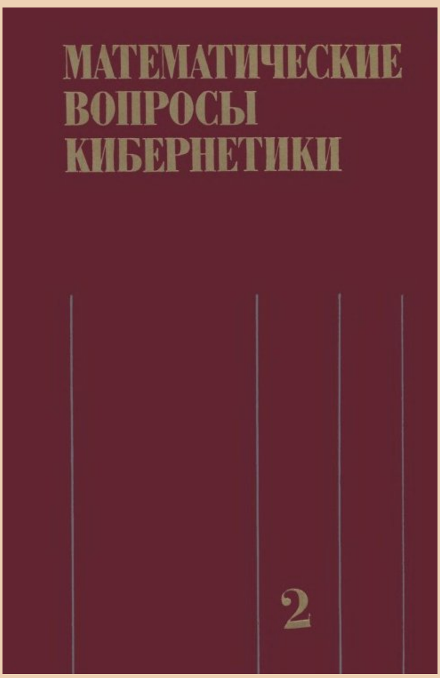

В. В. Князев

Об итеративных расширениях логики первого порядка

ОБ ИТЕРАТИВНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ЛОГИКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В. В. КНЯЗЕВ

(ГОРЬКИЙ)

1. Введение

Многие статистические результаты допускают качественную формулировку типа: почти все объекты из рассматриваемой совокупности обладают заданным свойством. Так, почти все графы связны, почти все графы имеют гамильтонов цикл [12], почти все булевы функции имеют асимптотически одинаковую сложность формульной или схемной реализации [5], почти все языки (за исключением множества языков меры нуль) имеют одинаковую матрицу оптимального кодирования [6], почти все сообщения, порождаемые эргодическим источником (кроме множества сообщений, появляющихся с суммарной вероятностью нуль), имеют частотную характеристику, совпадающую с предельным распределением вероятности [1] и т. п. Статистические закономерности качественного характера имеют важное значение при принятии статистически обоснованных решений. Обычно подобные факты устанавливаются с помощью комбинаторного или вероятностного анализа. Принципиально иное направление исследований — разработка логических методов изучения качественных статистических закономерностей. Основанием для применения логических методов является то, что часто качественный характер закономерности может быть установлен посредством синтаксического анализа предложения в подходящем языке. Первое значительное продвижение в этом направлении получено в работе [2], где показано, что для любого предложения $\mathscr{A}$ языка $\mathscr{L}_0$ предикатов первого порядка без пропозициональных переменных предел доли выполнимости на моделях мощности n при $n \to \infty$ равен 0 или 1 и вычисляется по виду предложения $\mathscr{A}$ (закон 0 и 1). Другими словами, если T — множество предложений, предел доли выполнимости которых равен 1, то T — полная разрешимая теория. Ранее был известен аналогичный результат Карнапа [10], относящийся только к сингулярным предложениям. В работах [3, 4, 11, 13] в рамках языка $\mathscr{L}_0$ изучались вопросы о построении для теории T нетривиальной системы аксиом, о поведении доли выполнимости предложений по неизоморфным моделям, об условной доле выполнимости предложений. Краткий обзор полученных результатов приведен в работах [8, 13].

Поскольку язык $\mathscr{L}_0$ имеет ограниченные выразительные возможности, встает задача распространения закона 0 и 1 на более выразительные языки. Поиск подходящих расширений языка ограничивается тем, что закон 0 и 1 нарушается как в случае добавления к языку $\mathscr{L}_0$ функциональных символов, так и при переходе к языку предикатов второго порядка. В статье [9] закон 0 и 1 был распространен на расширение языка $\mathscr{L}_0$ бесконечными формулами специального вида.

В предлагаемой работе закон 0 и 1 распространяется на класс расширений языка $\mathscr{L}_0$, названных итеративными расширениями, каждое из которых по существу является фрагментом инфинитарного языка $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega_0}$ [7]. Вводится понятие аппроксимации формулы расширенного языка формулами первого порядка, и задача вычисления предельного значения доли выполнимости формул в итеративных расширениях сводится к вычислению предела доли выполнимости аппроксимирующих ее формул. Для иллюстрации использовано свойство связности графа и некоторые его обобщения.

2. Итеративные расширения логики первого порядка

Пусть σ — нелогическая сигнатура, состоящая из предикатных символов ненулевой местности, $\mathscr{L}_0$ — язык первого порядка сигнатуры σ с равенством. Для формул языка $\mathscr{L}_0$ введем следующие сокращения. Через t обозначаем любое тождественно истинное предложение. Если $\mathscr{A}$ — формула языка $\mathscr{L}_0$ и список индивидных переменных $x, y, \ldots, z$ содержит все свободные переменные формулы $\mathscr{A}$, то, как в работе [2], через $(\forall x\ \ y, \ldots, z)\mathscr{A}$ и $(\exists x \mid y, \ldots, z)\mathscr{A}$ обозначаем формулы

$$\forall x (x \neq y \& \ldots \& x \neq z \to \mathscr{A}) \text{ и } \exists x (x \neq y \& \ldots \& x \neq z \& \mathscr{A})$$

соответственно. Если список $x, y, \ldots, z$ содержит в точности все свободные переменные формулы $\mathscr{A}$, то вместо $(\forall x \mid y, \ldots, z)\mathscr{A}$ и $(\exists x \mid y, \ldots, z)\mathscr{A}$ иногда будем писать $\mathring{\forall} x\mathscr{A}$ и $\mathring{\exists} x\mathscr{A}$ соответственно. Выражения $(\forall x / y, \ldots, z)$ и $\mathring{\forall} x$ называем *исключающими кванторами общности,* а выражения $(\exists x \mid y, \ldots, z)$ и $\mathring{\exists} x$ — *исключающими кванторами существования.* Множество формул языка $\mathscr{L}_0$, не содержащих обычных кванторов общности и существования, обозначим через $\mathscr{L}_1$.

Определим последовательность языков $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots$. Язык $\mathscr{L}_1$ описан выше. Язык $\mathscr{L}_{i+1}$ получается из языка $\mathscr{L}_i$ введением множества δ_i новых символов, элементы которого называются *преобразователями высоты* i, и добавления нового правила построения формул: если $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_i$, $f \in \delta_i$, то $f^*(\mathscr{A}) \in \mathscr{L}_{i+1}$. Вхождение индивидной переменной свободно (связанно) в формуле $f^*(\mathscr{A})$, если оно свободно (связанно) в формуле $\mathscr{A}$. Символ $*$ называем *символом итерации*, а формулу $\mathscr{A}$ — *областью действия* данного символа итерации.

Очевидно справедлива цепочка включений $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2 \subseteq \ldots$. Рассмотрим язык $\mathscr{L}$, равный $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2 \cup \ldots$. Множество свободных индивидных переменных формулы $\mathscr{A}$ обозначаем через $v(\mathscr{A})$, множество предикатных символов, использованных в формуле $\mathscr{A}$, обозначаем через $\sigma(\mathscr{A})$. Формулы языка $\mathscr{L}_1$ называем формулами первого порядка.

Пусть α — отображение, ставящее в соответствие каждому преобразователю f высоты $i \in \mathbf{N}$, всюду определенную вычислимую функцию f_α: $\mathscr{L}_i \to \mathscr{L}_i$ такую, что для любой $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_i$ выполнено $v(f_\alpha(\mathscr{A})) \subseteq v(\mathscr{A})$. Отображение α назовем *означиванием преобразователей.*

Интерпретацией $\mathfrak{B} = (\mathfrak{M}, \beta)$ *языка* $\mathscr{L}$ называем модель $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ вместе с оценкой β множества индивидных переменных языка $\mathscr{L}$. Пусть $\mathfrak{R}$ — множество всех интерпретаций языка $\mathscr{L}$. На множестве $\mathfrak{R} \times \mathscr{L}$ определим *отношение выполнимости* $\models_\alpha$, где α — означивание преобразователей. Пусть булевские операции, символ равенства и исключающие кванторы интерпретируются естественным образом, а формула $f^*(\mathscr{A})$ языка $\mathscr{L}_{i+1}$, $(i \in \mathbf{N})$, интерпретируется также как бесконечная дизъюнкция $\mathscr{A} \vee f_\alpha(\mathscr{A}) \vee f_\alpha(f_\alpha(\mathscr{A})) \vee \ldots$ формул языка $\mathscr{L}_i$. Фиксируя различные означивания α преобразователей, мы будем получать вообще говоря различные отношения выполнимости $\models_\alpha$. Язык $\mathscr{L}$ вместе с выбранным означиванием α называем *итеративным расширением логики первого порядка* и обозначаем через $\mathscr{L}^\alpha$.

Ограничение отношения $\vDash_\alpha$ на множество $\mathfrak{R}\times\mathscr{L}_1$ совпадает с естественным для языка $\mathscr{L}_1$ отношением выполнимости. В дальнейшем, говоря о выполнимости формул первого порядка, мы не будем упоминать об означивании α. Язык $\mathscr{L}_1$ вместе с естественным отношением выполнимости эквивалентен по выразительным возможностям логике первого порядка сигнатуры σ с равенством (см. [2]).

Тот факт, что формула $\mathscr{A}$ языка $\mathscr{L}$ истинна на интерпретации $\mathfrak{B}$ при означивании α, обозначаем через $\mathfrak{B}\vDash_\alpha\mathscr{A}$. Формулу $\mathscr{A}$ языка $\mathscr{L}$ называем *α-общезначимой*, если при означивании α она истинна на любой интерпретации $\mathfrak{B}$ языка $\mathscr{L}$. Конечно, истинность или ложность формулы $\mathscr{A}$ на интерпретации $\mathfrak{B}=(\mathfrak{M},\ \beta)$ не зависит от оценки тех индивидных переменных, которые не являются свободными в $\mathscr{A}$. Следовательно, если μ — оценка переменных из $v(\mathscr{A})$ такая, что для любой $x\in v(\mathscr{A})$ верно $\mu(x)=\beta(x)$, то мы можем писать $(\mathfrak{M},\ \mu)\vDash_\alpha\mathscr{A}$ вместо $(\mathfrak{M},\ \beta)\vDash_\alpha\mathscr{A}$.

Истинность или ложность $(\mathfrak{M},\ \mu)\vDash_\alpha\mathscr{A}$ не зависит от того, какие предикаты в модели $\mathfrak{M}$ поставлены в соответствие предикатным символам, не содержащимся в $\mathscr{A}$. Поэтому, если $\mathfrak{M}_1$ — модель сигнатуры $\sigma(\mathscr{A})$ с тем же, что и у $\mathfrak{M}$ основным множеством, в которой каждому предикатному символу из $\sigma(\mathscr{A})$ поставлен в соответствие тот же предикат, что и в модели $\mathfrak{M}$, то мы можем писать $(\mathfrak{M}_1,\ \mu)\vDash_\alpha\mathscr{A}$ вместо $(\mathfrak{M},\ \mu)\vDash_\alpha\mathscr{A}$.

3. Доля выполнимости

Пусть $\mathscr{A}\in\mathscr{L}$, $\sigma(\mathscr{A})\neq\varnothing$, $n\geqslant|v(\mathscr{A})|$, $\mathfrak{A}_n$ — множество всех моделей сигнатуры $\sigma(\mathscr{A})$ с основным множеством $\mathscr{U}_n=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, μ — инъективная оценка свободных переменных формулы $\mathscr{A}$ элементами из $\mathscr{U}_n$, α — означивание преобразователей. *Долей выполнимости формулы $\mathscr{A}$ в $\mathscr{L}^\alpha$ на множестве из n предметов при оценке* μ называем отношение числа моделей $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{A}_n$ таких, что $(\mathfrak{M},\ \mu)\vDash_\alpha\mathscr{A}$, к числу всех моделей из $\mathfrak{A}_n$. Это отношение будем обозначать через $\gamma^\alpha_{n,\mu}(\mathscr{A})$. Если $\sigma(\mathscr{A})=\varnothing$, то считаем, что $\gamma^\alpha_{n,\mu}(\mathscr{A})=1$, если $\mathscr{A}$ истинна при оценке μ, и $\gamma^\alpha_{n,\mu}(\mathscr{A})=0$, если $\mathscr{A}$ ложна при оценке μ. Величина $\gamma^\alpha_{n,\mu}(\mathscr{A})$ на самом деле не зависит от выбора оценки μ. Это означает, что если η — другая инъективная оценка свободных переменных формулы $\mathscr{A}$ элементами из $\mathscr{U}_n$, то $\gamma^\alpha_{n,\mu}(\mathscr{A})=$ $=\gamma^\alpha_{n,\eta}(\mathscr{A})$. Поэтому индекс μ в обозначении доли выполнимости в дальнейшем будем опускать. Формулу $\mathscr{A}$ назовем *асимптотически истинной* (*асимптотически ложной*) в $\mathscr{L}^\alpha$, если предел $\gamma^\alpha_n(\mathscr{A})$ при $n\to\infty$ существует и равен единице (равен нулю). Величину этого предела обозначим через $\gamma^\alpha(\mathscr{A})$ и назовем *асимптотическим значением истинности формулы $\mathscr{A}$ в $\mathscr{L}^\alpha$*. Заметим, что величина доли выполнимости для формул первого порядка не зависит от выбора означивания α. Поэтому в дальнейшем, говоря о доле выполнимости формул первого порядка, мы не будем упоминать об означивании α.

4. Асимптотическое значение истинности формул первого порядка

Формулу $\mathscr{A}$ языка $\mathscr{L}$ назовем *атомарно замкнутой*, если каждая ее подформула вида $P(y,\ \ldots,\ z)$, где $P\in\sigma$, находится в области действия квантора хотя бы по одной из своих переменных.

Теорема 1 (см. [2, 9]). *Любая атомарно замкнутая формула первого порядка языка $\mathscr{L}$ асимптотически истинна или асимптотически ложна.*

Из алгоритма вычисления асимптотического значения истинности для формул первого порядка, сформулированного в работах [2, 9], следует

Лемма 1 (об асимптотической замене). *Пусть $\mathscr{A}$ — атомарно замкнутая формула языка $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{B}$ — формула языка $\mathscr{L}_1$, полученная из $\mathscr{A}$ в результате подстановки вместо атомарно замкнутой подформулы некоторой атомарно замкнутой формулы с тем же асимптотическим значением истинности, тогда $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ либо обе асимптотически истинны, либо обе асимптотически ложны.*

Очевидно выполнена

Лемма 2 (о монотонной замене). *Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_1$, $v(\mathscr{C}) = v(\mathscr{D})$, формула $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ общезначима, формула $\mathscr{C}$ является подформулой формулы $\mathscr{A}$, формула $\mathscr{B}$ получена в результате подстановки в формулу $\mathscr{A}$ формулы $\mathscr{D}$ вместо некоторого, находящегося в области действия четного (нечетного) числа символов отрицания, вхождения подформулы $\mathscr{C}$. Тогда $v(\mathscr{A}) = v(\mathscr{B})$, и формула $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ (формула $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$) общезначима.*

5. Асимптотическое значение истинности формул в итеративных расширениях

Формулу $\mathscr{B}$ языка $\mathscr{L}$ назовем *α-аппроксимируемой*, если найдутся атомарно замкнутые формулы $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ первого порядка такие, что $v(\mathscr{C}) = v(\mathscr{D}) = v(\mathscr{B})$, $\gamma(\mathscr{C}) = \gamma(\mathscr{D})$ и формула $(\mathscr{C} \to \mathscr{B})\&(\mathscr{B} \to \mathscr{D})$ α-общезначима. Из теоремы 1 следует, что любая α-аппроксимируемая формула асимптотически истинна или асимптотически ложна в $\mathscr{L}^\alpha$.

Говорим, что в $\mathscr{L}^\alpha$ преобразователь f *сохраняет атомарную замкнутость*, если функция f_α любую атомарно замкнутую формулу из своей области определения переводит снова в атомарно замкнутую формулу.

Пусть $\mathscr{Y} = \{y_1, \ldots, y_p\}$ — множество символов индивидных переменных, $p \geqslant 0$. Через $=(y_1, \ldots, y_p)$ или $=(\mathscr{Y})$, обозначим формулу $y_1 = y_2 \vee y_1 = y_3 \vee \ldots \vee y_{p-1} = y_p$, если $|\mathscr{Y}| \geqslant 2$, и формулу $\neg t$, если $|\mathscr{Y}| \leqslant 1$. Будем говорить, что в $\mathscr{L}^\alpha$ преобразователь f *сохраняет ложность*, если для любой формулы $\mathscr{A}$ из области определения функции f_α формула

$$f^*(\mathscr{A}) \to (\mathring{\exists} y \ldots \mathring{\exists} z (\mathscr{A} \vee f_\alpha(\mathscr{A})) \vee =(y, \ldots, z)) \qquad (1)$$

α-общезначима, где $y, \ldots, z$ — все свободные переменные формулы $\mathscr{A}$. Из приведенного определения следует, что для сохраняющего ложность преобразователя f, если на модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ формулы $\mathscr{A}$ и $f_\alpha(\mathscr{A})$ ложны при любой инъективной оценке переменных $y, \ldots, z$, то такова же и формула $f^*(\mathscr{A})$.

Теорема 2. *Если в $\mathscr{L}^\alpha$ все преобразователи сохраняют атомарную замкнутость и ложность, то любая атомарно замкнутая формула $\mathscr{B}$ языка $\mathscr{L}$, в которой преобразователи применены только к атомарно замкнутым формулам, α-аппроксимируема.*

Доказательство. Для любой формулы $\mathscr{B}$ языка $\mathscr{L}$ найдется такое $i \in \mathrm{N}$, что $\mathscr{B} \in \mathscr{L}_i$. Индукцией по i покажем, что для любой формулы $\mathscr{B}$ с указанными в теореме свойствами найдутся аппроксимирующие ее формулы $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$. Если $\mathscr{B}$ — атомарно замкнутая формула языка $\mathscr{L}_1$, то $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ можно взять равными формуле $\mathscr{B}$.

Пусть $\mathscr{B}$ — формула языка $\mathscr{L}_{i+1}$, $i \in \mathrm{N}$, с указанными в теореме свойствами и пусть $f^*(\mathscr{A})$ — подформула формулы $\mathscr{B}$. Из способа интерпретации формулы $f^*(\mathscr{A})$ следует, что формула $(\mathscr{A} \vee f_\alpha(\mathscr{A})) \to f^*(\mathscr{A})$ α-общезначима. По условию формула $\mathscr{A}$ атомарно замкнутая и в $\mathscr{L}^\alpha$ преобразователь f сохраняет атомарную замкнутость, следовательно, формула $\mathscr{A} \vee f_\alpha(\mathscr{A})$ атомарно замкнутая. Все преобразователи в $\mathscr{A} \vee f_\alpha(\mathscr{A})$

применены только к атомарно замкнутым формулам. Значит, $\mathscr{A} \vee \vee f_\alpha(\mathscr{A})$ — формула языка $\mathscr{L}_i$, удовлетворяющая условию теоремы. По предположению индукции имеются атомарно замкнутые формулы $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{D}_1$ первого порядка такие, что $v(\mathscr{C}_1) = v(\mathscr{D}_1) = v(\mathscr{A} \vee f_\alpha(\mathscr{A}))$, $\gamma(\mathscr{C}_1) =$ образователь f сохраняет ложность, следовательно, формула (1) α-общезначима. Но тогда $\mathscr{C}_1 \to f^*(\mathscr{A})$ α-общезначима. По условию в $\mathscr{L}^\alpha$ преобразователь f сохраняет ложность, следовательно, формула (1) α-общезначима, где $v(\mathscr{A}) = v(\mathscr{A} \vee f_\alpha(\mathscr{A})) = \{y, \ldots, z\}$. Поскольку $v(\mathscr{D}_1) = = v(\mathscr{A} \vee f_\alpha(\mathscr{A}))$ и $(\mathscr{A} \vee f_\alpha(\mathscr{A})) \to \mathscr{D}_1$ α-общезначима, то и $f^*(\mathscr{A}) \to \to (\overset{\circ}{\exists} y \ldots \overset{\circ}{\exists} z \mathscr{D}_1 \bigvee = (y, \ldots, z))$ также α-общезначима. Формулу $\overset{\circ}{\exists} y \ldots \ldots \overset{\circ}{\exists} z \mathscr{D}_1 \bigvee = (y, \ldots, z)$ обозначим через $\mathscr{D}_2$. По теореме 1 формула $\mathscr{D}_1$ асимптотически истинна или асимптотически ложна. Тогда из алгоритма вычисления асимптотического значения истинности для формул первого порядка [2, 9] следует, что $\gamma(\mathscr{D}_1) = \gamma(\mathscr{D}_2)$. Но $v(\mathscr{A}) = = v(f^*(\mathscr{A})) = v(\mathscr{D}_2)$. Формула $\mathscr{D}_2$ атомарно замкнутая. Значит формулы $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{D}_2$ аппроксимируют формулу $f^*(\mathscr{A})$. Искомая формула $\mathscr{C}$ для $\mathscr{B}$ получается следующим образом. В формулу $\mathscr{B}$ вместо каждой ее подформулы вида $f^*(\mathscr{A})$ с символом итерации, не находящимся в области действия других символов итерации, в зависимости от того, находится ли эта подформула в области действия четного или нечетного числа символов отрицания, подставим формулу $\mathscr{C}_1$ или формулу $\mathscr{D}_2$, получаемые описанным выше способом. Поскольку $v(\mathscr{C}_1) = v(\mathscr{D}_2) = v(f^*(\mathscr{A}))$, то выражение, получающееся после соответствующих подстановок, является формулой языка $\mathscr{L}$. Формула $\mathscr{D}$ для $\mathscr{B}$ строится похожим образом, нужно только формулы $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{D}_2$ поменять ролями. Из способа построения формул $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ и леммы 2 о монотонной замене следует, что $v(\mathscr{C}) = v(\mathscr{D}) = v(\mathscr{B})$ и формулы $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$ и $\mathscr{B} \to \mathscr{D}$ α-общезначимы. Так как формула $\mathscr{B}$ — атомарно замкнутая и подставляемые вместо $f^*(\mathscr{A})$ формулы $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{D}_2$ атомарно замкнуты, то и формулы $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ также атомарно замкнуты. Применяя лемму 1 об асимптотической замене, получаем, что $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ либо обе асимптотически истинны, либо обе асимптотически ложны. Следовательно, формулы $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ аппроксимируют формулу $\mathscr{B}$.

6. Операция подстановки

Далее через $m(P)$ обозначаем местность предикатного символа P сигнатуры σ. Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B} \in \mathscr{L}$, $P \in \sigma$, $|v(\mathscr{A})| = m(P)$. Определим формулу $\mathscr{B}_P(\mathscr{A})$ как результат подстановки в формулу $\mathscr{B}$ вместо каждой ее подформулы вида $P(y, \ldots, z)$ формулы, полученной из $\mathscr{A}$ заменой свободных вхождений переменных в алфавитном порядке на переменные $y, \ldots, z$, а связанных вхождений переменных в алфавитном порядке на первые в алфавитном порядке переменные, не встречающиеся в $\mathscr{B}$.

Формулы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{F}$ языка $\mathscr{L}$ назовем *инъективно эквивалентными* при означивании α на модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ и будем обозначать это через $\mathscr{A} \underset{\mathfrak{M},\alpha}{\overset{\circ}{\longleftrightarrow}} \mathscr{F}$, если при любой инъективной оценке μ переменных из $v(\mathscr{A}) \vee v(\mathscr{F})$ истинно $(\mathfrak{M}, \mu) \models_\alpha (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{F})$.

Пусть $\mathscr{B} \in \mathscr{L}_1$, $P \in \sigma$. Формулу $\mathscr{B}$ назовем *нормальной по* P, если в каждом вхождении в $\mathscr{B}$ формулы вида $P(y, \ldots, z)$ переменные $y, \ldots, z$ попарно различны.

Лемма 3. *Пусть* $\mathscr{A}$, $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$, $\mathscr{B} \in \mathscr{L}_1$, $P \in \sigma$, $v(\mathscr{A}) = v(\mathscr{F})$, $|v(\mathscr{A})| = m(P)$, $\mathscr{B}$ *нормальна по* P, *тогда на любой модели* $\mathfrak{M}$ *сигнатуры* σ, *если* $\mathscr{A} \underset{\mathfrak{M},\alpha}{\overset{\circ}{\longleftrightarrow}} \mathscr{F}$, *то* $\mathscr{B}_P(\mathscr{A}) \underset{\mathfrak{M},\alpha}{\overset{\circ}{\longleftrightarrow}} \mathscr{B}_P(\mathscr{F})$.

Доказательство легко проводится индукцией по построению формулы $\mathscr{B}$. Рассмотрим лишь два случая. Пусть $\mathscr{B}$ имеет вид $P(y, \ldots, z)$. Тогда формула $\mathscr{B}_P(\mathscr{A})$ есть вариант формулы $\mathscr{A}$ со свободными переменными $y, \ldots, z$. Но поскольку по условию $y, \ldots, z$ попарно различны, то из $\mathscr{A} \underset{\mathfrak{M},\alpha}{\overset{\circ}{\longleftrightarrow}} \mathscr{F}$ следует $\mathscr{B}_P(\mathscr{A}) \underset{\mathfrak{M},\alpha}{\overset{\circ}{\longleftrightarrow}} \mathscr{B}_P(\mathscr{F})$. Пусть $\mathscr{B}$ имеет вид $(\forall x \mid y, \ldots$ $\ldots, z)\mathscr{C}$. Если $\mathscr{A} \underset{\mathfrak{M},\alpha}{\overset{\circ}{\longleftrightarrow}} \mathscr{F}$, то по предположению индукции $\mathscr{C}_P(\mathscr{A}) \underset{\mathfrak{M},\alpha}{\overset{\circ}{\longleftrightarrow}}$ $\longleftrightarrow \mathscr{C}_P(\mathscr{F})$. Тогда из определения инъективной эквивалентности формул следует, что при любой оценке β переменных языка $\mathscr{L}$ истинно $(\mathfrak{M}, \beta) \models$ $\models_\alpha (=(x, y, \ldots, z) \vee \mathscr{C}_P(\mathscr{A})) \longleftrightarrow (=(x, y, \ldots, z) \vee \mathscr{C}_P(\mathscr{F}))$, а значит при любой оценке β истинно $(\mathfrak{M}, \beta) \models_\alpha (\forall x \mid y, \ldots, z)(=(x, y, \ldots, z) \vee$ $\vee \mathscr{C}_P(\mathscr{A})) \leftrightarrow (\forall x \mid y, \ldots, z)(=(x, y, \ldots, z) \vee \mathscr{C}_P(\mathscr{F}))$. Из способа означивания исключающего квантора общности следует, что для любой формулы $\mathscr{Y}$ языка $\mathscr{L}$ такой, что $v(\mathscr{Y}) \subseteq \{x, y, \ldots, z\}$, истинно $(\forall x \mid y, \ldots, z)\mathscr{Y} \underset{\mathfrak{M},\alpha}{\overset{\circ}{\longleftrightarrow}} (\forall x \mid y, \ldots, z)(=(x, y, \ldots, z) \vee \mathscr{Y})$. Тогда истинно $(\forall x \mid y, \ldots, z)\mathscr{C}_P(\mathscr{A}) \underset{\mathfrak{M},\alpha}{\overset{\circ}{\longleftrightarrow}} (\forall x \mid y, \ldots, z)\mathscr{C}_P(\mathscr{F})$. Но $(\forall x \mid y, \ldots, z)\mathscr{C}_P(\mathscr{A}) =$ $= ((\forall x \mid y, \ldots, z)\mathscr{C})_P(\mathscr{A})$, значит $((\forall x \mid y, \ldots, z)\mathscr{C})_P(\mathscr{A}) \underset{\mathfrak{M},\alpha}{\overset{\circ}{\longleftrightarrow}} ((\forall x \mid y, \ldots$ $\ldots, z)\mathscr{C})_P(\mathscr{F})$.

7. Подстановочные итеративные расширения

Означивание преобразователей α назовем подстановочным, если для любого преобразователя f высоты $i \in \mathrm{N}$ найдутся предикатный символ P из σ и атомарно замкнутая нормальная по P формула $\mathscr{B}$ языка $\mathscr{L}_1$, что для любой $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_i$

$$f_\alpha(\mathscr{A}) = \begin{cases} \mathscr{B}_P(\mathscr{A}), & \text{если } v(\mathscr{A}) = v(\mathscr{B}), \quad |v(\mathscr{A})| = m(P), \\ t & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 3. *Для любого подстановочного означивания α всякая атомарно замкнутая формула $\mathscr{G}$ языка $\mathscr{L}$, в которой все преобразователи применены только к атомарно замкнутым формулам, α-аппроксимируема, а значит, $\mathscr{G}$ асимптотически истинна или асимптотически ложна в $\mathscr{L}^\alpha$.*

Доказательство. Покажем, что в $\mathscr{L}^\alpha$ все преобразователи сохраняют атомарную замкнутость. Пусть преобразователю f высоты $i \in \mathrm{N}$ соответствуют предикатный символ P из σ и формула $\mathscr{B}$ языка $\mathscr{L}_1$ и пусть $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_i$. Рассмотрим формулу $f_\alpha(\mathscr{A})$. Если $v(\mathscr{A}) \neq v(\mathscr{B})$ или $|v(\mathscr{A})| \neq m(P)$, то $f_\alpha(\mathscr{A}) = t$. Формула t атомарно замкнута по определению. Если $v(\mathscr{A}) = v(\mathscr{B})$ и $|v(\mathscr{A})| = m(P)$, то $f_\alpha(\mathscr{A}) = \mathscr{B}_P(\mathscr{A})$. По определению подстановочного означивания формула $\mathscr{B}$ атомарно замкнута. Если формула $\mathscr{A}$ также атомарно замкнута, то из определения операции подстановки следует, что и $\mathscr{B}_P(\mathscr{A})$ атомарно замкнута. Следовательно, в $\mathscr{L}^\alpha$ все преобразователи сохраняют атомарную замкнутость.

Покажем, что в $\mathscr{L}^\alpha$ все преобразователи сохраняют ложность. Предположим, что это не так. Тогда найдутся преобразователь f высоты $i \in \mathrm{N}$, формула $\mathscr{A}$ языка $\mathscr{L}_i$, модель $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ и оценка μ переменных $v(\mathscr{A}) = \{y, \ldots, z\}$ такие, что ложно

$$(\mathfrak{M}, \mu) \models_\alpha f^*(\mathscr{A}) \to (\overset{\circ}{\exists} y \ldots \overset{\circ}{\exists} z (\mathscr{A} \vee f_\alpha(\mathscr{A})) \vee =(y, \ldots, z)). \tag{2}$$

Пусть преобразователю f соответствуют предикатный символ P из σ и формула $\mathscr{B}$ языка $\mathscr{L}_1$. Если $v(\mathscr{A}) = v(\mathscr{B})$ и $|v(\mathscr{A})| = m(P)$, то $f_\alpha(\mathscr{A}) = \mathscr{B}_P(\mathscr{A})$ и $v(\mathscr{A}) = v(\mathscr{B}_P(\mathscr{A}))$. Из ложности (2) тогда следует, что истинно $(\mathfrak{M}, \mu) \models_\alpha f^*(\mathscr{A})$, оценка μ инъективна и ложно $(\mathfrak{M}, \mu) \models_\alpha$ $\models_\alpha \overset{\circ}{\exists} y \ldots \overset{\circ}{\exists} z (\mathscr{A} \vee \mathscr{B}_P(\mathscr{A}))$. Последнее означает, что при означивании

α формулы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}_P(\mathscr{A})$ ложны на $\mathfrak{M}$ при каждой инъективной оценке переменных $y, \ldots, z$, следовательно, $\mathscr{A} \overset{\circ}{\underset{\mathfrak{M},\alpha}{\longleftrightarrow}} \mathscr{B}_P(\mathscr{A})$. По условию формула $\mathscr{B}$ нормальна по P. Применяя лемму 3, получаем, что $\mathscr{B}_P(\mathscr{A}) \overset{\circ}{\underset{\mathfrak{M},\alpha}{\longleftrightarrow}} \overset{\circ}{\underset{\mathfrak{M},\alpha}{\longleftrightarrow}} \mathscr{B}_P(\mathscr{B}_P(\mathscr{A}))$, а значит, при означивании α формула $\mathscr{B}_P(\mathscr{B}_P(\mathscr{A}))$, как и $\mathscr{B}_P(\mathscr{A})$, ложна на $\mathfrak{M}$ при любой инъективной оценке переменных $y, \ldots, z$. Рассматривая формулы $\mathscr{B}_P(\mathscr{A})$ и $\mathscr{B}_P(\mathscr{B}_P(\mathscr{A}))$, аналогично получаем, что при означивании α формула $\mathscr{B}_P(\mathscr{B}_P(\mathscr{B}_P(\mathscr{A})))$ ложна на $\mathfrak{M}$ при любой инъективной оценке переменных $y, \ldots, z$. Итак, получаем, что при означивании α для любого k, $k \in \mathrm{N}$, формула $\underbrace{\mathscr{B}_P(\ldots \mathscr{B}_P}_{k\text{ раз}}(\mathscr{A}) \ldots)$ ложна на $\mathfrak{M}$ при любой инъективной оценке переменных $y, \ldots, z$. Следовательно, для любой инъективной оценки η переменных $y, \ldots, z$ ложно $(\mathfrak{M}, \eta) \vDash_\alpha f^*(\mathscr{A})$. Противоречие. Если $v(\mathscr{A}) \neq v(\mathscr{B})$ или $|v(\mathscr{A})| \neq m(P)$, то $f_\alpha(\mathscr{A}) = t$, и, следовательно, (2) истинно. Противоречие. Значит в $\mathscr{L}^\alpha$ все преобразователи сохраняют ложность.

Теперь справедливость теоремы непосредственно следует из теоремы 2.

8. О свойстве связности графов

Определим некоторое обобщение свойства связности графов. Пусть $V = \{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{q}\}$, $W = \{\overline{q+1}, \overline{q+2}, \ldots, \overline{2q}\}$, E — подмножество множества S, равного $(V \times W) \cup (W \times V)$. Через $H = (V \cup W, E)$ обозначим двудольный орграф с долями V и W и множеством ребер E. Теперь зафиксируем графы $H_1 = (V \cup W, E_1)$, $H_2 = (V \cup W, E_2)$, $\ldots$, $H_r = (V \cup W, E_r)$. Будем говорить, что в графе $G = (U, F)$ наборы вершин $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ и $(x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_{2q})$ $(H_1, H_2, \ldots, H_r)$*-смежны*, если вершины $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{2q}$ попарно различны и найдется такое $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, что для всех элементов $(\overline{m}, \overline{n})$ множества S выполнено следующее условие: $(\overline{m}, \overline{n}) \in E_i$ тогда и только тогда, когда $(x_m, x_n) \in F$. Граф G назовем $(H_1, H_2, \ldots$ $\ldots, H_r)$*-связным*, если для любых попарно различных вершин $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{2q}$ пара наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ и $(x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_{2q})$ содержится в транзитивном замыкании отношения $(H_1, H_2, \ldots, H_r)$-смежности. Например, если $q = 1$, $E_1 = \{(\overline{1}, \overline{2})\}$, $E_2 = \{(\overline{2}, \overline{1})\}$, то множество (H_1)-связных графов совпадает с множеством сильно связных графов, а множество (H_1, H_2)-связных графов совпадает с множеством (слабо) связных графов.

Пусть теперь $x_1, x_2, \ldots, x_{2q}$ — символы индивидных переменных языка $\mathscr{L}$, расположенные в алфавитном порядке, P — 2-местный предикатный символ сигнатуры σ, R — $2q$-местный предикатный символ сигнатуры σ. По графу H_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ построим формулу

$$\mathscr{A}_{H_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{2q}) =$$

$$= \mathop{\&}_{(\overline{m},\overline{n}) \in E_i} P(x_m, x_n) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{(\overline{m},\overline{n}) \in S \setminus E_i} \neg P(x_m, x_n) \mathbin{\&} \neg = (x_1, x_2, \ldots, x_{2q}).$$

Если при подстановочном означивании α преобразователю f соответствует предикатный символ R и формула

$$\mathscr{D} = \overset{\circ}{\exists} z_1 \ldots \overset{\circ}{\exists} z_q \left(\bigvee_{i=1}^{r} \mathscr{A}_{H_i}(x_1, x_2, \ldots, x_q, z_1, z_2, \ldots, z_q) \mathbin{\&} \right.$$

$$\left. \mathbin{\&} R(z_1, z_2, \ldots, z_q, x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_{2q}) \right),$$

где $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\} \cap \{x_1, x_2, \ldots, x_{2q}\} = \varnothing$, то предложение $\mathcal{B} = \mathring{\forall} x_1 \mathring{\forall} x_2 \ldots$
$\ldots \mathring{\forall} x_{2q} \left(\bigvee_{i=1}^{r} \mathcal{A}_{H_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{2q}) \vee f^* \left(\mathcal{D}_R \left(\bigvee_{i=1}^{r} \mathcal{A}_{H_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{2q}) \right) \right) \right)$
в $\mathcal{L}^\alpha$ выражает свойство $(H_1, H_2, \ldots, H_r)$-связности графов.

Применив теорему 3, получим, что $\mathcal{B}$ аппроксимируемо асимптотически истинными предложениями первого порядка. Следовательно, почти все графы $(H_1, H_2, \ldots, H_r)$-связны и свойство $(H_1, H_2, \ldots, H_r)$-связности имеет в логике первого порядка асимптотически истинное достаточное условие.

Автор сердечно благодарен Таланову В. А. за постоянное внимание и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь.— М.: Сов. радио, 1974.
2. Глебский Ю. В., Коган Д. И., Лиогонький М. И., Таланов В. А. Объём и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов // Кибернетика. 1969.— № 2.— С. 17—27.
3. Лиогонький М. И. Об условной доле выполнимости логических формул // Математические заметки.— 1969.— Т. 6, № 6.— С. 651—662.
4. Лиогонький М. И. К вопросу о количественных характеристиках логических формул // Кибернетика.— 1970.— № 3.— С. 16—22.
5. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Наука, 1963.
6. Марков А. А. Введение в теорию кодирования.— М.: Наука, 1982.
7. Справочная книга по математической логике. Часть 1: Теория моделей. М.: Наука, 1982.
8. Таланов В. А. О количественных характеристиках логических формул // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький. Изд-во Горьк. ун-та, 1979.— С. 95—101.
9. Таланов В. А. Об асимптотической разрешимости логических формул // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький. Изд-во Горьк. ун-та, 1981.— С. 118—126.
10. Carnap R. Logical foundation of probability.— Chicago: Univ. of Chicago Press, 1950.
11. Fagin R. Probabilities on finite models // J. of Symb. Log.— 1976.— V. 41 (1).
12. Moon J. W. Almost all graphs have a spanning cycle // Canad. Math. Bull.— 1972.— V. 15 (1).
13. Oberschelp W. Asymptotic 0—1 laws in combinatorics // Lect. Notes Math.— 1982.— 969.