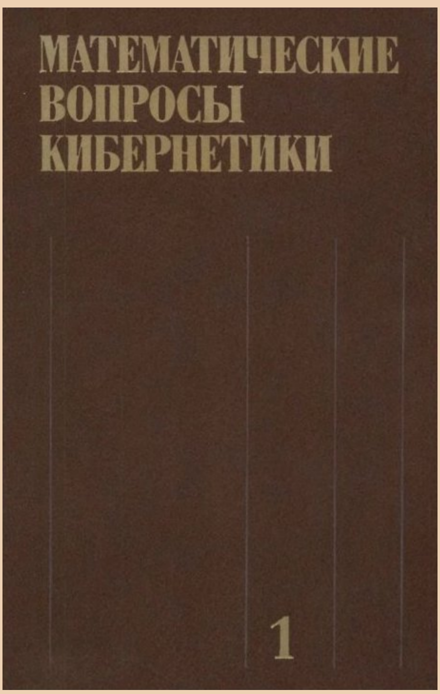

Е. В. Ветренникова

Построение простейшей универсальной о.-д. функции

ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ УНИВЕРСАЛЬНОЙ О.-Д. ФУНКЦИИ

Е. В. ВЕТРЕННИКОВА

(МОСКВА)

В заметке рассматриваются вопросы, связанные с полнотой отображений, реализуемых конечными автоматами,— ограниченно-детерминированных функций (для краткости — о.-д. функций).

Важным случаем полных систем о.-д. функций являются системы, состоящие из одной о.-д. функции. Такие о.-д. функции называются универсальными.

Первый пример универсальной о.-д. функции был построен в [3], который был упрощен затем в [4]. Эта о.-д. функция имела три входных переменных, одну выходную переменную и два внутренних состояния. Нетрудно видеть, что не существует универсальной о.-д. функции с одним состоянием или с одной выходной переменной. Поэтому построенная в работе [1] о.-д. функция с двумя входными переменными, одной выходной переменной и двумя состояниями является в этом смысле простейшей. Доказательство ее универсальности оказалось достаточно громоздким.

В работе [2] был построен аналогичный пример универсальной о.-д. функции, в котором входные и выходная переменные в каждый момент времени принимают значения 0 или 1, и доказательство универсальности которого существенно проще.

В предлагаемой заметке строится новый простейший пример универсальной о.-д. функции, входные и выходная переменные которой принимают заданное конечное число значений $0, 1, \ldots, k-1$ $(k \geqslant 2)$. Доказательство универсальности этого примера несколько сложнее, чем в [2], но по-прежнему существенно проще, чем в [1].

Мы будем пользоваться терминологией работы [4].

Рассматриваются о.-д. функции, входные и выходные переменные которых могут принимать значения из алфавита $E^k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. В классе $P^k_{\text{о.д.}}$ всех таких о.-д. функций вводятся операции суперпозиции и обратной связи [4]. Система о.-д. функций называется полной в $P^k_{\text{о.д.}}$, если из ее элементов при помощи указанных операций можно получить любую о.-д. функцию из $P^k_{\text{о.д.}}$. О.-д. функцию T будем называть универсальной, если T образует полную в $P^k_{\text{о.д.}}$ систему.

При описании о.-д. функций мы будем пользоваться языком канонических уравнений, схемами и диаграммами переходов.

Рассмотрим две вспомогательные о.-д. функции.

О.-д. функция $\mathrm{Sh}(x_1, x_2) = y$, называемая *шефферовой* о.-д. функцией, задается следующей канонической системой:

$$\begin{aligned} q(1) &= 1, \\ q(t+1) &= q(t), \\ y(t) &= \min(x_1(t), x_2(t)) + 1. \end{aligned}$$

О.-д. функция $D_1(x)=y$, называемая *единичной задержкой*, задается канонической системой

$$q(1)=1,$$
$$q(t+1)=x(t),$$
$$y(t)=q(t).$$

Известно [4, 5], что система о.-д. функций $S=\{\mathrm{Sh}, D_1\}$ является полной в $P^k_{\text{о.д.}}$.

Рассмотрим о.-д. функцию $F=F(x_1, x_2)=y$, которая описывается следующими каноническими уравнениями:

$$q(1)=1,$$
$$q(t+1)=[1-j_{k-1}(x_1(t))j_0(x_2(t))]q(t)+j_0(q(t))j_{k-1}(x_1(t)),$$
$$y(t)=[\min(x_1(t), x_2(t))+1]q(t)+j_0(q(t))[(x_1(t)\dot{-}x_2(t))+1].$$

(Здесь и далее операции сложения и умножения понимаются как операции по модулю k.)

Функции k-значной логики $j_i(x)$, $0\leqslant i\leqslant k-1$, и $x_1\dot{-}x_2$ определяются следующим образом:

$$j_i(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad x=i,\\ 0 & \text{при} \quad x\neq i;\end{cases} \quad x_1\dot{-}x_2=\begin{cases}x_1-x_2 & \text{при} \quad 0\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant k-1,\\ 0 & \text{при} \quad 0\leqslant x_1<x_2\leqslant k-1.\end{cases}$$

На рис. 1 приведена диаграмма переходов о.-д. функции F. На ней в кружках, обозначающих состояния q_1 и q_2 о.-д. функции F, указаны функции k-значной логики, которые реализуются в этих состояниях. Переход из состояния q_1 в состояние q_2 осуществляется только под действием пары входных символов $(x_1, x_2)=(k-1, 0)$. Из состояния q_2 о.-д. функция F переходит в состояние q_1 лишь тогда, когда $x_1=k-1$ (x_2 — любое). При других значениях входных переменных о.-д. функция F, находящаяся в состоянии q_i $(i=1, 2)$, остается в том же состоянии.

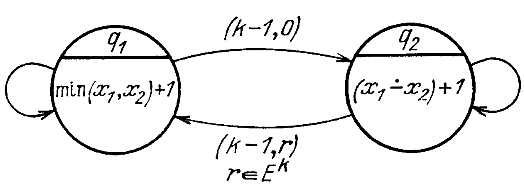

Рис. 1

Лемма 1. *Из о.-д. функции F при помощи операции суперпозиции можно получить о.-д. функцию* Sh.

Доказательство. 1. Рассмотрим о.-д. функцию $F_1(x)=F(x, x)=y$. Ее канонические уравнения можно записать в следующем виде:

$$q(1)=1,$$
$$q(t+1)=q(t),$$
$$y(t)=x(t)+1.$$

О.-д. функцию F_1 называют *отрицанием.*

Подставляя $k-2$ раза о.-д. функцию F_1 в себя, получим о.-д. функцию $F_2(x)$, задаваемую уравнениями

$$q(1)=1,$$
$$q(t+1)=q(t),$$
$$y(t)=x(t)+k-1.$$

2. Рассмотрим о.-д. функцию $F_3(x_1, x_2)=F(x_1, F_2(F(x_1, x_2)))=y$ (рис. 2). Ее канонические уравнения имеют вид

$$q_1(1)=q_2(1)=1,$$
$$q_1(t+1)=[1-j_0(x_2(t))j_{k-1}(x_1(t))]q_1(t)+j_0(q_1(t))j_{k-1}(x_1(t)),$$

$$q_2(t+1)=[1-j_{k-1}(x_1(t))j_0(z(t))]q_2(t)+j_0(q_2(t))j_{k-1}(x_1(t)),$$
$$z(t)=\min(x_1(t),\ x_2(t))q_1(t)+j_0(q_1(t))(x_1(t)\dot{-}x_2(t)),$$
$$y(t)=[\min(x_1(t),\ z(t))+1]q_2(t)+j_0(q_2(t))[(x_1(t)\dot{-}z(t))+1].$$

Докажем по индукции следующее свойство о.-д. функции F_3: в любой момент времени $t\geqslant 1$ выполнено $q_1(t)=q_2(t)$. Действительно, $q_1(1)=q_2(1)=1$. Предположим, что для некоторого $\tau\geqslant 1$ справедливо $q_1(\tau)=q_2(\tau)$. Рассмотрим два возможных случая.

а. $q_1(\tau)=q_2(\tau)=1$. Тогда

$$q_2(\tau+1)=1+j_{k-1}(x_1(\tau))j_0(x_2(\tau))=q_2(\tau+1).$$

б. $q_1(\tau)=q_2(\tau)=0$. В этом случае, очевидно,

$$q_1(\tau+1)=j_{k-1}(x_1(\tau))=q_2(\tau+1).$$

Таким образом, $q_1(t)=q_2(t)$ для любого t.

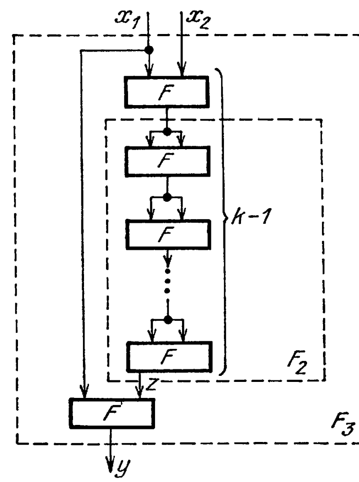

Рис. 2

С учетом доказанного свойства канонические уравнения, задающие о.-д. функцию F_3, могут быть представлены в более простой форме:

$$q(1)=1,$$
$$q(t+1)=[1-j_{k-1}(x_1(t))j_0(x_2(t))]q(t)+j_0(q(t))j_{k-1}(x_1(t)),$$
$$y(t)=[\min(x_1(t),\ \min(x_1(t),\ x_2(t)))+1]q(t)+$$
$$+j_0(q(t))[(x_1(t)\dot{-}(x_1(t)\dot{-}x_2(t)))+1].$$

Нетрудно проверить справедливость следующих соотношений:

$$\min(x_1,\ \min(x_1,\ x_2))+1=\min(x_1,\ x_2)+1,$$
$$(x_1\dot{-}(x_1\dot{-}x_2))+1=\min(x_1,\ x_2)+1.$$

Следовательно, в каждый момент времени t о.-д. функция F_3 совпадает с о.-д. функцией Sh. Лемма доказана.

Замечание. Как известно [4, 5], из о.-д. функции Sh при помощи операций суперпозиции можно получить любую о.-д. функцию, канонические уравнения которой представимы в виде

$$q(1)=1,$$
$$q(t+1)=q(t),$$
$$y(t)=f(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)),$$

где f — произвольная функция k-значной логики. Такие о.-д. функции будем называть *истинностными* о.-д. функциями (и.о.-д. функциями) и обозначать через $y=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Рассмотрим о.-д. функцию $y_1=T(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и и.о.-д. функцию $y_2=f(x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m})$. О.-д. функцию, полученную в результате подстановки y_1 в y_2 вместо переменной x_{n+i}, обозначим через

$$y=f(x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+i-1},\ T(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ x_{n+i+1},\ \ldots,\ x_{n+m}).$$

Лемма 2. *Из о.-д. функций F и* Sh *при помощи операций суперпозиции можно получить о.-д. функцию $D_1(x)$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим о.-д. функцию $F_4(x) = F(k-1, x) = y$. Ее канонические уравнения имеют вид

$$
\begin{aligned}
q(1) &= 1,\\
q(t+1) &= [1 - j_0(x(t))]\, q(t) + j_0(q(t)),\\
y(t) &= (x(t)+1)\, q(t) + j_0(q(t))\,(k-1)\, x(t).
\end{aligned}
$$

2. Рассмотрим и. о.-д. функцию

$$\varphi_1(x_1, x_2) = j_0(x_1) j_1(x_2) + j_1(x_1) j_2(x_2) + \ldots + j_{k-1}(x_1) j_0(x_2).$$

Функция $\varphi_1(x_1, x_2)$ принимает два значения: она равна единице при $x_2 = x_1 + 1$ и равна нулю при любых других значениях переменных. Подставим в и. о.-д. функцию $\varphi_1(x, x_2)$ вместо переменной x_2 о.-д. функцию $F_4(x)$. Канонические уравнения полученной о.-д. функции $F_5(x) = \varphi_1(x, F_4(x)) = y$ можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
q(1) &= 1,\\
q(t+1) &= [1 - j_0(x(t))]\, q(t) + j_0(q(t)),\\
y(t) &= q(t).
\end{aligned}
$$

3. Рассмотрим о.-д. функцию $G_r(x) = \max(x - r, F_5(x - r))$ и о.-д. функцию $\Phi_r(x) = \min(F_5(x - r), F_5(G_r(x))) = y_r$, $0 \leqslant r \leqslant k-1$. Канонические уравнения о.-д. функции Φ_r представимы в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
q_{2r+1}(1) &= q_{2r+2}(1) = 1,\\
q_{2r+1}(t+1) &= [1 - j_r(x(t))]\, q_{2r+1}(t) + j_0(q_{2r+1}(t)),\\
q_{2r+2}(t+1) &= [1 - j_r(x(t)) j_0(q_{2r+1}(t))]\, q_{2r+2}(t) + j_0(q_{2r+2}(t)),\\
y_r(t) &= q_{2r+1}(t)\, q_{2r+2}(t).
\end{aligned}
$$

На рис. 3 представлена диаграмма переходов о.-д. функции Φ_r. Исходя из канонических уравнений можно установить следующие свойства о.-д. функции $\Phi_r(x)$.

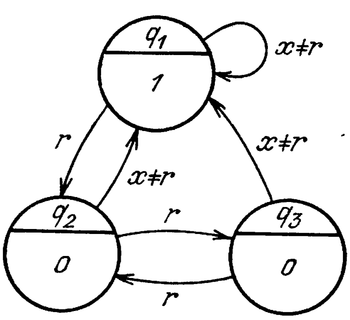

Рис. 3

а. Для любого $t \geqslant 1$ $q_{2r+1}(t)$ и $q_{2r+2}(t)$ одновременно не обращаются в нуль.

б. Для любого $t \geqslant 1$ если $x(t)$ отлично от r, то $q_{2r+1}(t+1) = q_{2r+2}(t+1) = 1$; при $x(t) = r$ $q_{2r+1}(t+1) \neq q_{2r+2}(t+1)$.

в. О.-д. функция $\Phi_r(x) = y$ принимает два значения: $y_r(t) = 0$ при $x(t-1) = r$ и $y_r(t) = 1$, если $x(t-1)$ отлично от r.

4. Рассмотрим о.-д. функцию

$$\Phi(x) = (\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_{k-2}(x)) = (y_0, y_1, \ldots, y_{k-2}),$$

полученную при помощи операции объединения [4] о.-д. функций $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{k-2}(x)$, определенных в п. 3.

Из свойств о.-д. функций $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-2}$ вытекают следующие свойства о.-д. функции $\Phi = (y_0, y_1, \ldots, y_{k-2})$.

а. Вес о.-д. функции Φ равен $2k-1$.

б. В каждый момент времени t среди значений $q_1(t), q_2(t), \ldots$ $\ldots, q_{2k-2}(t)$ найдется не более одного нуля, причем $q_{2r+1}(t)$, либо $q_{2r+2}(t)$ равны нулю тогда и только тогда, когда $x(t-1) = r$, $0 \leqslant r \leqslant k-2$.

в. Для любого $t \geqslant 1 : q_1(t+1) = q_2(t+1) = \ldots = q_{2k-2}(t+1) = 1$ тогда и только тогда, когда $x(t) = k-1$.

Отсюда следует, что множество состояний Q о.-д. функции Φ может быть представлено в виде объединения k непересекающихся подмножеств $Q_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_{k-1}$ таких, что, находясь в некотором состоянии $q \in Q$, о.-д. функция Φ под действием входного сигнала $x=\alpha$, $\alpha\in\{0, 1, \ldots \ldots, k-1\}$, перейдет в состояние $q'\in Q_\alpha$. Очевидно, таким же свойством обладает о.-д. функция $D_1(x)$. Таким образом, для построения о.-д. функции $D_1(x)$ достаточно лишь модифицировать функцию выхода о.-д. функции Φ.

Для этого можно, например, рассмотреть и. о.-д. функцию

$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1}\left(\prod_{j=1}^{i} x_j\right) = x_1 + x_1x_2 + \ldots + x_1x_2\ldots x_{k-1}$$

и подставить в нее вместо переменных $x_1, \ldots, x_{k-1}$ выходные функции $y_0, y_1, \ldots, y_{k-2}$ о.-д. функции Φ. Полученная о.-д. функция $F_7(x) = \varphi_2(y_0, y_1, \ldots, y_{k-2}) = y$ имеет канонические уравнения вида

$$q_1(1) = q_2(1) = \ldots = q_{2k-2}(1) = 1,$$
$$q_{2r+1}(t+1) = [1 - j_r(x(t))]\, q_{2r+1}(t) + j_0(q_{2r+1}(t)),$$
$$q_{2r+2}(t+1) = [1 - j_r(x(t))\, j_0(q_{2r+1}(t))]\, q_{2r+2}(t) + j_0(q_{2r+2}(t)),\quad 0\leqslant r\leqslant k-2,$$
$$y(t) = \sum_{i=1}^{k-1}\left(\prod_{j=1}^{2i} q_j(t)\right).$$

Покажем, что для любого $t\geqslant 2$ $F_7(x(t)) = D_1(x(t))$.

Фиксируем произвольный момент времени $\tau\geqslant 1$. Пусть $x(\tau)=k-1$. Тогда $q_1(\tau+1) = q_2(\tau+1) = \ldots = q_{2k-2}(\tau+1) = 1$ (см. свойства о.-д. функции Φ). Следовательно,

$$y(\tau+1) = \sum_{i=1}^{k-1}\left(\prod_{j=1}^{2i} 1\right) = \sum_{i=1}^{k-1} 1 = k-1 = x(\tau).$$

Пусть теперь $x(\tau) = r \neq k-1$. Тогда из свойств о.-д. функции Φ следует, что $q_1(\tau+1) = \ldots = q_{2r}(\tau+1) = q_{2r+3}(\tau+1) = \ldots = q_{2k-2}(\tau+1) = 1$, а либо $q_{2r+1}(\tau+1)$, либо $q_{2r+2}(\tau+1)$ обращаются в нуль. Следовательно,

$$y(\tau+1) = \sum_{i=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{2i} q_j(\tau+1)\right) + \sum_{i=r+1}^{k-1}\left(\prod_{j=1}^{2i} q_j(\tau+1)\right) = r + 0 = r = x(\tau).$$

Таким образом, неравенство $F_7(x)\neq D_1(x)$ выполнено лишь при $t=1$, так как в начальный момент выходная переменная о.-д. функции $F_7(x)$ принимает значение $k-1$.

Рассматривая о.-д. функцию $F_8(x) = F_7(1)\cdot F_7(x)$, получим $F_8(x) \equiv D_1(x)$. Лемма доказана.

Из доказанных лемм вытекает

Теорема. *О.-д. функция F является универсальной в $P^k_{\text{о.д}}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буевич В. А. Построение универсальной о.-д. функции от двух входных переменных, имеющей два внутренних состояния // Проблемы кибернетики. Вып. 22.— М.: Наука, 1970.
2. Ветренникова Е. В. Один простой пример универсальной ограниченно-детерминированной функции // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. Вып. 40.— Новосибирск, 1983.
3. Кудрявцев В. Б. Вопросы полноты для автоматов // ДАН СССР.— 1960.— 130. № 6.— С. 1189—1192.
4. Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. Вып. 13.— М.: Наука, 1965.
5. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1958.— 51.— С. 5—142.