), (2.4)

$$\dot{x}_0(0)=0, x_0 = \begin{cases} x_1, \tau=0, \\ x_2, \tau=1, \end{cases} \mu = \frac{\delta K^2(k) n^2}{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1) a \pi^2 m^2} \quad (2.13)$$

где  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  действительные корни полинома  $P_4(x, E)$ ,  $k = \sqrt{\frac{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}}$ . Решения  $\alpha_{n/m}^{(r)}$  ограничены асимптотами  $x = x_1$ ,  $x = -1.55$  (рис.18).

Решения  $\beta_{n/m}^{(r)}$  существуют при  $E > E(x_1)$  (рис.2г). Начальные условия для решений  $\beta_{n/m}^{(r)}$  находятся из формул (I.19), (2.2), (2.4)

$$\dot{x}_0(0)=0, x_0 = \begin{cases} x_1, \tau=0, \\ x_2, \tau=1, \end{cases} \mu = \frac{\delta K^2(k) n^2}{\pi^2 m^2 a \rho q}, \quad (2.14)$$

где  $x_1 < x_2$  - действительные корни  $P_4(x, E)$ ,  $x_{3,4} = \lambda \pm i\delta$ ,  $k = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 - (\rho - q)^2] / 4\rho q}$ ,  $\rho^2 = (\lambda - x_2)^2 + \delta^2$ ,  $q^2 = (\lambda - x_1)^2 + \delta^2$ . Точек бифуркации для решений  $\beta_{n/m}^{(r)}$  не существует.

На кривой  $OC$  ( $D=0$ ) численное построение порождающих решений  $\delta_{n/m}^{(r)}$ ,  $\delta_0$ ,  $\xi_{n/m}^{(r)}$  проводилось при  $\alpha = \rho\beta^2 = 1/4$ ,  $\nu = 1$ .

Решения  $\delta_{n/m}^{(r)}$ ,  $\delta_0$  (рис.19) существуют при  $0 \leq E < E(x_1)$ . Порождающее решение  $\delta_0 = 0$  является решением (I.3) уравнения (I.1). Для построения решений  $\delta_{n/m}^{(r)}$  ( $m=1$ ,  $n=1,2,3$ ) справедливы формулы (2.8) при  $0 \leq E < E(x_0)$  и  $\alpha = 1/4$ . Точки бифуркации находятся из условия  $\delta_{n/m}^{(1)} = \delta_{n/m}^{(0)} = x_1 = x_2 = 0$  в виде

$$\mu = n^2/m^2. \quad (2.15)$$

Решения  $\xi_{n/m}^{(r)}$  также описываются формулами (2.8) при  $E > E(x_0)$  при  $\alpha = 1/4$  и находятся вне асимптот  $x = -b/2a = -2$  и  $x = 0.69$  (рис.19).

В области  $E_2$  существует единственный класс порождающих решений (рис.4г), начальные условия для которых обозначены  $x_{n/m}^{(r)}$  ( $m=1$ ,  $n=1,2,3$ ) (рис.20) и описываются формулами (2.8) при  $E \geq 0$ ,  $\alpha = \rho\beta^2 = 1$ . Решение  $x_0 = 0$  является стационарным порождающим решением.

Случай  $\mu < 0$ ,  $\alpha > 0$ . В этом случае существует семейство периодических решений  $\gamma_{n/m}^{(r)}$  в области  $E_1$  (рис.8г). Начальные условия получаем из формул (I.21), (2.2), (2.4)

$$\dot{x}_0(0)=0, x_0 = \begin{cases} x_2, \tau=0 \\ x_3, \tau=1, \end{cases} \mu = \frac{-\delta K^2(k) n^2}{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1) a \pi^2 m^2} \quad (2.16)$$

где  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  корни  $P_4(x, E)$  при  $E(x_1) \leq E < 0$ ,

$$k = \sqrt{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1) / (x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}.$$

Решения  $\gamma_{n/m}^{(r)}$  ( $m=1$ ,  $n=1,2,3$ ) ограничены асимптотами  $x = x_2 = 0$  и  $x = -2.22$  (при  $\alpha = \rho\beta^2 = 1/5$ ,  $\nu = 1$ ).

Нетрудно найти, что в точках бифуркации, где  $\delta_{n/m}^{(0)} = \delta_{n/m}^{(1)} = \delta_0 = \chi_1, \chi_2$

$$\mu = n^2/m^2(x, \beta + 2\chi_1^2, \alpha). \quad (2.17)$$

При  $\alpha = 1/5, \beta = 1$  имеем  $\mu = -1.66n^2/m^2$  (рис.18). Стационарными порождающими решениями в области  $E_1$  являются решения  $\alpha_0 = \chi_1, \gamma_0 = \chi_2, x_2 = 0$ .

В области  $E_2$  и на кривой  $OC$  при  $\mu < 0, \alpha > 0$  существует единственное порождающее решение  $\dot{x}_0(0) = 0, x_0(0) = 0$  (рис. 19, 20), обозначенное через  $\delta_0$  при  $\mathcal{D} = 0$  (рис.19) и через  $x_0$  при  $\mathcal{D} < 0$  (рис.20).

Случай  $\mu < 0, \alpha < 0$ . Решения, существующие в области  $E_3$  при  $0 \leq E < E(\chi_1)$  (рис.15г), обозначены через  $\theta_{n/m}^{(z)}$ ,  $\theta_0, \eta_0$  (рис.21). Решение  $\theta_0 = 0$  является стационарным порождающим решением. Начальные условия для решений  $\theta_{n/m}^{(z)}$  находятся из формул (1.15), (2.2), (2.4) и имеют вид

$$\dot{x}_0(0) = 0, x_0(0) = \begin{cases} x_2, z=0 \\ x_3, z=1 \end{cases}, \mu = \frac{-8k^2(k)n^2}{(x_4-x_2)(x_3-x_1)k^2m^2} \quad (2.18)$$

где  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4, k = \sqrt{\frac{(x_3-x_2)(x_4-x_1)}{(x_4-x_2)(x_3-x_1)}}$ ,  $0 \leq E < E(\chi_1)$ . В точках бифуркации  $\theta_{n/m}^{(0)} = \theta_{n/m}^{(1)} = 0, x_3 = x_2 = 0, x_4 \cdot x_1 = 2/\alpha$  и следовательно

$$\mu = n^2/m^2. \quad (2.19)$$

Решения  $\eta = \chi_2$  и  $\theta_0 = \chi_1$  являются стационарными порождающими решениями (рис.21). Решения  $\theta_{n/m}^{(z)}$  построены при  $\beta = 1$  и  $\alpha = 1/5$  (рис.21) и ограничены асимптотами  $\eta_0 = \chi_2$  и  $x = 0.41$ .

Случай  $\mu < 0, \alpha < 0$ . Решения, существующие в области  $E_3$ , обозначены через  $\eta_{n/m}^{(z)}$ ,  $\eta_0, \beta_{n/m}^{(z)}, \beta_0, \psi_{n/m}^{(z)}, \theta_0$ . Решения  $\eta_0 = \chi_1, \beta_0 = \chi_2, \theta_0 = 0$  являются стационарными порождающими решениями (рис.21).

Решения  $\beta_{n/m}^{(z)}$  существуют при  $E(\chi_2) \leq E < E(\chi_1)$  и описываются формулами (2.8). Для точек бифуркации можно получить

$$\mu = n^2/m^2 x_2 (2\chi_2 \alpha + \beta). \quad (2.20)$$

При  $0 < E \leq E(\chi_1)$  решения  $\beta_{n/m}^{(z)}$  описываются формулами (2.6). Решения  $\beta_{n/m}^{(z)}$  ( $n = 1, 2, 3, z = 0, 1$ ) построены при  $\beta = 1, \alpha = \rho\beta^2 = 1$ . Они ограничены асимптотами  $x = 0$  и  $x = 2.25$  (рис.21).

Решения  $\eta_{n/m}^{(z)}, \eta_0$  существуют при  $E(\chi_1) \leq E < 0$  и описываются

формулами (2.13). Для точек бифуркации нетрудно получить

$$\mu = n^2/m^2 x_1 (2\chi_1 \alpha + \beta). \quad (2.21)$$

Решения  $\eta_{n/m}^{(z)}$  ограничены асимптотами  $x = 0$  и  $x = -1.13$  (при  $\beta = 1, \alpha = -1$ ).

Решения  $\psi_{n/m}^{(z)}$  существуют при  $E > 0$  (рис.16г) и описываются формулами (2.14). Точек бифуркации для решений  $\psi_{n/m}^{(z)}$  не существует. Решения находятся вне асимптот  $x = -1.13$  и  $x = 2.25$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галактионова О.О., Златоустов В.А.  $2\pi$ -периодические решения уравнения Дюффинга при малых значениях амплитуды вынуждающей силы. Препринт ИПМ № 33, 1980г.
2. Галактионова О.О., Златоустов В.А.  $2\pi$ -периодические решения уравнения Дюффинга. Препринт ИПМ № 128, 1980г.
3. Галактионова О.О., Златоустов В.А. Об одном классе  $2\pi$ -периодических решений неоднородного уравнения Дюффинга. Препринт ИПМ № 81, 1981г.
4. Шиповских Т.А.  $2\pi$ -периодические решения вырожденного уравнения Дюффинга. Труды МФТИ; 1985г.
5. Златоустов В.А., Шиповских Т.А. Вынужденные  $2\pi$ -периодические колебания системы с несимметричной восстанавливающей силой. Препринт ИПМ № 124, 1984г.
6. Златоустов В.А., Шиповских Т.А. Периодические решения вырожденного асимметричного уравнения Дюффинга. Препринт ИПМ, МФТИ; 1985г.
7. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959г.
8. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям. АН СССР, М., 1941г.
9. Сарычев В.А., Златоустов В.А., Сазонов В.В. М., ВИНТИ. Деп. № 908-77, 1976 г.
10. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Мир. 1964г.
11. Златоустов В.А., Галактионова О.О., Шиповских Т.А. Исследование периодических решений вырожденного уравнения Дюффинга. Препринт ИПМ, МФТИ; 1985г.

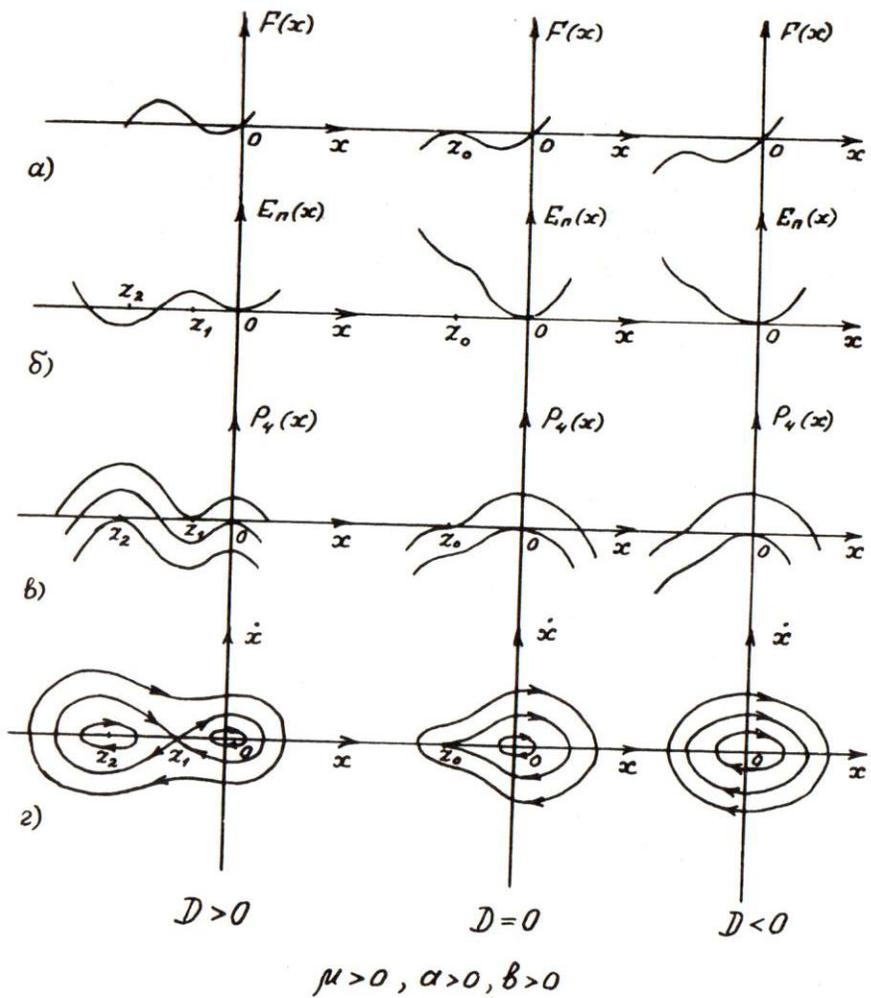


Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

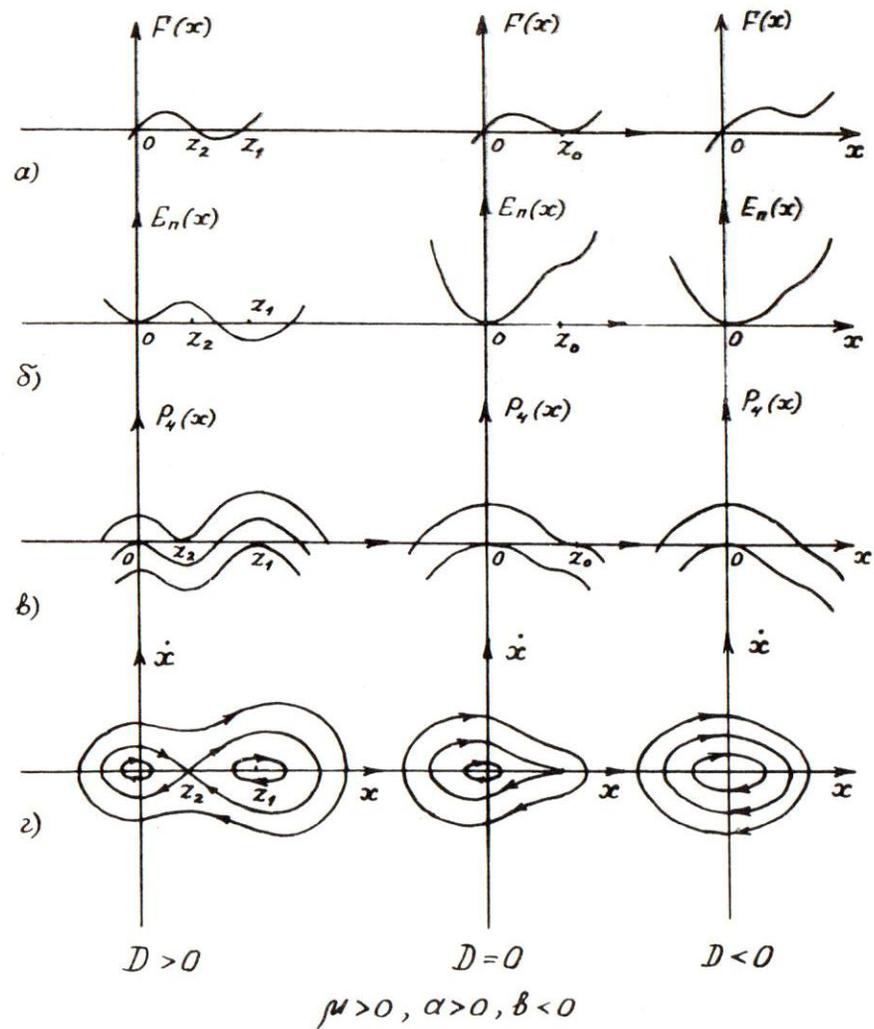
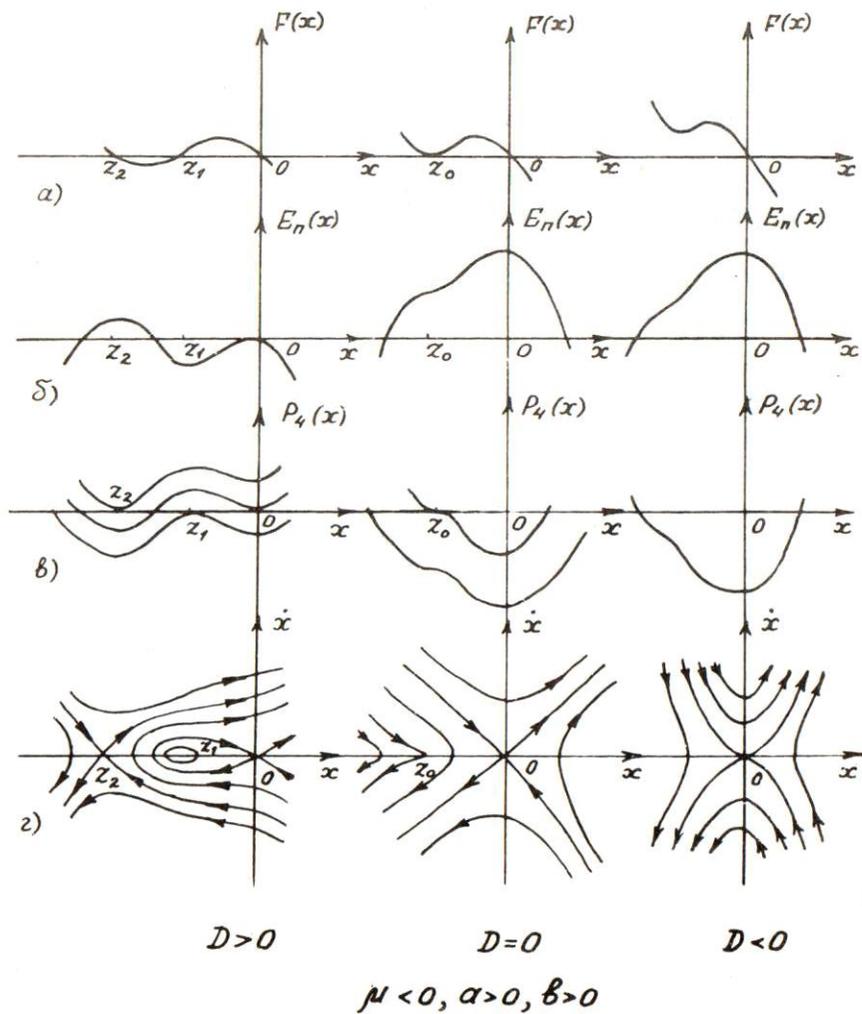


Рис. 5

Рис. 6

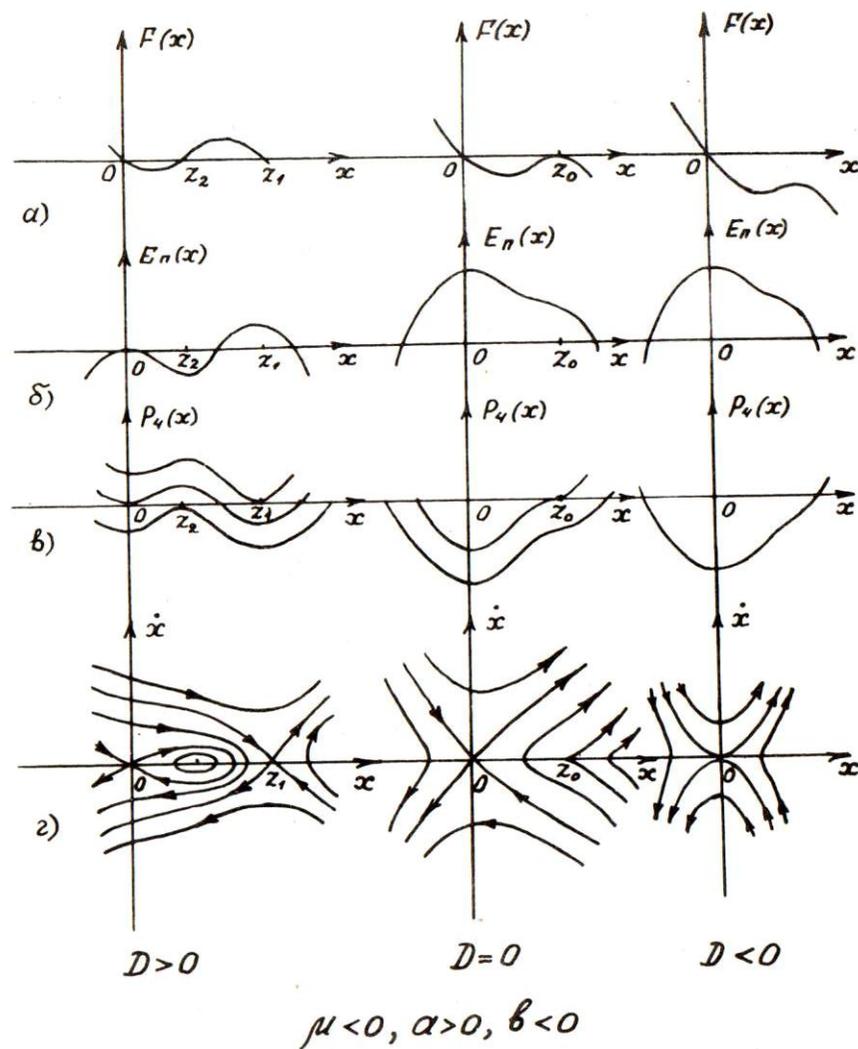
Рис. 7



Puc. 8

Puc. 9

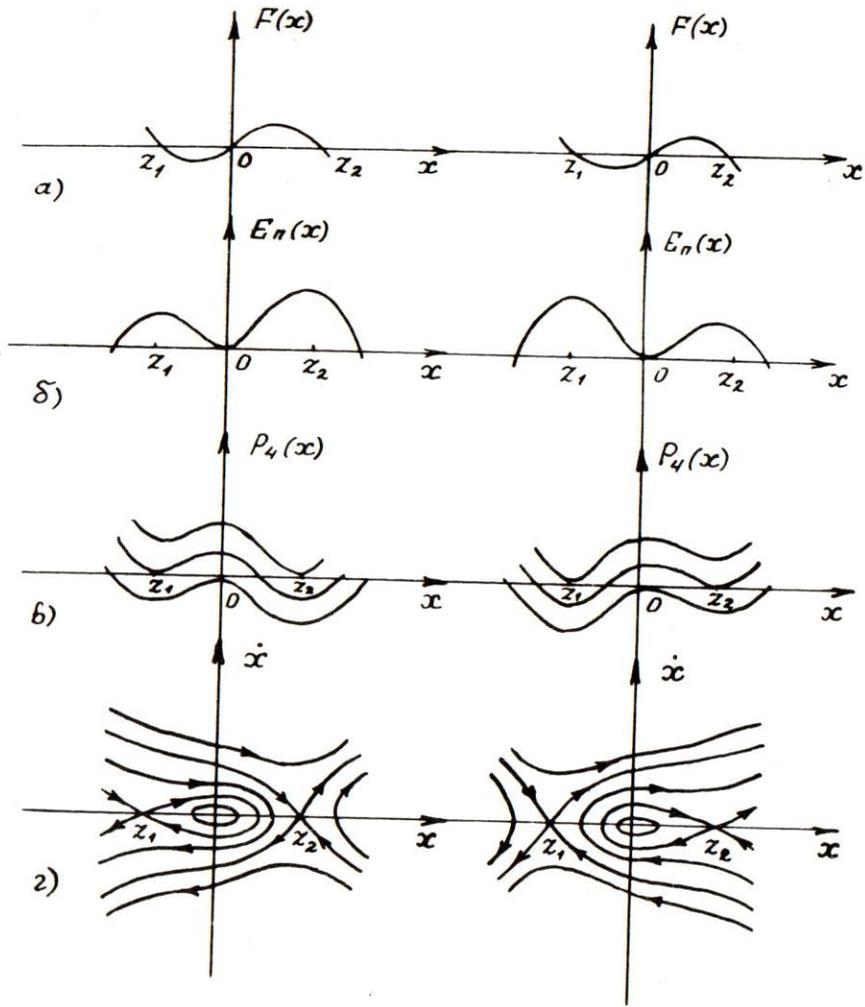
Puc. 10



Puc. 11

Puc. 12

Puc. 13

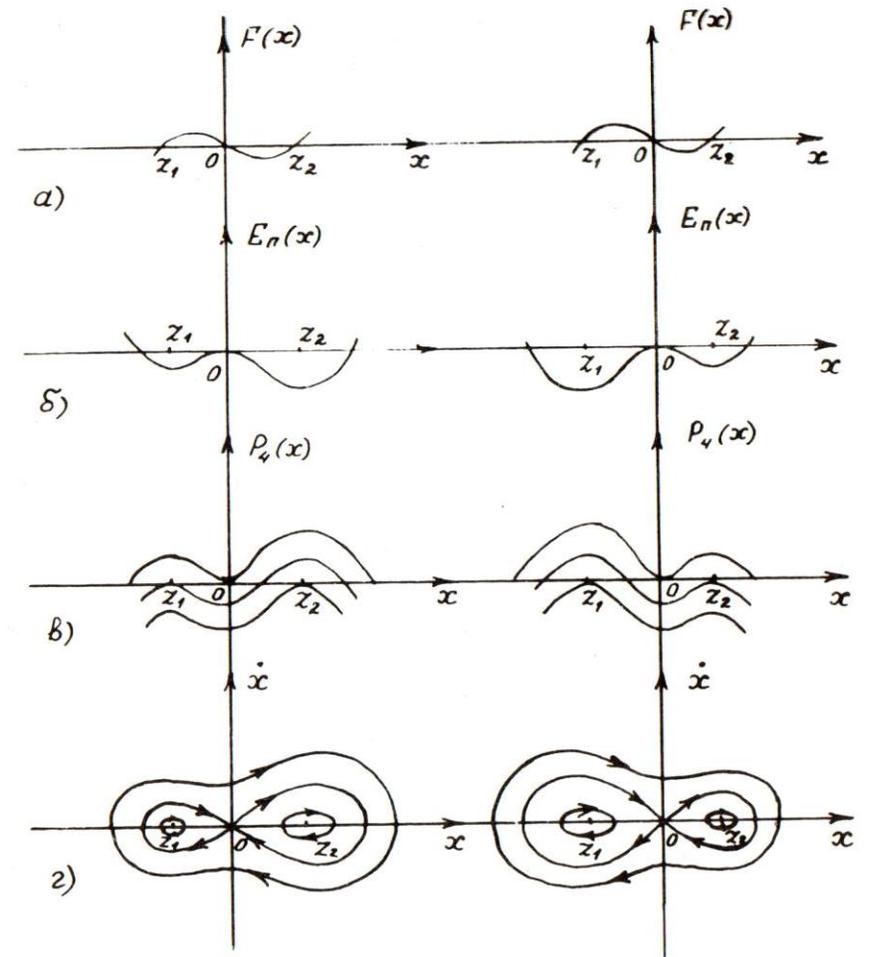


$\mu > 0, \alpha < 0, \beta > 0$

Рис. 14

$\mu > 0, \alpha < 0, \beta < 0$

Рис. 15



$\mu < 0, \alpha < 0, \beta > 0$

Рис. 16

$\mu < 0, \alpha < 0, \beta < 0$

Рис. 17

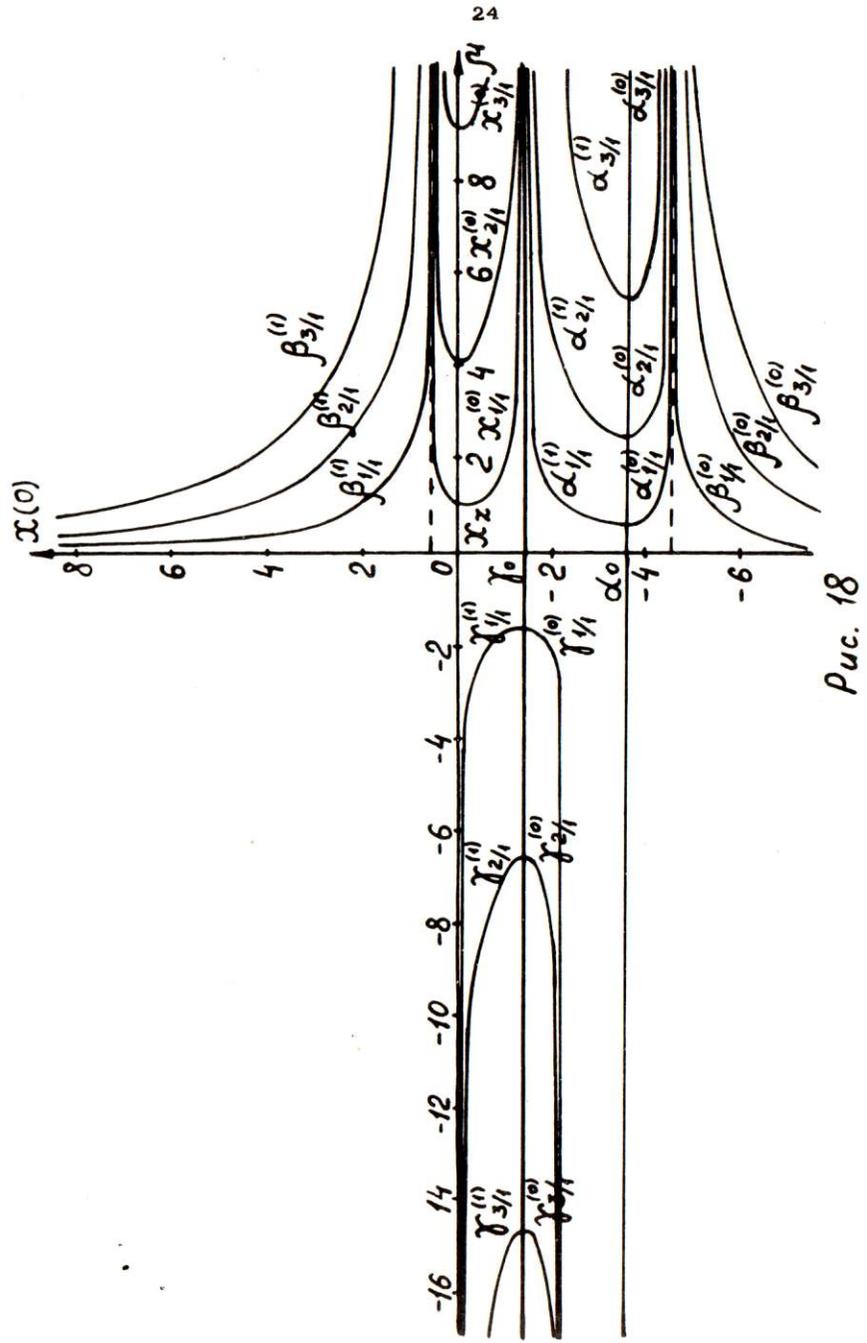


Рис. 18

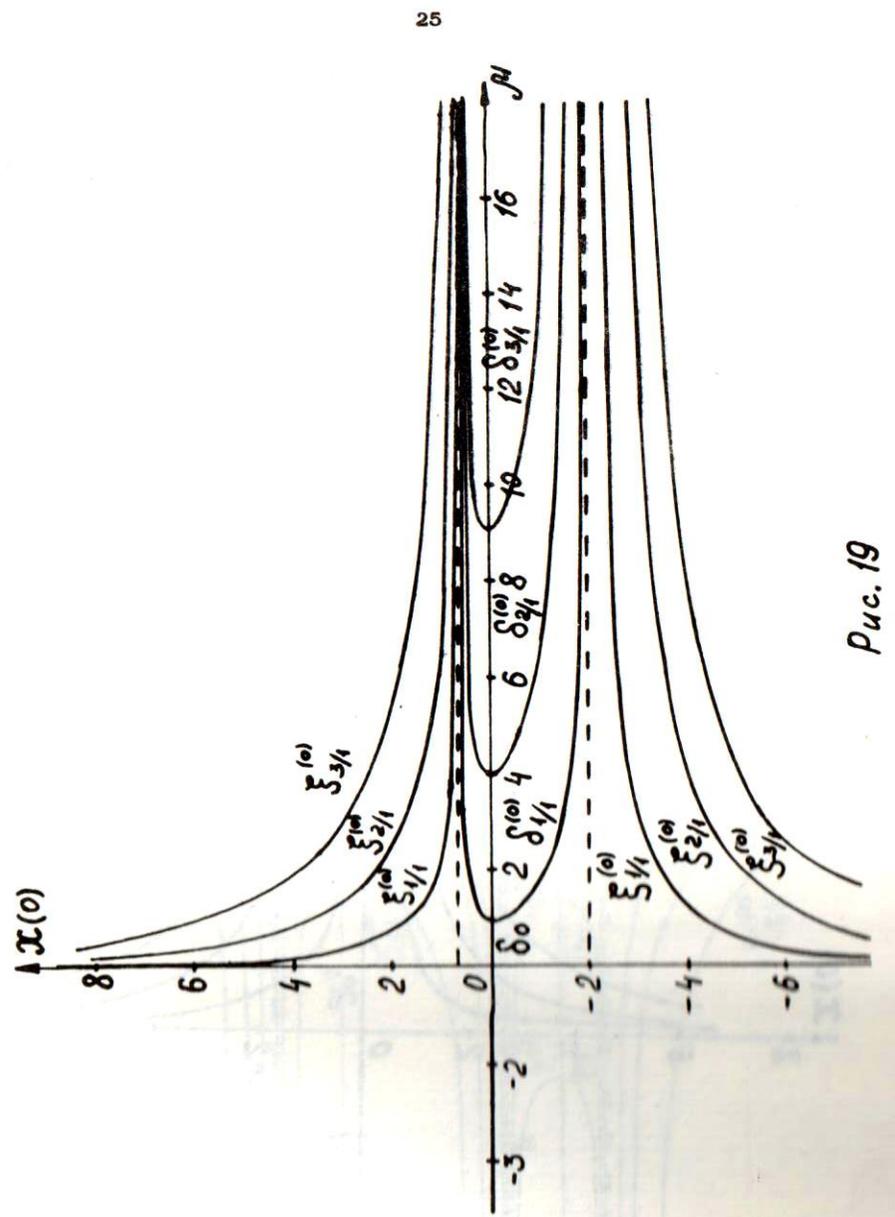


Рис. 19

