



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 173 за 1986 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[В. Т. Жуков](#)

Разностные схемы
локальных итераций для
параболических уравнений

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Жуков В. Т. Разностные схемы локальных итераций для параболических уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1986. № 173. с.

<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1986-173>

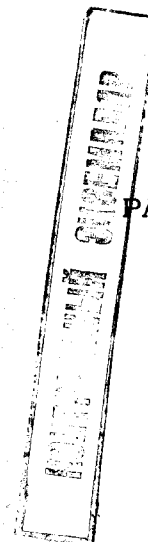
Цена 11 коп.



ПРЕПР.
ЖС-86

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Академии наук СССР

В.Т. Жуков



РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Препринт № 173 за 1986 г.

Москва

ПРЕПР.
ЖС-86

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

имени М.В. Келдыша

АКАДЕМИИ НАУК СССР

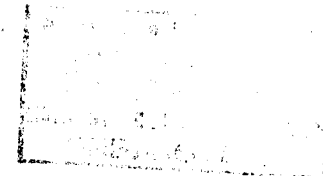
В.Т. Луков

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ

ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Москва 1986

Р.5/86



Разностные схемы локальных итераций для параболических уравнений. В.Т. Жуков
Препринт Ин-та Прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР

Аннотация

Построены две модификации специальной разностной схемы с чебышевскими параметрами для решения параболических уравнений. Алгоритм схемы и ее модификаций представляет собой явную итерационную схему счета и хорошо распараллеливается.

Изучены свойства всех трех схем, объяснены причины их высокой фактической точности, проведено сравнение с традиционными схемами.

Стр. 31, табл. 2, рис. 6, библи. II назв.

Содержание

1. Введение	3
2. Конструкция и основные свойства схемы ЛИ	4
3. Усовершенствованная схема ЛИ-М	9
4. Схема ЛИ-2 второго порядка точности	10
5. Качественный анализ схем ЛИ	13
5.1. О точности схем	
5.2. Об асимптотической устойчивости схем	
5.3. О монотонности схем	
5.4. Примеры расчетов	
6. Заключение	23
7. Литература	24
Иллюстративный материал	25

I. Введение

В /1/ О.В. Локуциевским и В.О. Локуциевским предложена новая схема решения краевых задач для параболических уравнений вида

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) + f \quad (I)$$

с несколькими пространственными переменными, гармонично сочетающая содержательность с логической простотой. Эта схема представляет собой двухслойную разностную схему, реализуемую явными итерациями с чебышевским набором параметров. Условимся называть её, как и в /2/, схемой локальных итераций (ЛИ). Это название означает, что если для сеточной аппроксимации уравнения (I) используется локальный шаблон узлов, то явные итерации стоятся локальными, т.е. новое приближение в узле сетки вычисляется по значениям старого приближения на связанном с этим узлом шаблоне. Следуя /1/, схему ЛИ нужно было бы называть многшаговой (по аналогии с многшаговыми методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений), но говорить "итерация" вместо "элементарный шаг" короче.

Специфика и достоинства схемы ЛИ заключаются в конструкции перехода с одного слоя двухслойной схемы на другой и не зависят от способа дискретизации уравнения (I) по пространственным переменным. Алгоритмически схема ЛИ совпадает с итерационным методом Ричардсона /3/, примененным для разрешения неявной двухслойной схемы, но в отличие от него сходимость разностного решения к точному достигается при меньшем числе итераций.

К настоящему времени схема ЛИ успешно прошла практическую проверку на большом числе задач, как одномерных, так и двумерных /2/. Она обладает высокой фактической точностью, логической простотой, хорошо распараллеливается. Однако, в исходном варианте /1/ схема ЛИ обладает недостатками: она немонотонна и асимптотически неустойчива при $t \rightarrow \infty$ (что при больших временах счета может привести к потере точности).

Целью данной работы является содержательное объяснение причин высокой точности схемы ЛИ и построение более совершенных её модификаций. Изложение ведётся на примере краевой задачи для простейшего одномерного уравнения теплопроводности; возможные обобщения достаточно очевидны. В п. 2 приведены конструкция схемы ЛИ и её основные свойства. В п.3 построена схема ЛИ-М

точности $O(\tau+h^2)$ в сеточной L_2 -норме - улучшенный вариант схемы ЛИ. В п.4 на основе схемы ЛИ-М строится схема ЛИ-2 точности $O(\tau^2+h^2)$. В п.5 изучаются свойства всех трех схем ЛИ, объясняются причины их высокой фактической точности, исследуется вопрос о монотонности этих схем, приводятся результаты некоторых расчетов.

2. Конструкция и основные свойства схемы ЛИ

Проиллюстрируем схему ЛИ на примере первой краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0,$$

$f(x, t)$, $u^0(x)$ - заданные функции. Возьмем сетку $\bar{\omega} = \bar{\omega}_\tau \times \bar{\omega}_x$:

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad 0 \leq n \leq N, \quad N\tau = 1\}, \quad \bar{\omega}_x = \{x_i = ih, \quad 0 \leq i \leq I, \quad Ih = 1\}$$

с шагами h по пространству и τ по времени; обозначим $\nu = \tau/h^2$ - число Куранта. Определим обычным образом сеточные функции; значения сеточной функции u на n -том временном слое t_n будем обозначать u^n или $u^n(x) = u(x, t_n)$, $x \in \bar{\omega}_x$, опуская в записи узла x его индекс. В пространстве сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_x$, введем скалярное произведение и норму равенствами:

$$\|W(x)\|^2 = (W, W) = \sum_{x \in \bar{\omega}_x} W^2(x) h, \quad (3)$$

($L_2(\bar{\omega}_x)$ -норма).

Определим на сеточных функциях $W(x)$, обращающихся в нуль при $x=0$ и $x=1$, оператор L :

$$LW = -[W(x+h) - 2W(x) + W(x-h)]. \quad (4)$$

Оператор L самосопряжен, его собственные значения λ известны /3/, они лежат на отрезке $[0, \lambda_\infty]$ (в данном случае $\lambda_\infty = 4$); будем их набор обозначать как $Sp(L)$.

Обозначим $V^n(x)$ - приближенное решение задачи (2), получаемое по схеме ЛИ; $0 \leq n \leq N$, $V^0(x) = u^0(x)$. Схема ЛИ является двухслойной; алгоритм перехода от V^n к V^{n+1} итерационный:

$$y^{(0)} = V^n,$$

$$y^{(m)} = \frac{1}{1 + \tau A_m} (V^n + \tau A_m y^{(m-1)} - \tau L y^{(m-1)} + \tau f),$$

$$m = 1, 2, \dots, p, \quad p = \left[\frac{\pi}{4} \sqrt{\lambda_\infty + 1} \right] + 1, \quad (5)$$

$$f = \begin{cases} f^n, & m=1, \\ f^{n+1}, & m > 1, \end{cases} \quad A_m = \frac{\lambda_\infty}{1 + \lambda_1} (x_1 - \beta_m),$$

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{2p}, \quad \beta_m \in \mathcal{K}_p = \left\{ \cos \frac{2i-1}{2p} \pi, \quad i=1, 2, \dots, p \right\},$$

$$V^{n+1} = y^{(p)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

здесь \mathcal{K}_p - множество корней полинома Чебышева степени p , упорядоченное специальным образом /3/, причем $\beta_1 = x_1$. При таком выборе параметров $\{A_m\}$ $A_1 = 0$, поэтому первая итерация эквивалентна счету по явной схеме. Отметим, что минимальное собственное значение оператора L не участвует в определении алгоритма (5). Запишем схему (5) в операторной форме (см. /1/):

$$\left. \begin{aligned} V^{n+1} &= S V^n + \tau Q^n, \\ Q^n &= (E - Z_{p-1}) B^{-1} f^{n+1} + Z_{p-1} f^n, \\ 0 \leq n < N, \quad V^0 &= u^0; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

здесь

$$S = (E + \tau L F_p) B^{-1} \quad (7)$$

- оператор перехода со слоя n на слой $n+1$ (он может зависеть от номера слоя n),

$$F_p = \prod_{m=p}^{m=1} \left(E - \frac{1}{1 + \tau A_m} B \right), \quad (8)$$

$$Z_{p-1} = \prod_{m=p}^{m=2} \left(E - \frac{1}{1 + \tau A_m} B \right), \quad (9)$$

$$B = E + \tau L, \quad (10)$$

E - единичный оператор. Так как в соответствии с (5) $A_1 = 0$, то

$$F_p = -\tau L Z_{p-1}. \quad (\text{II})$$

Приведем краткую характеристику операторов F_p и S (см. подробнее /I/). Рациональные функции от L самосопряжены и коммутируют между собой, поэтому операторы F_p и S самосопряжены и их собственные значения легко выражаются через собственные значения оператора L . Спектр $F_p(L)$ - это значения полинома $F_p(\lambda)$ на спектре оператора L . По построению F_p есть полином Чебышева I рода, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[\lambda_0, \lambda_\infty]$, где $\lambda_0 = \lambda_\infty \cdot (z_1 - 1)/(z_1 + 1) \in [-1/\tau, 0]$ с условием нормировки $F_p(-1/\tau) = 1$. На отрезке $[0, \lambda_\infty]$ $|F_p(\lambda)| \leq 1$, причем $F_p(0) = 0$. Спектр оператора послыного перехода S согласно (7) есть

$$p_S = \frac{1 + \tau \lambda F_p(\lambda)}{1 + \tau \lambda}, \quad \lambda \in Sp(L). \quad (\text{I2})$$

Для оценки точности схемы ЛИ наряду с ней рассмотрим аппроксимирующую задачу (2) двухслойную схему с весом α :

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_x^{n+1} - V_x^n}{\tau} + \frac{1}{h^2} L [\alpha V_x^{n+1} + (1-\alpha) V_x^n] &= f_x^n, \\ V_x^n(0) = V_x^n(1) = 0, \quad f_x^n &= f(x, \alpha t_{n+1} + (1-\alpha)t_n), \\ 0 \leq n < N, \quad V_x^0 = u^0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I3})$$

Напомним, что при $\alpha = 0$ схема (I3) называется явной, при $\alpha = 0,5$ - симметричной, или Кранка-Никольсона, при $\alpha = 1$ - чисто неявной. Пусть $u^n(x)$ - проекция на сетку точного решения u задачи (2). Погрешность аппроксимации схемы (I3) на решении есть сеточная функция

$$\varepsilon_x^n = \frac{1}{\tau} \{ u^{n+1} - u^n + \tau L [\alpha u^{n+1} + (1-\alpha) u^n] \} - f_x^n. \quad (\text{I4})$$

Известно /3/, что

$$\|\varepsilon_x^n\| = O(\tau^{1+l} + h^2), \quad (\text{I5})$$

где $l = 1$ при $\alpha = 0,5$ и $l = 0$ при $\alpha \neq 0,5$.

Утверждения, доказанные в /I/ можно сформулировать с некоторыми изменениями в следующем виде.

1. Погрешность аппроксимации схемы ЛИ на решении есть

$$\varepsilon^n = Z_{p-1} \varepsilon_0^n + B^{-1}(E - Z_{p-1}) \varepsilon_1^n, \quad (\text{I6})$$

где $\varepsilon_0^n, \varepsilon_1^n$ - погрешности аппроксимации явной и чисто неявной схем, определяемые формулой (I4) при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ соответственно.

2. Для погрешности приближенного решения $\delta^n = u^n - V^n$ схемы ЛИ верна оценка (в сеточной L_2 -норме)

$$\|\delta^{n+1}\| \leq \|S\| \|\delta^n\| + \tau \|\varepsilon^n\|. \quad (\text{I7})$$

3. При условии устойчивости

$$p \gg \frac{\pi}{4} \sqrt{\tau \lambda_\infty + 1} \quad (\text{I8})$$

выполнено:

$$\|F_p\| \leq 1, \quad (\text{I9})$$

$$\|S\| \leq 1, \quad (\text{I20})$$

$$\|Z_{p-1}\| \leq \frac{\pi^2}{8}. \quad (\text{I21})$$

Из этих утверждений следует, что $\|\varepsilon^n\| = O(\tau + h^2)$, $\|\delta^n\| = O(\tau + h^2)$, т.е. схема ЛИ сходится в сеточной L_2 -норме и её порядок точности совпадает с порядком аппроксимации. Отметим, что порядок точности по h определяется порядком аппроксимации уравнения (2) по пространству, а не конструкцией схемы ЛИ.

Неравенство (I20), означающее устойчивость схемы, следует из неравенства (I9). Условие $\|F_p\| \leq 1$ является особенностью схемы ЛИ, отличающей её от итерационных способов разрешения неявной схемы, в которых обычно норма итерационного оператора делается малой, приближая тем самым оператор перехода на верхний слой к разрешающему оператору B^{-1} неявной схемы. Выбор числа итераций и итерационных параметров в схеме ЛИ подчинен не минимизации нормы оператора F_p , а правильной аппроксимации точного оператора послыного перехода $\exp(-\tau L)$.

Замечание 2.1. В /I/ была приведена и обоснована более общая конструкция, чем (5). Она получается, если в (5) заменить $\tau \rightarrow \alpha \tau$, $V^n \rightarrow V^n - (1-\alpha)\tau L V^n$, $f^{n+1} \rightarrow \alpha f^{n+1} + (1-\alpha)f^n$, α - параметр, $0,5 \leq \alpha \leq 1$. С уменьшением α минимальное число итераций возрастает, в частности, при $\alpha = 0,5$ $p \gg \frac{\pi}{4} \sqrt{2\tau \lambda_\infty + 1}$, т.е. в $\sqrt{2}$ раз больше, чем при $\alpha = 1$. Порядок точности по τ при минимальном числе итераций от α не зависит, поэтому в

расчетах применялась в основном схема (5), соответствующая случаю $\mathcal{L} = I$. Она же взята в данной работе для иллюстрации.

Замечание 2.2. Оценку (21) можно уточнить:

$$\|Z_{p-1}\| \leq \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{p \ln(\pi/2p)} \quad (\approx \frac{\pi}{4}). \quad (22)$$

К настоящему времени схема ЛИ успешно прошла практическую проверку на большом числе задач для одномерных и двумерных уравнений теплопроводности более общего вида, в том числе и нелинейных /2/. Результаты расчетов свидетельствуют, что схема ЛИ по точности не уступает чисто неявной схеме и часто превосходит её. Причины этого будут объяснены в п. 5. Однако, схема ЛИ в вышеприведенной формулировке обладает некоторыми недостатками.

Во-первых, она немонотонна, т.е. приближенное решение может иметь "пилообразные" профили $V^n(x)$, что и было получено при решении задачи (2) с разрывной начальной функцией /2/.

Во-вторых, схема ЛИ не является асимптотически устойчивой при $t \rightarrow \infty$ /3/ и при больших временах расчета может привести к потере точности.

Более подробно эти недостатки будут рассмотрены в п. 5.

В-третьих, обратим внимание на следующее обстоятельство.

Чисто неявная схема имеет точность по времени $O(\tau)$ и монотонна, симметричная схема имеет точность $O(\tau^2)$ и немонотонна. Налицо диссонанс: схема ЛИ имеет точность $O(\tau)$, но немонотонна, т.е. формально сочетает худшие стороны двух указанных схем.

В следующих двух параграфах строятся две модификации схемы ЛИ: схема ЛИ-М точности $O(\tau)$, практически свободная от вышеуказанных недостатков, и схема ЛИ-2 точности $O(\tau^2)$.

3. Усовершенствованная схема ЛИ-М

Возьмем схему ЛИ в операторной форме (6) - (10) и изменим итерирующий оператор F_p , положив

$$F_p^+ = Z_{p-1} \cdot F_p, \quad (23)$$

где операторы F_p, Z_{p-1} определены формулами (8), (9) соответственно. Это значит, что после p итераций по схеме (5) итерационный цикл повторяется, начиная со второй итерации. Новый оператор послыного перехода есть

$$S^+ = (E - F_p^2) B^{-1} \quad (24)$$

вместо прежнего (7).

В результате вместо схемы (6) получаем схему

$$\left. \begin{aligned} V^{n+1} &= S^+ V^n + \tau Q^n, \\ Q^n &= (E - Z_{p-1}^2) B^{-1} \rho^{n+1} + Z_{p-1}^2 \rho^n, \\ 0 \leq n < N, \quad V^0 &= u^0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

которую назовем схемой ЛИ-М (модифицированной).

Погрешность аппроксимации этой схемы выражается, очевидно, формулой (16) с заменой Z_{p-1} на Z_{p-1}^2 , а для погрешности приближенного решения справедлива оценка вида (17) с заменой S на S^+ . При условии устойчивости (18) $\|F_p\| \leq 1$, а так как $\|B^{-1}\| \leq 1$, то в силу определения (24) выполнено неравенство $\|S^+\| \leq 1$, обеспечивающее сходимость схемы ЛИ-М со скоростью $O(\tau + h^2)$ в $L_2(\bar{\omega}_x)$ -норме.

Оператор S^+ неотрицательно определенный, его спектр

$$\rho^+ = \frac{1 - F_p^2(\lambda)}{1 + \tau \lambda}, \quad \lambda \in Sp(L) \quad (26)$$

в отличие от спектра (12) оператора S схемы ЛИ устроен более правильно.

Свойства схемы ЛИ-М и детальная характеристика спектра оператора послыного перехода будут приведены в п. 5.

4. Схема ЛИ-2 второго порядка точности

Используя идею пересчета, построим для задачи (2) на основе схемы ЛИ-М схему ЛИ-2 второго порядка точности по времени. Схема двухшаговая, переход на слой $t_{n+1} = t_n + \tau$ со слоя t_n состоит из двух этапов.

1. Вычисляем на "полуслое" $t_n + 0,5\tau$ вспомогательную функцию $V^{n+1/2}$, пользуясь схемой ЛИ-М ("предиктор"):

$$V^{n+1/2} = \bar{S}^+ V^n + 0,5\tau \bar{Q}^{n+1/2}, \quad (27)$$

$$\bar{Q}^{n+1/2} = (E - \bar{Z}_{p-1}^2) \bar{B}^{-1} f^{n+1/2} + \bar{Z}_{p-1}^2 f^n, \quad (28)$$

где операторы \bar{B} , \bar{Z}_{p-1} , \bar{S}^+ вычисляются по формулам (7) - (10), в которых число τ заменено на $0,5\tau$, например,

$$\bar{B} = E + 0,5\tau L. \quad (29)$$

2. Осуществляем пересчет ("корректор"):

$$V^{n+1} = V^n - \tau L V^{n+1/2} + \tau f^{n+1/2}.$$

Исключая вспомогательную величину $V^{n+1/2}$, получаем схему ЛИ-2:

$$\left. \begin{aligned} V^{n+1} &= (E - \tau L \bar{S}^+) V^n + \tau g^{n+1}, \\ g^{n+1} &= f^{n+1/2} - 0,5\tau L \bar{Q}^{n+1/2}, \\ 0 \leq n < N, \quad V^0 &= u^0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Утверждение. Схема ЛИ-2 сходится в L_2 -норме со скоростью $O(\tau^2 + h^2)$.

Доказательство. Устойчивость. Оператор послыного перехода этой схемы

$$\bar{S} = (E - \tau L \bar{S}^+) \quad (31)$$

с помощью (24) можно записать в виде

$$\bar{S} = (E - 0,5\tau L + \tau L \bar{F}_p^2) \bar{B}^{-1}. \quad (32)$$

Его спектр есть

$$\rho_{\bar{S}} = \frac{1 - 0,5\tau\lambda + \tau\lambda \bar{F}_p^2(\lambda)}{1 + 0,5\tau\lambda}, \quad (33)$$

$$\lambda \in Sp(L).$$

Так как $|\bar{F}_p^2(\lambda)| \leq 1$, то $|\rho_{\bar{S}}| \leq 1$. Это означает, что $\|\bar{S}\| \leq 1$, т.е. схема ЛИ-2 устойчива в L_2 .

Точность. Рассмотрим две схемы второго порядка точности по τ : симметричную схему (I3) ($\alpha = 0,5$) и явную схему типа предиктор-корректор:

$$\left. \begin{aligned} W^{n+1/2} &= W^n - 0,5\tau L W^n + 0,5\tau f^n, \\ W^{n+1} &= W^n - \tau L W^{n+1/2} + \tau f^{n+1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Исключая $W^{n+1/2}$ и вводя оператор

$$\bar{C} = E - 0,5\tau L, \quad (35)$$

запишем эту схему в виде

$$\left. \begin{aligned} W^{n+1} &= (E - \tau L \bar{C}) W^n + \tau (f^{n+1/2} - 0,5\tau L f^n), \\ 0 \leq n < N, \quad W^0 &= u^0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Погрешность аппроксимации схемы (36) на решении есть

$$y^n = \frac{1}{\tau} \{ u^{n+1} - (E - \tau L \bar{C}) u^n \} - f^{n+1/2} + 0,5\tau L f^n, \quad (37)$$

причем $\|y^n\| = O(\tau^2 + h^2) / 4!$.

Обозначим

$$\varphi^{n+1} = y^n + f^{n+1/2} - 0,5\tau L f^n. \quad (38)$$

Из (37) находим

$$u^{n+1} = (E - \tau L \bar{C}) u^n + \tau \varphi^{n+1}. \quad (39)$$

Из (I4) при $\alpha = 0,5$ налогично находим

$$u^{n+1} = \bar{B}^{-1} \bar{C} u^n + \tau \psi^{n+1}, \quad (40)$$

где обозначено

$$\psi^{n+1} = \bar{B}^{-1} (\varepsilon_{0,5}^n + f^{n+1/2}). \quad (41)$$

Вычитая из (39) выражение (40) имеем

$$(E - \tau L \bar{C} - \bar{B}^{-1} \bar{C}) u^n = \tau (\psi^{n+1} - \varphi^{n+1}). \quad (42)$$

Для погрешности $\delta^{n+1} = u^{n+1} - v^{n+1}$ схемы (30) получаем:

$$\delta^{n+1} = \bar{S} \delta^n + (\bar{B}^{-1} \bar{C} - \bar{S}) u^n + \tau (\psi^{n+1} - \varphi^{n+1}). \quad (43)$$

С помощью (42) второй член правой части равенства преобразуется к виду $-\tau \bar{Z}_{p-1}^2 (\psi^{n+1} - \varphi^{n+1})$, поэтому с учетом определений (38) и (41) имеем

$$\delta^{n+1} = \bar{S} \delta^n + \tau \{ \bar{Z}_{p-1}^2 (\gamma^n - \bar{B}^{-1} \varepsilon_{0,5}^n) + \bar{B}^{-1} \varepsilon_{0,5}^n \} + \tau F, \quad (44)$$

где

$$F = \bar{Z}_{p-1}^2 \{ (E - \bar{B}^{-1}) \rho^{n+1/2} - 0,5 \tau L \rho^n \} + (\bar{B}^{-1} - E) \rho^{n+1/2} + 0,5 \tau L \bar{Q}^{n+1/2}. \quad (45)$$

Используя определение (28) находим, что $F \equiv 0$. Следовательно, сеточная функция

$$\mu^n = \bar{Z}_{p-1}^2 (\gamma^n - \bar{B}^{-1} \varepsilon_{0,5}^n) + \bar{B}^{-1} \varepsilon_{0,5}^n \quad (46)$$

есть погрешность аппроксимации схемы ЛИ-2 на решении, причем $\|\mu^n\| = O(\tau^2 + h^2)$, так как $\|\gamma^n\|$ и $\|\varepsilon_{0,5}^n\|$ есть величины того же порядка, а нормы \bar{Z}_{p-1} , \bar{B}^{-1} ограничены.

Для ошибки получаем соотношение

$$\delta^{n+1} = \bar{S} \delta^n + \tau \mu^n;$$

из устойчивости ($\|\bar{S}\| \leq 1$) следует, что

$$\|\delta^{n+1}\| \leq \sum_{k=0}^n \tau \|\mu_k\|, \quad 0 \leq n < N,$$

т.е. схема ЛИ-2 сходится в $L_2(\bar{\omega}_x)$:

$$\|\delta^{n+1}\| \equiv \|u^{n+1} - v^{n+1}\| = O(\tau^2 + h^2).$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 4.1. Полное число итераций в схеме ЛИ-2

$$p = 2 \left\{ \frac{\pi}{4} \sqrt{0,57 \lambda_\infty + 1} + 1 \right\} + 1;$$

это меньше чем в схеме ЛИ-М примерно в 1.5 раза.

Замечание 4.2. В "предикторе" (27) можно осуществить переход на промежуточный слой $t_n + \alpha \tau$, $0,5 < \alpha \leq 1$. Получится схема вида (30), но точность будет $O(\tau + h^2)$.

Будем обозначать такую схему ЛИ-P(2).

5. Качественный анализ схем ЛИ

5.1. О точности схем

Специфика схем ЛИ заключается в конструкции оператора послыоного перехода, т.е. в аппроксимации уравнения по времени. Опыт расчетов, свидетельствует, что такая аппроксимация обеспечивает высокую фактическую точность, скажем, в ряде случаев более высокую, чем чисто неявная схема (см. /2/ и п. 5.4). Теоретические оценки точности не объясняют причин этого факта. Дадим ему содержательное объяснение, опираясь на спектральный анализ операторов послыоного перехода и изучение функций источника этих схем.

Приведем некоторые сведения /3/. Точное решение однородной задачи (2) можно разложить в ряд Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(-\mu_k t) \varphi_k(x), \quad (47)$$

где c_k - коэффициенты Фурье функции $u^0(x)$, φ_k , μ_k - собственные функции и собственные значения задачи $v''(x) + \mu v(x) = 0$, $0 < x < 1$, $v(0) = v(1) = 0$; $\varphi_k = \sqrt{2} \sin k \pi x$, $\mu_k = k^2 \pi^2$. Решение дифференциально-разностной схемы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{h^2} L u = 0, \quad 0 < t, \quad x \in \omega_x, \quad (48)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u^0(x)$$

(непрерывной по t , дискретной по x) записывается в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{I-1} b_k \exp(-\mu_k^h t) X_k(x) \quad (49)$$

по собственным функциям X_k разностного оператора L (4); здесь

$$\mu_k^h = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k h}{2}, \quad 1 \leq k \leq I-1,$$

I - число интервалов сетки по оси x . Обозначим для удобства $\lambda_k^h = h^2 \mu_k^h$.

Замечание 5.1. Существенным является то обстоятельство, что $\|\mu_k^h - \mu_k\| = O(h^2 k^4)$, т.е. разностные собствен-

ные значения хорошо приближают точные на низкочастотной части спектра $K \ll I$ и не имеют к ним никакого отношения при больших значениях K . Это закономерно и для общих эллиптических операторов и их разностных аналогов.

За время τ затухание гармоники ψ_k в точном решении (47) определяется величиной

$$\rho_k = \exp(-\tau \mu_k), \quad (50)$$

называемой множителем роста. Множители роста дифференциально-разностной схемы (48) есть

$$\rho_k^h = \exp(-\tau \lambda_k^h); \quad (51)$$

они являются собственными значениями оператора $\exp(-\tau L)$ перехода со слоя t на слой $t+\tau$ этой схемы.

Рассмотрим множители роста всех трех схем ЛИ и двухслойной схемы (13) — они являются собственными значениями соответствующих операторов послойного перехода (см. (12), (26), (33)). Условимся в записи собственных чисел и множителей роста опускать их номер. Для чисто неявной схемы ($\alpha = 1$) имеем

$$\rho_H = (1 + \tau \lambda)^{-1}; \quad (52)$$

для симметричной ($\alpha = 0.5$) —

$$\rho_C = (1 - 0.5\tau\lambda) / (1 + 0.5\tau\lambda); \quad (53)$$

для схем ЛИ —

$$\rho_{\text{ЛИ}} = \frac{1 + \tau \lambda F_P(\lambda)}{1 + \tau \lambda}; \quad (54)$$

$$\rho_{\text{ЛИ-М}} = \frac{1 - F_P^2(\lambda)}{1 + \tau \lambda}; \quad (55)$$

$$\rho_{\text{ЛИ-2}} = \frac{1 - 0.5\tau\lambda + \tau\lambda \bar{F}_P^2(\lambda)}{1 + 0.5\tau\lambda}; \quad (56)$$

$$\lambda \in Sp(L), \quad F_P(\lambda)$$

— чебышевский полином степени, см. п. 2.

Рассмотрим также множители роста чисто неявной схемы (13), разрешаемой на верхнем слое методом Рундсона с числом итераций ν . Выписать их нетрудно:

$$\rho_R = \frac{1 + \tau \lambda H_\nu(\lambda)}{1 + \tau \lambda}, \quad \lambda \in Sp(L), \quad (57)$$

где $H_\nu(\lambda)$ — полином Чебышева I рода степени ν , наименее уклоняющийся от 0 на спектре $[\lambda_{\min}, \lambda_\infty]$ оператора L ($\lambda_{\min} \approx \pi^2 h^2$), с условием нормировки $H_\nu(0) = 1$. Алгоритмически эта схема совпадает со схемой ЛИ, но выбор итерационных параметров другой /5/:

$$A_m = \frac{\lambda_\infty + \lambda_{\min}}{2} - \frac{\lambda_\infty - \lambda_{\min}}{2} \beta_m,$$

β_m — те же, что и в алгоритме (5).

С ростом ν величина $\|H_\nu\|$ — максимум модуля $H_\nu(\lambda)$ на отрезке $[\lambda_{\min}, \lambda_\infty]$ — убывает по известному закону (см., например, /5/) и соотношение $\|H_\nu(\lambda)\| = O(\tau^2)$, обеспечивающее точность $O(\tau)$ приближенного решения, достигается в характерном диапазоне чисел Куранта $\tau \lambda_\infty \gg 1$ при $\nu \approx \sqrt{\tau \lambda_\infty} \ln(1/\tau)$. Оценка числа итераций для схемы ЛИ лучше (см. (5)); этому факту также будет дано содержательное объяснение.

Соотношение между множителями роста (52)–(57) каждой из схем и множителями роста (51) дифференциально-разностной схемы характеризует насколько правильно та или иная схема описывает затухание во времени гармоник X_k . Но в силу замечания 5.1. гармоники высокочастотной части спектра ($K \gg 1$) "паразитические" и нет необходимости в их точной передаче, нужно лишь, чтобы их амплитуды не возрастали, т.е. множители роста были ограничены по абсолютной величине единицей. Более того, нередко, в точном решении уравнения присутствуют лишь несколько первых гармоник и для обеспечения точности достаточно хорошо отслеживать только их. Следовательно, начальный участок спектра является определяющим для характеристики точности схем. Рассмотрим с этой точки зрения множители роста (52)–(57). Они показаны графически как функции параметра λ при некоторых значениях чисел Куранта τ : на рис. 1 — на всем спектральном отрезке, на рис. 2 — на начальном участке спектра. Дополнительно на рисунках показаны множители роста схемы ЛИ-2 с увеличенным (\sim в 1.5 раза) числом итераций. Преимущества схемы ЛИ и в особенности схемы ЛИ-М по сравнению с чисто неявной схемой хорошо видны: их множители роста на начальном участке спектра ближе к истинным. Для основной собственной функции X_1 множитель роста можно приближенно оценить:

$$\rho_{\text{ЛИ}} \cong 1 - \tau \mu_1^h - (1 - \frac{\pi}{4})(\tau \mu_1^h)^2 + O(\tau^3),$$

$$\rho_{\text{ЛИ-М}} \cong 1 - \tau \mu_1^h + (1 - \frac{\pi^2}{16})(\tau \mu_1^h)^2 + O(\tau^3),$$

$$\rho_{\text{Н}} \cong 1 - \tau \mu_1^h + (\tau \mu_1^h)^2 + O(\tau^3),$$

а истинный

$$e^{-\tau \mu_1^h} \cong 1 - \tau \mu_1^h + \frac{1}{2}(\tau \mu_1^h)^2 + O(\tau^3). \quad (59)$$

Различие между множителями роста (58) и истинным (59) имеет порядок $O(\tau^2)$, отражающий точность $O(\tau)$ соответствующих схем. Еще раз обратим внимание на близость $\rho_{\text{ЛИ-М}}$ к истинному: $1 - \pi^2/16 \approx 1/2$, т.е. схема ЛИ-М "почти второго порядка".

Отметим, что расчет по схеме с итерациями Рундсона неразумен - затрачивается избыточная вычислительная работа для равномерного приближения всех множителей роста (52) чисто неявной схемы. Множитель роста первой гармоники схемы ЛИ-2 есть

$$\rho_{\text{ЛИ-2}} \cong 1 - \tau \mu_1^h + \frac{1}{2}(\tau \mu_1^h)^2 + O(\tau^3), \quad (60)$$

что указывает на второй порядок точности этой схемы.

5.2. Об асимптотической устойчивости схем

Напомним, что схема для уравнения (2) называется асимптотически устойчивой при $t \rightarrow \infty$, если с ростом t все гармоники с номером $K > 1$ затухают быстрее, чем первая, т.е. среди множителей роста первый является максимальным по абсолютной величине $/3/$. Схема ЛИ формально не является асимптотически устойчивой, так как и для $K > 1$ есть множители роста близкие по модулю к 1 (см. рис. 1) и ведущей может оказаться даже "паразитическая" гармоника. На практике этого удается избежать,

выбирая число итераций в (5) с небольшим запасом. Схема ЛИ-М, построенная в п. 3, асимптотически устойчива. Действительно, в силу (55) для $K \gg 2$

$$0 \leq \rho_K \leq \frac{1}{1 + \tau \lambda_2^h} < \rho_1;$$

последнее неравенство справедливо при условии $\tau \lambda_1^h = \tau \mu_1^h < 1$, которое выполнено ($\mu_1^h \approx \pi^2$).

Схема ЛИ-2 асимптотически неустойчива (см. рис. 1). Чтобы избежать с ростом t потери точности следует брать в (5) число итераций с небольшим запасом и тогда схема ЛИ-2 будет близка по свойствам к симметричной схеме, асимптотически устойчивой при ограничении $\tau \pi \leq h$; можно также осуществлять переход в "предикторе" (27)-(28) на слой $t_n + \alpha \tau$ с $\alpha \approx 0.6$, отказавшись формально от второго порядка точности.

5.3. О монотонности схем

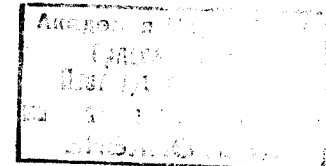
Известно, что решение задачи Коши для уравнения (2) с монотонной начальной функцией в любой момент времени сохраняет монотонность $/6,7/$. Разностная схема, обладающая таким свойством, называется монотонной. Рассмотрим конспективно вопрос о монотонности схем ЛИ, ЛИ-М, ЛИ-2. Число итераций p' , свое для каждой схемы, определяет полный шаблон из $2p' + 1$ узлов сетки, т.е. решение \hat{V}_i на верхнем слое определяется по значениям V_{i+m} , $m = 0, \pm 1, \dots, \pm p'$, с нижнего слоя. Избегая трудностей учета граничных условий, предположим, что все узлы шаблона $\{x_{i+m}, m = 0, \pm 1, \dots, \pm p'\}$ - внутренние. Тогда каждую из схем ЛИ можно формально записать в явном виде:

$$\hat{V}_i = \sum_{m=-p'}^{m=p'} G_m V_{i+m}, \quad (61)$$

где $\{G_m, m = 0, \pm 1, \dots, \pm p'\}$ - коэффициенты, совокупность которых является разностным аналогом "точной" функции источника:

$$G_m^T = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left[-\frac{m^2}{4\tau}\right], \quad -\infty < m < +\infty. \quad (62)$$

Эта функция получена путем применения простейшей квадратурной формулы на сетке к точному решению



$$u(x, t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t+\tau)}\right] u(\xi, t) d\xi \quad (63)$$

задачи Коши для уравнения (2) /7/.

Доопределим сеточную функцию $\{G_m\}$ нулем вне шаблона. Можно показать, что $G_{-m} = G_m$, $\sum G_m = 1$. Для монотонности схемы вида (61) необходимо и достаточно выполнения условия $G_m > 0$ (см., например, /6,7/).

В явном виде выписать функцию $\{G_m\}$ для схем локальных итераций не удастся, как не удастся провести строгого исследования монотонности этих схем. Однако, можно получить для $\{G_m\}$ представление в виде рядов Фурье и по ним найти численно функции источника для некоторых значений числа Куранта γ . На рис. 3 для $\gamma = 100$ приведены графики функций источника рассматриваемых схем и функции (62). Для $\gamma = 1, 10, 1000$ качественное поведение функций источника такое же. Графики показаны в логарифмическом масштабе, что объясняется желанием получить рисунки, сопоставимые с рисунками работы /7/, где показаны функции источника неявной, симметричной и комплексной схем.

Участки отрицательных коэффициентов G_m на рис. 3 показаны зигзагообразной линией. Видно, что функция источника схемы ЛИ-М положительна и хорошо приближает точную функцию (62), что свидетельствует о монотонности схемы и еще раз объясняет причину высокой точности схемы ЛИ-М.

Схема ЛИ немонотонна, ее центральные коэффициенты $G_0, G_{\pm 1}$ положительны, а периферийные, за исключением последнего, отрицательны.

Схема ЛИ-2 немонотонна, ее функция источника в центральной части напоминает функцию источника симметричной схемы.

5.4. Примеры расчетов

Ранее была проведена практическая проверка схемы ЛИ (5) на модельных задачах, выявившая хорошую фактическую точность этой схемы /2/. Приведем результаты такой же проверки для схем ЛИ-М и ЛИ-2. Как и в /2/, численные эксперименты связаны с некоторыми аналитическими решениями $U(x, t)$ одномерного или двумерного уравнения теплопроводности (1), в том числе и нелинейного с $\kappa = \kappa(u)$. По этим решениям определялись начальные и граничные условия. Для оценки точности вычислялись относительная погрешность на слое t_n (в процентах) и средняя погрешность на интервале $[t_0, T]$ по формулам

$$\varepsilon_n = \frac{\|u_n(x) - U(x, t_n)\|}{\|U(x, t_n)\|} \cdot 100\%$$

$$E = \frac{1}{T-t_0} \sum_n \tau \varepsilon_n$$

в сеточных нормах L_2 и C ; эти погрешности будем обозначать как εL , $E L$, εC , $E C$.

1. Рассмотрим задачу вида (2) на $-1 < x < 1$ с разрывной начальной функцией $u^0(x) = \text{sign } x$ и краевыми условиями, определяемыми из аналитического решения /2/. На рис. 4 показаны профили точного и приближенных решений при $t = 0.02$ на части отрезка $0 \leq x \leq 1$ (профили симметричны относительно точки $x = 0$). Видно, что схема ЛИ-М дает монотонный профиль и более точна, чем чисто неявная. Схемы ЛИ, ЛИ-2 (как и симметричная, см. /2/ или /7/) дают характерный "пилообразный" профиль - свидетельство их немонотонности, который с течением времени сглаживается. В таблице I приведены погрешности схем на момент времени $t = 0.1$. В этой же таблице даны погрешности схем ЛИ на момент времени $t = 0.1$ при гладкой начальной функции, в качестве которой взят профиль точного решения при $t = 0.02$. Для этого случая дополнительно приведены погрешности схем ЛИ-Р(x) при $x = 0.75$ и $x = 1$; см. замечание 4.2. Видно, что при негладких начальных данных наибольшую точность из рассмотренных схем имеет схема ЛИ-М. Если начальные данные гладкие, то схемы ЛИ, ЛИ-М, ЛИ-2 имеют хорошую точность: ЛИ лучше, чем чисто неявная, ЛИ-2 сравни-

ма с симметричной, ЛИ-М незначительно уступает ЛИ-2. Схемы ЛИ-Р(x) с $x > 0.5$ менее точны.

II. Рассматривалась краевая задача для нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = (k(u)u_x)x \quad (64)$$

с $k(u) = u^4$, имеющая решение типа температурной волны:

$$U(x,t) = \begin{cases} \sqrt[4]{4(t-x)}, & t \geq x, \\ 0, & t < x. \end{cases} \quad (65)$$

Задача заимствована из /7/ и схемы сравнивались по методике этой работы с некоторыми изменениями. Расчеты проводились на сетках с числом шагов $I = 1/h = 32, 64, 128$ и некоторых случаях с $I = 256$. Шаг по времени варьировался; здесь приведены результаты для $\tau = 0,5h$. Сравнение схем проводилось на момент времени $T = 11/16$. Сравнивались профили решений, погрешности схем EL и абсолютная погрешность δ в удаленном от фронта температурной волны узле $x^* = x_{pp} - 0,25$. В качестве "эталонных" взяты из /7/ результаты расчетов с помощью линейно-комплексной схемы. Эта схема точности $O(\tau^2 + h^2)$, почти монотонная и является по фактической точности одной из лучших среди исследованных в /7/ схем. Из хорошо известных традиционных схем для сравнения выбрана линейно-явная схема.

На рис. 5 показаны профили точного и приближенных решений в окрестности фронта волны. На рис. 6 приведены в логарифмическом масштабе зависимости EL и δ от шага сетки h при

$\tau = 0,5h$. Для линейно-комплексной схемы график EL отсутствует, так как в /7/ этот параметр не вычислялся. Видно, что схемы локальных итераций по точности значительно превосходят линейно-явную схему. В целом лучшие результаты из всех схем ЛИ дает схема ЛИ-М, однако, на удалении от фронта более точна схема ЛИ-2. В данном примере во всех схемах коэффициент теплопроводности $k(u)$ вычислялся по значениям функции u с нижнего слоя. Можно его вычислять в схемах ЛИ по старому итерационному приближению; для данной задачи-теста это приводит к повышению точности. В задачах с более сильной нелинейностью такой возмож-

ностью следует пользоваться осторожно, так как может возникнуть аварийный останов ЭВМ в силу специфики схем ЛИ (теоретически обоснованных только для линейных задач).

III. Рассматривалось уравнение (64), но с $k(u) = 256u^8$; аналитическое решение в этом случае есть

$$U(x,t) = \begin{cases} \sqrt[8]{1/8(4t-x)}, & 4t \geq x, \\ 0, & 4t < x. \end{cases} \quad (66)$$

Область: $0 \leq x \leq 40, 0 < t \leq 8$. Сетка по x равномерная с шагом $h = 1$. Проведены расчеты с шагами по времени $\tau = 0,0625, \tau = 0,125$ и $\tau = 0,25$, при которых температурная волна проходит 1/4, 1/2 и 1 шаг по оси x . Эта задача взята из /8/. В таблице 2 приведены результаты расчетов по схемам ЛИ, "РОМБ" и линейно-явной (для двух последних результаты взяты из /8/). В этой таблице показаны относительная ошибка при вычислении интеграла

$$E = \int_0^{40} u(x,t) dx$$

и среднее число итераций V на одном шаге по времени. В схемах нелинейно-явной и "РОМБ" эти итерации связаны с нелинейностью уравнения (64); на каждой итерации коэффициент теплопроводности вычислялся по предыдущему приближению, а новое приближение находится точно как решение линеаризованной задачи методом прогонки. В схемах ЛИ в данном примере пересчета коэффициента теплопроводности не производилось. Эта задача трудна для схем ЛИ, ЛИ-2 в силу их немонотонности и при больших числах Куранта (случай $\tau = 0,25$) при расчете по этим схемам происходит аварийный останов. Схема ЛИ-М дает хорошие результаты и даже в одномерном случае экономнее с точки зрения вычислительных затрат схем линейно-явной и "РОМБ" (их итерации "дороже" более чем в 4 раза итерации схемы ЛИ-М).

IV. Двумерные расчеты. В качестве примера приведем результаты интегрирования уравнения (I) в декартовых координатах (x,y) с $k(u) = u^2$, имеющего точное решение типа "сферической" волны

$$U(x,y,t) = \begin{cases} t^{-1/3} \sqrt[3]{\frac{1}{8}(1,3 - (x^2 + y^2)t^{-1/3})}, \\ 0, \text{ если подкоренное выражение отрицательно.} \end{cases}$$

Задача заимствована из /9/. Область - параллелограмм со стороной $-1,61 \leq x \leq 1,61$, высотой $-0,85 \leq y \leq 0,85$ и острым углом $\alpha = 70^\circ$. Начальное условие задается при $t_0 = 0.003$. Сетка равномерная по каждому направлению: $h_x = 0.087$, $h_y = 0.057$ (30x30 узлов). Дискретизация по пространству 9-ти-точечная, типа метода конечных элементов - основана на линейных элементах в треугольниках, получаемых при разбиении параллелограмма диагоналями. Расчет производился с шагом $\tau = 0.001$ до $T = 0.063$ (60 шагов). Отметим, что здесь величина τ близка к значению, допускающему устойчивый счет по явной схеме. Поэтому число итераций в схемах ЛИ невелико (2-3). Для всех трех схем ЛИ результаты почти одинаковы: в конце счета L_2 - и C -погрешности составляют 4% и 15% соответственно, а относительная ошибка в точке (0,0) - 0,70% (ЛИ), 0,36% (ЛИ-М), 0,3% (ЛИ-2); основной носитель ошибки - это фронт волны. Сопоставим эти результаты с другими: для схемы типа метода переменных направлений с 4 направлениями (2 основных и два диагональных) /9/ эти ошибки составляют, как можно судить на основании графической информации, около 5%. В /10/, где использовалась нелинейно- неявная схема с итерациями типа ньютоновских, получены более точные результаты ($\delta \approx 0.06\%$). С помощью схем ЛИ были решены и некоторые другие двумерные задачи на более сложных неортогональных сетках, взятые из /11/. Результаты сравнения удовлетворительные и свидетельствуют об эффективности схем локальных итераций (особенно ЛИ-М) по точности и объему вычислений.

6. Заключение

Схема ЛИ и ее модификации ЛИ-М и ЛИ-2 органически вписываются в семейство двухслойных разностных схем для параболических уравнений. Схема ЛИ имеет точность $O(\tau + h^2)$ и применима для линейных и нелинейных уравнений с гладкими решениями при небольших числах Куранта, т.е. представляет собой устойчивый аналог явной схемы. Схема ЛИ-М имеет точность $O(\tau + h^2)$ и по своим свойствам аналогична чисто неявной схеме, но обладает более высокой фактической точностью. Область ее применения включает задачи с негладкими решениями; допустимы сетки с большими (но разумными) числами Куранта. Схема ЛИ-2 имеет точность $O(\tau^2 + h^2)$ и по свойствам и области применения близка симметричной неявной схеме (Кранка-Никольсона).

Высокая фактическая точность всех трех схем ЛИ объясняется тем, что эти схемы наследуют качественное свойство, возникающее при разностной аппроксимации параболического уравнения по пространственным переменным. Неявные схемы, требующие точного нахождения разностного решения на верхнем слое, как и схемы расщепления, не учитывают природы своего происхождения.

Схема ЛИ почти оптимальна по объему вычислений среди явно-итерационных схем. Схемы ЛИ-М и ЛИ-2 соответственно в 2 и 1,5 раза более трудоемки, чем схема ЛИ. Схемы ЛИ экономнее неявных схем, разрешаемых прямым методом. Схемы расщепления, более оптимальные по порядку числа операций, на реальных сетках уступают, как правило, схемам ЛИ.

Схемы локальных итераций обобщаются на многомерный случай и задачи более общего вида, логически просты и легко программируются. Их алгоритм представляется собой явную схему счета и может быть эффективно реализован на многопроцессорной ЭВМ с распараллеливанием вычислений.

Автор глубоко признателен А.В. Забродину, О.В. Локущевскому и Р.П. Федоренко за постоянное внимание к этой работе.

7. Литература

1. Локуцкий В.О., Локуцкий О.В. Применение чебышевских параметров для численного решения некоторых эволюционных задач. - Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 99, 1984
2. Жуков В.Т. Численные эксперименты по решению уравнения теплопроводности методом локальных итераций. - Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 97, 1984
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М., Наука, 1977, 656 с.
4. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). - М., Наука, 1973, 400 с.
5. Федоренко Р.П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений. - УМН, 1973, т. XXVIII, вып. 2(170)
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М., Наука, 1978, 512 с.
7. Калиткин Н.Н., Ритус И.В. Комплексная схема решения параболических уравнений. - Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 32, 1981
8. Гаджиев А.Д., Писарев В.Н. Неявный конечно-разностный метод "Ромб" для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью. - Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1979, 19, № 5, с. 1288 - 1303
9. Забродин А.В., Пекарчук С.Б. Об одном методе численного решения нелинейного уравнения теплопроводности на параллелограммной сетке точек. - Вопр. атом. науки и техн. Сер. Методики и программы числ. реш. задач матем. физ., 1982, вып. 2 (10), с. 14 - 22
10. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Об одном алгоритме решения уравнения теплопроводности на неортогональных сетках. - Дифференциальные уравнения, 1985, т. XXI, №7, с. 1273-76
11. Троицев В.Е., Шагалиев Р.М. Консервативные узловые схемы метода конечных разностей и конечных элементов для двумерного уравнения теплопроводности. - В сб.: Числ. методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1984, т. 15, № 4, с. 131 - 157

Табл. I

Расчет I. Погрешности схем / в % /

	$\tau=0.01, \tau=6.25$			$\tau=0.02, \tau=12.5$		
	EL	εL	εC	EL	εL	εC
Разрывная начальная функция						
Чисто неявная	2.	1.2	1.4	3.4	2.3	2.9
Симметричная	2.8	0.74	2.1	8.2	5.4	19.
ЛИ	5.3	4.1	6.8	6.7	3.9	8.6
ЛИ - М	0.61	0.32	0.37	0.77	0.39	0.45
ЛИ - 2	1.9	0.39	0.65	6.3	3.5	11.2
Гладкая начальная функция						
Чисто неявная	0.93	0.95	1.1	1.8	1.8	2.2
Симметричная	0.04	0.02	0.02	0.22	0.1	0.13
ЛИ	0.62	0.56	0.66	1.3	1.	1.2
ЛИ - М	0.24	0.23	0.27	0.29	0.29	0.34
ЛИ - 2	0.09	0.18	0.37	0.19	0.35	0.69
ЛИ - P($\alpha=0.75$)	0.69	0.6	0.72	1.53	1.3	1.7
ЛИ - P($\alpha=1$)	1.4	1.2	1.5	3.4	3.1	4.5

Табл.2

Расчет III. Ошибка δE /% / и среднее число итераций ν

	$\tau=0.0625$ $\tau_{max}=64$		$\tau=0.125$ $\tau_{max}=128$		$\tau=0.25$ $\tau_{max}=256$	
	ν	δE	ν	δE	ν	δE
Схема "РОМБ"	5.2	0.18	7.7	0.32	14.7	0.47
Нелин.-неявная	6.2	1.62	10.	1.86	18.8	2.42
ЛИ	11	0.55	—	—	—	—
ЛИ - М	21	0.16	31	0.38	43	0.38
ЛИ - 2	16	0.22	24	0.81	—	—
ЛИ - P($\alpha=0.6$)	18	0.05	26	0.47	—	—
ЛИ - P($\alpha=1$)	22	0.61	—	—	—	—

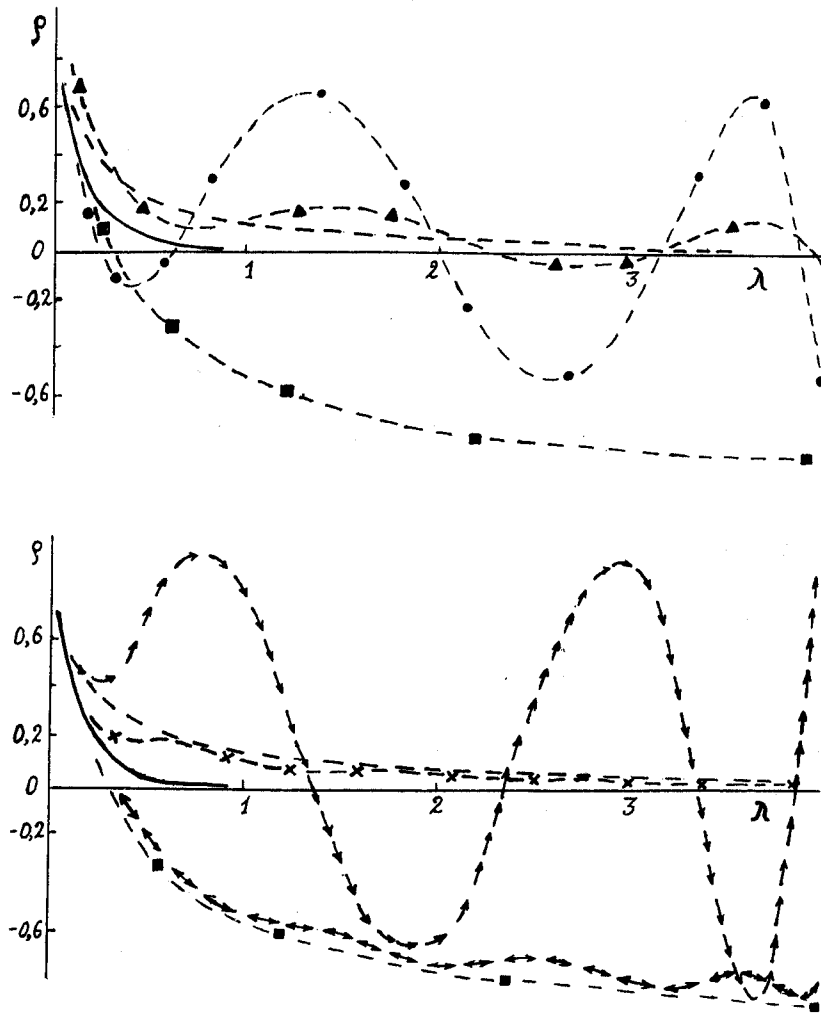


Рис. 1. Множители роста на отрезке $[0, \lambda_{\infty}]$ при $\tau=7$:
 — точный, - - - чисто неявная схема, - ■ - - симметричная схема, —●— ЛИ ($\rho=5$), —x— ЛИ-М, → → — ЛИ-2, ↔ ↔ — ЛИ-2 с удвоенным числом итераций, —▲— итерации Рундсона ($\rho=5$)

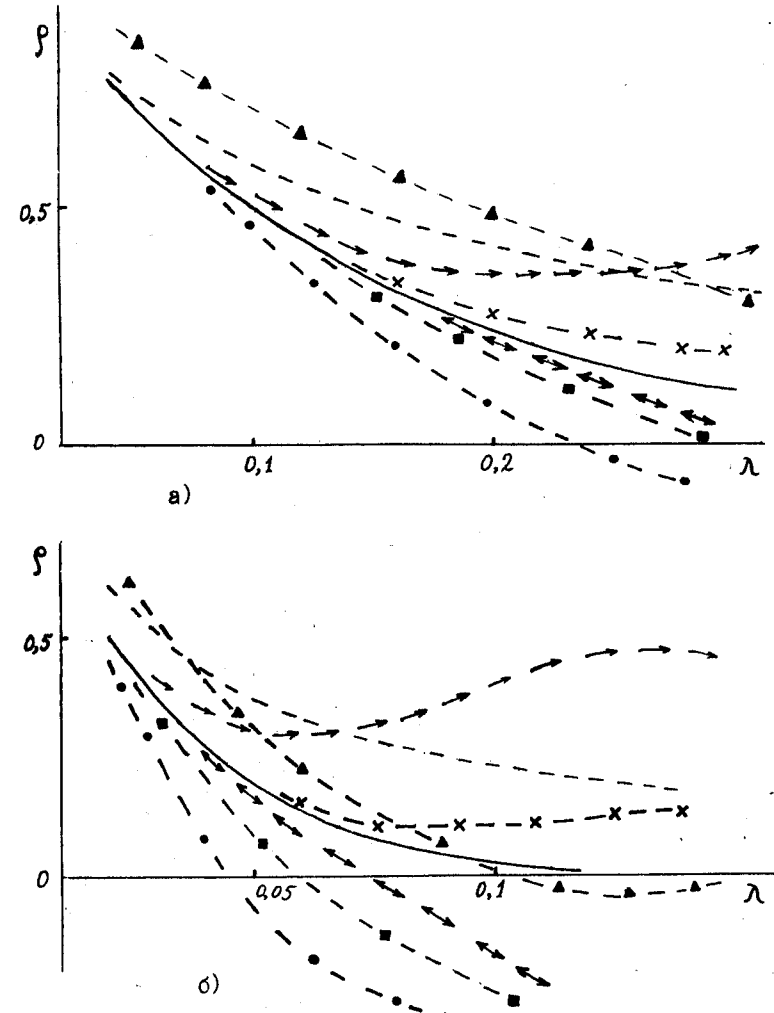


Рис. 2. Множители роста на начальном участке спектра:
 а) — $\tau=7$, б) — $\tau=33$. Обозначение линий см. на рис. 1

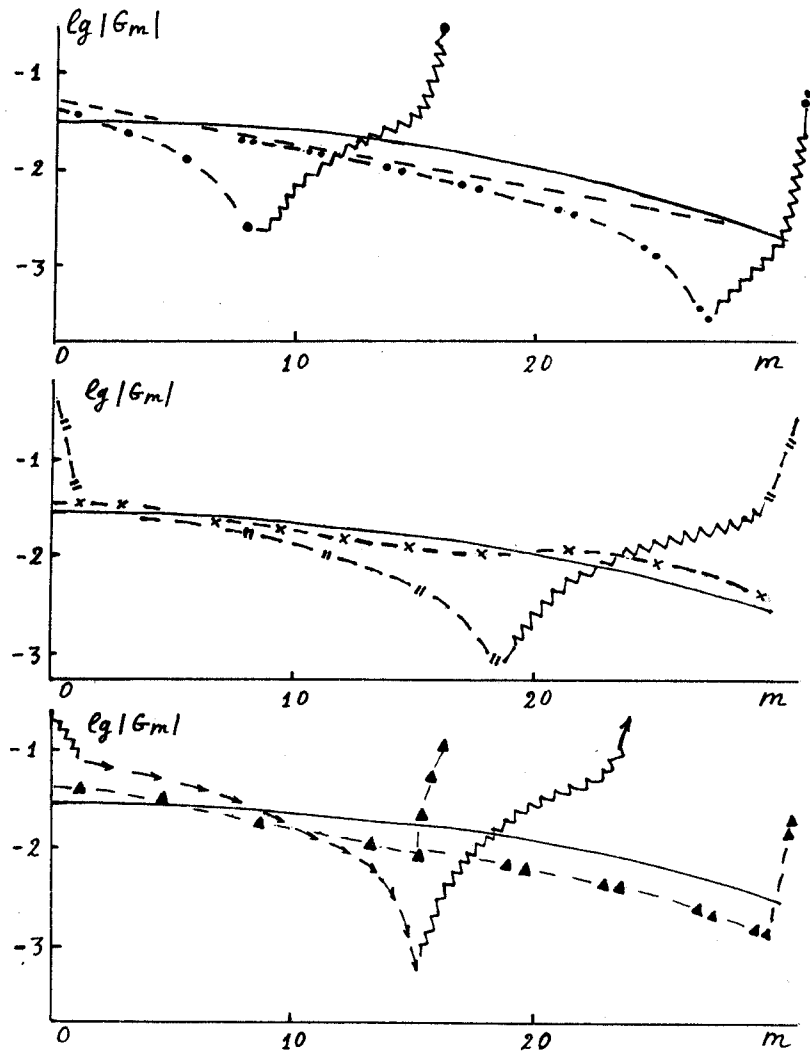


Рис. 3. Функции источника при $\gamma=100$: — — точная, — — — чисто неявная схема, —•— — ЛИ, —••— — ЛИ с удвоенным числом итераций, —x— — ЛИ-М, —n— — ЛИ-Р($\alpha=1$), —>—> — ЛИ-2, —▲— — итерации Ричардсона, —▲▲— — удвоенное число итераций Ричардсона

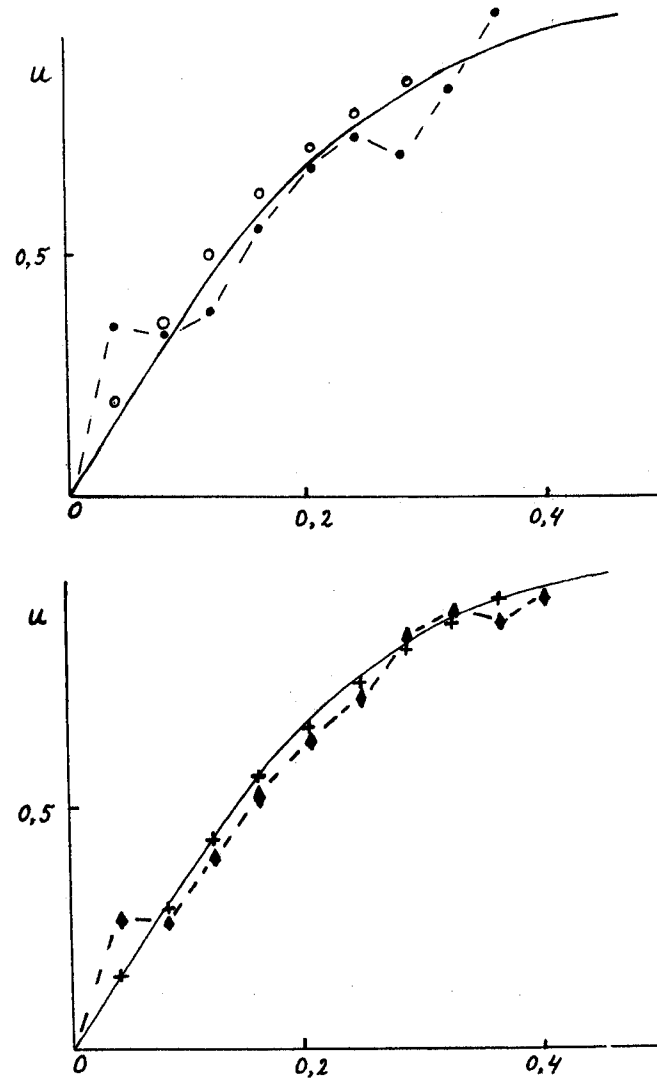


Рис. 4. Расчет I. Профили точного (—) и приближенных решений при $t=0.02$, $\tau=0.01$, $\gamma=6.25$: o — чисто неявная схема, —•— — ЛИ, —+— — ЛИ-М, —◆— — ЛИ-2

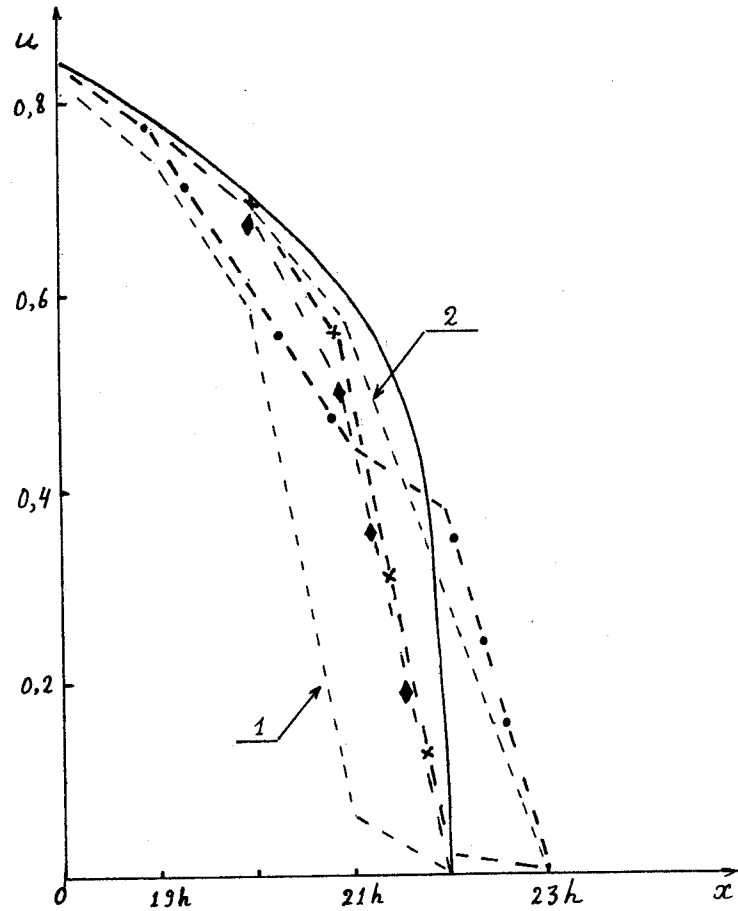


Рис. 5. Расчет II. Профили точного (—) и приближенных решений: 1 - линейно-нелинейная схема, 2 - линейно-комплексная схема, —•— LI, —x— LI-M, —♦— LI-2

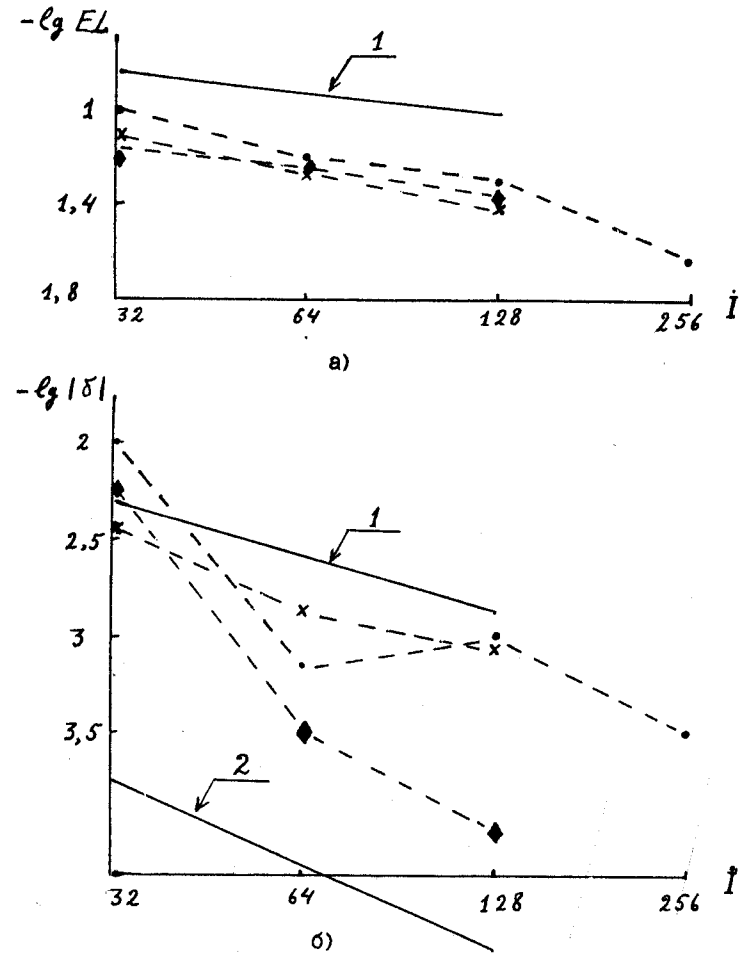


Рис. 6. Расчет II. Зависимость погрешности от шага сетки $h = 1/I$ при $\tau = 0.5h$: а) - средняя на $[0, T]$ L_2 - погрешность, б) - абсолютная погрешность в узле $x^* = x_{pp} - 0.25$; обозначение линий см. на рис. 5

