



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 71 за 1985 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Златоустов В.А.,
Галактионова О.О.,
Шиповских Т.А.**

**Исследование
периодических решений
вырожденного уравнения
Дюффинга**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Златоустов В.А., Галактионова О.О., Шиповских Т.А. Исследование периодических решений вырожденного уравнения Дюффинга // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1985. № 71. 15 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1985-71>

Препр. Златоустов В.А.

3-67 и др.

Исследование периодич.
решений ... Препр. № 7I

за 1985 г. I б/№

1 б/№

Златоустов Виктор Анатольевич, Галактионова Ольга Олеговна,
Шиповских Татьяна Анатольевна. " Исследование периодических
решений вырожденного уравнения Дюффинга".
Редактор В.А. Сарычев. Корректор В.А. Златоустов.

Подписано к печати 24.04.85г. № Т- 09576. Заказ № 188.
Формат бумаги 60X90 1/16. Тираж 195 экз.
Объем 1,5 уч.-изд.л. Цена 11 коп.

Отпечатано на ротариптах в Институте прикладной математики АН СССР

Москва, Миусская пл. 4.

055 (02)2

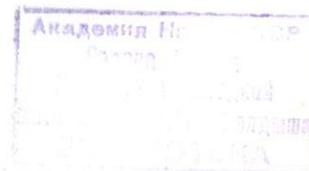
©

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М.В.КЕЛДЫША АН СССР

В.А.Златоустов, О.О.Галактионова, Т.А.Шиповских

Исследование периодических решений вырожденного
уравнения Дюффинга

1 б/№



Москва 1985 г.

Аннотация

Исследуются свойства $2\pi/m$ - периодических решений вырожденного уравнения Дюффинга ($m = 1, 2, 3$). Используя методы теории монотонных операторов, получены некоторые общие результаты о существовании и единственности его нечетных 2π - периодических решений. С помощью численных методов определены области существования и устойчивости различных периодических решений данного уравнения.

Ключевые слова и фразы: уравнение Дюффинга, периодические решения, монотонные операторы, численные методы.

Содержание:

Введение.....	4
1. О некоторых общих свойствах 2π -периодических решений уравнения $\ddot{x} + \beta x^3 = e \sin t$	5
2. Периодические решения однородного уравнения $\ddot{x} + \beta x^3 = 0$	6
2.1 Исследование периодических решений на фазовой плоскости.....	7
2.2 Вывод формул общего решения однородного уравнения.....	7
3. Краевые задачи для уравнения $\ddot{x} + \beta x^3 = e \sin t$...	8
3.1 Стационарные порождающие решения.....	8
3.2 Нестационарные порождающие решения	8
3.3 Решения $x_{n/m}^{(2)}$	11
3.4 Решения $\bar{x}_{n/m}^{(2)}$	12
4. Начальные условия для порождающих решений.....	13
5. Результаты численных расчётов.....	13
5.1 Решения $x_{n/m}^{(2)}$	14
5.2 Решения $\bar{x}_{n/m}^{(2)}$	15
5.3 Метод разложения по малому параметру.....	16
Литература.....	17

Введение.

В работе подробно исследуются периодические решения вырожденного дифференциального уравнения Дюффинга^{х)} без демпфирования

$$\ddot{x} + \beta x^3 = e \sin t, \quad \dot{x} = (dx/dt) \quad (0.1)$$

при произвольных значениях определяющих параметров β и e . Уравнение (0.1) описывает периодические движения, которые характерны для незатухающих вынужденных колебаний систем с нелинейными характеристиками.

Показано (см. раздел I), что свойства периодических решений уравнения (0.1) существенно зависят от знака перед нелинейным членом. При $\beta < 0$ доказывалось существование единственного нечетного 2π -периодического решения уравнения (0.1) при любом e . Если же $\beta > 0$, то (0.1) имеет бесконечное (счетное) множество различных 2π -периодических решений (раздел I).

Получено общее решение уравнения (0.1) при $e = 0$ (см. раздел 2) и проведено систематическое исследование порождающих $2\pi m/n$ -периодических решений ($m = 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots, 5$) (раздел 3). Там же показано, что при малых значениях параметра уравнение имеет классы периодических решений, численное построение которых сводится к решению соответствующих однопараметрических краевых задач [3]. В разделах 4, 5 описаны результаты численного решения различных краевых задач для уравнения (0.1) и определены области существования и устойчивости $2\pi m/n$ -периодических решений ($m = 1, 2, 3$), которые при $e = 0$ переходят в порождающие $2\pi m/n$ -периодические решения ($n = 1, 2, \dots, 5$).

В редких случаях уравнение Дюффинга (0.1) допускает точные периодические решения, выраженные в элементарных функциях. При $\beta = 4/3^2 e^2$ уравнение (0.1) имеет аналитическое 6π -периодическое решение $x = \sin(t/3) \cdot A$, где амплитуда $A = \pm \sqrt{4/27\beta}$.

х) Полным уравнением Дюффинга называется уравнение вида $\ddot{x} + \mu(x + ax^3) + q\dot{x} = e \sin t$, рассмотренное в случае $q = 0$ при произвольных значениях параметров μ, a и e , например, в работах [1, 2, 8].

При $\beta = 0$ уравнение (0.1) имеет 2π -периодическое решение $x = -e \sin t$. Эти решения использовались для проверки правильности работы численных алгоритмов. Необходимо отметить, что все выводы и результаты данной работы справедливы также и для уравнения

$$\ddot{x}_v + \beta' x^3 = e' \sin \nu t', \quad (0.2)$$

которое заменой переменных

$$\beta' = \nu^2 \beta, \quad e' = \nu^2 e, \quad t = \nu t' \quad (0.3)$$

сводится к уравнению (0.1). При этом периоды решений уравнений (0.1) и (0.2) связаны соотношением $T' = T/\nu$.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность В.А.Сарычеву за неоднократные обсуждения работы и полезные замечания.

I. О некоторых общих свойствах 2π -периодических решений уравнения (0.1).

Нетрудно видеть, что, если в уравнении (0.1) сделать замену переменных $x = z/\sqrt{|\beta|}$, $e = \varepsilon/\sqrt{|\beta|}$ то оно преобразуется к эквивалентному виду $\ddot{z} \pm z^3 = \varepsilon \sin t$. Отметим, что свойства периодических решений уравнения (0.1) существенным образом зависят от выбора знака перед нелинейным членом. Рассмотрим сначала задачу

$$\begin{cases} \ddot{z} - z^3 = \varepsilon \sin t \\ z(0) = z(\pi) = 0. \end{cases} \quad (I.1)$$

$$(I.2)$$

Теорема I. При любом ε существует **единственное** решение задачи (I.1), (I.2), причем

$$\|x(t)\|_{C(0,\pi)} \equiv \sup_{x \in (0,\pi)} |x(t)| \leq \sqrt[3]{|\varepsilon|}. \quad (I.3)$$

Доказательство. Существование решения вытекает из априорной оценки (I.3) (это известный результат Скорца-Драгони [4]). Докажем (I.3). Пусть $x \in C^2(0,\pi)$, удовлетворяет (I.1) и равномерно по t ограничено на R^1 . Тогда в любой точке $t = t_m$ положительного максимума функции $x(t)$ имеем: $\ddot{x}(t_m) \leq 0, x(t_m) > 0$ и, следовательно,

$$x^3(t_m) + \varepsilon \sin t_m = \ddot{x}(t_m) \leq 0, \quad (I.4)$$

т.е.

$$x^3(t_m) \leq -e \sin t_m \leq |e| \text{ и } x(t_m) \leq |e|^{1/3}$$

Аналогично выводится оценка снизу, что дает (I.3). Из (I.4) также непосредственно следует, что в случае $e > 0$ решение $x(t)$ не может иметь положительного максимума, а при $e < 0$ — отрицательного минимума (это доказывает второе утверждение теоремы).

Единственность решения вытекает из монотонности оператора $N(x(t)) = -\ddot{x} + x^3$, где $x(t)$ удовлетворяет (I.2). Действительно, пусть существует два решения x_1 и x_2 задачи (I.1), (I.2). Тогда функция $W = x_1 - x_2$ удовлетворяет равенствам

$$\ddot{W} - (x_1^3 - x_2^3) = 0, \quad t \in (0, \pi); \quad W(0) = W(\pi) = 0. \quad (\text{I.5})$$

Умножая уравнение (I.5) скалярно в $L^2(0, \pi)$ на W , после интегрирования по частям получим

$$-\|\dot{W}\|_{L^2(0, \pi)}^2 - (x_1 - x_2, x_1^3 - x_2^3) = 0.$$

Однако, $(x_1 - x_2, x_1^3 - x_2^3) \geq 0$ и следовательно, $\|\dot{x}_1 - \dot{x}_2\|_{L^2(0, \pi)}^2 = \|\dot{W}\|_{L^2(0, \pi)}^2 = 0$ т.е. $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$ и $x_1 = x_2$. Теорема доказана.

Замечание. Оценка (I.3) имеет место для любого ограниченного периодического решения уравнения (0.1).

Рассмотрим теперь задачу

$$\begin{cases} \ddot{z} + z^3 = e \sin t, & t \in (0, \pi) \\ z(0) = z(\pi) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

$$\begin{cases} \ddot{z} + z^3 = e \sin t, & t \in (0, \pi) \\ z(0) = z(\pi) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

Справедлива теорема.

Теорема 2. При любом e краевая задача (I.6), (I.7) имеет бесконечное (счетное) множество различных решений $\{x_k\}$, причём

$$\|x_k\|_{C(0, \pi)} \equiv \sup_{t \in (0, \pi)} |x_k(t)| \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Справедливость этого утверждения вытекает из результата [5] (см. об этом также в [6]).

2. Периодические решения однородного уравнения $\ddot{x} + \beta x^3 = 0$.

При $e = 0$ уравнение (0.1) переходит в

$$\ddot{x} + \beta x^3 = 0, \quad (\text{2.1})$$

интеграл энергии которого имеет вид

$$H(x, \dot{x}) = \dot{x}^2/2 + \beta x^4/4 = E \quad (\text{2.2})$$

где E — постоянная энергии.

2.1. Исследование периодических решений на фазовой плоскости.

Уравнение (2.1) имеет стационарное решение $x_x = 0$. В зависимости от знака β стационарному решению $x_x = 0$ соответствует особая точка типа центр (при $\beta > 0$) или точка типа неустойчивого седла (при $\beta < 0$). При $\beta > 0$ особую точку $x_x = 0$ на фазовой плоскости окружают замкнутые кривые $E = \text{const}$, которые пересекают ось абсцисс в точках $x = \pm \sqrt{4E/\beta}$ и ось ординат в точках $\dot{x} = \pm \sqrt{2E}$ (рис. 1). При $\beta < 0$ уравнение (2.1) не имеет периодических решений, т.к. в окрестности особой точки $x_x = 0$ все фазовые траектории являются незамкнутыми. Таким образом, можно сделать вывод, что нестационарные порождающие решения при $e = 0$ существуют только при $\beta > 0$. При $\beta < 0$ уравнение (2.1) имеет единственное периодическое решение $x_x = 0$. Этот результат хорошо согласуется с теоремой I (см. раздел I).

2.2. Вывод формул общего решения однородного уравнения.

Используя интеграл энергии (2.2), легко проинтегрировать уравнение (2.1) в эллиптических функциях Якоби [7]. Интеграл энергии (2.2) запишем в виде $2\dot{x}^2 = \beta(x^4 - 4E/\beta)$ и правую часть разложим на множители. Имеем $2\dot{x}^2 = -(x^2 - x_1^2)(x^2 + x_2^2)$, где $x_1^2 = x_2^2 = \delta/\beta$, а $\delta^2 = 4E\beta$.

Откуда $\dot{x}^2 = 2E(1 + x^2/x_1^2)(1 - x^2/x_2^2)$ и

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2E(1 + \frac{x^2}{x_1^2})(1 - \frac{x^2}{x_2^2})}.$$

Введем новую переменную \mathcal{Z} по формуле $\dot{x}/x_2 = \sqrt{1 - \mathcal{Z}^2}$ и после несложных выкладок получаем $\sqrt{\delta} dt = dx \sqrt{(1 - \mathcal{Z}^2)(1 - k^2 \mathcal{Z}^2)}$, где $k^2 = x_2^2(x_1^2 + x_2^2) = 1/2$ (т.к. $x_1^2 = x_2^2$). Отсюда находим, что $\text{sn} \sqrt{\delta}(t + t_0) = \mathcal{Z}$, где $t_0 = \text{const}$. Переходя от \mathcal{Z} к x , получаем общее решение в виде эллиптических функций Якоби

$$x = \sqrt{\delta/\beta} \text{cn} \sqrt{\delta}(t + t_0). \quad (\text{2.3})$$

Для удобства дальнейшего изложения запишем общее решение (2.3) в виде нечетной функции [9]

$$x(t + t_0) = k' \sqrt{\delta/\beta} \text{sn}[\sqrt{\delta}(t + t_0)] / \text{dn}[\sqrt{\delta}(t + t_0)].$$

С учетом условия $k^2 = k'^2 = 1/2$ получаем окончательные формулы для общего решения

$$\begin{aligned}x_0 &= \sqrt{\delta/2\beta} \operatorname{sn}[\sqrt{\delta}(t+t_0)]/\operatorname{dn}[\sqrt{\delta}(t+t_0)], \\x_0 &= \sqrt{\delta/\beta} \operatorname{cn}[\sqrt{\delta}(t+t_0)]/\operatorname{dn}^2[\sqrt{\delta}(t+t_0)], \\ \delta &= \sqrt{4E\beta}, \quad k^2 = 1/2, \quad T_0 = 4K(k)/\sqrt{\delta}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Замечание. Для полного уравнения Дюффинга $\ddot{x} + \mu x + \beta x^3 = e \sin t$ рассмотрим два случая, когда $\beta = \mu a > 0$. В первом случае при $\mu > 0, a > 0$ имеем $0 < k^2 < 1/2$, во втором случае при $\mu < 0$ квадрат модуля эллиптических функций изменяется в пределах $1/2 < k^2 < 1$. В случае $\mu > 0, a > 0$ при $k^2 = 0$ существуют точки бифуркации $\mu = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$), а в случае $\mu < 0, a < 0$ точек бифуркации не существует. Если $k^2 > 1/2$, то $|\mu| \rightarrow 0$ и изолинии начальных значений $\dot{x}(0)$ асимптотически стремятся к оси ординат (рис. 6 [8]). Таким образом, случай $k^2 = 1/2$ является предельным для уравнения (0.1), причем в этом случае происходит вырождение полного уравнения Дюффинга в уравнение $\ddot{x} + \mu a x^3 = e \sin t$.

3. Краевые задачи для уравнения (0.1).

Представляют интерес периодические решения уравнения (0.1), переходящие при $e = 0$ в решения порождающего уравнения (2.1).

3.1. Стационарные порождающие решения.

Уравнение (2.1) имеет одно стационарное решение $x_2 = 0$. Можно доказать [9], что стационарное решение $x_2 = 0$ является порождающим для 2π -периодического решения уравнения (0.1) при $e \ll 1$. При достаточно малых e существует единственное нечетное 2π -периодическое решение $x_2(t, e)$, переходящее при $e = 0$ в $x_2 = 0$. Его отыскание сводится к решению краевой задачи

$$x(0) = x(\pi) = 0 \quad (3.1)$$

для уравнения (0.1).

3.2. Нестационарные порождающие решения.

При исследовании $2\pi m$ -периодических решений при $e \ll 1$,

которые при $e = 0$ переходят в $2\pi m/n$ -периодические решения, воспользуемся методом [9]. Общее решение будем использовать в виде (2.4). Функция $x_0(t+t_0)$ является $2\pi m/n$ -периодической и зависит от двух постоянных k и t_0 . Постоянная k в данном случае равна $1/2$. Для определения постоянной t_0 применяется метод Чезари-Хейла [3, 9]. Применяя этот метод, рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + F(x) = e f(x, \dot{x}, t, e) - \rho \dot{x}_0(t+t_0) \\ \int_0^T x(t) \cdot \dot{x}_0(t+t_0) dt = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь \dot{x} - неизвестная функция, ρ - неизвестная постоянная, $x_0(t+t_0)$ - решение уравнения (2.1) с периодом $T_0 = Tm/n$, $T_1 = 2\pi$, t_0 - искомая постоянная, T - период решений уравнения (0.1), m и n - взаимно простые целые положительные числа. При достаточно малых e система (3.2) имеет единственное $2\pi m$ -периодическое решение $x = x(t, t_0, e)$, $\rho = \rho(t_0, e)$. Исследование $2\pi m$ -периодических решений уравнения (0.1) при $e \ll 1$ сводится к определению корней $t_0 = t_0(e)$ бифуркационного уравнения [9]

$$\rho_*(t_0, e) = 0 \quad (3.3)$$

Справедливы соотношения [9]

$$\begin{aligned}x_*(t, t_0 + T_0, e) &= x_*(t, t_0, e), \\ x_*(t + T_1, t_0, e) &= x_*(t, t_0 + T_1, e),\end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\rho_*(t_0, e) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k(e) \cos \frac{2\pi n k t_0}{T_1} + B_k(e) \sin \frac{2\pi n k t_0}{T_1} \right].$$

Тогда

$$x_*(t, -t_0, e) = -x_*(-t, t_0, e),$$

$$\rho_*(t_0, e) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(e) \sin \frac{2\pi n k t_0}{T_1}$$

и бифуркационное уравнение (3.3) имеет тривиальные корни

$$t_0^{(r)} = \frac{T_1 r}{2n} \quad (r = 0, 1, \dots, 2m-1) \quad (3.5)$$

Периодические решения уравнения (0.1) $x^{(r)}(t, e) = x_*(t, t_0^{(r)}, e)$

при некотором a_2 удовлетворяют краевым условиям

$$x^{(r)}(a_2, e) = x^{(r)}(a_2 + T/2, e) = 0.$$

Можно показать [3], что всякое решение однопараметрической краевой задачи

$$x(\alpha_2) = x(\alpha_2 + T/2) = 0, \quad (3.6)$$

где $\alpha_2 = -T_1/2(s, z + \ell m)$, $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, S_1 n + S_2 m = 1$, S_2 — некоторое целое число, является нечетным периодическим решением уравнения (0.1). Таким образом, корням (3.5) бифуркационного уравнения соответствуют периодические решения

$$x_{n/m}^{(z)}(t, e) = x(t, t_0^{(z)}, e). \quad (3.7)$$

Если одно из чисел m или n четно, то уравнение (3.3) имеет еще $2m$ корней вида

$$\bar{t}_0^{(z)} = \pi \cdot (2z + 1) / 2n \quad (z = 0, 1, \dots, 2m - 1), \quad (3.8)$$

которым соответствуют периодические решения

$$\bar{x}_{n/m}^{(z)} = x(t, \bar{t}_0^{(z)}, e). \quad (3.9)$$

Отметим некоторые свойства решений $x_{n/m}^{(z)}$. Справедливы соотношения [3]

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= d_{z+m} \pmod{T/2}, \quad (z = 0, 1, \dots, m-1), \\ x^{(z)}(t + kT_1, e) &= x_*(t + kT_1, t_0^{(z)}, e) = \\ &= x_*(t, t_0^{(z)} + kT_1, e) = x_*(t, t_0^{(s)}, e) = x^{(s)}(t, e), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $S = [0, m-1]$, $s = z + 2nk \pmod{2m}$, $S \neq z$ при $k = 1, 2, \dots, m-1$; (3.11)

$$x^{(s)}(t, e) = x^{(z)}(t + T_1/2, -e), \quad S' = z + n \pmod{2m}.$$

Из (3.10) следует, что решение $x_{n/m}^{(z)}(t, e)$ и $x_{n/m}^{(z+m)}(t, e)$ удовлетворяют одинаковым краевым условиям. Справедливо также, что если $x(t) - T$ — периодическое решение уравнения (0.1), то и $y(t) = x(t + kT_1)$ — тоже T — периодическое решение этого уравнения. Решения (3.7) разбиваются на группы $\mathcal{G}_0 = \{x^{(2s)}(t, e);$

$S = 0, 1, \dots, m-1\}$ и $\mathcal{G}_1 = \{x^{(2s+1)}(t, e); S = 0, 1, \dots, m-1\}$, причём $\mathcal{G}_0 = \{x^{(2s)}(t + kT_1, e); k = 0, 1, \dots, m-1\}$, $\mathcal{G}_1 = \{x^{(2s+1)}(t + kT_1, e); k = 0, 1, \dots, m-1\}$, при любом $S = 0, 1, \dots, m-1$. Для построения всех решений достаточно найти по одному представителю из каждой группы. Для решений уравнения (0.1) справедливо

$$x_*(t + T_1/2, t_0, e) = x_*(t, t_0 + T_1/2, -e). \quad (3.12)$$

Вследствие (3.12), при $S = z + n \pmod{2m}$, $x^{(z)}(t, e) = x^{(z)}(t + T_1/2, -e)$, и поэтому решения (3.7) достаточно найти лишь при $e > 0$

3.3. Решения $x_{n/m}^{(z)}$.

Сформулируем краевые задачи для нахождения нечетных $2\pi m$ — периодических решений (3.7) ($m = 1, 2, 3$).

2π — периодические решения $x_{n/1}^{(z)}$, $x_2(t, e)$. Численное определение решений $x_2(t, e)$, $x_{n/1}^{(z)}$ ($z = 0, 1$), ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) сводится к решению однопараметрической краевой задачи

$$x(0) = x(\pi) = 0 \quad (3.13)$$

для уравнения (0.1).

4π — периодические решения $x_{n/2}^{(z)}$. Для решений $x_{n/2}^{(z)}$ ($n = 1, 3, 5$) ($z = 0, 1, 2, 3$) справедливы соотношения (3.4), (3.10), (3.11), (3.12) и, следовательно,

$$\begin{aligned} x_{n/2}^{(z)}(t, e) &= x_{n/2}^{(z)}(t + 2\pi, e), \\ x_{n/2}^{(3)}(t, e) &= x_{n/2}^{(1)}(t + 2\pi, e), \\ x_{n/2}^{(z)}(t + 2\pi, e) &= -x_{n/2}^{(z)}(t, -e), \quad (n = 1, 3, 5; z = 0, 1, 2, 3); \\ x_{n/2}^{(1)}(t, e) &= -x_{n/2}^{(0)}(t - \pi, e), \quad (n = 1, 5); \\ x_{3/2}^{(1)}(t, e) &= -x_{3/2}^{(0)}(t + \pi, e). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Вследствие соотношений (3.14) достаточно найти решения $x_{1/2}^{(0)}$, $x_{3/2}^{(0)}$, $x_{5/2}^{(0)}$, решая для уравнения (0.1) краевую задачу

$$x(0) = x(2\pi) = 0, \quad x(\pi) \neq 0. \quad (3.15)$$

6π — периодические решения $x_{n/3}^{(z)}$. Для нахождения нечетных решений $x_{n/3}^{(z)}$ ($n = 1, 2, 4, 5$), ($z = 0, 1, \dots, 5$) достаточно найти по одному представителю из каждой группы \mathcal{G}_0 , \mathcal{G}_1 , описанных выше. Справедливы соотношения [12] для $n = 1, 4$:

$$\begin{aligned} x_{n/3}^{(2)}(t, e) &= x_{n/3}^{(0)}(t+2\pi, e); \quad x_{n/3}^{(4)}(t, e) = x_{n/3}^{(0)}(t+4\pi, e); \\ x_{n/3}^{(3)}(t, e) &= x_{n/3}^{(3)}(t+2\pi, e); \quad x_{n/3}^{(1)}(t, e) = x_{n/3}^{(3)}(t+4\pi, e); \end{aligned} \quad (3.16)$$

для $n = 2, 5$:

$$\begin{aligned} x_{n/3}^{(4)}(t, e) &= x_{n/3}^{(0)}(t+2\pi, e); \quad x_{n/3}^{(2)}(t, e) = x_{n/3}^{(0)}(t+4\pi, e); \\ x_{n/3}^{(1)}(t, e) &= x_{n/3}^{(3)}(t+2\pi, e); \quad x_{n/3}^{(5)}(t, e) = x_{n/3}^{(3)}(t+4\pi, e). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Достаточно найти нечетные 6π -периодические решения $x_{n/3}^{(0)}, x_{n/3}^{(3)}$ ($n = 1, 2, 4, 5$), решая краевую задачу

$$x(0) = x(3\pi) = 0, \quad x(\pi) = 0 \quad (3.18)$$

для уравнения (0.1).

3.4. Решения $\bar{x}_{n/m}^{(\nu)}$.

Рассмотрим теперь решения $\bar{x}_{n/m}^{(\nu)}$, соответствующие корням (3.8) бифуркационного уравнения (3.3),

$$\bar{x}^{(\nu)}(\bar{a}_2, e) = \bar{x}^{(\nu)}(\bar{a}_2 + \pi/2, e), \quad (3.19)$$

$$\bar{a}_2 = -\pi [s, (2z+1)/2 + \ell m] / 2.$$

Решения (3.9) также разбиваются на группы $\bar{a}_0 = \{\bar{x}^{(2s)}(t, e); s = 0, 1, \dots, m-1\}$ и $\bar{a}_1 = \{\bar{x}^{(2s+1)}(t, e); s = 0, 1, \dots, m-1\}$. Для построения всех решений (3.9) достаточно найти по одному представителю из каждой группы при $e > 0$. Если одно из чисел m, n четно, то решения группы \bar{a}_1 (\bar{a}_1) выражаются через решения группы \bar{a}_0 (\bar{a}_0). Это позволяет существенно сократить вычисления.

2π -периодические решения $\bar{x}_{n/1}^{(\nu)}$. Для решений $\bar{x}_{n/1}^{(\nu)}$ ($n = 2, 4; \nu = 0, 1$) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n/1}^{(0)}(t+\pi, e) &= -\bar{x}_{n/1}^{(0)}(t, e), \\ \bar{x}_{n/1}^{(0)}(t, -e) &= -\bar{x}_{n/1}^{(0)}(t, e), \\ \bar{x}_{n/1}^{(1)}(t, e) &= -\bar{x}_{n/1}^{(1)}(t, e). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для нахождения решений $\bar{x}_{2/1}^{(0)}, \bar{x}_{4/1}^{(0)}$ решалась краевая задача для уравнения (0.1)

$$\dot{x}(\pi/2) = \dot{x}(3\pi/2) = 0. \quad (3.21)$$

4π -периодические решения $\bar{x}_{n/2}^{(\nu)}$. Для решений $\bar{x}_{n/2}^{(\nu)}$ ($n = 1, 3, 5; \nu = 0, 1, 2, 3$) справедливы те же соотношения (3.14), что и для $\bar{x}_{n/2}^{(\nu)}$. Достаточно исследовать решения $\bar{x}_{1/2}^{(0)}, \bar{x}_{3/2}^{(1)}, \bar{x}_{5/2}^{(0)}$, которые удовлетворяют краевым усло-

виям

$$\dot{x}(\pi/2) = \dot{x}(5\pi/2) = 0, \quad \dot{x}(3\pi/2) \neq 0. \quad (3.22)$$

6π -периодические решения $\bar{x}_{n/3}^{(\nu)}$. В этом случае для исследования всех решений $\bar{x}_{n/3}^{(\nu)}$ ($n = 2, 4; \nu = 0, \dots, 5$) достаточно найти решения $\bar{x}_{2/3}^{(0)}, \bar{x}_{4/3}^{(2)}$ при помощи численного решения краевой задачи

$$\dot{x}(\pi/2) = \dot{x}(7\pi/2) = 0, \quad \dot{x}(5\pi/2) \neq 0 \quad (3.23)$$

для уравнения (0.1).

4. Начальные условия для порождающих решений.

Начальные условия для порождающих $2\pi m/n$ -периодических решений находим из (2.4) с учетом значения постоянной $t_0^{(\nu)}$ (3.5) и условия $T_0 = 2\pi m/n$,

$$\dot{x}_0(0) = \pm 8k'/\sqrt{\beta}, \quad x_0(0) = 0, \quad \delta = 4k^2(k)n^2/\alpha^2 m^2, \quad k'^2 = k^2 = 1/2. \quad (4.1)$$

Здесь для всех значений m верхний знак соответствует значению $\nu = 0$, а нижний знак соответствует $\nu = 1$ ($m = 1$), $\nu = 2$ ($m = 2$), $\nu = 3$ ($m = 3$). Зависимость $\dot{x}(0)$ от β для порождающих решений при $m = 1$ изображена на рис. 3, а для значений $m = 2$ и $m = 3$ на рис. 10 и 14 соответственно. Стационарному порождающему решению $\bar{x}_x = 0$ соответствует ось абсцисс (рис. 3). Начальные условия для порождающих $2\pi m/n$ -периодических решений $\bar{x}_{n/m}^{(\nu)}$ получены из (2.4) с учетом (3.8) для значений $m = 1, 2, 3$ и имеют следующий вид:

$$x_0(\pi/2) = \pm \sqrt{\delta/\beta}, \quad \sqrt{\delta} = 2k(k)n/\pi m, \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_0(\pi/2) = 0, \quad k^2 = 1/2.$$

На рис. 19, 22, 26 изображены начальные условия (зависимость $x(\pi/2)$ от β) для порождающих решений $\bar{x}_{n/1}^{(\nu)}, \bar{x}_{n/2}^{(\nu)}, \bar{x}_{n/3}^{(\nu)}$ - по одному представителю из каждой группы. На рисунках видно соответствие знака в (4.2) определенному значению $\nu = 0, 1, \dots, 2m-1$ в зависимости от m .

5. Результаты численных расчетов.

В области $E = \{e, \beta : |e| < 100, \beta > 0\}$ были исследованы 2π -, 4π -, 6π -периодические решения уравнения (0.1), переходящие при $e = 0$ в порождающие $2\pi m/n$ -периодические

решения $x_{n/m}^{(\tau)}$, $\bar{x}_{n/m}^{(\tau)}$, x_x . Краевые задачи для отыскания этих решений при $e \neq 0$ сформулированы в разделе 3. Устойчивость найденных решений исследовалась с помощью интегрирования уравнения в вариациях $\dot{y} + 3\beta xy = 0$. Участки изолиний, где решения устойчивы ($|A| < 1$) (здесь $A = 1/2\{y_1(\tau) + y_2(\tau)\}$; $y_1(t)$, $y_2(t)$ - решения уравнения в вариациях с начальными условиями $y_1(0) = y_2(0) = 1$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$), обозначены на графиках штриховкой. Для стационарного положения равновесия $x_x = 0$ имеем $A = 1$, следовательно, это положение равновесия соответствует критическому случаю и находится на границе области устойчивости. Численный анализ $2im$ - периодических решений проводился для значения $\beta = 1$, что является достаточным для построения решений уравнения (0.1) при любом значении $\beta > 0$.

5.1. Решения $x_{n/m}^{(\tau)}$.

2π - периодические решения $x_{n/1}^{(\tau)}$.

Решения $x_{1/1}^{(0)}$, $x_{3/2}^{(0)}$ существуют при $0 \leq e < 20$ и сливаются в точке бифуркации P_1 ($e = 19.5$, $\beta = 1$) (рис. 4). Решения x_x , $x_{1/1}^{(1)}$ сливаются в точке бифуркации P_2 ($e = 0.44$, $\beta = 1$). Решение x_x - устойчиво при $0 < e < 0.44$, а решение $x_{1/1}^{(1)}$ - неустойчиво. Решения $x_{2/1}^{(0)}$, $x_{2/1}^{(1)}$ изображены на рис. 6. В диапазоне $2.25 < e < 4$ существуют еще два новых решения, не имеющие порождающих. Их возникновение обусловлено нелинейными свойствами уравнения (0.1). Решения $x_{3/1}^{(0)}$, $x_{5/1}^{(0)}$ (рис. 7) сливаются в точке бифуркации P_6 ($e = 85$, $\beta = 1$). В точке ($e = 20.5$, $\beta = 1$) возникают новые решения. Решения $x_{5/1}^{(1)}$, $x_{3/1}^{(1)}$ сливаются с новыми решениями в точках, где касательные к изолиниям вертикальны.

Решения $x_{4/1}^{(0)}$, $x_{4/1}^{(1)}$ изображены на рис. 8. Они существуют при $0 < e < 39.2$. Внутри этой области, при $22.5 < e < 39.2$ наряду с решениями $x_{4/1}^{(0)}$, $x_{4/1}^{(1)}$, существуют еще два новых решения, не имеющие порождающих при $e = 0$. Все четыре решения сливаются в точке бифуркации P_9 ($e = 21.5$, $\beta = 1$).

Решение $x_{5/1}^{(0)}$ изображено на рис. 9, где приведена зависимость $\bar{x}(0)$ от e . Решение $x_{5/1}^{(0)}$ исследовалось в диапазоне $0 < e < 100$. При $55.5 < e < 70.1$ возникают еще два новых реше-

ния. Решение $x_{5/1}^{(0)}$ сливаются с новыми решениями в точке P_{11} ($e = 70.1$, $\beta = 1$) и все три решения сливаются в точке P_{10} ($e = 55.5$, $\beta = 1$).

4π - периодические решения $x_{n/2}^{(\tau)}$. Решения $x_{n/2}^{(\tau)}$ ($n = 1, 3, 5$) ($\tau = 0, 2$) получены в результате решения краевой задачи (0.1), (3.15). При $e = 0$ эти решения переходят в порождающие решения $x_{n/m}^{(\tau)}$ ($n = 1, 3, 5$; $\tau = 0, 2, 5$), начальные значения для которых изображены на рис. 22. Решения $x_{n/2}^{(\tau)}$ ($n = 1, 3, 5$) ($\tau = 0, 2$) представлены на рис. 11 - 13. На этих рисунках отмечены точки слияния периодических решений между собой, а также с новыми решениями, не имеющими порождающих при $e = 0$. Участки изолиний, соответствующие устойчивым решениям, обозначены штриховкой.

6π - периодические решения $x_{n/3}^{(\tau)}$. Начальные условия для порождающих решений $x_{n/3}^{(\tau)}$ изображены на рис. 14. В результате численного решения краевой задачи (0.1), (3.17) эти решения были продолжены в область больших значений e . Решения $x_{n/3}^{(\tau)}$ ($n = 1, 2, 4, 5$) ($\tau = 0, 3$) представлены на рис. 15 - 18. Решения $x_{1/3}^{(0)}$, $x_{1/3}^{(3)}$ и $x_{2/3}^{(0)}$, $x_{2/3}^{(3)}$ склеиваются в точках бифуркации D_1 и D_2 соответственно. Новые решения в этом случае не существуют. Они возникают внутри диапазона существования решений $x_{4/3}^{(\tau)}$ ($\tau = 0, 3$) (рис. 17) и $x_{5/3}^{(\tau)}$ ($\tau = 0, 3$) (рис. 18). На этих рисунках представлено ветвление 6π - периодических решений.

5.2. Решения $x_{n/m}^{(\tau)}$.

2π - периодические решения $x_{n/1}^{(\tau)}$. Зависимость $x(n/2)$ от β для порождающих $2im/n$ - периодических решений $\bar{x}_{n/1}^{(\tau)}$ ($n = 2, 4$; $\tau = 0, 1$) изображена на рис. 19. В результате решения краевой задачи (0.1), (2.20) были получены зависимости $x(n/2)$ от e для 2π - периодических решений $\bar{x}_{2/1}^{(\tau)}$, $\bar{x}_{4/1}^{(\tau)}$ ($\tau = 0, 1$) (рис. 20, 21).

Решения $\bar{x}_{2/1}^{(\tau)}$, $\bar{x}_{4/1}^{(\tau)}$ ($\tau = 0, 1$) сливаются попарно в точках бифуркации E_1 и E_4 соответственно. Во всем диапазоне существования решений $\bar{x}_{2/1}^{(\tau)}$ ($\tau = 0, 1$) ($0 < e < 17.5$) краевая задача имеет два решения. В области существования решений $\bar{x}_{4/1}^{(\tau)}$ ($\tau = 0, 1$) существует диапазон ($28.5 < e < 36.2$), где

наряду с решениями $\bar{x}_{4/4}^{(z)}$ появляются два новых решения. В точках бифуркации E_2 ($e = 36.2, \beta = 1$) и E_3 ($e = 28.1, \beta = 1$) новые решения сливаются со старыми решениями.

4 π - периодические решения $\bar{x}_{n/2}^{(z)}$. Численное построение решений $\bar{x}_{n/2}^{(z)}$ ($n = 1, 3, 5; z = 0, 1, 2, 3$) сводится к решению краевой задачи (0.1), (3.22). Решения $\bar{x}_{1/2}^{(z)}$, $\bar{x}_{3/2}^{(z)}$, $\bar{x}_{5/2}^{(z)}$ представлены на рис. 23 - 25. Эти решения переходят при $e = 0$ в порождающие решения $\bar{x}_{n/2}^{(z)}$ (рис. 22). На рис. 23 - 25 обозначены точки слияния решений $\bar{x}_{n/2}^{(z)}$ как между собой, так и с новыми решениями, не имеющими порождающих. Области устойчивости этих решений обозначены штриховкой.

6 π - периодические решения $\bar{x}_{n/3}^{(z)}$. Как отмечалось выше, для исследования всех решений $\bar{x}_{n/3}^{(z)}$ ($n = 2, 4; z = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) достаточно построить лишь решения $\bar{x}_{2/3}^{(z)}$, $\bar{x}_{4/3}^{(z)}$. Эти решения получены в результате решения краевой задачи (0.1), (2.22). Зависимость $x(x/2)$ от e для этих решений изображена на рис. 27 - 28. На рис. 26 представлена зависимость $x(x/2)$ от β для порождающих решений при $e = 0$. Решения $\bar{x}_{2/3}^{(z)}$ и решения $\bar{x}_{4/3}^{(z)}$ склеиваются попарно в точках бифуркации Φ_1 ($e = 0.41$) и Φ_2 ($e = 1.6$).

В качестве примера на рис. 29 - 31 представлены нечетные 2π -, 4π -, 6π - периодические решения вида $x_{n/m}^{(z)}$. На рис. 32 - 34 представлены 2π -, 4π -, 6π - периодические решения вида $\bar{x}_{n/m}^{(z)}$. На рис. 35, 37 представлено решение $x_{\bar{x}}$, соответствующее $\beta = -1$.

5.3. Метод разложения по малому параметру.

В заключение приведем 2π -периодическое решение $x_x(t, e)$ уравнения (0.2) при $e \ll 1$, полученное в виде разложения по малому параметру e . Периодическое решение ищем в виде

$$x = ex_1 + e^2x_2 + e^3x_3 + e^4x_4 + e^5x_5 + e^6x_6 + o(e^7) \quad (5.1)$$

и получаем единственное разложение по целым степеням e . Так как уравнение $\ddot{x} + \beta x^3 = e \sin vt$ при $e = 0$ не имеет точек бифуркации, то не существует разложения в ряд по степеням $e^{1/3}$

[10]. Искомое разложение получаем в следующем виде:

$$x_x(t, e) = -e(\sin vt)/v^2 + \frac{e^3}{4v^2}(-3\sin vt + \frac{\sin 3vt}{9}) + \frac{3e^5\beta^2}{144v^4}(-82\sin vt + \frac{29}{9}\sin^3 vt - \frac{\sin 5vt}{25}) + o(e^7) \quad (5.2)$$

Нетрудно видеть, что

$$\dot{x}(0) = -e/v - \frac{2\beta e^3}{3v^3} - \frac{68\beta^2 e^5}{45v^5} + o(e^7) \quad (5.3)$$

Рассмотрим случай $v = 1$. Имеем при $\beta = 1$

$$\dot{x}(0) = -e - 2e^3/3 - 68e^5/45 + \dots, \quad (5.4)$$

аналогично, при $\beta = -1$ получаем

$$\dot{x}(0) = -e + 2e^3/3 - 68e^5/45 + \dots \quad (5.5)$$

Таким образом, 2π -периодическое решение $x_x(t, e)$ существует как при $\beta > 0$ (рис. 5, 36), так и при $\beta < 0$ (рис. 35, 37, 38). При $\beta < 0$ решение, продолженное из стационарного порождающего решения $x_x = 0$, обозначено через $x_x^-(t, e)$ (рис. 35). Результаты численного исследования краевых задач для решений $x_x(t, e)$ и $x_x^-(t, e)$ хорошо согласуются с разложениями (5.4), (5.5).

На рис. 36, являющимся иллюстрацией зависимости (0.3) от параметра v в случае уравнения (0.2), изображено 2π -периодическое решение $x_x(t, e)$ соответственно при значениях параметра $v = 1$ и $v = 2$.

Литература

1. О.О. Галактионова, В.А. Златоустов. 2π -периодические решения уравнения Дюффинга. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1980, № 128.
2. О.О. Галактионова, В.А. Златоустов. Об одном классе 2π -периодических решений уравнения Дюффинга. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1981, № 81.
3. В.А. Сарычев, В.А. Златоустов, В.В. Сазонов. Численное исследование периодических решений дифференциальных уравнений второго порядка. Отчет ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1976, ВИНТИ Деп. № 908-77.

4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2, М., Иностранная литература, 1954.

5. Ehrmann H. Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben bei gewöhnlicher nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. - Math. Ann., 1957, v. 134, p. 167 - 194.

6. В.А.Плисс. Нелокальные проблемы теории колебаний. "Наука", М.,-Л., 1964 г.

7. А.Н.Дуравский. Справочник по эллиптическим функциям. АН СССР, М., 1941.

8. О.О.Галактионова, В.А.Златоустов, 2π -периодические решения уравнения Дюффинга при малых значениях амплитуды вынуждающей силы. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1980 г., № 33.

9. В.А.Сарычев, В.В.Сазонов. Об одном методе исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1976, № 105.

10. И.Г.Малкин. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., 1956.

11. Т.А.Шиповских. $2\pi m$ -периодические решения уравнения Дюффинга в вырожденном случае. Труды МЭТИ, 1985 г.

12. В.А.Сарычев, В.А.Златоустов, В.В.Сазонов. Вынужденные периодические колебания математического маятника. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1977, № 32.

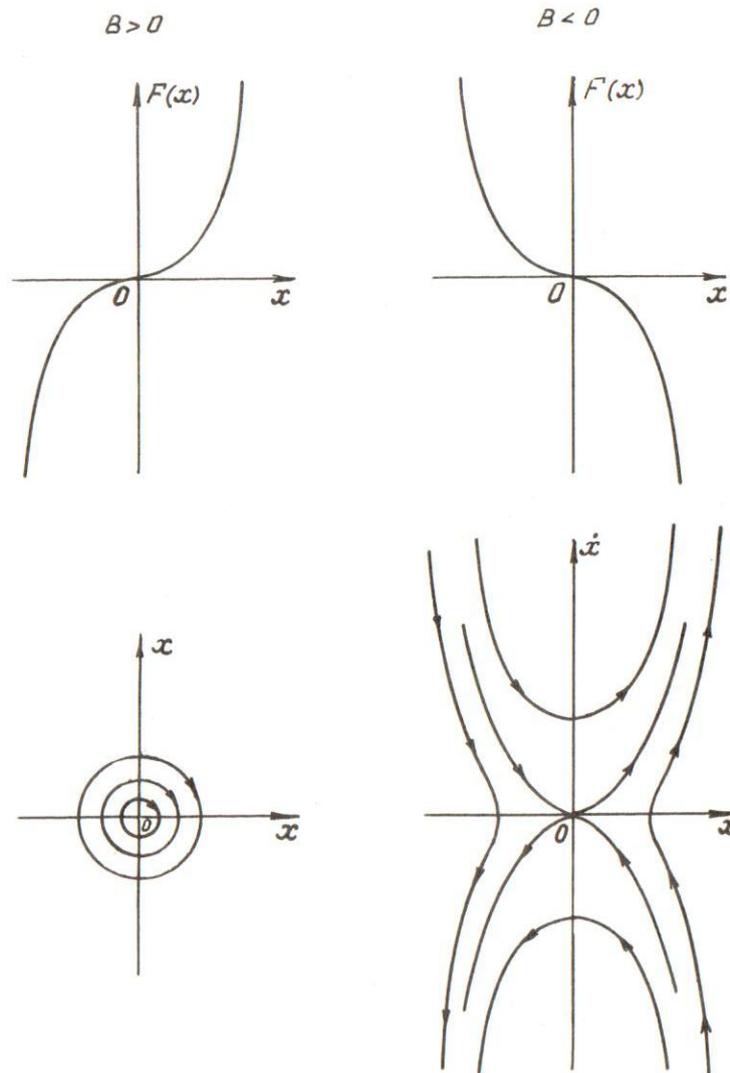
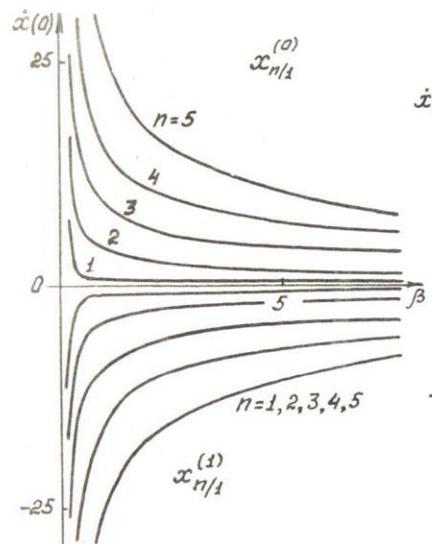
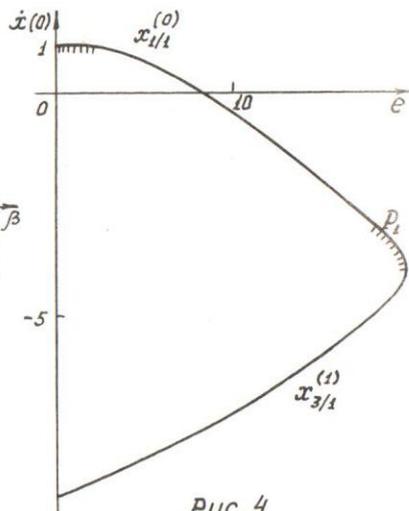


Рис. 1.

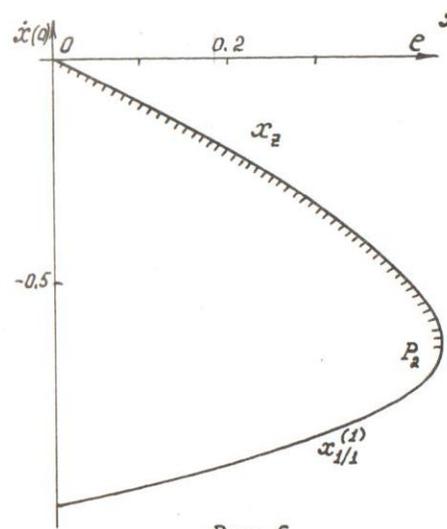
Рис. 2.



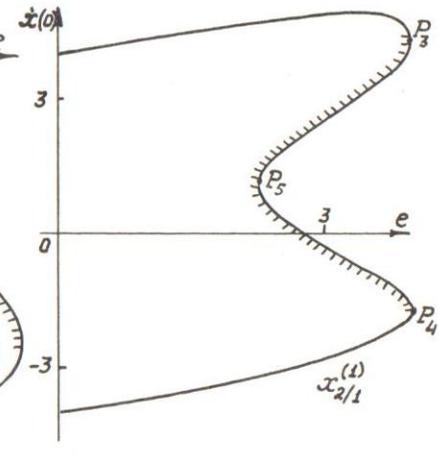
Puc. 3



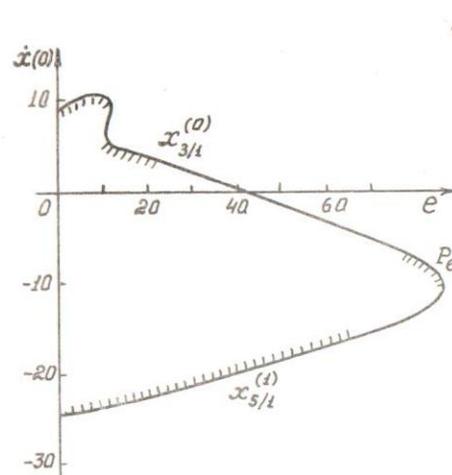
Puc. 4



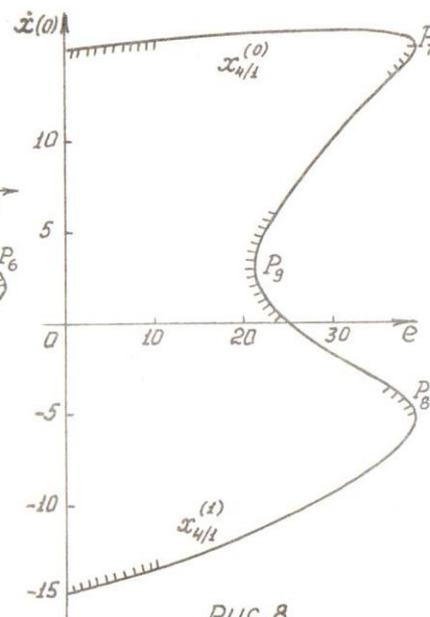
Puc. 5



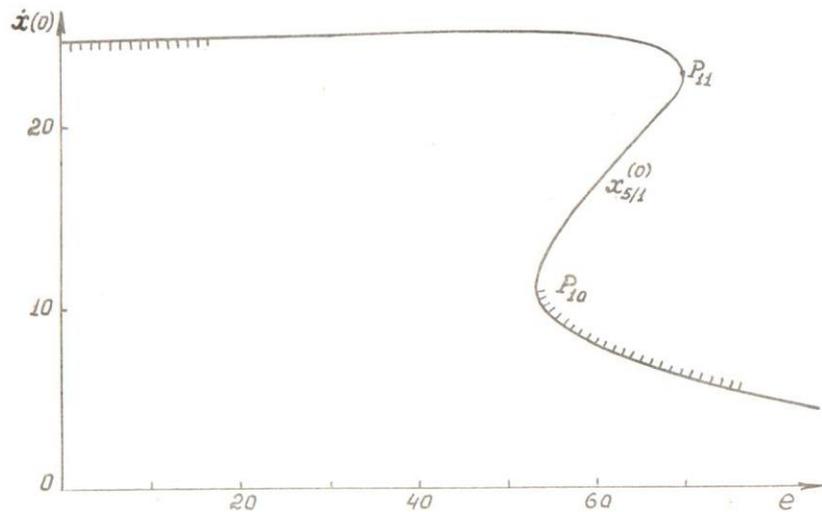
Puc. 6



Puc. 7



Puc. 8



Puc. 9

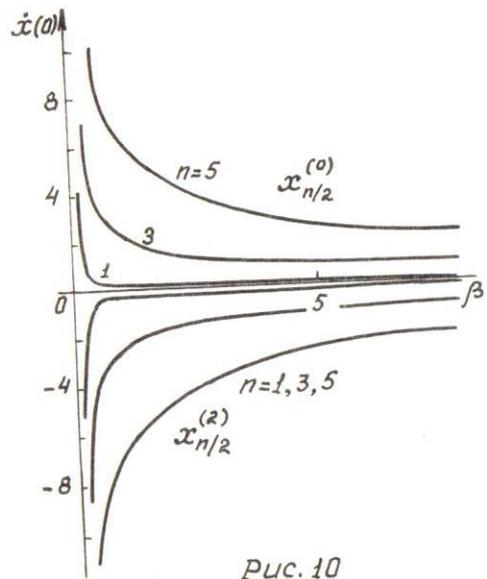


Рис. 10

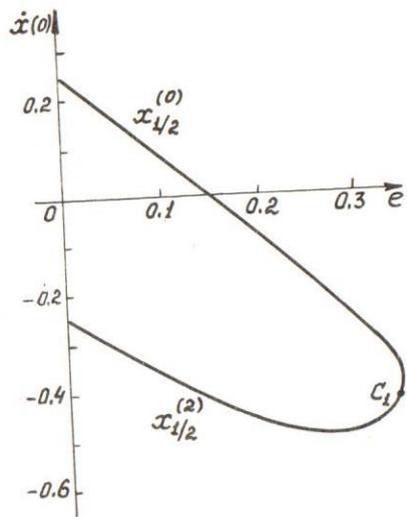


Рис. 11

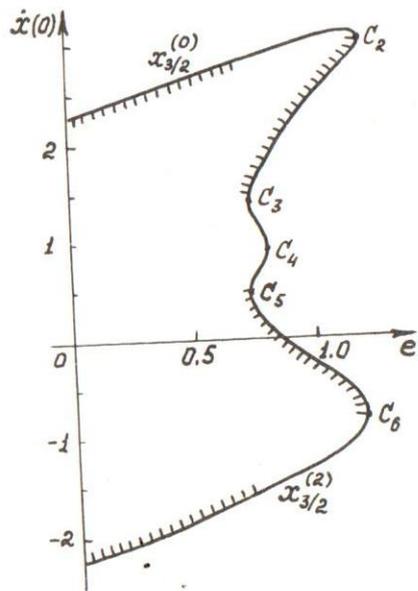


Рис. 12

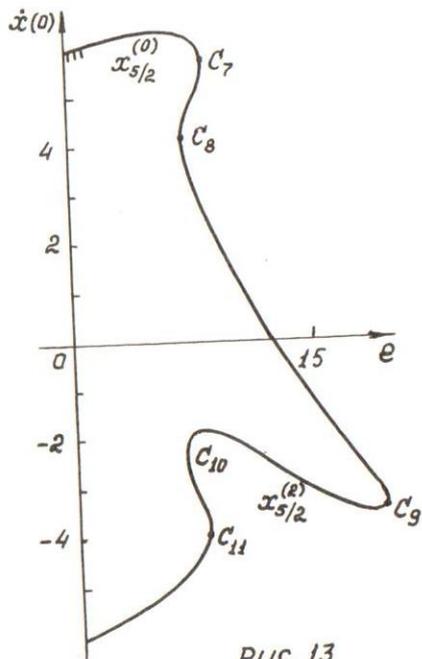


Рис. 13

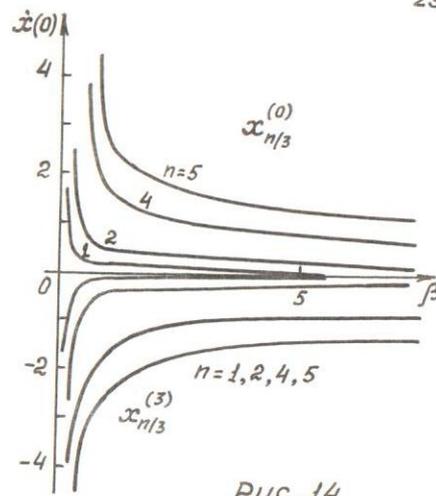


Рис. 14

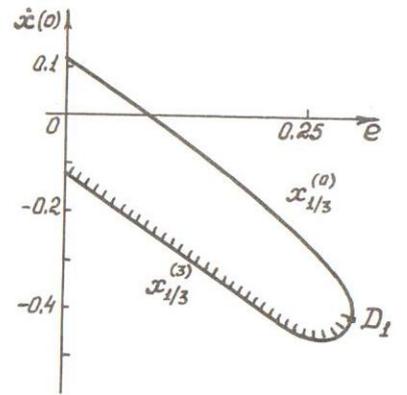


Рис. 15

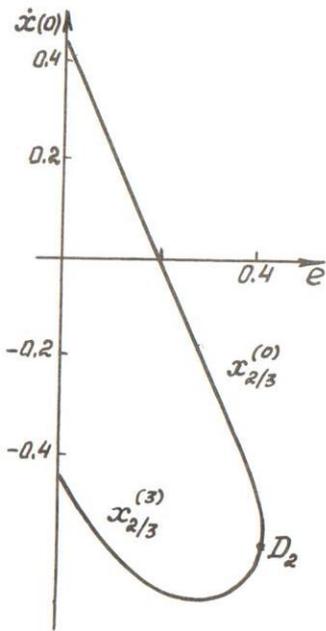


Рис. 16

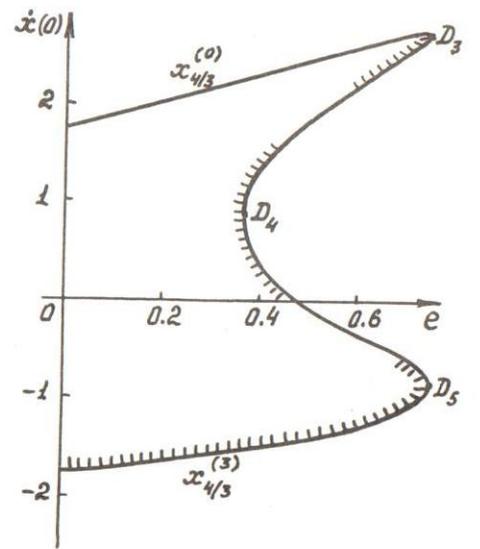


Рис. 17

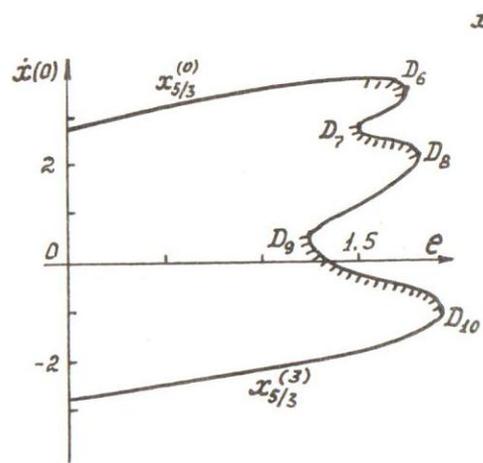


Рис. 18

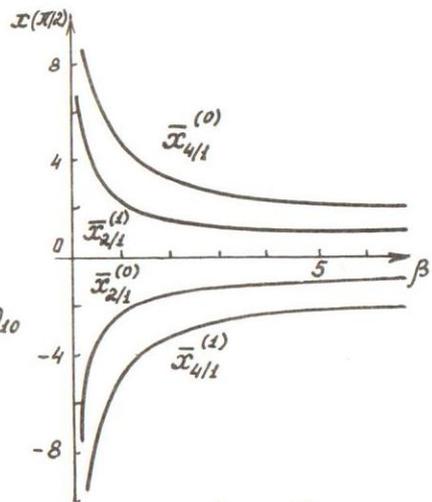


Рис. 19

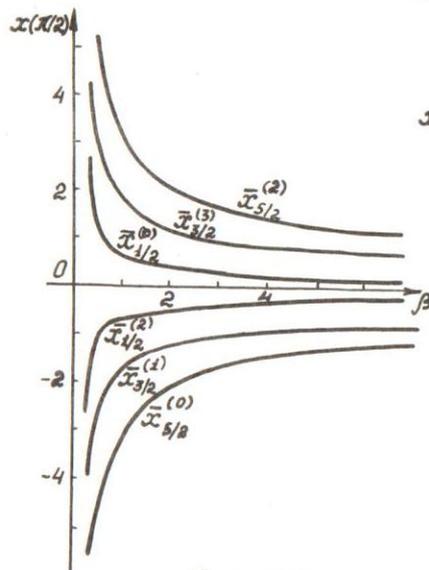


Рис. 22

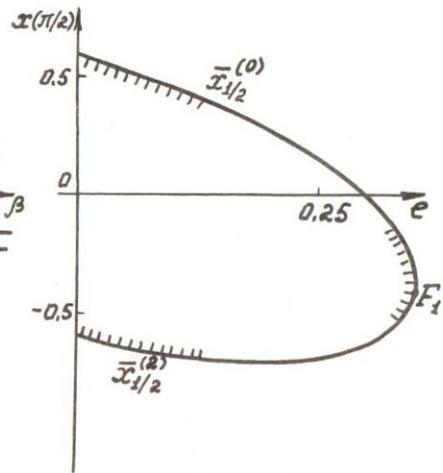


Рис. 23

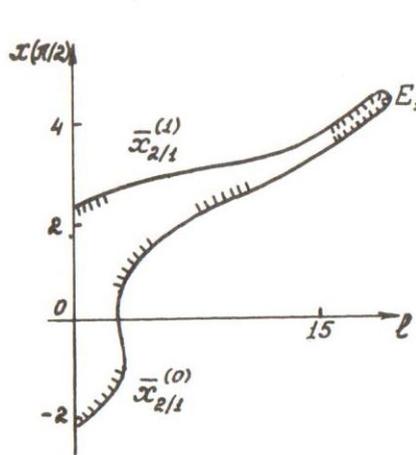


Рис. 20

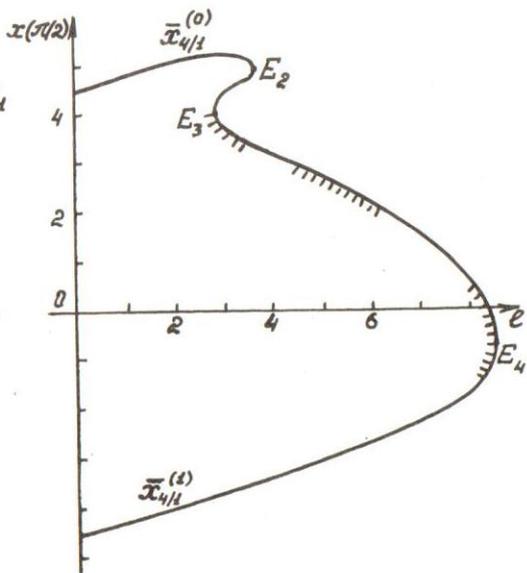


Рис. 21

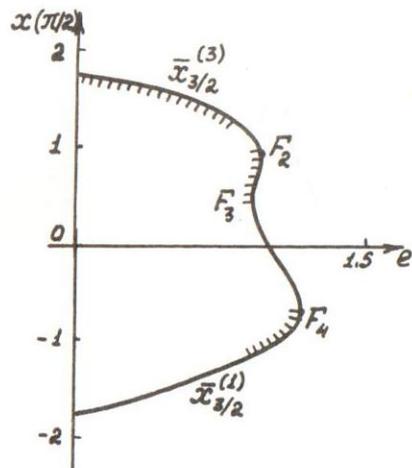


Рис. 24

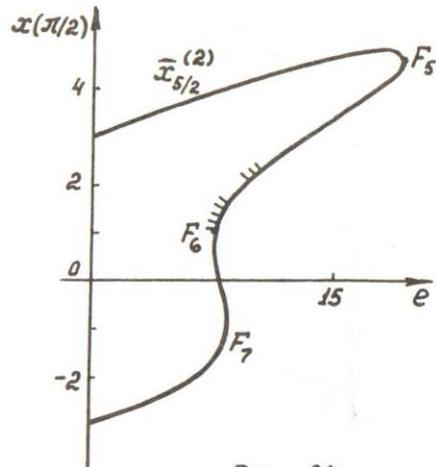
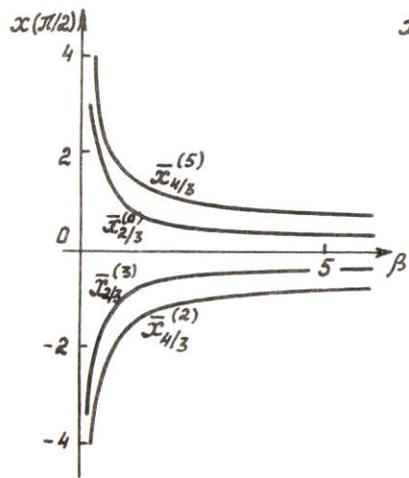
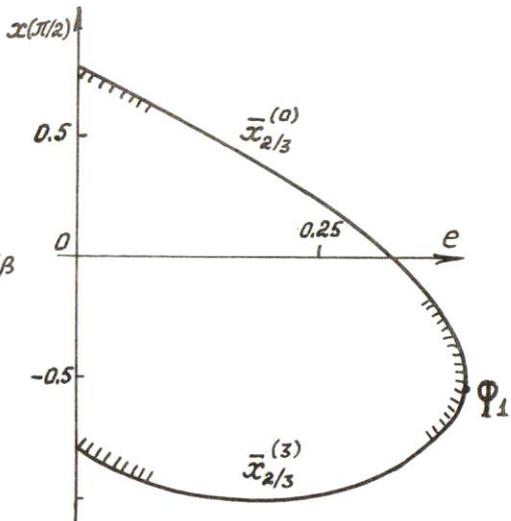


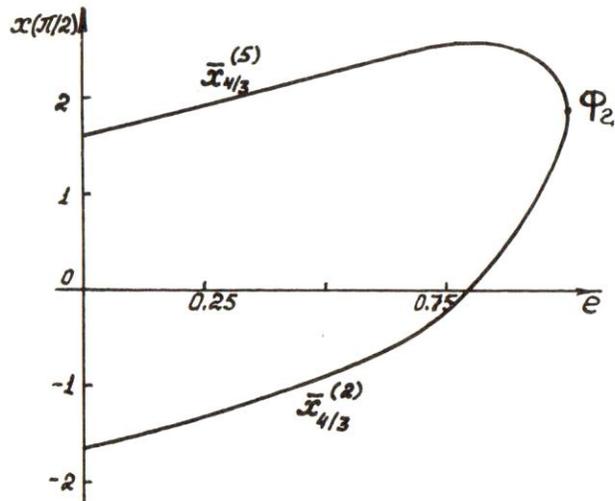
Рис. 24



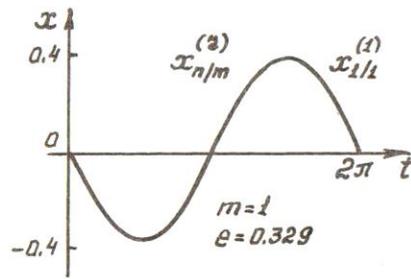
Puc. 26



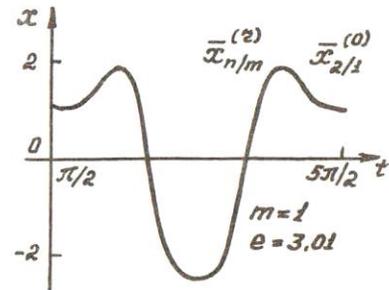
Puc. 27



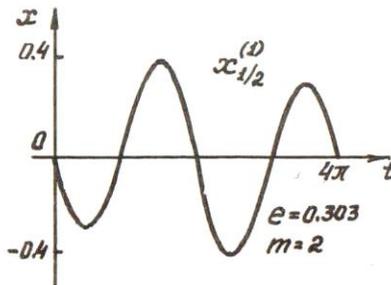
Puc. 28



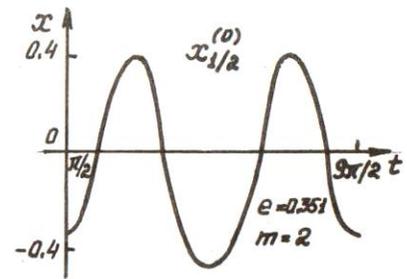
Puc. 29



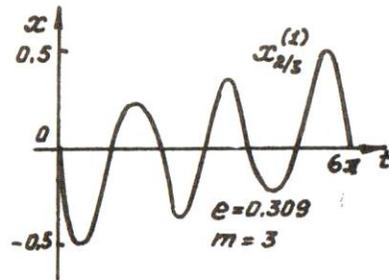
Puc. 32



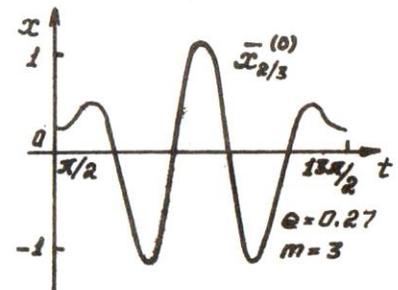
Puc. 30



Puc. 33



Puc. 31



Puc. 34

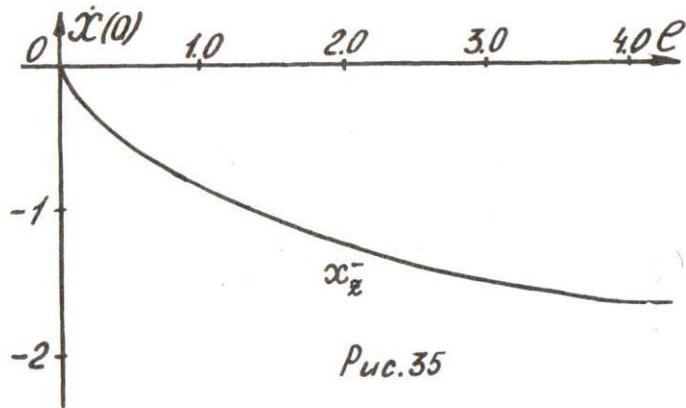


Рис.35

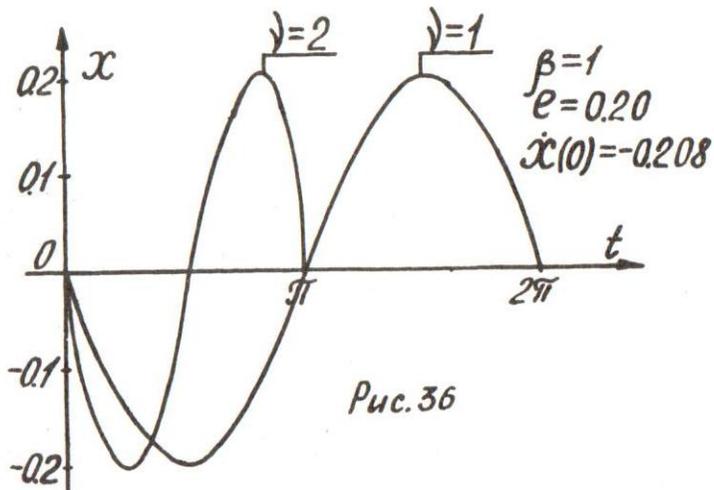


Рис.36

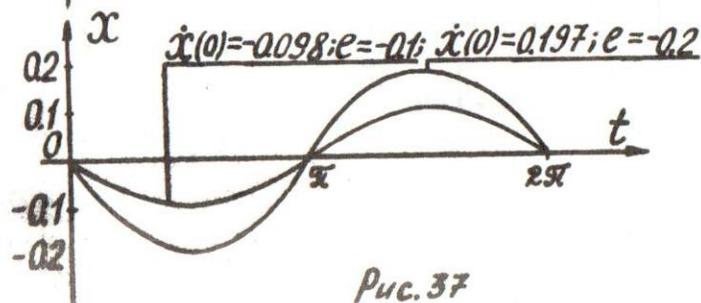


Рис.37

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме: и. о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Address: USSR, 125047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.