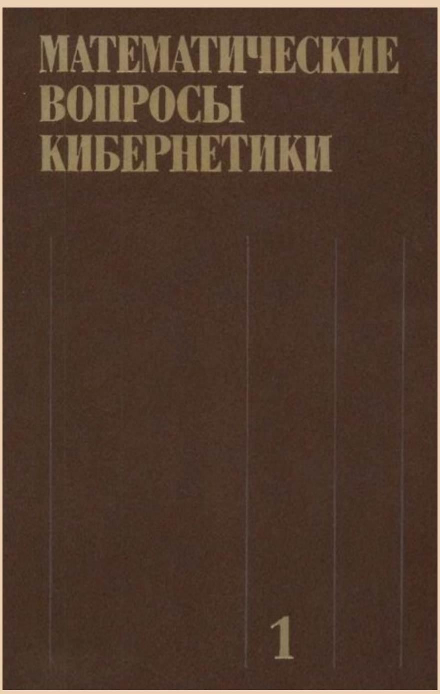

А. Б. Угольников

О глубине формул в неполных базисах

О ГЛУБИНЕ ФОРМУЛ В НЕПОЛНЫХ БАЗИСАХ

А. Б. УГОЛЬНИКОВ

(МОСКВА)

В работе рассматривается задача о реализации булевых функций из замкнутых классов формулами над конечными системами, которые состоят из функций, принадлежащих этим же классам (определение см. в [1, 2, 7]). Э. Пост [9] описал все замкнутые относительно операции суперпозиции классы булевых функций. Описание этих классов содержится в [8]. Мы будем использовать терминологию и обозначения последней работы.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная система булевых функций, Φ — формула над $\mathfrak{A}$. Обозначим через $L(\Phi)$ *сложность* формулы (число переменных и констант, входящих в Φ), а через $l(\Phi)$ — *глубину* формулы Φ. Величина $l(\Phi)$ определяется индуктивно: $l(\Phi)=0$, если Φ состоит из символа переменной или константы, $l(\Phi) = 1 + \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} L(\Phi_i)$, если Φ имеет вид $\varphi(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ $(\varphi \in \mathfrak{A})$. Сопоставим каждой функции f из $[\mathfrak{A}]$ два числа $L_{\mathfrak{A}}(f) = \min L(\Phi)$, $l_{\mathfrak{A}}(f) = \min l(\Phi)$, где минимум берется по всем формулам Φ над $\mathfrak{A}$, реализующим f. Пусть H — произвольное множество булевых функций. Обозначим через $H(n)$ совокупность всех функций из H от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Положим $l_{\mathfrak{A}}(H(n)) = \max l_{\mathfrak{A}}(f)$, где максимум берется по всем функциям f из $H(n)$.

О. Б. Лупанов [1] показал, что для любой полной конечной системы булевых функций $\mathfrak{A}$ и любой булевой функции $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ выполняется соотношение $L_{\mathfrak{A}}(f_n) \lesssim 2^n/\log_2 n$. На основе этого соотношения автором [3, 4] установлены аналогичные соотношения для следующих классов Поста: C_2, C_3, C_4, D_1, D_3, F_i^{∞} $(i = 1, 4, 5, 8)$.

В работе на основе специального представления монотонных функций получено полное (с точностью до порядка) описание поведения функции $l_{\mathfrak{A}}(H(n))$ для всех замкнутых классов H алгебры логики и любой конечной системы $\mathfrak{A}$ такой, что $[\mathfrak{A}] = H$ (см. также [5, 6]).

Говорят, что функция удовлетворяет условию $\langle a^{\mu} \rangle$ $(\mu \geqslant 2)$, если любые μ наборов, на которых функция равна нулю, имеют общую нулевую компоненту. Обозначим через F_4^{μ} множество всех булевых функций, удовлетворяющих условию $\langle a^{\mu} \rangle$, а через F_3^{μ} — множество всех монотонных булевых функций, удовлетворяющих условию $\langle a^{\mu} \rangle$ $(\mu = 2, 3, \ldots)$. Положим $w(x, y, z) = x \vee yz$, $d_{\mu}(x_1, \ldots, x_{\mu}) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant \mu} x_i x_j$. Нетрудно показать (см., например, [8]), что $[\{x \to y, d_{\mu+1}\}] = F_4^{\mu}$, $[\{1, w, d_{\mu+1}\}] = F_3^{\mu}$ $(\mu = 2, 3, \ldots)$.

Пусть $\widetilde{x}^i = (x_1^i, \ldots, x_{i-1}^i, x_{i+1}^i, \ldots, x_p^i)$, $p \geqslant 2$. Положим $\widetilde{X}^p = (\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^p)$. В набор $\widetilde{X}^p$ входят $p(p-1)$ переменных x_j^i. Набору $\widetilde{X}^p$ сопоставим $(p,\ p)$-матрицу $A_p(\tilde{X}^p)$ следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} x_j^i, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 0, & \text{если} \quad i = j, \end{cases}$$

где a_{ij} — элемент матрицы $A_p(\tilde{X}^p)$, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца. Таким образом, с каждым двоичным набором $\tilde{\alpha}$ длины $p(p-1)$ связана булева $(p,\ p)$-матрица $A_p(\tilde{\alpha})$ с нулевой главной диагональю. Определим функцию $\Omega_p(\tilde{X}^p)$ следующим образом:

$$\Omega_p(\tilde{X}^p) = \bigvee_{\substack{i,j,k \\ i,j\neq k}} x_k^i \mathbin{\&} x_j^k =$$
$$= \bigvee_{1\leqslant i\leqslant p} (x_1^i \vee \ldots \vee x_{i-1}^i \vee x_{i+1}^i \vee \ldots \vee x_p^i) \mathbin{\&} (x_i^1 \vee \ldots$$
$$\ldots \vee x_i^{i-1} \vee x_i^{i+1} \vee \ldots \vee x_i^p).$$

Положим $p(\mu) = 2^{\mu-1} + 1$ $(\mu = 2, 3, \ldots, \mu < \infty)$.

Лемма 1. *Для любого фиксированного* μ $(\mu \geqslant 2)$ *функция* $\Omega_{p(\mu)}$ *удовлетворяет условию* $\langle a^\mu \rangle$.

Доказательство. Будем доказывать требуемое утверждение индукцией по μ. Пусть $\mu = 2$. Покажем, что функция $\Omega_3(\tilde{X}^3)$ удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$. Имеем

$$\Omega_3(\tilde{X}^3) = (x_2^1 \vee x_3^1)(x_1^2 \vee x_1^3) \vee (x_1^2 \vee x_3^2)(x_2^1 \vee x_2^3) \vee$$
$$\vee (x_1^3 \vee x_2^3)(x_3^1 \vee x_3^2) \geqslant d_3(x_2^1, x_3^2, x_1^3).$$

Легко видеть, что функция d_3 удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$. Поэтому Ω_3 также удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$.

Предположим, что при $p^1 = p(\mu) = 2^{\mu-1} + 1$, $\mu \geqslant 2$, функция Ω_{p^1} удовлетворяет условию $\langle a^\mu \rangle$. Покажем, что при $p = p(\mu+1) = 2^\mu + 1$ функция Ω_p удовлетворяет условию $\langle a^{\mu+1} \rangle$. Рассмотрим произвольные $\mu + 1$ наборов $\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^{\mu+1}$ из нулей и единиц длины $p(p-1)$ такие, что $\Omega_p(\tilde{\alpha}^1) = \ldots$ $\ldots = \Omega_p(\tilde{\alpha}^{\mu+1}) = 0$, и связанные с ними $(p,\ p)$-матрицы $A^1 = A_p(\tilde{\alpha}^1), \ldots$ $\ldots, A^{\mu+1} = A_p(\tilde{\alpha}^{\mu+1})$ соответственно.

Рассмотрим i-ю $(1 \leqslant i \leqslant p)$ строку матрицы A^1. Если в ней есть хотя бы одна единица, то i-й столбец в A^1 целиком состоит из нулей. Таким образом, в матрице A^1 найдутся по крайней мере p нулевых строк и столбцов. Поэтому в A^1 можно выделить по крайней мере $]p/2[= 2^{\mu-1} + 1 = p^1$ различных нулевых строк (или столбцов) с некоторыми номерами $j_1, \ldots, j_{p^1}$. Выделим в матрицах $A^1, \ldots, A^{\mu+1}$ элементы, стоящие на пересечениях строк и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_{p^1}$. Получим $(p^1,\ p^1)$-матрицы $B^1, \ldots, B^{\mu+1}$ соответственно. Обозначим через $\tilde{\beta}^1, \ldots, \tilde{\beta}^{\mu+1}$ наборы из нулей и единиц длины $p^1(p^1-1)$, соответствующие матрицам $B^1, \ldots, B^{\mu+1}$. Наборы $\tilde{\beta}^j$ являются поднаборами наборов $\tilde{\alpha}^j$ $(j = 1, \ldots$ $\ldots, \mu+1)$ соответственно. Легко видеть, что $\tilde{\beta}^1 = (0, \ldots, 0)$, $\Omega_{p^1}(\tilde{\beta}^j) \leqslant$ $\leqslant \Omega_p(\tilde{\alpha}^j) = 0$ для всех $j = 2, \ldots, \mu+1$. По предположению индукции функция Ω_{p^1} удовлетворяет условию $\langle a^\mu \rangle$. Поэтому наборы $\tilde{\beta}^2, \ldots, \tilde{\beta}^{\mu+1}$ имеют общую нулевую компоненту. А значит, и наборы $\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^{\mu+1}$ имеют общую нулевую компоненту. Таким образом, функция Ω_p удовлетворяет условию $\langle a^{\mu+1} \rangle$. Лемма доказана.

Пусть p — натуральное, $p \geqslant 3$. Рассмотрим произвольную монотонную функцию $f_n(y_1, \ldots, y_n)$, $n \geqslant p$. Определим функции Y_j^i: $Y_j^i = f_n(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_i, y_{j+1}, \ldots, y_n)$, $i, j = 1, \ldots, p$, $i \neq j$. Нетрудно установить следующие свойства этих функций при всех допустимых значениях i, j.

1. $Y_j^i \leqslant y_i \vee f_n$.

2. $y_j \,\&\, Y_j^i \leqslant f_n$.

3. Для любого набора $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такого, что $\alpha_i=\alpha_j$, $i, j \leqslant p$, $Y_j^i(\widetilde{\alpha}) = Y_i^j(\widetilde{\alpha}) = f_n(\widetilde{\alpha})$.

Обозначим через $\widetilde{Y}$ набор функций длины $p(p-1)$, получающийся из ранее определенного набора переменных $\widetilde{X}^p$ заменой переменных x_j^i на функции Y_j^i соответственно ($i, j = 1, \ldots, p$, $i \neq j$).

Лемма 2. *Для любого натурального p, $p \geqslant 3$, и любой монотонной функции $f_n(y_1, \ldots, y_n)$, $n \geqslant p$, выполняется соотношение*

$$f_n = \Omega_p(\widetilde{Y}) = \bigvee_{\substack{i,j,k\\ i,k\neq j}} Y_j^i \,\&\, Y_k^j.$$

Доказательство. Пусть $f_n(y_1, \ldots, y_n)$ — произвольная монотонная функция ($n \geqslant p \geqslant 3$), а Y_j^i — функции, определенные выше ($i, j = 1, \ldots, p$, $i \neq j$). С одной стороны, в силу свойств 1, 2 для всех $i, j, k = 1, \ldots, p$, $i, k \neq j$, имеем $Y_j^i \,\&\, Y_k^j \leqslant Y_j^i \,\&\, (y_j \vee f_n) \leqslant f_n$, а значит, $\Omega_p(\widetilde{Y}) \leqslant f_n$. С другой стороны, в силу свойства 3 выполняется неравенство $\Omega_p(\widetilde{Y}) \geqslant f_n$, поскольку в любом двоичном наборе $\widetilde{\alpha}$ среди первых p разрядов обязательно найдутся два одинаковых.

Лемма 3. *Для любой функции f, удовлетворяющей условию $\langle a^\mu \rangle$, $\mu \geqslant 2$, существует монотонная функция g, удовлетворяющая условию $\langle a^\mu \rangle$ такая, что $g \leqslant f$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из F_4^μ. Положим $\mathfrak{A} = \{x \to y, d_{\mu+1}\}$, $[\mathfrak{A}] = F_4^\mu$. Пусть Φ — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая f. Обозначим через N число импликаций, входящих в Φ. Если $N=0$, то f — монотонная функция, и утверждение леммы очевидно. Пусть Φ имеет вид $\Psi(G_0 \to G_1, G_2, \ldots, G_k)$, $k \geqslant 1$, $G_0, \ldots, G_k$ — формулы, $\Psi \in [\{d_{\mu+1}\}]$; в частности, Φ может иметь вид $G_0 \to G_1$. Положим $\Phi_1 = \Psi(G_1, G_2, \ldots, G_k)$. Формула Φ_1 реализует некоторую функцию g_1 из F_4^μ, причем число N_1 (импликаций в ней) не более $N-1$, и $g_1 \leqslant f$. Если $N_1 \neq 0$, применим к формуле Φ_1 аналогичное преобразование и т. д. В конце концов получим формулу Φ_2 над $\{d_{\mu+1}\}$, которая реализует некоторую монотонную функцию g из F_4^μ такую, что $g \leqslant f$.

Теорема 1. *Для любой конечной системы булевых функций $\mathfrak{A}$ и любой функции $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ из $[\mathfrak{A}]$ выполняется неравенство*

$$l_{\mathfrak{A}}(f_n) \leqslant c(n+1),$$

где c — некоторая константа, зависящая от $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Утверждение теоремы легко устанавливается для классов C_i, A_i, L_i, S_i, P_i, O_i, F_i^∞, D_1, D_3 (см. также [3, 4]) при всех допустимых значениях i. Учитывая соображения двойственности, достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. $[\mathfrak{A}] = F_i^\mu$, $i = 2, 3$, $\mu = 2, 3, \ldots$

2. $[\mathfrak{A}] = D_2$.

3. $[\mathfrak{A}] = F_i^\mu$, $i = 1, 4$, $\mu = 2, 3, \ldots$

В первом случае утверждение теоремы непосредственно извлекается из лемм 1, 2, в силу которых каждая функция $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ из F_3^μ (или F_2^μ) при $n \geqslant p(\mu)$ может быть представлена в виде формулы конечной глубины над $\mathfrak{A}$, все главные подформулы которой реализуют некоторые функции из $[\mathfrak{A}]$ от меньшего числа переменных.

Рассмотрим второй случай. Пусть $[\mathfrak{A}] = D_2$ (множество всех монотонных самодвойственных булевых функций), а $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из D_2. Тогда $[\mathfrak{A} \cup \{1\}] = F_3^2$. В силу рассмотрений случая 1 существует формула Φ над $\mathfrak{A} \cup \{1\}$, реализующая f_n, такая, что $l(\Phi) \leqslant c(n+1)$, c — константа. Заменим всякое вхождение 1 в Φ на переменную y. Получим формулу Φ_1 над $\mathfrak{A}$; $l(\Phi_1) = l(\Phi)$. Нетрудно убедиться в том, что она реализует f (см. [6]).

Рассмотрим третий случай. Пусть $[\mathfrak{A}] = F_4^\mu$, а $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ произвольная функция из F_4^μ ($\mu = 2, 3, \ldots$). Очевидно, что $[\{\mathfrak{A} \cup 0\}] = C_1$. В силу леммы 3 найдется монотонная функция g_n из $[\mathfrak{A}]$ такая, что $g_n \leqslant f_n$. Пусть Φ — формула над $\mathfrak{A} \cup \{0\}$, реализующая f_n, такая, что $l(\Phi) \leqslant c_1(n+1)$, а Φ_0 — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая g_n, такая, что $l(\Phi_0) \leqslant c_2(n+1)$ (она существует в силу случая 1), c_1, c_2 — константы. Заменим всякое вхождение 0 в Φ на формулу Φ_0. Получим формулу Φ_2 над $\mathfrak{A}$. Легко видеть, что формула $\Phi_3 = \Phi_0 \vee \Phi_2$ над $\mathfrak{A}$ реализует f_n, причем выполняется неравенство $l(\Phi_3) \leqslant c_3(n+1)$, c_3 — константа. При $[\mathfrak{A}] = F_1^\mu$ ($\mu = 2, 3, \ldots$) утверждение теоремы устанавливается аналогичным образом.

Замечание. На основе теоремы 1 и мощностных нижних оценок нетрудно получить следующее описание поведения функции Шеннона (по глубине) для всех замкнутых классов алгебры логики.

Пусть H — один из классов C_i, A_i ($i = 1, 2, 3, 4$); D_i ($i = 1, 2, 3$), F_i^∞, F_i^μ ($i = 1, 2, \ldots, 8$, $\mu = 2, 3, \ldots$). Тогда для любой конечной системы булевых функций $\mathfrak{A}$ при $[\mathfrak{A}] = H$ выполняется соотношение $l_{\mathfrak{A}}(H(n)) \asymp n$.

Пусть H — один из классов S_i, P_i ($i = 1, 3, 5, 6$), L_i ($i = 1, \ldots, 5$). Тогда для любой конечной системы булевых функций $\mathfrak{A}$ при $[\mathfrak{A}] = H$ выполняется соотношение $l_{\mathfrak{A}}(H(n)) \asymp \log n$.

Для всех оставшихся классов булевых функций соответствующие функции Шеннона равны 0 (для классов $O_1 - O_3$, $O_5 - O_8$) или 1 (для классов O_4, O_9).

Из теоремы 1 непосредственно извлекается следующий результат.

Теорема 2. *Для любой конечной системы булевых функций $\mathfrak{A}$ и любой функции $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ из $[\mathfrak{A}]$ выполняется неравенство*

$$L_{\mathfrak{A}}(f_n) \leqslant 2^{c_1(n+1)},$$

где c_1 — константа, зависящая от $\mathfrak{A}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3.— М.: Физматгиз, 1960.— С. 61—80.
2. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Угольников А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах // ДАН СССР.— 1979.— 249, № 1.— С. 60—63.
4. Угольников А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах.— Препринт/ ИПМ АН СССР.— М., 1980.— № 112.
5. Угольников А. Б. О реализации булевых функций из некоторых замкнутых классов схемами из функциональных элементов в неполных базисах // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1985.— № 3.— С. 87—89.
6. Угольников А. Б. О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // Матем. заметки.— 1987,— 42, № 4.— С. 603—612.
7. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1986.
8. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста.— М.: Наука, 1966.
9. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math.— 1921.— 43.— P. 163—185.