



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 77 за 1985 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Златоустов В.А., Шиповских Т.А.

Периодические решения
вырожденного
асимметричного уравнения
Дюффинга

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Златоустов В.А., Шиповских Т.А.
Периодические решения вырожденного асимметричного уравнения Дюффинга // Препринты
ИПМ им. М.В.Келдыша. 1985. № 77. 15 с.

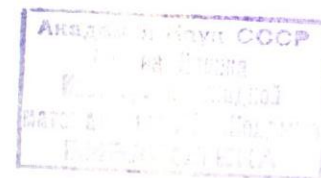
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1985-77>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им.М.В.Келдыша
АКАДЕМИИ НАУК СССР

В.А.Златоустов, Т.А.Шиповских

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ
ВЫРОЖДЕННОГО АСИММЕТРИЧНОГО
УРАВНЕНИЯ ДЮФИНГА

Препр.Златоустов В.А.
3-67 и Шиповских Т.А.
Периодические решения
вырожденного асиммет-
ричного уравнения...
Препр. № 77 за 1985 г.
I 6/№



Москва, 1985 г.

УДК 517.91/93:534

АННОТАЦИЯ

Исследованы 2π -периодические решения уравнения

$$\ddot{x} + \mu(\beta x^2 + \alpha x^3) = e \cos \nu t.$$

В случае, когда амплитуда вынуждающей силы мала ($e \ll 1$), периодические решения найдены аналитически. С помощью численных расчетов эти решения продолжены в область больших амплитуд вынуждающей силы. При $e \ll 1$ получены решения в виде разложения по малому параметру e в резонансном ($\mu = \frac{\alpha(n\nu)^2}{\beta^2}$) и нерезонансном ($\mu \neq \frac{\alpha(n\nu)^2}{\beta^2}$) случаях.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
I. Периодические решения однородного уравнения	5
I.1. Исследование периодических решений с помощью метода фазовой плоскости	5
I.2. Вывод общего решения однородного уравнения	6
2. Исследование 2π -периодических решений при $e \ll 1$	7
2.1. Порождающие решения	7
2.2. Начальные условия для порождающих решений	8
3. Исследование 2π -периодических решений с помощью численных методов	9
4. Метод разложения по малому параметру	10
Приложение	12
Литература	14

Введение.

В настоящей работе продолжено исследование периодических решений дифференциальных уравнений типа Дюффинга, проведенное ранее в работах [4, 8, 12].

Рассмотрено уравнение вида

$$\begin{aligned} \ddot{x} + F(x) &= e \zeta(t), \\ F(x) &= \mu(\beta x^2 + \alpha x^3), \\ \zeta(t) &= \cos \nu t. \end{aligned} \quad (0.1)$$

Уравнение (0.1) будем называть вырожденным асимметричным уравнением Дюффинга в силу того, что функция $F(x) = \alpha x^2 + \beta x^3$ является несимметричной (здесь $\alpha = \mu\beta$, $\beta = \mu\alpha$). Уравнение (0.1) получается из асимметричного уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} + \mu(\beta x^2 + \alpha x^3) = e \cos \nu t, \quad (0.2)$$

если в этом уравнении отсутствует линейный член μx .

Нетрудно видеть, что при $\beta = 0$ уравнение (0.1) превращается в вырожденное уравнение Дюффинга [12]. Случай $\alpha = 0$ соответствует уравнению

$$\ddot{x} + \mu \beta x^2 = e \cos \nu t, \quad (0.3)$$

которое исследовано в приложении.

Если ввести обозначение $\tilde{\mu} = \mu\beta$ и положить $|\alpha| = \beta$, то уравнение (0.1) будет иметь вид

$$\ddot{x} + \tilde{\mu}(x^2 \pm x^3) = e \cos \nu t. \quad (0.4)$$

Уравнение (0.4) совпадает с (0.1) при

$$\beta = 1, |\alpha| = 1. \quad (0.5)$$

Численное исследование уравнения (0.1) проводилось при $\nu = 1$ и при значениях параметров α и β , удовлетворяющих (0.5).

Уравнение (0.1) описывает колебания материальной точки под действием несимметричной упругой силы $F(x) = \alpha x^2 + \beta x^3$ и внешней периодической силы с амплитудой e , а также колебания в цепи переменного тока, обладающей нелинейной индуктивностью [1]. Влияние диссипации не учитывалось.

При $e = 0$ через эллиптические функции Якоби получено решение уравнения (0.1) (раздел 1). Исследованы общие свойства 2π -периодических решений уравнения (0.1) при малых значениях амплитуды вынуждающей силы e (раздел 2). Показано, что при $e \ll 1$ существует класс периодических решений уравнения (0.1), нахождение которого сводится к численному решению соответствующей

однопараметрической краевой задачи. Численно построены начальные условия для четных 2π -периодических решений уравнения (0.1) при $\beta = 1$, $|\alpha| = 1$ в зависимости от параметров μ и e (раздел 3). Получены приближенные аналитические формулы для решений уравнения (0.1) в виде разложения по степеням малого параметра e в резонансном $\mu = \frac{a(n\nu)^2}{\beta^2}$ и нерезонансном $\mu \neq \frac{a(n\nu)^2}{\beta^2}$ случаях (раздел 4). Необходимо отметить, что при $\mu = 0$ уравнение (0.1) имеет точное решение $x = -e(\cos \nu t)/\nu^2$.

В заключение авторы выражают признательность В.А.Сарычеву за постановку задачи и внимание к работе, а также В.П.Алексеевко за помощь при оформлении работы.

1. Периодические решения однородного уравнения.

1.1. Исследование периодических решений с помощью метода фазовой плоскости.

При $e = 0$ уравнение (0.1) переходит в уравнение

$$\ddot{x} + \mu(\beta x^2 + \alpha x^3) = 0. \quad (1.1)$$

Для уравнения (1.1) интеграл энергии имеет вид

$$\mu(\beta x^3/3 + \alpha x^4/4) + \dot{x}^2/2 = E, \quad (1.2)$$

где $\mu(\beta x^3/3 + \alpha x^4/4) = E_n$, $\dot{x}^2/2 = E_k$.

Уравнение (1.1) имеет следующие стационарные решения:

$$x = 0, \quad (1.3)$$

$$x = -\beta/\alpha. \quad (1.4)$$

Исследуем вопрос о наличии периодических решений уравнения (1.1) методом фазовой плоскости, используя классификацию особых точек Пуанкаре.

Случай $\mu\alpha > 0$. В случае $\mu > 0, \alpha > 0$ особая точка $x = -\beta/\alpha, \dot{x} = 0$ (рис. 1б) является особой точкой типа центр [2], так как ей соответствует минимум потенциальной энергии (рис. 1а). Особая точка $x = 0, \dot{x} = 0$ является точкой возврата и соответствует точке перегиба функции потенциальной энергии. Таким образом, существует два класса периодических решений, разделенных сепаратрисой, проходящей через точку возврата ($x = 0, \dot{x} = 0$) и точку ($x = -4\beta/3\alpha, \dot{x} = 0$). Уравнение сепаратрисы имеет вид $\dot{x} = \pm 2\sqrt{\mu(\beta x^3/3 + \alpha x^4/4)}$. Для первого класса периодических решений, которому соответствуют на фазовой плоскости (рис. 1б)

замкнутые кривые внутри сепаратрисы, значение постоянной E изменяется в диапазоне $-4b^4/12a^3 \leq E < 0$. Сепаратриса $E=0$ разделяет этот класс периодических решений от класса периодических решений, существующего при $E > 0$. В случае $\mu < 0, a < 0$ кривая потенциальной энергии имеет минимум в точке $x = -b/a$ (рис. 2а), чему на фазовой плоскости (рис. 2б) соответствует особая точка типа центр. Точка $(x=0, \dot{x}=0)$ является точкой возврата, через которую проходит сепаратриса, разделяющая два класса периодических решений уравнения (I.1)

Случай $\mu a < 0$. Кривые потенциальной энергии для случаев $\mu > 0, a < 0$ и $\mu < 0, a > 0$ изображены на рисунках 3а и 4а соответственно. Уравнения кривых на фазовых плоскостях (рис. 3б, 4б) в обоих случаях имеют вид $\dot{x} = \pm \sqrt{-\mu a P_4(x, E)}$, где $P_4(x, E) = x^4 + 4bx^3/3a - 4E/\mu a$, $E = E_k + E_n$. Нетрудно видеть, что кривые на фазовых плоскостях в обоих случаях разомкнуты и, следовательно, нестационарных периодических решений в данном случае не существует. Особой точке $(x = -b/a, \dot{x} = 0)$ соответствует седловая особая точка, точке $(x=0, \dot{x}=0)$ — точка возврата. Таким образом, однородное уравнение (I.1) имеет нестационарные периодические решения только в случае $\mu a > 0$.

1.2. Вывод общего решения однородного уравнения.

Перепишем (I.2) в виде

$$2\dot{x}^2 = \mu a (-x^4 - 4bx^3/3a + G), \quad \text{где } G = 4E/\mu a. \quad (I.5)$$

Имеем $\dot{x} = \pm \sqrt{\mu a P_4(x, G)/2}$. (I.6)

Необходимо выполнение условия $P_4(x, G) \geq 0$. Из вида функции $P_4(x, G)$ при $-4b^4/12a^3 \leq E < 0$ и при $E > 0$ (рис. 1в — 1з) следует, что уравнение $P_4(x, G) = 0$ имеет два действительных корня $x_1 \leq x_2$ и два комплексно-сопряженных корня $x_3, x_4 = \lambda \pm i\delta$. Тогда условие положительности многочлена $P_4(x, G)$ выполняется при $x \in [x_1, x_2]$ причем $-4b^4/12a^3 < G < 0$ при $-4b^4/12a^3 < E < 0$ и $G > 0$ при $E > 0$. Представим $P_4(x, G)$ в виде

$$P_4(x, G) = (x_2 - x)(x - x_1)[(x - \lambda)^2 + \delta^2]. \quad (I.7)$$

Тогда из (I.6) следует

$$\sqrt{\frac{\mu a}{2}} \int_{t_0}^t dt = \pm \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{(x_2 - x)(x - x_1)[(x - \lambda)^2 + \delta^2]}}. \quad (I.8)$$

Интеграл в правой части (I.8) выражается в эллиптических функциях Якоби [3]:

$$\sqrt{\frac{\mu a}{2}}(t - t_0) = \pm \frac{1}{\sqrt{pq}} F\left(2 \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{q(x_2 - u)}{p(u - x_1)}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(p - q)^2 + (x_2 - x_1)^2}{pq}}\right). \quad (I.9)$$

Здесь $x_1 < u < x_2$, $p^2 = (\lambda - x_2)^2 + \delta^2$, $q^2 = (\lambda - x_1)^2 + \delta^2$. Выражение (I.9) представим в виде

$$Z = \pm F(\varphi, k) \quad (I.10)$$

где $Z = \sqrt{pq\mu a/2}(t - t_0)$, $\varphi = 2 \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{q(x_2 - u)}{p(u - x_1)}}$,
 $k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(p - q)^2 + (x_2 - x_1)^2}{pq}}$.

Из (I.10), согласно [3], следует

$$\sin \varphi = \operatorname{sn} Z = \frac{2\sqrt{q(x_2 - u)/p(u - x_1)}}{1 + q(x_2 - u)/p(u - x_1)}. \quad (I.11)$$

Преобразуя это выражение, получаем

$$x_0 = u = [px_1(1 \pm \operatorname{cn} Z)^2 + qx_2 \operatorname{sn}^2 Z] / [p(1 \pm \operatorname{cn} Z)^2 + q \operatorname{sn}^2 Z], \quad (I.12)$$

$$\dot{x}_0 = 2 \operatorname{sn} Z \cdot \operatorname{dn} Z \cdot \frac{[(x_2 q \operatorname{cn} Z - x_1 p)(1 \pm \operatorname{cn} Z)]}{(q \operatorname{sn}^2 Z + p(1 \pm \operatorname{cn} Z)^2)}$$

$$\cdot \frac{(q \operatorname{cn} Z - 2p(1 - q \operatorname{cn} Z)(1 \pm \operatorname{cn} Z))[(x_2 q \operatorname{sn}^2 Z + x_1 p(1 \pm \operatorname{cn} Z)^2)]}{(q \operatorname{sn}^2 Z + p(1 \pm \operatorname{cn} Z)^2)^2},$$

где

$$Z = \sqrt{pq\mu a/2}(t - t_0), \quad p^2 = (\lambda - x_2)^2 + \delta^2,$$

$$q^2 = (\lambda - x_1)^2 + \delta^2, \quad k = \frac{1}{2} \sqrt{((p - q)^2 + (x_2 - x_1)^2)/pq},$$

$$T_0 = 4K(k)/\sqrt{pq\mu a/2},$$

x_1, x_2, x_3, x_4 — корни многочлена $P_4(x, G)$. Выражения (I.12) описывают два класса периодических решений уравнения (I.1). При $E < 0, -4b^4/12a^3 < G < 0$ этим решениям на фазовой плоскости (рис. 1б, 2б) соответствуют замкнутые траектории внутри сепаратрисы $E=0$ а при $E > 0, G > 0$ — замкнутые траектории вне сепаратрисы.

2. Исследование $2\tilde{\eta}$ -периодических решений при $e \ll 1$.

2.1. Порождающие решения.

В предыдущем разделе были найдены в явном виде периодические решения уравнения (I.1). Необходимо выделить среди них порождающие решения, то есть такие $2\tilde{\eta}m/n$ — периодические решения (m, n — взаимно простые натуральные числа) однородного уравнения, которые переходят в $2\tilde{\eta}$ -периодические решения

уравнения (0.1) при $e=0$. Аналогично работам [4,5] можно показать, что существует единственное 2π -периодическое решение $x_z(t, e)$, переходящее при $e=0$ в стационарное решение (1.4). Решение $x_z(t, e)$ определяется в результате решения краевой задачи

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0. \quad (2.1)$$

Стационарное решение (1.3) не является порождающим (раздел 4).

Определим теперь условия, выделяющие нестационарные порождающие решения. Для этих решений должны выполняться [5] условия периодичности

$$T_0 = 2\pi m/n. \quad (2.2)$$

Этим условием среди всех решений (1.12) выделяется однопараметрическое семейство решений для каждого значения m и n зависящее от параметра t_0 . Для определения постоянной t_0 используется метод Чезари-Хейла [5,7]. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\ddot{x} + \alpha x^2 + \beta x^3 = e \cos t - \rho \dot{x}_0(t+t_0), \quad (2.3)$$

$$\int_0^{2\pi m} x \cdot \dot{x}_0(t+t_0) dt = 0,$$

где x_0 — общее решение (1.12), x — неизвестная функция, ρ — неизвестная постоянная, t_0 — искомая постоянная. При достаточно малых e система (2.3) имеет единственное $2\pi m$ -периодическое решение $x = x(t, t_0, e)$, $\rho = \rho(t_0, e)$. В [5] показано, что исследование $2\pi m$ -периодических решений уравнения (0.1) сводится к определению корней $t_0 = t_0(e)$ бифуркационного уравнения $\rho(t_0, e) = 0$. Это уравнение имеет $2m$ корней [4,5]

$$t_0^{(z)} = \pi z/n \quad (z=0, 1, \dots, 2m-1), \quad (2.4)$$

которым соответствуют периодические решения $x_{n/m}^{(z)}$. Численное нахождение этих решений сводится к решению при $e \neq 0$,

$m=1$ для уравнения (0.1) однопараметрической краевой задачи

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0. \quad (2.5)$$

2.2. Начальные условия для порождающих решений.

При $\mu a < 0$, как было показано ранее, нестационарных периодических решений нет. В случае $\mu a > 0$ определим из (1.12) с учетом (2.2), (2.4) начальные условия для порождающих

щих периодических решений в виде

$$\dot{x}_0(0) = 0, \quad x_0(0) = \begin{cases} x_1, & z=0 \\ x_2, & z=1, \end{cases} \quad (2.6)$$

где x_1, x_2 — действительные корни $P_4(x, \zeta)$

$$\mu = \frac{8K^2(k)m^2}{\pi^2 \rho g}, \quad \zeta = \frac{4E}{\mu a}, \quad k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-(\rho g)^2 + (x_2 - x_1)^2}{\rho g}},$$

$$\rho^2 = (\lambda - x_2)^2 + \delta^2, \quad q^2 = (\lambda - x_1)^2 + \delta^2.$$

Картина порождающих решений для $m=1, n=1, 2, 3$ изображена на рисунке 5.

Введем следующие обозначения для существующих семейств решений. В случае $\mu > 0, a > 0$ обозначим решения, существующие при $-\mu b^2/42a^3 < E < 0$, через $d_{n/m}^{(z)}$. Решения $d_{n/m}^{(z)}$ ограничены асимптотами $x(0)=0$ и $x(0)=-4b/3a$ (рис. 5). В точках бифуркации, которые находятся из условия $d_{n/m}^{(0)}(0) = d_{n/m}^{(1)}(0)$ и имеют вид $\mu = \mu^2$, решения $d_{n/m}^{(z)}$ сливаются со стационарным порождающим решением $d_0 = -b/a$. Решения, существующие при $E > 0$, находятся вне данных асимптот и обозначены через $\beta_{n/m}^{(z)}$. При $z=0$, решения $\beta_{n/m}^{(0)} < -4b/3a$, а при $z=1$, решения $\beta_{n/m}^{(1)} > 0$ (рис. 5). В случае $\mu < 0, a < 0$ решения $\delta_{n/m}^{(z)}$ находятся внутри асимптот $x(0)=0$ и $x(0)=-4b/3a$ и сливаются со стационарным порождающим решением $\delta_0 = -b/a$ в точках бифуркации $\mu = -\mu^2$. Решения $\delta_{n/m}^{(z)}$ расположены вне данных асимптот.

Следует отметить, что представленная на рис.5 картина порождающих решений (зависимость $x(0)$ от μ , соответствующая уравнениям (2.6)) построена при $b=1, |a|=1, |\mu| < 13$.

3. Исследование 2π -периодических решений с помощью численных методов.

В предыдущем разделе были найдены начальные условия для порождающих $2\pi m/n$ -периодических решений ($m=1, n=1, 2, 3$) и сформулирована краевая задача для определения 2π -периодических решений уравнения (0.1). Ниже будут описаны результаты решения краевой задачи (0.1), (2.5) для различных значений определяющих параметров μ, e при $b=1, |a|=1$.

Устойчивость 2π -периодических решений исследовалась в линейном приближении с помощью численного интегрирования

уравнения в вариациях $\ddot{y} + \mu(2\beta x_* + 3\alpha x_*^2)y = 0$. Решения, продолженные из порождающих решений в область произвольных значений параметра e , имеют одинаковые обозначения с соответствующими порождающими решениями. Участки изолиний, удовлетворяющие условию устойчивости ($|A| < 1$ [5, 8, 10]), обозначены на рисунках штриховкой.

Рассмотрим решения краевой задачи (0.1), (2.5) в области $E^+ = \{0 < \mu < 13, \beta = 1, \alpha = 1, e > 0\}$. Решения $d_0, d_{1/1}^{(0)}, \beta_{1/1}^{(0)}$ изображены на рис. 6. При $0 < \mu < 1$ решение d_0 сливается с решением $\beta_{1/1}^{(0)}$, а при $\mu > 1$ решение $\beta_{1/1}^{(0)}$ сливается с решением $d_{1/1}^{(0)}$, возникающим в точке бифуркации $\mu = 1$. На рис. 7 представлены решения $d_0, d_{1/1}^{(1)}, d_{2/1}^{(0)}$. Решение d_0 сливается с решением $d_{1/1}^{(1)}$ в интервале $1 < \mu < 4$. В точке бифуркации $\mu = 4$ возникает решение $d_{2/1}^{(0)}$, которое далее при $\mu > 0$ сливается с решением $d_{1/1}^{(1)}$. Решения $d_0, d_{2/1}^{(1)}, d_{3/1}^{(0)}$ (рис. 9) сливаются вдоль бифуркационной кривой, обозначенной на рисунке пунктиром. При $4 < \mu < 9$ на этой кривой сливаются решения d_0 и $d_{2/1}^{(1)}$, а при $\mu > 9$ решения $d_{2/1}^{(1)}$ и $d_{3/1}^{(0)}$. На рис. 8 представлены решения $d_{3/1}^{(1)}$ и d_0 , сливающиеся между собой при $9 < \mu < 16$. Представляют интерес решения $\beta_{2/1}^{(1)}$ и $\beta_{3/1}^{(1)}$ (рис. 10). Здесь явно выражено существование двух новых решений, не имеющих порождающих. Появление новых решений обусловлено нелинейными свойствами уравнения (0.1). На рис. 11 изображены решения $\beta_{1/1}^{(1)}$ и $\beta_{2/1}^{(1)}$. В этом случае также происходит появление новых решений внутри области существования решений $\beta_{1/1}^{(1)}$ и $\beta_{2/1}^{(1)}$.

Рассмотрим теперь результаты решения краевой задачи (0.1), (2.5) в области $E^- = \{-13 < \mu < 0, \beta = 1, \alpha = -1, e > 0\}$. Решения $\delta_0, \delta_{1/1}^{(0)}, \delta_{1/1}^{(1)}$ изображены на рис. 12. При $-1 < \mu < 0$ решение δ_0 сливается с решением $\delta_{1/1}^{(0)}$, а при $\mu < -1$ решение $\delta_{1/1}^{(0)}$ сливается с решением $\delta_{1/1}^{(1)}$. Решения δ_0 и $\delta_{1/1}^{(1)}$ сливаются при $-4 < \mu < -1$ (рис. 13), а решение $\delta_{1/1}^{(1)}$ при $\mu < -4$ сливается с решением $\delta_{2/1}^{(1)}$. На рис. 14 и 15 изображены решения $\delta_0, \delta_{2/1}^{(0)}, \delta_{3/1}^{(0)}$ и $\delta_0, \delta_{3/1}^{(1)}$ соответственно. Новые решения, не имеющие порождающих, существуют внутри области существования решений $\delta_{1/1}^{(1)}, \delta_{2/1}^{(1)}$ (рис. 16) и решений $\delta_{2/1}^{(0)}, \delta_{3/1}^{(1)}$ (рис. 17).

Ранее отмечалось, что в случае $\mu\alpha < 0$ не существует стационарных порождающих решений. Однако стационарное решение

$x_2 = -\beta/\alpha$ является порождающим. Решения, продолженные из этого стационарного порождающего решения, обозначены x_2^+ в случае $\alpha = -1, \beta = 1, \mu > 0$ (рис. 18) и x_2^- в случае $\alpha = 1, \beta = 1, \mu < 0$ (рис. 19).

На рис. 20 - 25 представлены некоторые 2π -периодические решения, полученные в результате интегрирования уравнения (0.1) при указанных начальных значениях и параметрах μ, e, α, β .

4. Метод разложения по малому параметру.

Нерезонансный случай $\frac{\alpha^2}{\beta} + (p)^2 (p \neq 1/2)$. Будем искать 2π -периодическое решение в окрестности стационарного решения (1.4) при $e \ll 1$ с помощью метода Пуанкаре [10] в виде

$$x = x_0 + e x_1 + e^2 x_2 + e^3 x_3 + e^4 x_4 + \dots \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в уравнение (0.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях e , получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \alpha x_0^2 + \beta x_0^3 &= 0, \quad \ddot{x}_1 + \alpha^2 x_1 / \beta = \cos \nu t, \\ \ddot{x}_2 + \alpha^2 x_2 / \beta &= 2\alpha x_1^2, \quad \ddot{x}_3 + \alpha^2 x_3 / \beta = 4\alpha x_1 x_2 - \beta x_1^3, \\ x_4 + \alpha^2 x_4 / \beta &= 2\alpha(2x_1 x_3 + x_2^2) - 3\beta x_1^2 x_2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Решая последовательно систему дифференциальных уравнений (4.2), найдем 2π -периодическое решение (4.1) в виде

$$\begin{aligned} x = & -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{e\beta\cos\nu t}{\alpha^2 - \beta\nu^2} + e^2 \left[\frac{\beta^3}{2(\alpha^2 - \beta\nu^2)^2} + \frac{\alpha\beta^3\cos 2\nu t}{(\alpha^2 - 4\beta\nu^2)(\alpha^2 - \beta\nu^2)^2} \right] + \\ & + e^3 \left[\frac{(2\alpha^2 + 52\beta\nu^2)\beta\cos\nu t}{4(\alpha^2 - 4\beta\nu^2)(\alpha^2 - \beta\nu^2)^2} + \frac{\beta^4(\alpha^2 + 4\beta\nu^2)\cos 3\nu t}{4(\alpha^2 - \beta\nu^2)^3(\alpha^2 - 4\beta\nu^2)(\alpha^2 - 9\beta\nu^2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Разложение (4.3) описывает решения d_0 и δ_0 при $\beta > 0$ и $e \ll 1$, а также решения x_2^+ и x_2^- при $\beta < 0$ и $e \ll 1$.

В окрестности стационарного решения (1.3), которому на фазовой плоскости соответствует точка возврата (рис. 16, 26, 36, 46), нет периодических решений при $e \ll 1$. Система для определения коэффициентов x_1, x_2, x_3, x_4 в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= \cos \nu t, \\
 \ddot{x}_2 + \alpha x_1^2 &= 0, \\
 \ddot{x}_3 + 2\alpha x_1 x_2 + \beta x_1^3 &= 0, \\
 \ddot{x}_4 + \alpha(2x_1 x_3 + x_2^2) + 3\beta x_1^2 x_2 &= 0.
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (4.4) получаем

$$x_1 = -(\cos \nu t)/\nu^2, \quad x_2 = -\alpha(t/2 - (\cos 2\nu t)/4\nu^2)/2\nu^4. \quad (4.5)$$

Выражение для x_2 содержит вековой член и, следовательно, иско-
мое решение не будет являться периодическим, т.е. решение (I.3)
не является продолжаемым в область $e > 0$.

Резонансный случай ($\alpha^2/\beta = \nu^2$). В этом случае ре-
шения α_0 и γ_0 находятся в виде разложения по дробным степеням
параметра e :

$$x = x_0 + x_1 e^{1/3} + x_2 e^{2/3} + x_3 e + x_4 e^{4/3} + \dots \quad (4.6)$$

Система для определения x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_0 + \alpha x_0^2 + \beta x_0^3 &= 0, \\
 \ddot{x}_1 + 2\alpha x_0 x_1 + 3\beta x_0^2 x_1 &= 0, \\
 \ddot{x}_2 + \alpha(2x_0 x_1 + x_1^2) + \beta(3x_0^2 x_2 + 3x_0 x_1^2) &= 0, \\
 \ddot{x}_3 + \alpha(2x_0 x_2 + 2x_1 x_1) + \beta(3x_0^2 x_3 + 6x_0 x_1 x_2 + x_1^3) &= \cos \nu t, \\
 \ddot{x}_4 + \alpha(2x_0 x_3 + 2x_1 x_2 + x_2^2) + 3\beta[x_0^2 x_4 + x_0(2x_1 x_3 + x_2^2) + x_1^2 x_2] &= 0.
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Находим решения x_0, x_1, x_2, x_3 системы (4.7) и, подстав-
ляя их в (4.6), получаем следующее разложение в резонансном
случае:

$$\begin{aligned}
 x = & -\frac{\beta}{\alpha} + \left(-\frac{12e}{31\beta}\right)^{1/3} \cos \nu t + \frac{\alpha}{\nu^2} \left(-\frac{12e}{31\beta}\right)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{5} \cos 2\nu t\right) + \\
 & + \frac{e}{\nu^2} \left(\frac{30777 \cos \nu t}{25064} - \frac{11 \cos 3\nu t}{248}\right) + O(e^{4/3}).
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Приложение.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \alpha x^2 = e \cos \nu t \quad (П.1)$$

При $e=0$ уравнение (5.1) имеет стационарное решение $x=0$. На
фазовой плоскости (рис. 26в, 27в) этому стационарному решению

при любом α соответствует точка возврата. Покажем, что ре-
шение $x=0$ не является продолжаемым в область $e > 0$, т.е. что
при $e \ll 1$ уравнение (5.1) не имеет 2π - периодических ре-
шений. Воспользуемся методом Чезари-Хейла [7] и рассмотрим
следующую вспомогательную систему [6]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} + \alpha x^2 &= e \cos \nu t - p, \\
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dt &= a.
 \end{aligned} \quad (П.2)$$

При достаточно малом e и любом α система (П.2) имеет
единственное 2π - периодическое решение $x_*(t, a, e)$, $p_*(a, e)$,
аналитически зависящее от a, e и представляемое в виде

$$\begin{aligned}
 x_*(t, a, e) &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t, a) e^k, \\
 p_*(a, e) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(a) e^k.
 \end{aligned} \quad (П.3)$$

Здесь $x_0(t, a) = a$, $x_k(t + 2\pi, a) \equiv x_k(t, a)$,
 $x_k(t, a)$, $p_k(a)$ — аналитические функции a ($k=1, 2, \dots$).

Каждому корню $a(e)$ уравнения

$$p_*(a, e) = 0 \quad (П.4)$$

соответствует 2π - периодическое решение уравнения (П.1).
Нетрудно показать, что при ограничении $K=3$ бифуркационное
уравнение (П.4) представимо в виде

$$p_* = a(a^2 + 3e^2/2). \quad (П.5)$$

Уравнение (П.5) не имеет корней, кроме $a=0$, и, следователь-
но, при $e \neq 0$ уравнение (П.1) не имеет 2π - периодических
решений.

К этому выводу можно прийти, если искать решение уравне-
ния (П.1) в виде ряда

$$x = e x_1 + e^2 x_2 + e^3 x_3 + e^4 x_4 + e^5 x_5 + \dots \quad (П.6)$$

Система для нахождения коэффициентов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= \cos \nu t, \\
 \ddot{x}_2 + \alpha x_1^2 &= 0, \\
 \ddot{x}_3 + 2\alpha x_1 x_2 &= 0, \\
 \ddot{x}_4 + \alpha(2x_1 x_3 + x_2^2) &= 0, \\
 \ddot{x}_5 + 2\alpha(x_1 x_4 + x_2 x_3) &= 0.
 \end{aligned} \quad (П.7)$$

Из (5.7) находим

$$x_1 = -(\cos \nu t) / \nu^2, \quad x_2 = -\frac{\alpha}{2\nu^2} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{\cos 2\nu t}{4\nu^2} \right). \quad (\text{П.8})$$

В выражении для x_2 присутствует вековой член и, следовательно, искомое решение не является периодическим.

Таким образом, используя метод Чезари-Хейла и метод Пуанкаре, доказано, что уравнение (П.1) не имеет периодических решений при $\epsilon \ll 1$.

Литература

1. Т.Хаяси. Нелинейные колебания в физических системах. Москва, Мир, 1968 г.
2. А.А.Андронов, А.А.Витт, Э.С.Хайкин. Теория колебаний. Физматгиз, 1956 г.
3. М.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, 1962 г.
4. В.А.Златоустов, Т.А.Шиповских. Вынужденные 2π -периодические колебания системы с несимметричной восстанавливающей силой. Препринт № 124, ИПМ АН СССР, 1984 г.
5. В.А.Сарычев, В.А.Златоустов, В.В.Сазонов. М., ВИНТИ Деп. № 908-77, 1976 г.
6. В.А.Сарычев, В.В.Сазонов. Об одном методе исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт № 105, ИПМ АН СССР, 1976 г.
7. Л.Чезари. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Мир, 1964 г.
8. О.О.Галактионова, В.А.Златоустов. Об одном классе 2π -периодических решений неоднородного уравнения Дюффинга. Препринт № 81, ИПМ АН СССР, 1981 г.
9. В.А.Сарычев, В.А.Златоустов, В.В.Сазонов. Вынужденные периодические колебания математического маятника. Препринт № 32, ИПМ АН СССР, 1977 г.

10. И.Г.Малкин. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва, 1956 г.

11. Н.Н.Мойсеев. Асимптотические методы нелинейной механики. Москва, 1969 г.

12. Т.А.Шиповских. $2\pi m$ -периодические решения уравнения Дюффинга в вырожденном случае. Труды МЭТИ, 1985 г.

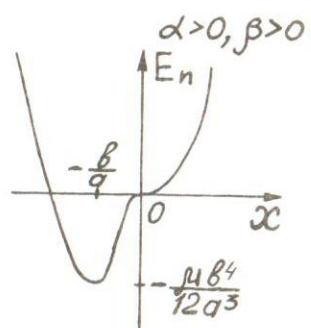


Рис. 1а

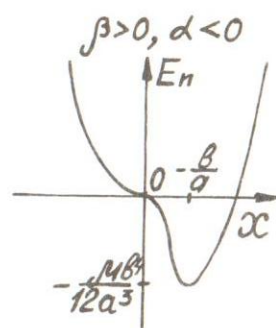


Рис. 2а

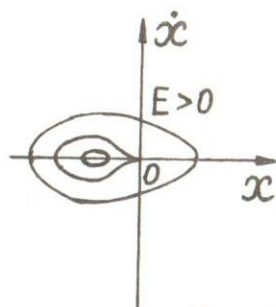


Рис. 1б

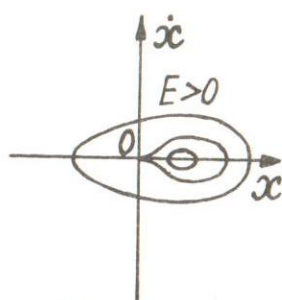


Рис. 2б

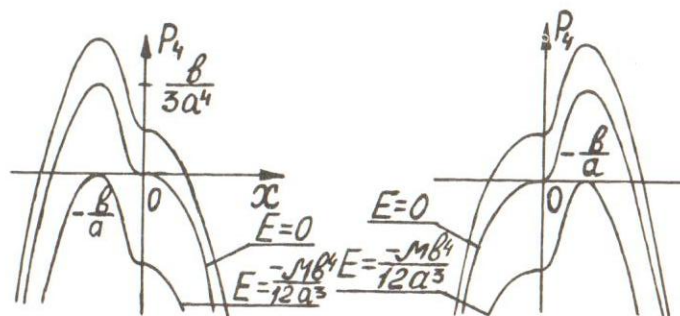


Рис. 1в

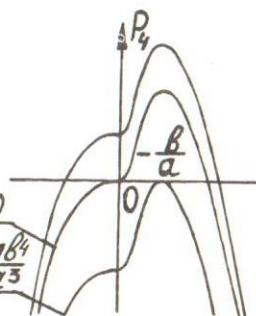


Рис. 2в

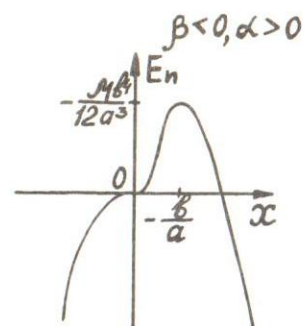


Рис. 3а

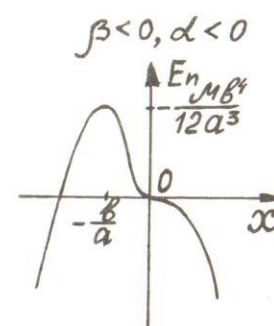


Рис. 4а

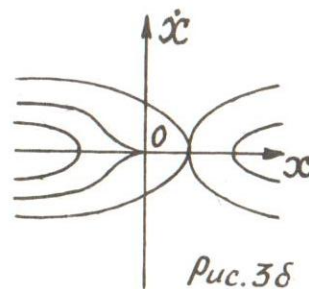


Рис. 3б

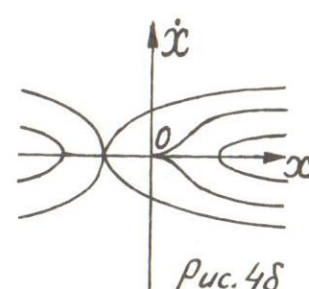


Рис. 4б

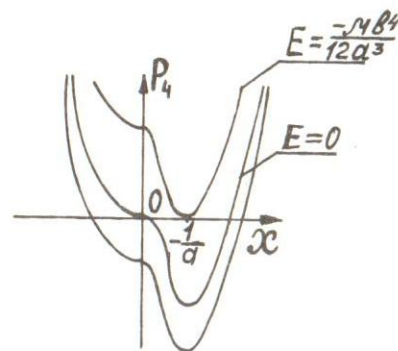


Рис. 3в

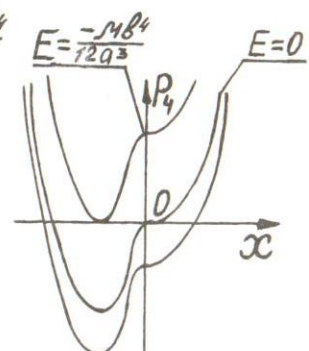
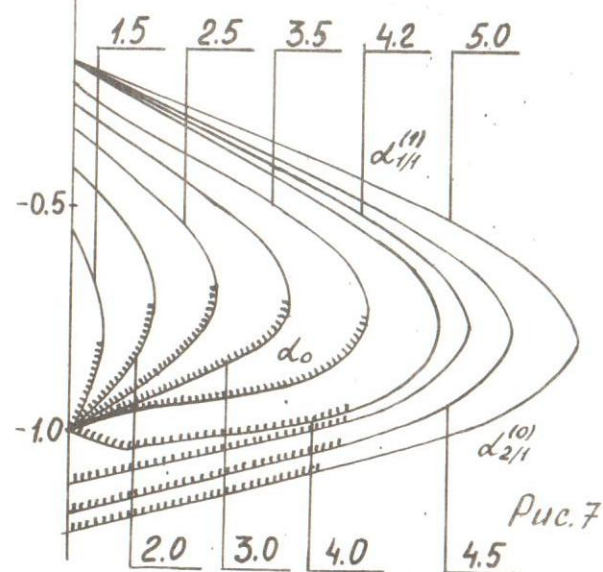
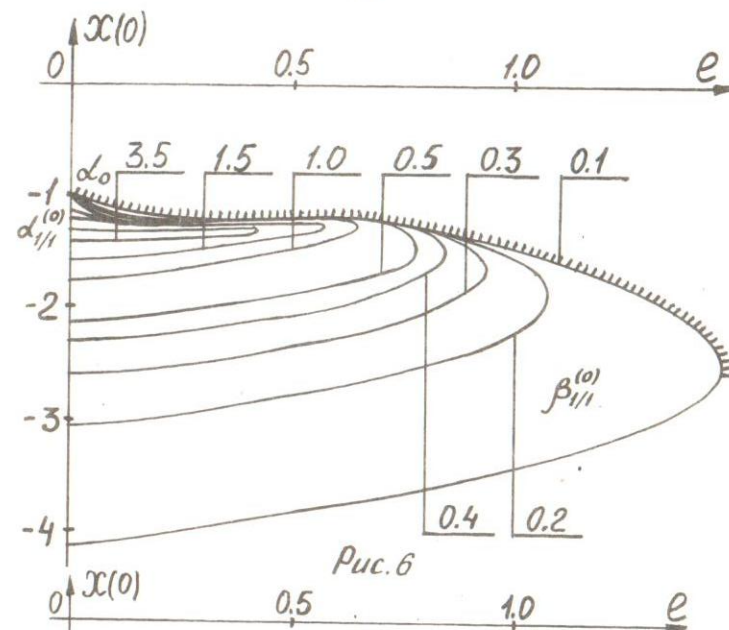
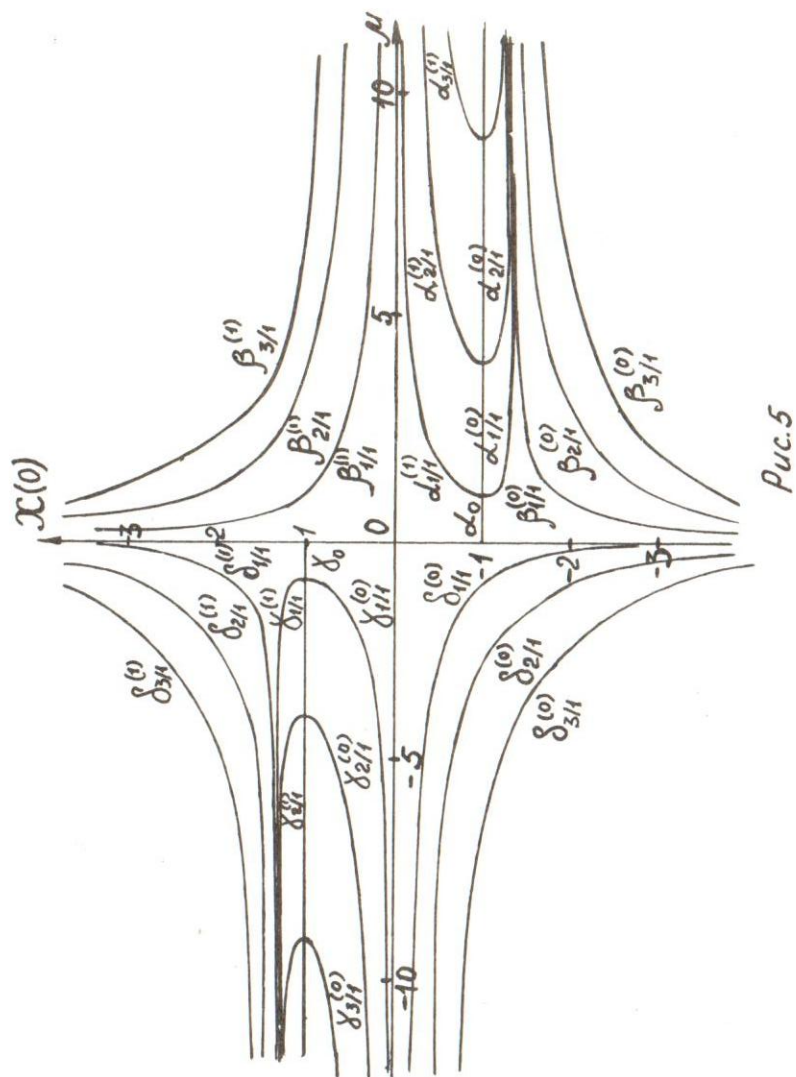
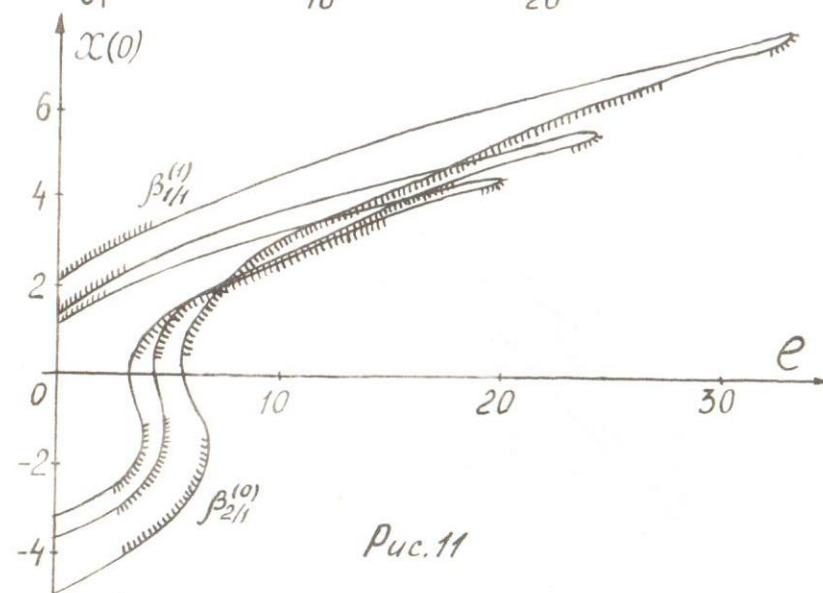
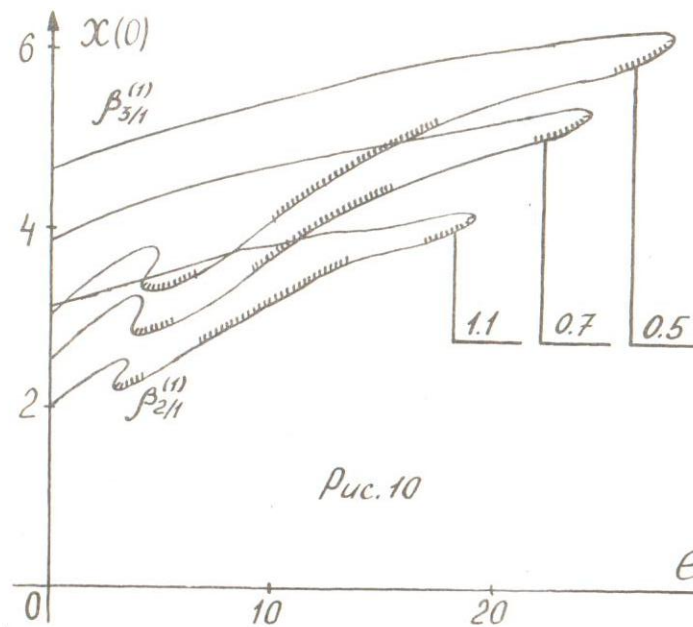
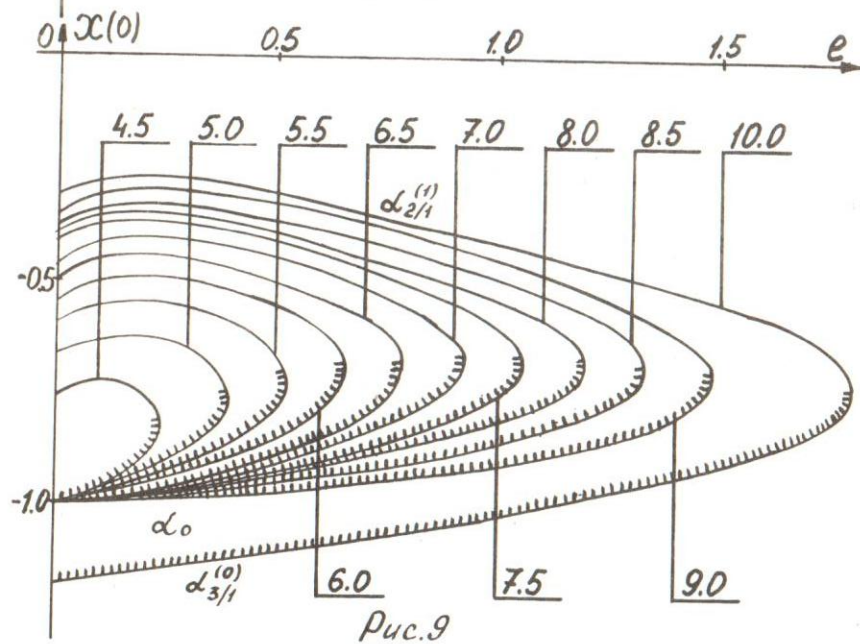
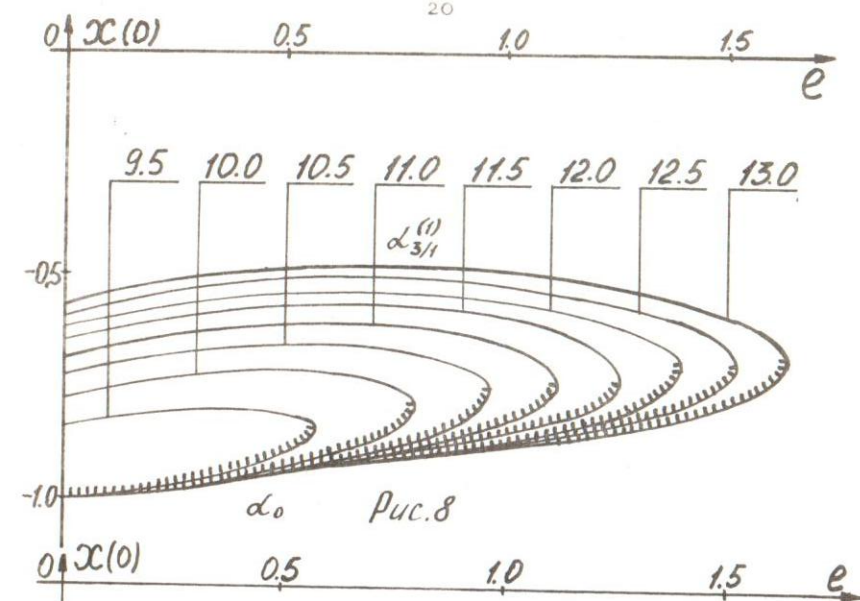
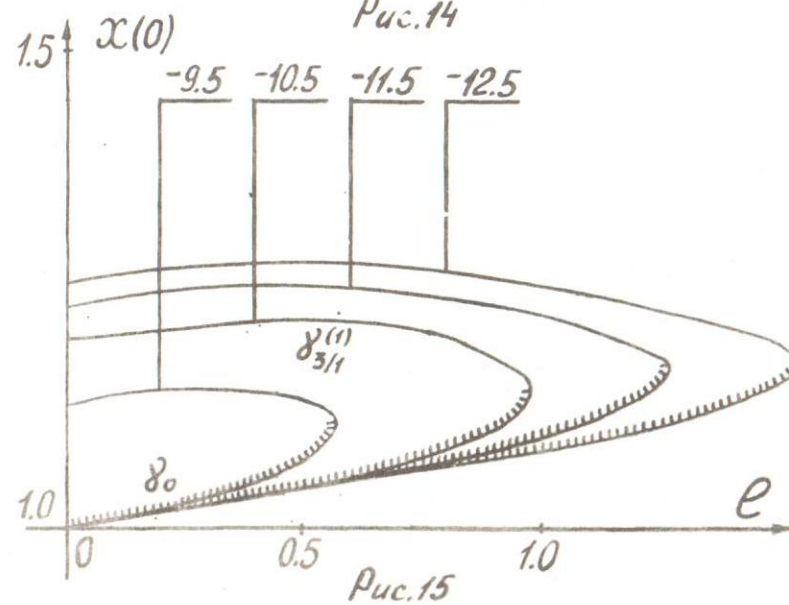
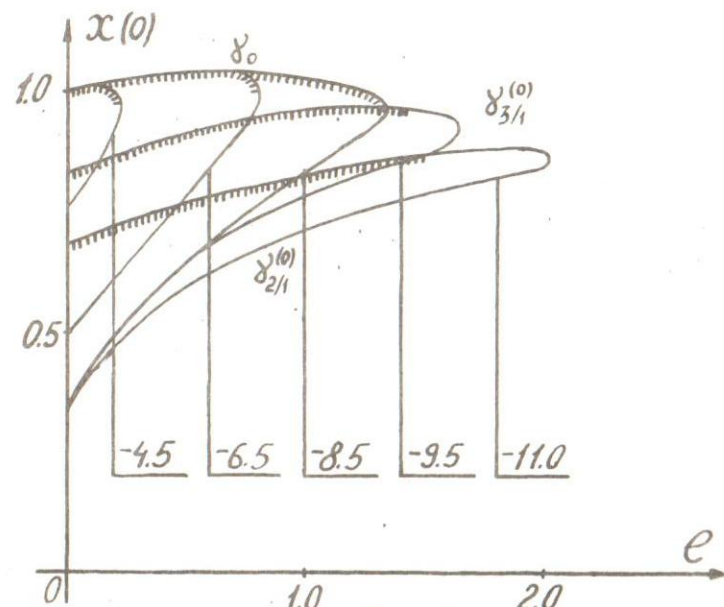
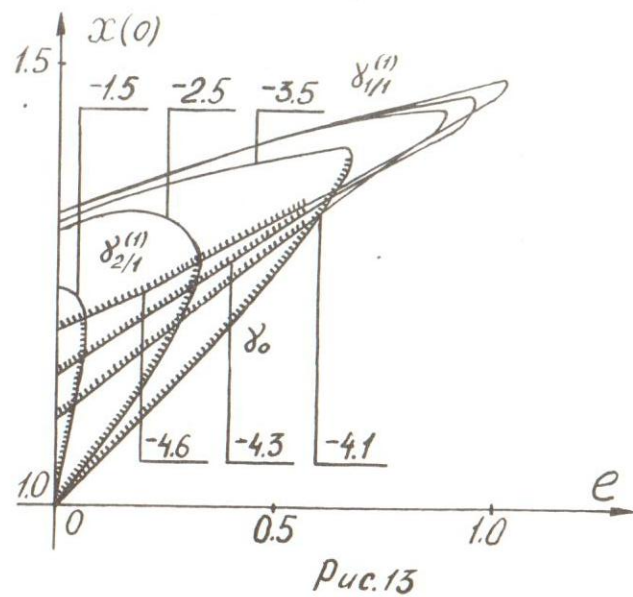
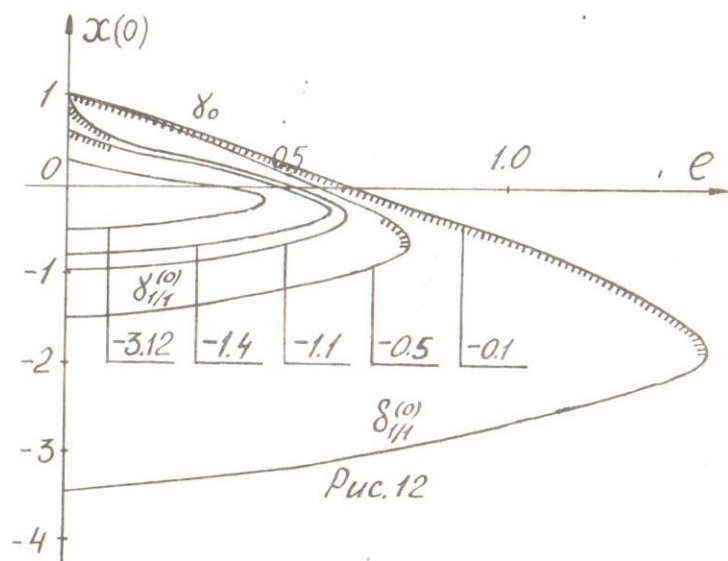
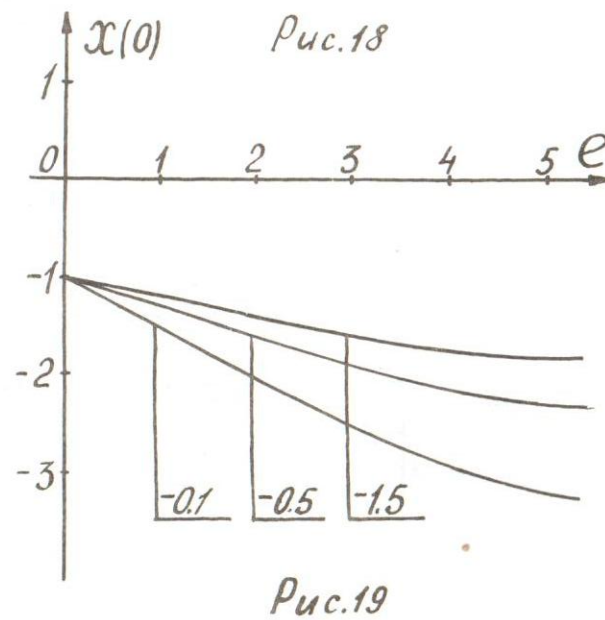
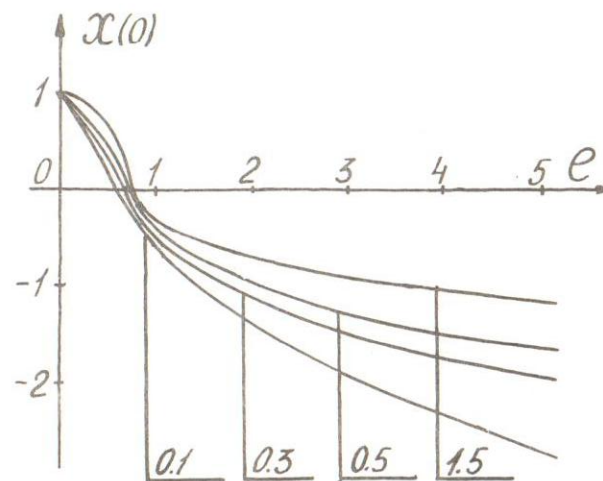
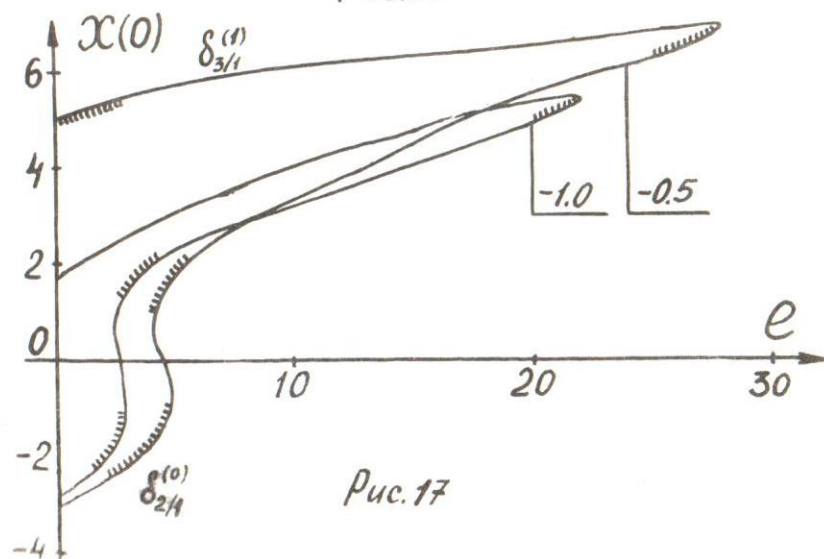
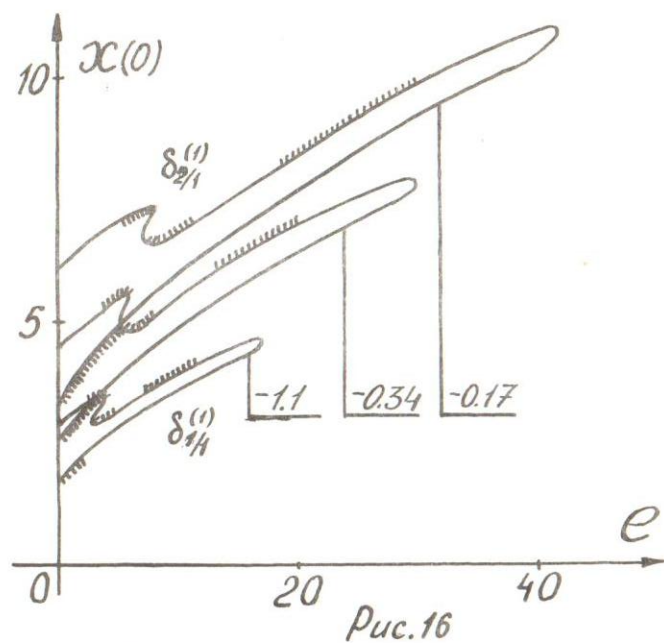


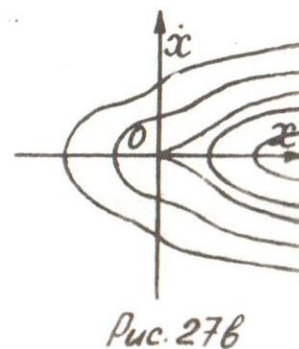
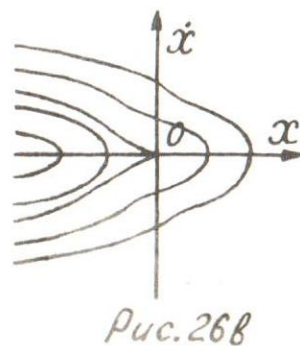
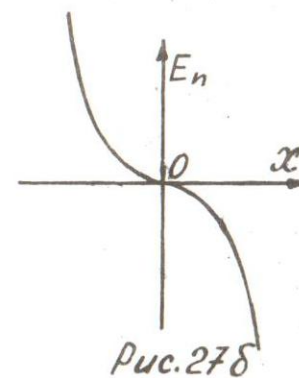
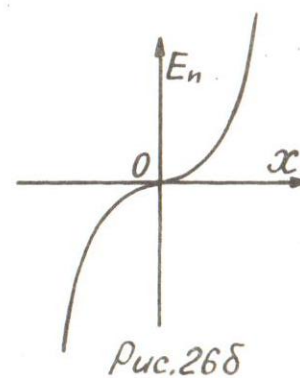
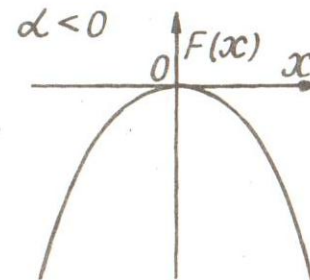
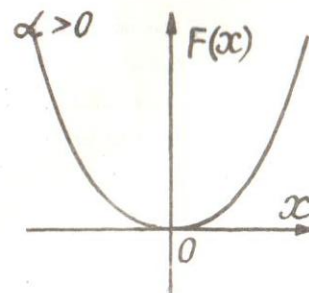
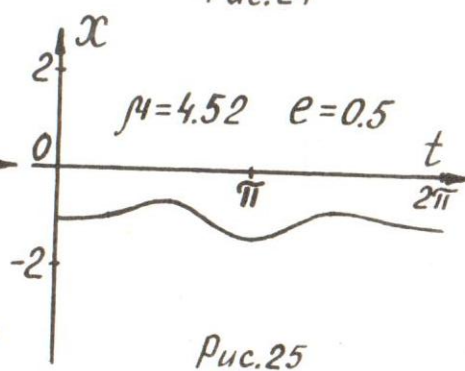
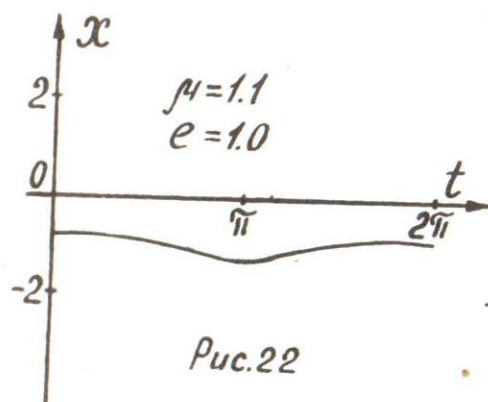
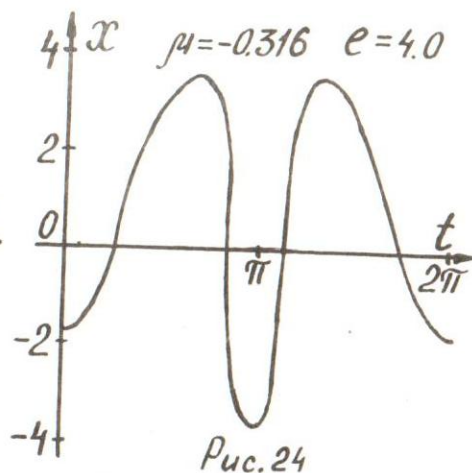
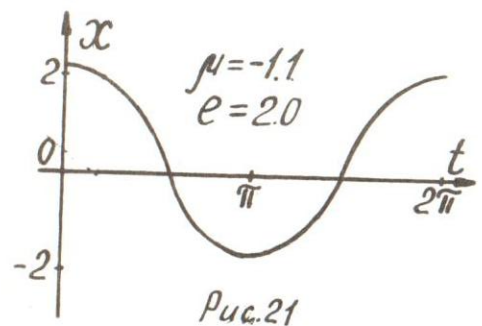
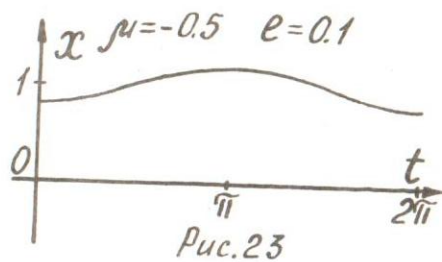
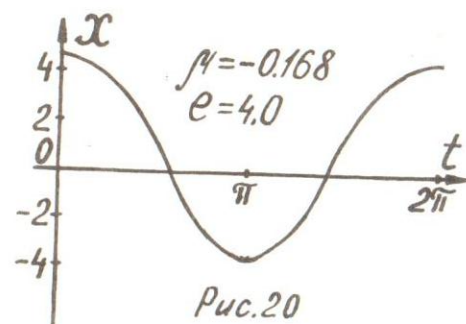
Рис. 4в











Златоустов Виктор Анатольевич, Шиповских Татьяна Анатольевна.
"Периодические решения вырожденного асимметричного уравнения
Дюффинга".
Редактор В.А. Сарычев. О.О. Галактионова.

Подписано к печати 19.04.85г. № Т- 09558. Заказ № 194.
Формат бумаги 60X90 1/16. Тираж 200 экз.
Объем 1,4 уч. - издл. Цена 10 коп.

055 (02)2

Отпечатано на роталпринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.



Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме:
и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша
АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Address: USSR, 125047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.