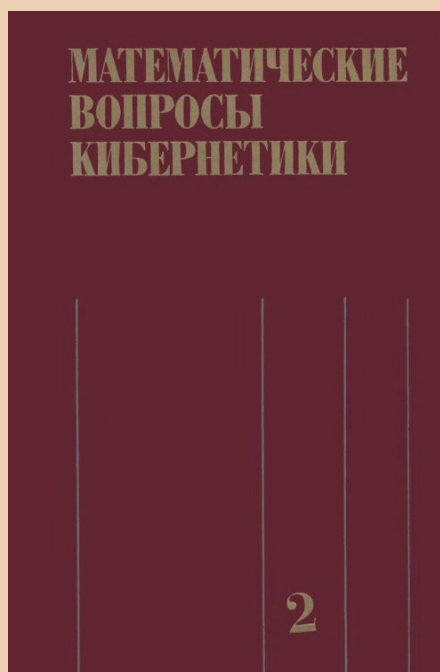




М. Ф. Раца

**Алгоритмическая
неразрешимость
проблемы
выразимости в
модальных логиках**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:
Раца М. Ф. Алгоритмическая неразрешимость проблемы выразимости в модальных логиках // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 71–99.
URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1989-71>

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ ВЫРАЗИМОСТИ В МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ

М. Ф. РАЦА

(КИШИНЕВ)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	71
§ 1. Основные понятия	72
§ 2. Свойства одноместных модальных формул	75
§ 3. Кодирование слов одноместными формулами	79
§ 4. Кодирование базисных продуктов Поста	83
§ 5. Выразимость полунотрицания в логике S_4	86
§ 6. Сведение выводимости слов в системе продуктов к отношению выразимости формул	88
§ 7. Основная теорема и следствия	98
Список литературы	99

Введение

В исследованиях, лежащих на стыке математической логики и ее приложений, очень часто важную роль играет отношение функциональной выразимости, т. е. то отношение между логическими операциями (функциями), которое означает возможность получения одних из них через другие посредством суперпозиций. Для случая, когда логика является классической (т. е. обычной двузначной), это отношение выразимости было сравнительно хорошо исследовано еще Э. Постом [31]. Им был, в частности, получен обзор всех замкнутых (относительно выразимости) классов булевых функций — так называемых [26] классов Поста, — на основе которого нетрудно получить сравнительно удобный алгоритм распознавания выразимости, позволяющий по любой булевой функции, заданной таблицей или формулой, и любой конечной системе (списку) таких функций распознавать, выразима ли она через них. Для неклассических же логик из-за трудности общего исследования отношения выразимости изучались в основном более частные вопросы — прежде всего вопросы функциональной полноты (например, в [24, 25, 4, 33, 14, 18, 19]).

Очевидно, что для любой табличной логики (т. е. такой, которую можно задавать так же, как и классическую логику, конечной системой конечных истинностных таблиц) существует алгоритм распознавания выразимости, основанный на переборе всех функций от данных переменных, выражимых через данную систему. Правда, алгоритм этот связан, как правило, с громоздким перебором и практически не удобен. А существует ли вообще практически удобный алгоритм распознавания выразимости в данной табличной логике, не известно.

Естественный перенос общего рассмотрения отношения выразимости на случай логик, задаваемых не истинностными таблицами, а логическими исчислениями, был предпринят А. В. Кузнецовым [4, 5] — посредством перехода от языка функций к языку (выражающих их) формул. В частности, им же было доказано существование алгоритма распознавания выразимости в тех суперинтуиционистских логиках, которые конечно аксиоматизируемы и локально табличны (см. [5], § 8). Совершенно аналогично можно показать, что такой же результат имеет место и для

всякой модальной логики, которая конечно аксиоматизируема и локально таблична; например, для логики $S5$.

Модальные логики среди других логик выделяются тем, что кроме обычных истинностных характеристик высказываний (истинно, ложно) учитывают также их модальные характеристики — модальности «необходимо», «возможно» и, быть может, другие. Исследование модальностей восходит к глубокой древности, к трудам Аристотеля, Диодора и др. Однако именно в последние полвека отмечается возрастающий интерес к модальным логикам. Особенно после того, как К. Льюис и К. Гёдель сформулировали модальные исчисления, удачно формализовав модальные логики, тот же К. Гёдель [27], А. Тарский (см. [13]), П. С. Новиков [12], С. Крипке (см. [23]) и др. разработали удобные интерпретации этих логик, связывающие их с алгеброй, топологией и основаниями математики, а также появился ряд статей о приложениях этих логик, в том числе [32], к теоретическому программированию. Важнейшей во многих отношениях среди континуального множества различных модальных логик является хорошо известная [23, 12, 10, 6] логика $S4$, тесно связанная как с интуиционистской логикой и ее интерпретациями, так и с общей топологией, да и сама являющаяся удобным связующим узлом между ними.

Для логики $S4$ автором ранее [16, 17, 18] рассматривались вопросы полноты систем формул. При этом было показано, что логика $S4$ не является табличной по полноте, т. е. нет такой табличной логики, что полнота в ней равносильна полноте в $S4$. Кроме того, был установлен и более сильный результат, а именно то, что логика $S4$ не является, в некотором смысле, финитно аппроксимируемой по полноте. Попутно то же самое было доказано и для континуального множества других модальных логик — для всех расширений логики $S4$, не являющихся локально табличными. Тем самым было обнаружено, что логика $S4$ и многие ее расширения в отношении вопросов полноты существенно сложнее всех табличных логик, а также интуиционистской логики высказываний [15, 19], модальной логики $S5$ [22] и даже классической логики предикатов первого порядка [7].

Проблема выразимости в той или иной логике ставится здесь следующим образом: требуется построить алгоритм, который бы позволял по любой формуле и любой конечной системе формул распознавать, выражима ли эта формула через эту систему в данной логике.

Неразрешимость проблемы выразимости в логике $S4$, а также в любом ее расширении, не являющимся локально табличным, было обнаружено автором в конце 1981 г., анонсировано в [20] и опубликовано без подробностей в заметке [21] *). А именно, удалось доказать, что для логики $S4$ и для каждого из упомянутых ее расширений алгоритма распознавания выразимости не существует **). Метод доказательства этого состоит в моделировании посредством отношения выразимости в этих логиках отношения выводимости слов в системах продукций Поста. При этом впервые, насколько нам известно, разработан метод сведения выводимости слов к отношению выразимости формул. Подробное изложение этого — основная цель настоящей статьи.

§ 1. Основные понятия

Формулы модальной логики (или *модальные формулы*) [10, 23] определяем обычным образом на основе алфавита, состоящего из пропозициональных переменных p, q, r , возможно с индексами, знаков опера-

*) Подробное доказательство этого результата рассказывалось автором в 1982 г. в Кишиневе на заседаниях семинара по математической логике.

**) Существует ли для какой-либо из этих логик алгоритм распознавания полноты списков формул, остается пока неизвестным.

ций $\Box$ (необходимость), $\neg$ (отрицание), $\&$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция) и $\supset$ (импликация), а также скобок $()$ и $()$. Производная операция $\neg\Box\neg$ (возможность) сокращенно обозначается [23] знаком $\Diamond$. Для некоторых формул вводим обозначения (читая знак $\Leftarrow$ как «означает»):

$$\begin{aligned} 0 &\Leftarrow (p \& \neg p), \quad 1 \Leftarrow (p \supset p), \quad T_1 \Leftarrow (\Box \neg \Box p \vee \Box \Diamond \Box p), \\ G &\Leftarrow (\Box (\Box (p \supset \Box p) \supset p) \supset p), \quad G' \Leftarrow (\Box (\Box (p \supset \Box p) \supset \Box p) \supset \Box p), \\ T &\Leftarrow (\Box (\Box p \supset \Box q) \vee \Box (\Box q \supset \Box p)), \quad (A \sim B) \Leftarrow ((A \supset B) \& (B \supset A)). \end{aligned}$$

Кроме того, символ $A[\pi_1/B_1, \dots, \pi_n/B_n]$ означает результат подстановки в формулу A формул $B_1, \dots, B_n$ вместо переменных $\pi_1, \dots, \pi_n$, соответственно, а символы $A[B]$ и $A[B_1, B_2]$ означают $A[p/B]$ и $A[p/B_1, q/B_2]$, соответственно. Аналогично обозначаем результаты подстановки значений переменных. Формула называется n -местной, если число входящих в нее различных переменных равно n .

Как известно [12, 23], исчисление $S4$ задается аксиомами классического исчисления высказываний и еще тремя модальными аксиомами

$$(\Box p \supset p), (\Box p \supset \Box \Box p), (\Box (p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)),$$

а также тремя правилами вывода: правило *подстановки*, позволяющее переходить от формулы A к результату подстановки любой формулы вместо всех вхождений в A данной переменной; правило *modus ponens*, позволяющее переходить от формул A и $(A \supset B)$ к формуле B ; правило *усиления*, позволяющее переходить от формулы A к $\Box A$. *Логике $S4$* , условно отождествляя ее с множеством верных в ней формул, определяем как множество всех модальных формул, выводимых в исчислении $S4$. Запись $\vdash A$ будет означать ниже, что формула A выводима в исчислении $S4$. Например, имеют место следующие соотношения, из которых первое и третье очевидны, а каждое из остальных вытекает из предыдущего:

$$\begin{aligned} \vdash ((\Box p \supset \Box \neg \Box p) \supset \neg \Box p), \quad \vdash (\Box (\Box p \supset \Box \neg \Box p) \supset \Box \neg \Box p), \\ \vdash ((\Box \neg \Box p \supset \Box p) \supset \Diamond \Box p), \quad \vdash (\Box (\Box \neg \Box p \supset \Box p) \supset \Box \Diamond \Box p). \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место

$$\vdash (T[q/\neg \Box p] \supset T_1).$$

Отметим, что это вместе с очевидным фактом

$$\vdash (T_1 \supset T[q/\neg \Box p])$$

равносильно утверждению

$$\vdash (T[q/\neg \Box p] \sim T_1). \quad (1)$$

Любое множество модальных формул, включающее в себя все аксиомы исчисления $S4$ и замкнутое относительно трех правил вывода этого исчисления, называем, следуя [10], (нормальной) *модальной логикой* *). Если одна логика включена в другую, то последнюю называют *расширением* предыдущей. В частности, добавляя к числу аксиом исчисления $S4$ какие-то формулы $B_1, \dots, B_n$, получаем аналогично логике $S4$ ее расширение — модальную логику $S4 + B_1 + \dots + B_n$. В настоящей работе наряду с логикой $S4$ важную роль отведем логике $S4 + G + T$, которую часто обозначают символом D^* (см. [28, 34], а также [6], с. 202). Заметим, что логика D^* может быть определена и как логика $S4 + G' + T$, что вытекает из следующих предложений, каждое из которых,

*) Термин «модальная логика» иногда понимается более широко [23].

кроме первого и четвертого, следует из предыдущего:

$$\begin{aligned} & \vdash (\Box(\Box(p \supset \Box p) \supset \Box p) \supset \Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p)), \\ & \vdash (G \supset (\Box(\Box(p \supset \Box p) \supset \Box p) \supset p)), \\ & \vdash (\Box G \supset G'), \\ & \vdash (\Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \supset (\Box(p \supset \Box p) \supset \Box p)), \\ & \vdash (\Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \supset \Box(\Box(p \supset \Box p) \supset \Box p)), \\ & \vdash (G' \supset (\Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \supset \Box p)), \\ & \vdash (G' \supset G). \end{aligned}$$

Топобулевой [6] (или топологической булевой [13]) алгеброй называется (универсальная) алгебра $\langle M; \&, \vee, \supset, \neg, \Box \rangle$, которая относительно операций $\&$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$ является булевой алгеброй, причем операция $\Box$ (взятие внутренности) удовлетворяет следующим соотношениям (для любых элементов $\alpha, \beta \in M$):

$$\Box(\alpha \& \beta) = (\Box \alpha \& \Box \beta), \quad \Box \alpha \leq \alpha, \quad \Box \Box \alpha = \Box \alpha, \quad \Box 1 = 1 = \neg 0,$$

где $\alpha \leq \beta$ означает $\alpha = (\alpha \& \beta)$, а 0 и 1 являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами алгебры относительно этого частичного порядка. Ясно, что алгебра эта относительно $\&$ и $\vee$ является структурой (решеткой) [1, 13], причем $0 = (\alpha \& \neg \alpha)$ и $1 = (\alpha \supset \alpha)$ для любого $\alpha \in M$.

Модальная формула A называется *верной* на данной топобулевой алгебре, если операция на этой алгебре, выражаемая формулой A , тождественно равна 1. Известно [10, 29], что для всякой топобулевой алгебры $\mathfrak{A}$ множество всех формул, верных на $\mathfrak{A}$, является модальной логикой. Назовем ее *логикой алгебры* $\mathfrak{A}$ и обозначим символом $L\mathfrak{A}$. Модальная логика называется *табличной*, если она совпадает с логикой некоторой конечной топобулевой алгебры. Модальная логика L называется *локально табличной*, если всякая конечно порожденная топобулева алгебра, на которой верны все формулы из L , является конечной.

Известно [6, 34], что логика D^* может быть определена и как *логика алгебры Макинсона* [28] — топобулевой алгебры последовательностей вида $\alpha = \langle \mu_1, \mu_2, \dots \rangle$, где $\mu_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1, 2, \dots$), операции $\&$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$ производятся почленно как булевы функции на множестве $\{0, 1\}$, а $\Box \alpha$ есть последовательность $\langle \nu_1, \nu_2, \dots \rangle$, где $\nu_i = (\mu_1 \& \dots \& \mu_i)$ ($i = 1, 2, \dots$), или как логика ее подалгебры, порожденной элементом $\varepsilon = \langle 1, 0, 1, 0, \dots \rangle$. Логика D^* интересна тем, что она является [8] одним из пяти предтабличных расширений логики $S4$ (т. е. такой нетабличной логикой, что все ее собственные расширения уже табличны) и, кроме того, она является [9] наибольшим из всех тех расширений логики $S4$, которые не являются локально табличными. Заметим, что различных расширений логики $S4$, промежуточных между $S4$ и D^* , имеется континуум [9].

Формула A называется *верной в логике* L , если A принадлежит L (как множеству). Формулы A и B *эквивалентны в* L , если в L верна их эквиваленция $(A \sim B)$. Формула A называется [4, 5] *выразимой в логике* L *через систему* (множество, список, класс формул) Σ , если A можно получить, исходя из переменных и формул, принадлежащих Σ , посредством конечного числа применений правила *ослабленной подстановки* (позволяющей переходить от двух формул к результату подстановки одной из них в другую вместо всех вхождений некоторой переменной) и правила *замены эквивалентным в* L (позволяющей переходить от данной формулы к любой эквивалентной ей в L формуле). Пусть M — какое-то множество элементов алгебры $\mathfrak{A}$; тогда скажем, что формула A *сохраняет на алгебре* $\mathfrak{A}$ *множество* M , если M замкнуто относительно той

операции алгебры $\mathfrak{A}$, которая выражается формулой *) А. Очевидно, что если каждая формула той или иной системы формул Σ сохраняет на алгебре $\mathfrak{A}$ множество M , то и любая формула, которая выразима в логике $L\mathfrak{A}$ через Σ , тоже сохраняет на $\mathfrak{A}$ множество M . Следовательно, если каждая формула системы Σ сохраняет на алгебре $\mathfrak{A}$ множество M , а какая-то формула A не сохраняет M на ней, то A не выразима в $L\mathfrak{A}$ через Σ .

Вводим в рассмотрение следующий оператор (по переменной p), результат применения которого к формуле A определяем так:

$$[A]^p \Leftrightarrow ((\Box \neg \Box p \vee A) \& T_1).$$

Легко усмотреть, что для любых формул A и B имеет место

$$\vdash ([A]^p]^p \sim [A]^p), \quad (2)$$

$$\vdash (([A]^p \& [B]^p) \sim ([A \& B])^p). \quad (3)$$

Основное свойство введенного оператора выражает

Л е м м а 1. Для любой формулы A справедливо утверждение

$$\vdash (\Box [A]^p \sim \Box A).$$

Действительно, нетрудно получить выводимости

$$\vdash (\Box [A]^p \supset ((\Box \Diamond \Box p \supset \Box A) \& T_1)),$$

$$\vdash (((\Box \Diamond \Box p \supset \Box A) \& T_1) \supset \Box [A]^p),$$

$$\vdash ([\Box A]^p \supset \Box [A]^p),$$

из которых уже вытекает искомое утверждение. Лемма доказана.

Произвольная система продукций Поста [2, 11] задается конечным алфавитом $\mathcal{B}$ и списком пар слов вида (X, Y) в алфавите $\mathcal{B}$; их обычно называют базисными продуктами. Пусть какое-то слово Z (в алфавите $\mathcal{B}$) начинается словом X . Тогда выполнить (базисную) продукцию (X, Y) над словом Z означает стереть в Z начальный отрезок X и к оставшемуся слову приписать справа слово Y . Считается, что продукция (X, Y) не применима к данному слову, если оно не начинается словом X . Говорят, что слово Z выводимо из слова Z_0 в системе продукций S , если существует последовательность слов $Z_0, Z_1, \dots, Z_v$, что $Z \equiv Z_v$ и при всяком $i = 1, \dots, v$ слово Z_i является результатом применения к слову Z_{i-1} некоторой продукции из S . Известно [2, 11, 30], что существуют такая система продукций S и такое слово Z_0 , что не существует алгоритма, позволяющего по любому слову W распознавать, выводимо ли W из Z_0 в системе S . Более того, этот факт справедлив и в том случае, когда на систему S накладывают ограничение, чтобы она состояла лишь из пар непустых слов. В дальнейшем мы будем иметь в виду именно такую систему продукций S , причем будем использовать не конкретный вид системы S или слова Z_0 , а лишь факт их существования. Очевидно при этом, что слово Z_0 и любое слово, выводимое из Z_0 в системе S , непустые.

§ 2. Свойства одноместных модальных формул

В этом параграфе определяются различные последовательности одноместных (модальных) формул и выявляются некоторые взаимосвязи между их членами. Обнаруженные при этом закономерности существенно используются ниже для получения основного результата этой работы.

*) Иначе говоря, формула A сохраняет на алгебре $\mathfrak{A}$ предикат $p \in M$ [18].

Вводим ряд обозначений:

$$\begin{aligned} A_0 &\Leftarrow (p \& \neg p), \quad A_1 \Leftarrow p, \quad A_{i+1} \Leftarrow (A_i \supset \Box A_i) \quad (i = 1, 2, \dots), \\ B_k &\Leftarrow (\Box A_{2k+1} \supset \Box A_{2k}), \quad C_k \Leftarrow [A_k]^p, \quad E_k \Leftarrow (B_0 \& \dots \& B_k), \quad F_k \Leftarrow [E_k]^p \\ &\quad (k = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Формулу $[\neg p]^p$ будем называть *полуотрицанием* переменной p .

В табл. 1 приведен ряд двоичных последовательностей, каждая из которых является результатом подстановки элемента ε алгебры Макинсона вместо p в указанную формулу, не содержащую иных переменных, кроме p . Рассмотрев эту таблицу и продолжив ее, находим, что $\Box A_i[\varepsilon]$ при любом целом положительном i содержит i единиц на первых (слева) i местах и нули на всех остальных местах. Аналогично можем заключить, что для любых целых положительных i и j при условии $j < i$ выполняются равенства

Таблица 1

ε	1	0	1	0	1	0	1	0	...
$\Box A_1[\varepsilon]$	1	0	0	0	0	0	0	0	...
$A_2[\varepsilon]$	1	1	0	1	0	1	0	1	...
$\Box A_2[\varepsilon]$	1	1	0	0	0	0	0	0	...
$A_3[\varepsilon]$	1	1	1	0	1	0	1	0	...
$\Box A_3[\varepsilon]$	1	1	1	0	0	0	0	0	...
$B_0[\varepsilon]$	0	1	1	1	1	1	1	1	...
$B_1[\varepsilon]$	1	1	0	1	1	1	1	1	...
$B_2[\varepsilon]$	1	1	1	1	0	1	1	1	...
$E_2[\varepsilon]$	0	1	1	1	1	1	1	1	...
$E_1[\varepsilon]$	0	1	0	1	1	1	1	1	...
$E_2[\varepsilon]$	0	1	0	1	0	1	1	1	...

$$\begin{aligned} \Box(A_i \supset A_j)[\varepsilon] &= \Box(\Box A_i \supset A_j)[\varepsilon] = \Box(A_i \supset \Box A_j)[\varepsilon] = \\ &= \Box(\Box A_i \supset \Box A_j)[\varepsilon] = \Box A_j[\varepsilon]. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что элемент $B_k[\varepsilon]$ содержит один-единственный нуль, расположенный на $(2k+1)$ -м месте, а $E_k[\varepsilon]$ равен $F_k[\varepsilon]$ и содержит в точности $k+1$ нуль на первое $k+1$ нечетное место и поэтому у $E_k[\varepsilon]$ и $\neg \varepsilon$ совпадают первые $2k+2$ членов. Заметим также, что для любого элемента $\alpha = \langle \mu_1, \mu_2, \dots \rangle$ алгебры Макинсона полуотрицание α удовлетворяет равенствам

$$[\neg \alpha]^\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_1 = 0, \\ \neg \alpha, & \text{если } \mu_1 = 1. \end{cases}$$

Установим десять выводимостей, удобных для обращения:

$$\vdash (\Box A_i \supset \Box A_j) \quad (0 \leq i \leq j), \quad (5)$$

$$\vdash (A_{2i-1} \sim (p \vee \Box A_{2i-2})) \quad (i \geq 1), \quad (6)$$

$$\vdash (A_{2i} \sim (p \supset \Box A_{2i-1})) \quad (i \geq 1), \quad (7)$$

$$\vdash (A_{2i} \sim (p \supset \Box A_{2i})) \quad (i \geq 1), \quad (8)$$

$$\vdash (\Box A_i \supset B_j) \quad (0 \leq i \leq 2j), \quad (9)$$

$$\vdash ((\Box A_i \supset B_j) \sim B_j) \quad (0 \leq 2j < i), \quad (10)$$

$$\vdash ((B_i \supset A_j) \sim A_j) \quad (0 \leq 2i < j), \quad (11)$$

$$\vdash ((B_i \supset B_j) \sim B_j) \quad (0 \leq i < j), \quad (12)$$

$$\vdash (p \vee B_i) \quad (i \geq 0), \quad (13)$$

$$\vdash ((p \& E_i) \sim \neg A_{2i+2}) \quad (i \geq 0). \quad (14)$$

В самом деле, выводимость (5) при $i = j$ очевидна; если же $i < j$, то она вытекает из естественного индуктивного предположения $\vdash (\Box A_i \supset \supset \Box A_{j-1})$ и утверждения $\vdash (\Box A_{j-1} \supset \Box A_j)$, основанного на определении формулы A_j .

Соотношение (6) при $i = 1$ следует из определения формул A_0 и A_1 ; если же $i > 1$, то, исходя из индуктивного предположения $\vdash (A_{2i-3} \sim \sim (p \vee \Box A_{2i-4}))$ и введя в обе части эквиваленции заключение $\Box A_{2i-3}$, находим $\vdash (A_{2i-2} \sim (p \supset \Box A_{2i-3}))$. А введя в обе части новой эквиваленции заключение $\Box A_{2i-2}$, уже получаем (6).

Утверждение (7) легко вытекает из (6) после введения в обе части эквиваленции заключения $\Box A_{2i-1}$, а (8) следует из (7) после введения дизъюнктивного члена $\Box A_{2i}$ в обе части эквиваленции. Соотношения (9) — (12) легко усматриваются с учетом положения (5), а (13) — с использованием (6).

Выводимость (14) при $i = 0$ вытекает из очевидного факта: $\vdash ((p \& E_0) \sim \neg A_2)$. При $i > 0$, исходя из индуктивного предположения $\vdash ((p \& E_{i-1}) \sim \neg A_{2i})$ и введя в обе части эквиваленции конъюнктивный член B_i , находим $\vdash ((p \& F_i) \sim (\neg A_{2i} \& B_i))$. Очевидно, что имеет место $\vdash ((\neg A_{2i} \& B_i) \sim \neg (A_{2i} \vee \Box A_{2i+1}))$. Кроме того, используя (5) и (7), получаем $\vdash ((A_{2i} \vee \Box A_{2i+1}) \sim A_{2i+2})$. А из последних трех соотношений уже следует (14).

Лемма 2. При любых целых положительных i и j имеет место

$$\vdash (A_i[A_j] \sim A_{i+j-1}). \quad (15)$$

Действительно, случай, когда $i = 1$, тривиален. При $i > 1$ пусть по индуктивному предположению имеем $\vdash (A_{i-1}[A_j] \sim A_{i+j-2})$. Тогда, применив к этому сначала правило усиления, а затем распределив модальность $\Box$ по членам импликаций, находим $\vdash (\Box A_{i-1}[A_j] \sim \Box A_{i+j-2})$. Из последних двух соотношений следует

$$\vdash ((A_{i-1}[A_j] \supset \Box A_{i-1}[A_j]) \sim (A_{i+j-2} \supset \Box A_{i+j-2})),$$

а это уже равносильно нужному утверждению (15).

Лемма 3. При любых целых положительных i и j выполняется соотношение $\vdash ((A_i[C_j] \& T_1) \sim C_{i+j-1})$.

В самом деле, случай, когда $i = 1$, очевиден. При $i > 1$ пусть по индуктивному предположению имеет место $\vdash ((A_{i-1}[C_j] \& T_1) \sim C_{i+j-2})$. Это влечет $\vdash ((\Box A_{i-1}[C_j] \& T_1) \sim \Box C_{i+j-2})$. Из последних двух соотношений вытекает

$$\vdash (((A_{i-1}[C_j] \& T_1) \supset (\Box A_{i-1}[C_j] \& T_1)) \sim (C_{i+j-2} \supset \Box C_{i+j-2})).$$

Введя в обе части эквиваленции конъюнктивный член T_1 , находим

$$\vdash (((A_{i-1}[C_j] \supset \Box A_{i-1}[C_j]) \& T_1) \sim ((C_{i+j-2} \supset \Box C_{i+j-2}) \& T_1)).$$

Это равносильно тому, что $\vdash ((A_i[C_j] \& T_1) \sim ((C_{i+j-2} \supset \Box C_{i+j-2}) \& T_1))$. Но, используя лемму 1, получаем $\vdash ((C_{i+j-2} \supset \Box C_{i+j-2}) \& T_1) \sim C_{i+j-1}$. А из последних двух фактов уже следует утверждение леммы.

Лемма 4. При любых целых положительных i и j имеет место

$$\vdash ((B_i[C_{2j+1}] \& T_1) \sim [B_{i+j}]^p).$$

Действительно, с помощью леммы 3 находим соотношения

$$\begin{aligned} \vdash ((\Box A_{2i}[C_{2j+1}] \& T_1) \sim \Box C_{2i+2j}), \\ \vdash ((\Box A_{2i+1}[C_{2j+1}] \& T_1) \sim \Box C_{2i+2j+1}), \end{aligned}$$

на основании которых получаем

$$\vdash (((\Box A_{2i+1}[C_{2j+1}] \& T_1) \supset (\Box A_{2i}[C_{2j+1}] \& T_1)) \sim (\Box C_{2i+2j+1} \supset \Box C_{2i+2j})).$$

Введя здесь конъюнктивный член T_1 в обе части эквиваленции, находим выводимость

$$\vdash ((B_i[C_{2j+1}] \& T_1) \sim ((\Box C_{2i+2j+1} \supset \Box C_{2i+2j}) \& T_1)),$$

которая после преобразования правой части эквиваленции с привлечением леммы 1 уже равносильна утверждению леммы.

Лемма 5. *При любых натуральных k и $s \geq 2$ справедливо утверждение $\vdash ((A_s[(p \& \neg \Box C_{2k+2})] \& T_1) \sim C_{2k+s})$.*

В самом деле, ввиду определения A_2 , имеем соотношение

$$\vdash (A_2[(p \& \neg \Box C_{2k+2})] \sim (p \supset (\Box C_{2k+2} \vee (\Box p \& \Box \neg \Box C_{2k+2})))),$$

которое после упрощения правой части эквиваленции, основанного на очевидном факте $\vdash (\Box p \supset \Box C_{2k+2})$, равносильно тому, что

$$\vdash (A_2[(p \& \neg \Box C_{2k+2})] \sim (p \supset \Box C_{2k+2})).$$

Введя здесь конъюнктивный член T_1 в обе части эквиваленции, имеем

$$\vdash ((A_2[(p \& \neg \Box C_{2k+2})] \& T_1) \sim ((p \supset \Box C_{2k+2}) \& T_1)). \quad (16)$$

Кроме того, используя лемму 1, находим соотношение

$$\vdash (((p \supset \Box C_{2k+2}) \& T_1) \sim ((\Box \neg \Box p \vee (p \supset \Box A_{2k+2})) \& T_1)),$$

которое в силу выводимости (8) дает: $\vdash (((p \supset \Box C_{2k+2}) \& T_1) \sim C_{2k+2})$. А это и (16) доказывают утверждение леммы для случая, когда $s = 2$ (базис индукции). При $s > 2$ пусть по индуктивному предположению имеет место $\vdash ((A_{s-1}[(p \& \neg \Box C_{2k+2})] \& T_1) \sim C_{2k+s-1})$. Тогда

$$\vdash (A_2[(A_{s-1}[(p \& \neg \Box C_{2k+2})] \& T_1)] \sim A_2[C_{2k+s-1}]),$$

откуда после введения T_1 в обе части эквиваленции следует

$$\vdash ((A_2[(A_{s-1}[(p \& \neg \Box C_{2k+2})] \& T_1)] \& T_1) \sim (A_2[C_{2k+s-1}] \& T_1)).$$

А из этого уже следует утверждение леммы с помощью лемм 2 и 3.

Лемма 6. *Для любых натуральных k и $s \geq 1$ имеет место*

$$\vdash ((B_s[(p \& \neg \Box C_{2k+2})] \& T_1) \sim [B_{k+s}]^p). \quad (17)$$

Действительно, с помощью леммы 5 находим

$$\vdash ((B_s[(p \& \neg \Box C_{2k+2})] \& T_1) \sim ((\Box C_{2k+2s+1} \supset \Box C_{2k+2s}) \& T_1)),$$

а из этого и основанного на лемме 1 соотношения

$$\vdash (((\Box C_{2k+2s+1} \supset \Box C_{2k+2s}) \& T_1) \sim [B_{k+s}]^p)$$

уже вытекает утверждение (17). Лемма доказана.

Вводим в рассмотрение две новые формулы

$$H' \Leftrightarrow (T_1 \supset \Diamond (p \& \Diamond \Box p \& q)),$$

$$Q \Leftrightarrow [((\Box (p \vee q) \supset ((\Box A_3[(p \& H')] \supset q) \& B_1[(p \& H')])) \vee \Box \Diamond \Box q)]^p.$$

Основное свойство последней формулы выявляет

Лемма 7. *Для любого натурального k имеет место*

$$\vdash (Q[q/F_k] \sim F_{k+1}).$$

В самом деле, заметив, что выполняется соотношение

$$\vdash (H'[q/F_k] \sim H'[q/E_k]),$$

легко находим с помощью выводимости (14), что

$$\vdash (H'[q/F_k] \sim \neg \Box C_{2k+2}),$$

а отсюда, ввиду лемм 5 и 6, вытекает соответственно

$$\begin{aligned} & \vdash ((A_3[(p \& H')] \& T_1)[q/F_k] \sim C_{2k+3}), \\ & \vdash ((B_1[(p \& H')] \& T_1)[q/F_k] \sim [B_{k+1}]^p). \end{aligned}$$

Пусть $Q' \triangleq ((\Box A_3[(p \& H')] \supset q) \& B_1[(p \& H')] \& T_1)$. Тогда с помощью последних двух положений получаем

$$\vdash (Q'[q/F_k] \sim ((\Box C_{2k+3} \supset F_k) \& [B_{k+1}]^p \& T_1)). \quad (18)$$

Кроме того, в силу выводимости (10) имеем $\vdash ((\Box A_{2k+3} \supset E_k) \sim E_k)$. Это влечет утверждение $\vdash ((\Box A_{2k+3} \supset E_k)^p \sim F_k)$, из которого по лемме 1 следует $\vdash ((\Box C_{2k+3} \supset F_k) \& T_1) \sim F_k$. А из этого и (18) вытекает

$$\vdash (Q'[q/F_k] \sim F_{k+1}). \quad (19)$$

Далее, привлекая выводимость (13), находим

$$\vdash ((\Box(p \vee q) \& T_1)[q/F_k] \sim T_1). \quad (20)$$

Докажем еще следующую выводимость

$$\vdash (\Box \Diamond \Box F_k \sim \Box \top \Box p). \quad (21)$$

Для этого заметим, что основанное на лемме 1 положение $\vdash (\Box F_k \sim \sim [(\Box B_0 \& \Box E_k)]^p)$ в сочетании с очевидным фактом $\vdash (\Box B_0 \sim \Box \top \Box p)$ дает соотношение $\vdash (\Box F_k \sim \Box \top \Box p)$, которое вместе с известным ([23], с. 115) обстоятельством $\vdash (\Box \Diamond \Box \top \Box p \sim \Box \top \Box p)$ уже доказывает (21). Остается добавить, что из соотношений (19)–(21) вытекает утверждение леммы.

Следствием леммы 7 является

Лемма 8. *Через формулы F_1 и Q выразима в логике S_4 любая формула семейства $\{F_1, F_2, \dots\}$.*

§ 3. Кодирование слов одноместными формулами

Известно, что любое слово $Z \triangleq b_1 b_2 \dots b_v$ в данном алфавите $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$ однозначно записывается в двубуквенном алфавите $\{0, 1\}$ в виде слова

$$1^* 0 1^* 0 \dots 1^* 0, \quad (22)$$

где 1^i означает слово $11\dots 1$, состоящее из i единиц (см. [11], с. 30). Понятно, что такое кодирование слов в алфавите $\mathcal{B}$ является одно-однозначным. Длину слова Z (т. е. число вхождений в него букв из $\mathcal{B}$) обозначим через d , а длину его кода (22) (или *кодovou длину* Z) — через d' . Кодовую длину пустого слова как и длину этого слова положим равной нулю. Кодовая длина непустого слова всегда больше единицы. Число $d + 2d'$ назовем *рабочей длиной слова Z* . В частности, рабочая длина буквы b_j равна $2j + 3$. Ясно, что рабочая длина пустого слова равна нулю, а рабочая длина непустого слова — не меньше пяти. Кроме того, очевидно, что рабочая длина непустого слова складывается из рабочих длин всех вхождений в него букв, а для любых слов X и Y в алфавите $\mathcal{B}$ рабочая длина слова XY складывается из рабочих длин слов X и Y .

Определим функцию Θ_k ($k = 0, 1, \dots$), отображающую множество слов в алфавите $\mathcal{B}$ в множество модальных формул от одной переменной. А именно, если Λ — пустое слово, то $\Theta_k(\Lambda) \triangleq (p \supset p)$. Если Z — непустое слово, а слово X и буква b_j удовлетворяют графическому равенству $Z \triangleq X b_j$, то

$$\Theta_k(Z) \triangleq \left(\Theta_k(X) \& \bigwedge_{i=1}^j B_{k+x+2i} \& B_{k+x+2j+3} \right),$$

где x — рабочая длина слова X . Заметим, что для любого непустого слова Z имеет место $\Theta_k(Z) \sqsubseteq B_{k+2} \& \dots \& B_{k+z}$, где z — рабочая длина слова Z , причем в этой формуле присутствуют не все такие конъюнктивные члены B_i , что $k+2 < i < k+z$. Индукцией по длине слова Z легко доказать, что число попарно различных конъюнктивных членов формулы $\Theta_k(Z)$ совпадает с кодовой длиной слова Z .

В табл. 2 даны значения формул $\Theta_0(b_1)$, $\Theta_1(b_1)$, $\Theta_2(b_1)$, $\Theta_0(b_1b_1)$, $\Theta_0(b_3)$, $\Theta_1(b_3)$ на алгебре Макинсона при $p = \varepsilon$. Рассмотрев эту таблицу

Т а б л и ц а 2

ε	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...
$\Theta_0(b_1)[\varepsilon]$	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$\Theta_1(b_1)[\varepsilon]$	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$\Theta_2(b_1)[\varepsilon]$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$\Theta_0(b_1b_1)[\varepsilon]$	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	...
$\Theta_0(b_3)[\varepsilon]$	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	...
$\Theta_1(b_3)[\varepsilon]$	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	...

и продолжив ее, нетрудно заключить, что $\Theta_k(b_j)[\varepsilon]$ содержит, кроме единиц, в точности $j+1$ нулей, что совпадает с кодовой длиной буквы b_j . Вообще для любого слова Z в алфавите $\mathcal{B}$ число нулей в последовательности $\Theta_k(Z)[\varepsilon]$ совпадает с кодовой длиной слова Z . Заметим, что последовательность $\Theta_k(\Lambda)[\varepsilon]$ состоит лишь из единиц.

Приводим четыре леммы, раскрывающие свойства функции Θ_k .

Лемма 9. Для любых слов X и Y в алфавите $\mathcal{B}$ и любого натурального k имеет место выводимость

$$\vdash (\Theta_k(XY) \sim (\Theta_k(X) \& \Theta_{k+x}(Y))), \quad (23)$$

где x — рабочая длина слова X .

Доказательство проводим индукцией по длине слова Y . Если это слово пустое, то эквивалентность (23) сомнений не вызывает (базис индукции). Если же слово Y непустое, то существует слово V и буква b_j , удовлетворяющие (графическому) равенству $Y \sqsubseteq Vb_j$. Из этого в силу определения функций Θ_{k+x} и Θ_k вытекают равенства

$$\Theta_{k+x}(Y) \sqsubseteq \left(\Theta_{k+x}(V) \& \bigwedge_{i=1}^j B_{k+x+v+2i} \& B_{k+x+v+2j+3} \right), \quad (24)$$

$$\Theta_k(XY) \sqsubseteq \left(\Theta_k(XV) \& \bigwedge_{i=1}^j B_{k+x+v+2i} \& B_{k+x+v+2j+3} \right),$$

где v — рабочая длина слова V . Пусть по индуктивному предположению имеет место $\vdash (\Theta_k(XV) \sim (\Theta_k(X) \& \Theta_{k+x}(V)))$. Тогда из последних двух положений вытекает соотношение

$$\vdash \left(\Theta_k(XY) \sim \left(\Theta_k(X) \& \Theta_{k+x}(V) \& \bigwedge_{i=1}^j B_{k+x+v+2i} \& B_{k+x+v+2j+3} \right) \right),$$

которое в силу равенства (24) равносильно утверждению леммы.

Лемма 10. Для любого непустого слова Z в алфавите $\mathcal{B}$ и любого натурального k на алгебре Макинсона справедливо равенство

$$\Box \Theta_k(Z)[\varepsilon] = \Box A_{2k+4}[\varepsilon].$$

Действительно, ввиду определения формулы $\Theta_k(Z)$ имеем $\vdash (\Box \Theta_k(Z) \supset \Box B_{k+2})$. Из этого и основанного на (4) равенства $\Box B_{k+2}[\varepsilon] = \Box A_{2k+4}[\varepsilon]$ следует $\Box \Theta_k(Z)[\varepsilon] \leq \Box A_{2k+4}[\varepsilon]$. Кроме того, с помощью выводимости (5) находим $\vdash (\Box A_{2k+4} \supset \Box \Theta_k(Z))$. Из последних двух положений уже вытекает утверждение леммы.

Лемма 11. Пусть слова U , X и Z в алфавите $\mathcal{A}$ удовлетворяют равенству $Z \sqsubseteq XU$, причем слово U непустое. Тогда при любом натуральном k на алгебре Маккинсона выполняется равенство

$$\square(\Theta_k(X) \sim \Theta_k(Z))[\varepsilon] = \square A_{2k+2x+4}[\varepsilon], \quad (25)$$

где x — рабочая длина слова X .

В самом деле, пусть условие леммы выполнено. Тогда, обозначив левую часть равенства (25) буквой γ и используя лемму 9, находим

$$\gamma = \square(\Theta_k(X) \sim (\Theta_k(X) \& \Theta_{k+x}(U)))[\varepsilon].$$

Отсюда следует

$$\gamma = \square(\Theta_k(X) \supset \Theta_{k+x}(U))[\varepsilon].$$

Упрощая правую часть равенства с учетом выводимости (12), получаем $\gamma = \square \Theta_{k+x}(U)[\varepsilon]$, а из этого по лемме 10 уже следует (25).

Лемма 12. Пусть слова W и Z в алфавите $\mathcal{A}$ удовлетворяют условиям $W \sqsubseteq Xb_s U_1$ и $Z \sqsubseteq Xb_t U_2$, где $1 \leq s < t \leq m$. Тогда на алгебре Маккинсона при любом натуральном k справедливо равенство

$$\square(\Theta_k(W) \sim \Theta_k(Z))[\varepsilon] = \square A_{2k+2x+4s+4}[\varepsilon], \quad (26)$$

где x — рабочая длина слова X .

Пусть, действительно, условие леммы выполнено. Напомним, что рабочие длины букв b_s и b_t суть числа $2s+3$ и $2t+3$, соответственно. Тогда, используя обозначение $E \triangleq \square(\Theta_k(W) \sim \Theta_k(Z))$ и привлекая лемму 9, находим

$$\vdash (E \sim \square((\Theta_k(Xb_s) \& \Theta_{k+x+2s+3}(U_1)) \sim (\Theta_k(Xb_t) \& \Theta_{k+x+2t+3}(U_2)))). \quad (27)$$

Вспомнив определение функции Θ_k , имеем

$$\begin{aligned} \Theta_k(Xb_s) &\triangleq \left(\Theta_k(X) \& \bigwedge_{i=1}^s B_{k+x+2i} \& B_{k+x+2s+3} \right), \\ \Theta_k(Xb_t) &\triangleq \left(\Theta_k(X) \& \bigwedge_{i=1}^t B_{k+x+2i} \& B_{k+x+2t+3} \right). \end{aligned}$$

Поэтому, используя еще обозначения

$$\begin{aligned} P &\triangleq \left(\Theta_k(X) \& \bigwedge_{i=1}^s B_{k+x+2i} \right), \\ R_1 &\triangleq (B_{k+x+2s+3} \& \Theta_{k+x+2s+3}(U_1)), \\ R_2 &\triangleq \left(\bigwedge_{i=s+1}^t B_{k+x+2i} \& B_{k+x+2t+3} \& \Theta_{k+x+2t+3}(U_2) \right), \end{aligned}$$

соотношение (27) можно записать короче

$$\vdash (E \sim \square((P \& R_1) \sim (P \& R_2))). \quad (28)$$

Это равносильно тому, что $\vdash (E \sim \square(P \supset (R_1 \sim R_2)))$. Упрощая правую часть эквиваленции с привлечением выводимости (12), находим $\vdash (E \sim \square(R_1 \sim R_2))$. Отсюда следует

$$\vdash (\square A_{2k+2x+4s+4} \supset E), \quad \vdash (E \supset \square(\square R_1 \sim \square R_2)).$$

Кроме того, применяя лемму 10, выводимость 5 и равенства (4), получаем равенство $\square(\square R_1 \sim \square R_2)[\varepsilon] = \square A_{2k+2x+4s+4}[\varepsilon]$, которое вместе с предыдущими двумя выводимостями уже дает (26).

Лемма доказана.

Используя Θ_k , определим еще одну важную для дальнейшего функцию φ_k ($k=0, 1, \dots$), также отображающую множество всех слов в алфавите $\mathcal{A}$ в множество одноместных (модальных) формул. А именно,

$\varphi_k(Z) \doteq [(E_k \& \Theta_k(Z) \& A_{2k+2z+1})]^p$, где z — рабочая длина слова Z . Формулу $\varphi_k(Z)$ назовем k -м формульным кодом слова Z , а $\Theta_k(Z)$ — основой этого кода.

В табл. 3 даны значения формул $\varphi_1(b_1)$, $\varphi_2(b_1)$, $\varphi_3(b_1)$, $\varphi_1(b_1b_1)$, $\varphi_1(b_3)$, $\varphi_2(b_3)$ на алгебре Макинсона при $p = \varepsilon$ (ср. с табл. 2). Рассмотрим эту таблицу и продолжив ее, можем заключить, что последовательность $\varphi_k(Z)[\varepsilon]$ отличается от $\Theta_k(Z)[\varepsilon]$ лишь тем, что 1-й, 2-й, ... $(2k+1)$ -й ее члены совпадают с аналогичными членами последовательности $\neg \varepsilon$, а $(2k+2z+2)$ -й, $(2k+2z+3)$ -й, ... ее члены совпадают

Таблица 3

ε	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...	
$\varphi_1(b_1) [\varepsilon]$	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...	
$\varphi_2(b_1) [\varepsilon]$	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	...	
$\varphi_3(b_1) [\varepsilon]$	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	...
$\varphi_1(b_1b_1) [\varepsilon]$	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	...
$\varphi_1(b_3) [\varepsilon]$	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	...
$\varphi_2(b_3) [\varepsilon]$	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	...

с аналогичными членами последовательности ε , в то время как соответствующие члены в $\Theta_k(Z)[\varepsilon]$ суть единицы.

Следующие три леммы отражают свойства функции φ_k .

Лемма 13. Для любого слова Z в алфавите $\mathcal{B}$ и любого натурального k имеет место выводимость $\vdash (\Box \varphi_k(Z) \sim \Box \neg \Box p)$.

В самом деле, используя лемму 1, находим

$$\vdash (\Box \varphi_k(Z) \supset (\Box B_0 \vee \Box \neg \Box p)),$$

а из этого и следующих двух очевидных соотношений

$$\vdash (\Box B_0 \sim \Box \neg \Box p), \quad \vdash (\Box \neg \Box p \supset \Box \varphi_k(Z))$$

уже вытекает утверждение леммы.

Лемма 14. Для любого слова Z в алфавите $\mathcal{B}$ и любого натурального k справедливо утверждение $\vdash (((p \vee \varphi_k(Z)) \& T_1) \sim C_{2k+2z+1})$, где z — рабочая длина слова Z .

Действительно, учитывая определение $\varphi_k(Z)$, имеем

$$\vdash (((p \vee \varphi_k(Z)) \& T_1) \sim [(p \vee (E_k \& \Theta_k(Z) \& A_{2k+2z+1}))]^p),$$

а из этого и следующих двух соотношений

$$\vdash (p \vee (E_k \& \Theta_k(Z))), \quad \vdash ((p \vee A_{2k+2z+1}) \sim A_{2k+2z+1}),$$

основанных соответственно на выводимости (13) и (6), уже следует утверждение леммы.

Лемма 15. Пусть W и Z — различные слова в алфавите $\mathcal{B}$. Тогда ни при каких натуральных числах k и s формулы $\varphi_k(W)$ и $\varphi_s(Z)$ не эквивалентны в логике D^* .

В самом деле, пусть условие леммы выполнено. Покажем тогда, что в логике D^* ни при каких натуральных k и s не верна формула

$$(\varphi_k(W) \sim \varphi_s(Z)). \quad (29)$$

Предположим, что при некоторых k и s эта формула верна в D^* . Тогда рабочие длины w и z соответственно слов W и Z удовлетворяют одному из условий: 1) $k + w \neq s + z$, 2) $k + w = s + z$.

В случае 1), введя в обе части эквиваленции (29) сначала дизъюнктивный член p , а затем конъюнктивный член T_1 , получаем

$$(((p \vee \varphi_k(W)) \& T_1) \sim ((p \vee \varphi_s(Z)) \& T_1)) \in D^*.$$

По лемме 14 отсюда следует $(C_{2k+2w+1} \sim C_{2s+2z+1}) \in D^*$. Поскольку $T_1 \in D^*$,

то это равносильно тому, что

$$((\Box \neg \Box p \vee A_{2k+2w+1}) \sim (\Box \neg \Box p \vee A_{2s+2z+1})) \in D^*.$$

Отсюда после применения правила усиления с последующим распределением модальности $\Box$ по членам конъюнкции и учета равенства $\Box \neg \Box \varepsilon = 0$ вытекают равенства $\Box (A_{2k+2w+1} \supset A_{2s+2z+1})[\varepsilon] = 1$ и $\Box (A_{2s+2z+1} \supset A_{2k+2w+1})[\varepsilon] = 1$. Легко усмотреть в рассматриваемом случае, что одно из этих равенств противоречит положениям (4).

В случае 2) рассмотрим два подслучая: 2₁) $k = s$; 2₂) $k \neq s$. В подслучае 2₁), введя в обе части эквиваленции (29) дизъюнктивный член $(A_{2k+2w+1} \supset \Box A_{2k+1})$ и упрощая с учетом соотношения $T_1 \in D^*$ и равенства $w = z$, находим $((\Box \neg \Box p \vee \Theta_k(W)) \sim (\Box \neg \Box p \vee \Theta_s(Z))) \in D^*$. Отсюда следует $(\Theta_k(W) \sim \Theta_s(Z))[\varepsilon] = 1$. Если какое-то из слов W и Z является началом другого, то последнее равенство противоречит лемме 11; если же слова эти удовлетворяют условию леммы 12, то упомянутое равенство противоречит утверждению леммы 12. Остается в этом подслучае добавить, что для слов W и Z других возможностей не имеется. В подслучае 2₂) положим $k < s$. Это влечет неравенство $w > 0$, которое в силу определения рабочей длины w равносильно тому, что $w > 1$. Введя в обе части эквиваленции (29) дизъюнктивный член $(\Box A_{2k+3} \supset \Box A_{2k+1})$ и упрощая с учетом положения $T_1 \in D^*$ и неравенства $w > 1$, получаем соотношение $(\Box \neg \Box p \vee B_{k+1}) \in D^*$, противоречащее очевидному факту $(\Box \neg \Box p \vee B_{k+1})[\varepsilon] \neq 1$.

Таким образом, опровергнуто предположение, что формула (29) при некоторых k и s может быть выводима в логике D^* . А из этого уже следует утверждение леммы.

§ 4. Кодирование базисных продукций Поста

Построим функцию, отображающую множество всех пар непустых слов в алфавите $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$ во множество модальных формул от трех переменных. Для этого вводим в рассмотрение трехместную формулу $H \Leftarrow (G'[(\neg(p \& \Diamond \Box p \& r) \& T_1)] \supset H')$, эквивалентную в логике D^* двуместной формуле H' , выписанной перед леммой 7. В дальнейших трех леммах отражены свойства этой формулы.

Лемма 16. Для любого слова Z в алфавите $\mathcal{B}$ и любого натурального k имеет место $\vdash (H[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim \neg \Box C_{2k+2})$.

Действительно, привлекая выводимости (6) и (14), находим

$$\vdash ((p \& \Diamond \Box p \& q)[q/\varphi_k(Z)] \sim (\Diamond \Box p \& \neg A_{2k+2} \& \Theta_k(Z) \& T_1)).$$

Введя здесь в обе части эквиваленции сначала $\neg$, затем $\Box$ и конъюнктивный член T_1 , получаем соотношение

$$\vdash (((\Box \neg (p \& \Diamond \Box p \& q) \& T_1)[q/\varphi_k(Z)] \sim ((\Box (\Theta_k(Z) \supset C_{2k+2}) \& T_1))),$$

из которого следует

$$\vdash (H'[q/\varphi_k(Z)] \sim (T_1 \supset \neg \Box (\Theta_k(Z) \supset C_{2k+2}))). \quad (30)$$

Кроме того, используя (14), усматриваем предложение

$$\vdash ((p \& \Diamond \Box p \& r)[r/F_k] \sim (\Diamond \Box p \& \neg A_{2k+2} \& T_1)),$$

из которого после введения $\neg$ и конъюнктивного члена T_1 в обе части эквиваленции вытекает $\vdash ((\neg(p \& \Diamond \Box p \& r) \& T_1)[r/F_k] \sim C_{2k+2})$. На основании этого и (30) справедливо положение

$$\vdash (H[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim (G'[C_{2k+2}] \supset (T_1 \supset \neg \Box (\Theta_k(Z) \supset C_{2k+2})))),$$

которое равносильно тому, что

$$\vdash (H[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim \neg (G'[C_{2k+2}] \& \Box(\Theta_k(Z) \supset C_{2k+2}) \& T_1)). \quad (31)$$

Далее, в силу определения $\Theta_k(Z)$ имеем $\vdash (\Box A_{2k+3} \supset \Box \Theta_k(Z))$. Поэтому, введя в оба члена импликации заключение $\Box C_{2k+2}$, получаем

$$\vdash ((\Box(\Box \Theta_k(Z) \supset \Box C_{2k+2}) \& T_1) \supset \Box(\Box C_{2k+3} \supset \Box C_{2k+2})),$$

Преобразуя заключение импликации по лемме 1, находим

$$\vdash (((\Box \Theta_k(Z) \supset \Box C_{2k+2}) \& T_1) \supset (\Box C_{2k+3} \supset \Box C_{2k+2})).$$

Применив к этому правило усиления и спустив модальность $\Box$ по членам импликации, получаем

$$\vdash ((\Box(\Box \Theta_k(Z) \supset \Box C_{2k+2}) \& T_1) \supset \Box(\Box C_{2k+3} \supset \Box C_{2k+2})),$$

а из этого и очевидного факта

$$\vdash ((G'[C_{2k+2}] \& \Box(\Box C_{2k+3} \supset \Box C_{2k+2})) \sim \Box C_{2k+2}$$

вытекает $\vdash ((G'[C_{2k+2}] \& \Box(\Box \Theta_k(Z) \supset \Box C_{2k+2}) \& T_1) \supset \Box C_{2k+2})$. Ввиду этого имеет место

$$\vdash ((G'[C_{2k+2}] \& \Box(\Theta_k(Z) \supset C_{2k+2}) \& T_1) \supset \Box C_{2k+2}).$$

Наконец, заметим, что выполняется соотношение

$$\vdash (\Box C_{2k+2} \supset (G'[C_{2k+2}] \& \Box(\Theta_k(Z) \supset C_{2k+2}) \& T_1)),$$

которое вместе с предыдущим равносильно тому, что

$$\vdash ((G'[C_{2k+2}] \& \Box(\Theta_k(Z) \supset C_{2k+2}) \& T_1) \sim \Box C_{2k+2}),$$

а из этого и (31) уже следует утверждение леммы.

Лемма 17. Для любого слова Z в алфавите $\mathcal{B}$ и любых натуральных k и $s \geq 2$ справедливо утверждение

$$\vdash ((A_s[(p \& H)] \& T_1)[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim C_{2k+s}).$$

В самом деле, берем следующие четыре формулы:

$$\begin{aligned} & (A_s[(p \& H)] \& T_1)[q/\varphi_k(Z), r/F_k], \\ & (A_s[(p \& H[q/\varphi_k(Z), r/F_k])] \& T_1), \\ & (A_s[(p \& \neg \Box C_{2k+2})] \& T_1), C_{2k+s}. \end{aligned}$$

Ясно, что первые две из них эквивалентны в логике S_4 , а в силу лемм 16 и 5 этим свойством обладают и другие пары соседних формул, а из этого и транзитивности отношения эквивалентности в S_4 уже следует утверждение леммы 17.

Следующая лемма доказывается аналогично с использованием леммы 6 вместо леммы 5.

Лемма 18. Для любого слова Z в алфавите $\mathcal{B}$ и любых натуральных k и $s \geq 1$ имеет место

$$\vdash ((B_s[(p \& H)] \& T_1)[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim [B_{k+s}]^p).$$

Определим теперь функцию κ , отображающую любую пару (X, Y) непустых слов в алфавите $\mathcal{B}$ в множество формул. А именно, паре (X, Y) ставим в соответствие формулу $\kappa(X, Y)$, которую определяем следующим образом:

$$\kappa(X, Y) \doteq (\pi(X) \supset \sigma(Y)[q/\rho(X)]),$$

где

$$\pi(X) \Leftarrow \square((\Theta_0(X)[(p \& H)] \& T_1) \sim ((\square A_{2x+1}[(p \& H)] \supset (H \supset q)) \& T_1)),$$

$$\rho(X) \Leftarrow [(((B_1 \& \dots \& B_x)[(p \& H)] \& q) \vee \square \diamond \square q)]^p,$$

$$\sigma(Y) \Leftarrow ((\square(p \vee q) \supset q) \& (\Theta_0(Y) \& A_{2y+1})[(q \vee \square(p \vee q)) \& T_1] \& T_1)$$

(x — рабочая длина слова X , а y — рабочая длина Y).

Следующая лемма отражает основное свойство формулы $\kappa(X, Y)$, которое заключается в том, что она моделирует шаг применения продукции (X, Y) .

Лемма 19. Пусть X, Y и Z — непустые слова в алфавите $\mathcal{A}$, причем существует слово U , такое что $Z \sqsubseteq XU$. Тогда при любом целом положительном k справедливо утверждение

$$\vdash \kappa(X, Y)[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim \varphi_{k+x}(UY),$$

где x — рабочая длина слова X .

Действительно, докажем сначала, что при любом целом положительном k имеют место выводимости

$$\vdash \pi(X)[q/\varphi_k(Z), r/F_k], \quad (32)$$

$$\vdash (\rho(X)[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim \varphi_{k+x}(U)), \quad (33)$$

$$\vdash (\sigma(Y)[q/\varphi_k(U)] \sim \varphi_k(UY)). \quad (34)$$

Установим (32). С одной стороны, учитывая определение формулы $\Theta_0(X)$ и используя лемму 18, находим

$$\vdash ((\Theta_0(X)[(p \& H)] \& T_1)[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim [\Theta_k(X)]^p). \quad (35)$$

С другой стороны, в силу леммы 16 имеем

$$\vdash ((H \supset q)[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim (\square C_{2k+2} \vee \varphi_k(Z))).$$

Привлекая лемму 1, легко усмотреть, что это дает

$$\vdash ((H \supset q)[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim [(\square A_{2k+2} \vee (E_k \& \Theta_k(Z) \& A_{2k+2z+1}))]^p),$$

где z — рабочая длина слова Z . Отсюда после упрощения правой части эквиваленции с учетом неравенства $z > 0$ получаем

$$\vdash ((H \supset q)[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim [(\Theta_k(Z) \& A_{2k+2z+1})]^p), \quad (36)$$

а из этого и основанного на лемме 17 соотношения

$$\vdash ((\square A_{2x+1}[(p \& H)] \& T_1)[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim \square C_{2k+2x+1})$$

вытекает

$$\begin{aligned} \vdash & ((\square A_{2x+1}[(p \& H)] \supset (H \supset q)) \& T_1)[q/\varphi_k(Z), r/F_k] \sim \\ & \sim ((\square C_{2k+2x+1} \supset [(\Theta_k(Z) \& A_{2k+2z+1})]^p) \& T_1)). \end{aligned}$$

Поэтому, обозначив левую часть эквиваленции этого утверждения буквой B и применив лемму 1, можем заключить, что имеет место

$$\vdash (B \sim [(\square A_{2k+2x+1} \supset (\Theta_k(Z) \& A_{2k+2z+1}))]^p).$$

Поскольку $x \leq z$, то в силу выводимости (5) из этого следует

$$\vdash (B \sim [(\square A_{2k+2x+1} \supset \Theta_k(Z))]^p).$$

На основании леммы 9 это равносильно тому, что

$$\vdash (B \sim [(\square A_{2k+2x+1} \supset (\Theta_k(X) \& \Theta_{k+x}(U)))]^p).$$

С помощью выводимостей (9) и (10) отсюда вытекает соотношение $\vdash (B \sim [\Theta_k(X)]^p)$, которое вместе с (35) дает (32).

Докажем (33). Обозначив левую часть эквиваленции утверждения (33) буквой E и применив лемму 18, находим

$$\vdash (E \sim [((B_{k+1})^p \& \dots \& (B_{k+x})^p \& \varphi_k(Z)) \vee \square \diamond \square \varphi_k(Z)])^p).$$

Из этого в силу леммы 13 и выводимостей (2) и (3) следует

$$\vdash (E \sim [(B_{k+1} \& \dots \& B_{k+x} \& \varphi_k(Z))]^p).$$

Отсюда получаем соотношение $\vdash (E \sim [(E_{k+x} \& \Theta_k(Z) \& A_{2k+2z+1})]^p)$, которое ввиду леммы 9 и равенства $z = x + u$, где u — рабочая длина слова U , влечет

$$\vdash (E \sim [(E_{k+x} \& \Theta_k(X) \& \Theta_{k+x}(U) \& A_{2k+2x+2u+1})]^p),$$

а из этого и очевидного положения $\vdash (E_{k+x} \supset \Theta_k(X))$ уже вытекает (33).

Установим (34). Используя лемму 14, находим

$$\vdash (((\square(p \vee q) \supset q) \& T_1)[q/\varphi_k(U)] \sim [(\square C_{2k+2u+1} \supset \varphi_k(U))]^p),$$

$$\vdash (((q \vee \square(p \vee q)) \& T_1)[q/\varphi_k(U)] \sim [(\varphi_k(U) \vee \square C_{2k+2u+1})]^p).$$

Поэтому, обозначив левые части эквиваленций этих двух утверждений соответственно через E и F и применив лемму 1, получаем соотношения $\vdash (E \sim [(\square A_{2k+2u+1} \supset (E_k \& \Theta_k(U) \& A_{2k+2u+1}))]^p)$ и $\vdash (F \sim [((E_k \& \Theta_k(U) \& A_{2k+2u+1}) \vee \square A_{2k+2u+1})]^p)$, которые после упрощений с привлечением выводимостей (10) и (5) дают

$$\vdash (E \sim [E_k \& \Theta_k(U)]^p), \quad \vdash (F \sim C_{2k+2u+1}).$$

Используя последнее из этих положений и применив леммы 2 и 3 и выводимость (3), находим

$$\vdash (((\Theta_0(Y) \& A_{2y+1})[((q \vee \square(p \vee q)) \& T_1)] \& T_1)[q/\varphi_k(U)] \sim [(\Theta_{k+u}(Y) \& A_{2k+2u+2y+1})]^p),$$

где y — рабочая длина слова Y . Следовательно, получаем

$$\vdash (\sigma(Y)[q/\varphi_k(U)] \sim [(E_k \& \Theta_k(U) \& \Theta_{k+u}(Y) \& A_{2k+2u+2y+1})]^p),$$

а отсюда уже следует (34) по лемме 9.

В заключение остается добавить, что утверждение леммы легко усматривается с помощью доказанных соотношений (32) — (34).

§ 5. Выразимость полуотрицания в логике S_4

Роль k -го формульного кода слова несколько проясняет следующая лемма, в которой используется новая формула $\psi(W) \doteq (\psi_1(W) \supset \psi_2(W))$, где $\psi_1(W) \doteq \square((\Theta_0(W)[(p \& H)] \& T_1) \sim ((\square(p \vee q) \supset (H \supset q)) \& T_1))$, $\psi_2(W) \doteq [(((q \supset \square(q \vee q)) \& (q \vee H) \& (B_1 \& \dots \& B_{w+1})) [q \& H]) \vee \square \diamond \square q]^p$ (W — слово в алфавите $\mathcal{B}$, а w — рабочая длина W).

Лемма 20. Для непустого слова W в алфавите $\mathcal{B}$ и любого целого положительного k формула $[\neg p]^p$ выразима в логике S_4 через систему *)

$$\{F_1, Q, \varphi_k(W), \psi(W)\}. \quad (37)$$

В самом деле, поскольку через F_1 и Q по лемме 8 выразима в S_4 формула F_k , то через систему (37) выразима в S_4 формула

) Заметим, что через собственную подсистему $\{F_1, O, \psi(W)\}$ этой системы формула $[\neg p]^p$ не выразима даже в логике D^ . Это вытекает из следующего утверждения, которое нетрудно усматривается из доказательства леммы 21: каждая из формул F_1, Q и $\psi(W)$ сохраняет на алгебре Макинсона множество

$$\{0, 1, \varepsilon, E_k[\varepsilon], \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon] \mid k = 0, 1, \dots\},$$

а формула $[\neg p]^p$ не сохраняет на ней это множество.

$\psi(W)[q/\varphi_k(W), r/F_k]$. Поэтому для доказательства утверждения леммы достаточно убедиться, что эта формула в $S4$ эквивалентна $[\neg p]^p$, а для этого достаточно показать, что справедливы соотношения

$$\vdash \psi_1(W)[q/\varphi_k(W), r/F_k], \quad (38)$$

$$\vdash (\psi_2(W)[q/\varphi_k(W), r/F_k] \sim [\neg p]^p). \quad (39)$$

Устаповим (38). С одной стороны, ввиду определения $\Theta_0(W)$ и леммы 18 имеет место

$$\vdash ((\Theta_0(W)[(p \& H)] \& T_1)[q/\varphi_k(W), r/F_k] \sim [\Theta_k(W)]^p). \quad (40)$$

С другой стороны, на основании леммы 14 и доказанного ранее положения (36) имеем

$$\vdash (((\Box(p \vee q) \supset (H = q)) \& T_1)[q/\varphi_k(W), r/F_k] \sim \sim ((\Box C_{2k+2w+1} = [(\Theta_k(W) \& A_{2k+2w+1})]^p) \& T_1)).$$

Отсюда после преобразований правой части эквиваленции с привлечением леммы 1 и выводимости (10) следует

$$\vdash (((\Box(p \vee q) \supset (H = q)) \& T_1)[q/\varphi_k(W), r/F_k] \sim [\Theta_k(W)]^p),$$

а из этого и (40) уже вытекает (38).

Докажем (39). Используя лемму 14, находим

$$\vdash ((q \supset \Box(p \vee q)) \& T_1)[q/\varphi_k(W)] \sim ((\varphi_k(W) = \Box C_{2k+2w+1}) \& T_1)).$$

Обозначив левую часть эквиваленции этого предложения через B и преобразовав ее правую часть с учетом леммы 1, получаем

$$\vdash (B \sim [((E_k \& \Theta_k(W) \& A_{2k+2w+1}) = \Box A_{2k+2w+1})]^p).$$

Это равносильно тому, что $\vdash (B \sim [((E_k \& \Theta_k(W)) = A_{2k+2w+2})]^p)$. Отсюда после упрощения правой части эквиваленции с использованием выводимости (11) следует

$$\vdash (B \sim [A_{2k+2w+2}]^p). \quad (41)$$

Кроме того, на основании леммы 16 имеем

$$\vdash (((q \vee H) \& T_1)[q/\varphi_k(W), r/F_k] \sim ((\Box C_{2k+2} \supset \varphi_k(W)) \& T_1)).$$

Поэтому, обозначив левую часть эквиваленции этого соотношения через E и применив лемму 1, находим

$$\vdash (E \sim [(\Box A_{2k+2} \supset (E_k \& \Theta_k(W) \& A_{2k+2w+1}))]^p).$$

Ввиду определения $\Theta_k(W)$ и того, что $w > 0$ (ведь слово W непустое), отсюда вытекает $\vdash (E \sim [(\Box A_{2k+2} \supset E_k)]^p)$. На основании выводимости (10) это влечет

$$\vdash (E \sim [E_k]^p). \quad (42)$$

Далее, с помощью лемм 13 и 18 находим

$$\vdash (\Box \Diamond \Box q [q/\varphi_k(W)] \sim \Box \neg \Box p),$$

$$\vdash (((B_1 \& \dots \& B_{w+1})[(p \& H)] \& T_1)[q/\varphi_k(W), r/F_k] \sim \sim ([B_{k+1}]^p \& \dots \& [B_{k+w+1}]^p)),$$

а эти положения вместе с (41) и (42) позволяют получить следующее соотношение, в котором F означает левую часть эквиваленции утверждения (39):

$$\vdash (F \sim [([A_{2k+2w+2}]^p \& [E_k]^p \& [B_{k+1}]^p \& \dots \& [B_{k+w+1}]^p) \vee \Box \neg \Box p]^p).$$

набор $\langle Z_0 \rangle$ мы относим к частному случаю кортежа $\langle \Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_v}, Z \rangle$, когда отсутствуют продукции $\Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_v}$. Ясно, что слово Z непустое. Скажем, что продукция Π_j (из S) применима к набору $\langle \Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_v}, Z \rangle$ тогда и только тогда, когда Π_j применима к слову Z . При этом кортеж $\langle \Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_v}, \Pi_j, U \rangle$ есть результат применения продукции Π_j к набору $\langle \Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_v}, Z \rangle$ тогда и только тогда, когда слово U есть результат применения Π_j к слову Z . Из определения множества (46) видно, что результат применения той или иной продукции из S к какому-то его элементу, если она к нему применима, всегда дает элемент из этого же множества. Кроме того, множество (46) не содержит ни один набор вида $\langle \Pi_{n_1}, \dots, \Pi, W \rangle$, т. е. ни один набор, который кончается словом W .

Совокупность кортежей (46) определяет множество формул

$$\{\varphi_1(Z_0), \dots, \varphi_{k_v}(Z), \dots\}, \quad (47)$$

где $k_v = 1 + x_{n_1} + \dots + x_{n_v}$. Отметим, что поскольку слова $Z_0, \dots, Z, \dots$ отличны от слова W , то по лемме 15 ни одна формула семейства (47) не эквивалентна в логике D^* формуле $\varphi_k(W)$ ни при каком целом положительном k .

Следующая лемма выявляет еще одно свойство множества (47).

Лемма 22. Если продукция Π_n ($n \in \{1, \dots, l\}$) применима к данному набору $\langle \Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_v}, Z \rangle$ совокупности (46), то при $k_v = 1 + x_{n_1} + \dots + x_{n_v}$ формула

$$\kappa(X_n, Y_n)[q/\varphi_{k_v}(Z)] \quad (48)$$

эквивалентна в логике D^* некоторой формуле из семейства (47).

В самом деле, пусть условие леммы выполнено и результат применения продукции Π_n к $\langle \Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_v}, Z \rangle$ есть $\langle \Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_v}, \Pi_n, U \rangle$. Тогда полученный только что кортеж также содержится в совокупности (46) и поэтому во множестве (47) ему соответствует формула $\varphi_{k_v+x_n}(U)$, где x_n — рабочая длина слова X_n . Так как в формулу $\kappa(X_n, Y_n)$ переменная r входит лишь за счет ее вхождения в подформулу H , эквивалентную в логике D^* двуместной формуле H' , то $\kappa(X_n, Y_n)$ эквивалентна в логике D^* некоторой формуле, не содержащей вхождений r , например, формуле $\kappa(X_n, Y_n)[r/p]$. Следовательно, формула (48) эквивалентна в логике D^* формуле $\kappa(X_n, Y_n)[q/\varphi_{k_v}(Z), r/F_{k_v}]$, которая по лемме 19 эквивалентна в $S4$ формуле $\varphi_{k_v+x_n}(U)$, принадлежащей семейству (47). Лемма доказана.

Используя семейство формул (47), мы определяем важное для дальнейшего множество $\mathfrak{M}$ элементов алгебры Макинсона:

$$\mathfrak{M} \Leftarrow \{0, 1, \varepsilon, E_k[\varepsilon], \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon] \mid k = 0, 1, \dots\} \cup \\ \cup \{\varphi_1(Z_0)[\varepsilon], \dots, \varphi_{k_v}(Z)[\varepsilon], \dots\},$$

где $k_v = 1 + x_{n_1} + \dots + x_{n_v}$. Привлекая табл. 1 и 3 и то, что сказано о них выше, легко заключить, что множество $\mathfrak{M}$ не содержит элемента $\neg \varepsilon$. Поэтому очевидное равенство $[\neg p]^p[\varepsilon] = \neg \varepsilon$ показывает, что формула $[\neg p]^p$ не сохраняет на алгебре Макинсона множество $\mathfrak{M}$.

В дальнейшей части доказательства леммы мы покажем, что все формулы системы (45), наоборот, сохраняют на упомянутой алгебре множество $\mathfrak{M}$. Для этого достаточно рассматривать формулы с точностью до эквивалентности в логике D^* . Кроме того, из формул системы (45) лишь $\psi(W)$ и $\kappa(X_n, Y_n)$ содержат переменную r , причем только за счет ее вхождения в подформулу H , эквивалентную в логике D^* формуле H' ,

не содержащей r . Поэтому ниже в этом параграфе будем считать, что $\psi(W)$ и $\kappa(X_n, Y_n)$ означают $\psi(W)[r/p]$ и $\kappa(X_n, Y_n)[r/p]$, соответственно.

Докажем, что для любых элементов $\alpha = \langle \mu_1, \mu_2, \dots \rangle$ и $\beta = \langle \nu_1, \nu_2, \dots \rangle$ множества $\mathfrak{M}$ справедливы соотношения

$$F_1[\alpha] \in \mathfrak{M}, \quad (49)$$

$$\varphi_1(Z_0)[\alpha] \in \mathfrak{M}, \quad (50)$$

$$Q[\alpha, \beta] \in \mathfrak{M}, \quad (51)$$

$$\psi(W)[\alpha, \beta] \in \mathfrak{M}, \quad (52)$$

$$\kappa(X_n, Y_n)[\alpha, \beta] \in \mathfrak{M} \quad (n = 1, \dots, l). \quad (53)$$

Отметим, что поскольку подформула T_1 верна в логике D^* и входит в формулы конъюнктивно, то она не может влиять на перечисленные только что соотношения и поэтому ниже в доказательстве игнорируется.

Установим (49) — (50). Если $\mu_1 = 0$, то $\Box \neg \Box \alpha = 1$ и поэтому справедливы равенства $F_1[\alpha] = \varphi_1(Z_0)[\alpha] = 1$. Если же $\mu_1 = 1$, то $\alpha = 1$ или $\alpha = \varepsilon$, на основании чего получаем равенства

$$F_1[\alpha] = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 1, \\ E_1[\varepsilon], & \text{если } \alpha = \varepsilon, \end{cases} \quad \varphi_1(Z_0)[\alpha] = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 1, \\ \varphi_1(Z_0)[\varepsilon], & \text{если } \alpha = \varepsilon, \end{cases}$$

которые вместе с предыдущими влекут (49) — (50).

Переходим к доказательству утверждений (51) — (53). Если $\mu_1 = 0$ или $\nu_1 = 1$, то имеем соответственно $\Box \neg \Box \alpha = 1$ или $\Box \Diamond \Box \beta = 1$.

Ввиду этого справедливы равенства

$$Q[\alpha, \beta] = \psi(W)[\alpha, \beta] = \kappa(X_n, Y_n)[\alpha, \beta] = 1,$$

доказывающие (51) — (53) в рассматриваемых случаях.

Пусть, далее, элементы α и β удовлетворяют условиям

$$\mu_1 = 1, \quad \nu_1 = 0. \quad (54)$$

Тогда верны, в частности, положения

$$\Box \neg \Box \alpha = \Box \Diamond \Box \beta = 0, \quad (55)$$

$$H[\alpha, \beta] = H'[\alpha, \beta] = \Diamond(\alpha \& \beta). \quad (56)$$

Докажем (51). Поскольку $\mu_1 = 1$, то $\alpha = 1$ или $\alpha = \varepsilon$. Если $\alpha = 1$, то с помощью (55) и очевидных положений $A_3[(p \& H')][1, \beta] = 1$ и $B_1[(p \& H')][1, \beta] = \Box \neg \beta$ получаем

$$Q[1, \beta] = 0. \quad (57)$$

Если же $\alpha = \varepsilon$, то, вспомнив условие $\nu_1 = 0$, удобно доказать (51) в каждом из следующих четырех возможных случаев: 1) $\beta = 0$, 2) $\beta = E_k[\varepsilon]$, 3) $\beta = \neg \Box A_{2k+2}[\varepsilon]$ ($k = 0, 1, \dots$), 4) $\beta = \varphi_r(Z)[\varepsilon]$ ($r = 1, \dots, k_v, \dots$).

В случае (1) находим равенства

$$\Box(p \vee q)[\varepsilon, 0] = \Box \varepsilon, \quad A_3[(p \& H')][\varepsilon, 0] = B_1[(p \& H')][\varepsilon, 0] = 1,$$

которые вместе с (55) дают

$$Q[\varepsilon, 0] = E_0[\varepsilon]. \quad (58)$$

В случае 2), используя очевидное положение $E_k[\varepsilon] = F_k[\varepsilon]$ и применяя лемму 7, получаем

$$Q[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = E_{k+1}[\varepsilon]. \quad (59)$$

В случае 3) в силу равенства (56) и выводимости (8) имеет место $H'[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]$. Поэтому на основании лемм 5 и 6 справедливы равенства

$$\begin{aligned}\square A_3[(p \& H')][\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] &= \square A_{2k+3}[\varepsilon], \\ B_1[(p \& H')][\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] &= B_{k+1}[\varepsilon].\end{aligned}$$

Кроме того, вспомнив табл. 1, легко усмотреть равенство

$$\square(p \vee q)[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = \square \varepsilon,$$

которое вместе с предыдущими двумя и (55) дает

$$Q[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = E_0[\varepsilon]. \quad (60)$$

В случае 4) в силу лемм 17 и 18 имеем

$$\begin{aligned}\square A_3[(p \& H')][\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] &= \square A_{2r+3}[\varepsilon], \\ B_1[(p \& H')][\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] &= B_{r+1}[\varepsilon],\end{aligned}$$

соответственно. Кроме того, привлекая лемму 14, находим

$$\square(p \vee q)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = \square A_{2r+2z+1}[\varepsilon], \quad (61)$$

где z — рабочая длина слова Z , причем $z > 0$. На основании последних трех равенств имеет место

$$Q[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = (\square A_{2r+2z+1} \supset ((\square A_{2r+3} \supset (E_r \& \Theta_r(Z))) \& B_{r+1}))[\varepsilon].$$

А отсюда после упрощения правой части равенства с использованием выводимостей (5) и (10) вытекает равенство $Q[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = E_{r+1}[\varepsilon]$, которое вместе с (57)–(60) завершает доказательство утверждения (51).

Установим (52). Ввиду (54) $\alpha = 1$ или $\alpha = \varepsilon$. Если $\alpha = 1$, то, используя (56), имеем $H[1, \beta] = (p \& H)[1, \beta] = \diamond \beta$. Поэтому справедливы положения

$$B_s[(p \& H)][1, \beta] = \begin{cases} \square \neg \beta, & \text{если } s = 1, \\ 1, & \text{если } s > 1, \end{cases} \quad \Theta_0(W)[(p \& H)][1, \beta] = 1,$$

которые вместе с (55) дают равенства $\psi_1(W)[1, \beta] = \square(\beta \vee \square \neg \beta)$ и $\psi_2(W)[1, \beta] = 0$, из которых следует $\psi(W)[1, \beta] = \neg \square(\beta \vee \square \neg \beta)$. Поэтому получаем

$$\psi(W)[1, \beta] = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta \in \{0, E_0[\varepsilon], \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon] \mid k \geq 0\}, \\ \neg \square A_2[\varepsilon], & \text{если } \beta \in \{E_k[\varepsilon], \varphi_r(Z)[\varepsilon] \mid k \geq 1\}. \end{cases} \quad (62)$$

Пусть $\alpha = \varepsilon$. Тогда проводим рассмотрение опять по случаям, определяемым условием $v = 0$ (см. (54)). Если $\beta = 0$, то, используя (55) и очевидные равенства $H[\varepsilon, 0] = 0$ и $\Theta_0(Z)[0] = 1$, получаем

$$\psi(W)[\varepsilon, 0] = 0. \quad (63)$$

Пусть $\beta = E_k[\varepsilon]$. Тогда, учитывая (56) и используя выводимость (14), находим

$$H[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]. \quad (64)$$

С помощью леммы 6 отсюда следует

$$B_s[(p \& H)][\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = B_{k+s}[\varepsilon], \quad s = 1, 2, \dots, \quad (65)$$

Легко видеть, с одной стороны, что (64) влечет равенство $(H \supset q)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = 1$, на основании которого имеет место

$$\psi_1(W)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = \square \Theta_0(W)[(p \& H)][\varepsilon, E_k[\varepsilon]].$$

Отсюда после преобразования правой части равенства с учетом положения (65) и определения формул $\Theta_0(W)$ и $\Theta_k(W)$ вытекает утверждение $\psi_1(W)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = \square \Theta_k(W)[\varepsilon]$, которое по лемме 10 дает

$$\psi_1(W)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = \square A_{2k+4}[\varepsilon]. \quad (66)$$

С другой стороны, соотношение (64) влечет предложение $(q \vee H)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = E_k[\varepsilon]$, которое вместе с (55), (65) и очевидным фактом $(p \vee q)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = 1$ позволяет усмотреть равенство $\psi_2(W)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = E_{k+w+1}[\varepsilon]$, где w — рабочая длина слова W . Из этого и (66) следует $\psi(W)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = (\square A_{2k+4} \supset E_{k+w+1})[\varepsilon]$, а упрощая правую часть этого равенства с использованием выводимостей (9) и (10), получаем

$$\psi(W)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = E_{k+1}[\varepsilon]. \quad (67)$$

Пусть $\beta = \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]$. Тогда, учитывая (56) и привлекая выводимость (8), находим

$$H[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]. \quad (68)$$

Отсюда получаем равенство $(H \supset q)[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = 1$. Используя его, а затем лемму 10, получаем

$$\psi_1(W)[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = \square A_{2k+4}[\varepsilon]. \quad (69)$$

Кроме того, применяя соотношения (4) и (5), усматриваем равенство $(q \supset \square(p \vee q))[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = \square A_{2k+2}[\varepsilon]$, которое вместе с (68) дает $\psi_2(W)[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = 0$, а из этого и (69) следует

$$\psi(W)[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = \neg \square A_{2k+4}[\varepsilon]. \quad (70)$$

Пусть $\beta = \varphi_r(Z)[\varepsilon]$. Тогда по лемме 16 констатируем равенство

$$H[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = \neg \square A_{2r+2}[\varepsilon], \quad (71)$$

из которого с помощью леммы 6 выводим следствие

$$B_s[(p \& H)][\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = B_{r+s}[\varepsilon], \quad s = 1, 2, \dots \quad (72)$$

Из этого и определения формул $\Theta_0(W)$ и $\Theta_r(W)$ вытекает

$$\Theta_0(W)[(p \& H)][\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = \Theta_r(W)[\varepsilon].$$

Используя равенства (61), (71) и выводимости (5) и (10), усматриваем равенство $\square(p \vee q) \supset (H \supset q)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = \Theta_r(Z)[\varepsilon]$, которое вместе с предыдущим равенством дает

$$\psi_1(W)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = \square(\Theta_r(W) \sim \Theta_r(Z))[\varepsilon]. \quad (73)$$

Кроме того, равенство (61) и выводимость (11) позволяют заключить, что имеет место $(q \supset \square(p \vee q))[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = A_{2r+2z+2}[\varepsilon]$. Учитывая (71) и применив (5) и (10), усматриваем, что $(q \vee H)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = E_r[\varepsilon]$. Последние два равенства, а также (55) и (72) дают $\psi_2(W)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = (A_{2r+2z+2} \& E_{r+w+1})[\varepsilon]$. Из этого и (73) следует

$$\psi(W)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = (\square(\Theta_r(W) \sim \Theta_r(Z)) \supset (A_{2r+2z+2} \& E_{r+w+1}))[\varepsilon]. \quad (74)$$

Правая часть этого равенства допускает упрощение, зависящее от слов W и Z . Поскольку слова эти различны, то достаточно рассмотреть следующие три случая: 1) существует непустое слово U , что $W \sqsubseteq ZU$; 2) существует непустое слово U , что $Z \sqsubseteq WU$; 3) существуют слова X , U_1 и U_2 , а также различные буквы b_s и b_t , что $W \sqsubseteq Xb_sU_1$ и $Z \sqsubseteq Xb_tU_2$.

В случае 1) согласно лемме 11 имеет место

$$\square(\Theta_r(W) \sim \Theta_r(Z))[\varepsilon] = \square A_{2r+2z+4}[\varepsilon].$$

Кроме того, поскольку $z < w$, то, привлекая выводимости (9) и (10), находим

$$\vdash ((\Box A_{2r+2z+4} \supset E_{r+w+1}) \sim E_{r+z+1}),$$

а представив $A_{2r+2z+4}$ по (7) как $(p \supset \Box A_{2r+2z+3})$ и используя очевидный факт $\vdash (p \vee A_{2r+2z+2})$, получаем

$$\vdash (B_{r+z+1} \supset (\Box A_{2r+2z+4} \supset A_{2r+2z+2})).$$

Легко усмотреть, что с помощью этих соотношений можем в рассматриваемом случае упростить правую часть равенства (74) и тем самым получить

$$\psi(W)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = E_{r+z+1}[\varepsilon]. \quad (75)$$

В случае 2) по лемме 11 справедливо равенство

$$\Box(\Theta_r(W) \sim \Theta_r(Z))[\varepsilon] = \Box A_{2r+2w+4}[\varepsilon].$$

А так как $w < z$, то, применяя (5) и (10), находим

$$\vdash ((\Box A_{2r+2w+4} \supset (E_{r+w+1} \& A_{2r+2z+2})) \sim E_{r+w+1}).$$

Поэтому в рассматриваемом случае получаем

$$\psi(W)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = E_{r+w+1}[\varepsilon]. \quad (76)$$

В случае 3) положим $s < t$. Тогда по лемме 12 имеет место

$$\Box(\Theta_r(W) \sim \Theta_r(Z))[\varepsilon] = \Box A_{2r+2x+4s+4}[\varepsilon],$$

где x — рабочая длина слова X . Кроме того, поскольку рабочие длины букв b_s и b_t равны соответственно $2s+3$ и $2t+3$ и, следовательно, $x+2s+1 < z$, то, применяя выводимости (5) и (10), легко усмотреть, что

$$\vdash ((\Box A_{2r+2x+4s+4} \supset (E_{r+w+1} \& A_{2r+2z+2})) \sim E_{r+x+2s+1}).$$

С помощью найденных соотношений упрощаем в рассматриваемом случае правую часть равенства (74) и получаем

$$\psi(W)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = E_{r+x+2s+1}[\varepsilon]. \quad (77)$$

Если же $t < s$, то аналогично можно показать, что

$$\psi(W)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = E_{r+x+2t+1}[\varepsilon]. \quad (78)$$

Остается добавить, что равенства (62), (63), (67), (70) и (75) — (78) завершают доказательство положения (52).

Докажем, наконец, (53). Как и выше $\alpha = 1$ или $\alpha = \varepsilon$. Если $\alpha = 1$, то равенства (55) и $B_1[(p \& H)[1, \beta] = \Box \neg \beta$ (см. доказательство (52)) позволяют усмотреть, что $\rho(X_n)[1, \beta] = 0$, а с помощью равенств $\Theta_0(X_n)[(p \& H)][1, \beta] = A_{2x_n+1}[(p \& H)][1, \beta] = 1$ и $H[1, \beta] = \Diamond \beta$ находим $\pi(X_n)[1, \beta] = \Box(\beta \vee \Box \neg \beta)$. Следовательно, $\kappa(X_n, Y_n)[1, \beta] = \neg \Box(\beta \vee \Box \neg \beta)$. Отсюда следует (учитывая табл. 1 и 3)

$$\begin{aligned} \kappa(X_n, Y_n)[1, 0] &= \kappa(X_n, Y_n)[1, E_0[\varepsilon]] = \\ &= \kappa(X_n, Y_n)[1, \neg \Box A_{2k+2}[\varepsilon]] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (79)$$

$$\kappa(X_n, Y_n)[1, E_k[\varepsilon]] = \kappa(X_n, Y_n)[1, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = \neg \Box A_2[\varepsilon], \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть $\alpha = \varepsilon$. Тогда удобно рассуждать опять по случаям, определяемым условием $v = 0$. Если $\beta = 0$, то, с одной стороны, используя (55), находим $\rho(X_n)[\varepsilon, 0] = 0$. С другой стороны, ввиду $H[\varepsilon, 0] = 0$, получаем $\pi(X_n)[\varepsilon, 0] = 1$, а из этих равенств и того, что $y_n > 0$, следует

$$\kappa(X_n, Y_n)[\varepsilon, 0] = E_0[\varepsilon]. \quad (80)$$

Пусть $\beta = E_k[\varepsilon]$. Тогда выполняется равенство (64) и поэтому имеют место положения (65) и $(H \supset q)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = 1$. Легко заметить, что из (65) и определения формул $\Theta_0(X_n)$ и $\Theta_k(X_n)$ вытекает равенство $\Theta_0(X_n)[(p \& H)][\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = \Theta_k(X_n)[\varepsilon]$, которое вместе с предыдущим позволяет заключить с применением леммы 10, что $\pi(X_n)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = \square A_{2k+4}[\varepsilon]$. Кроме того, на основании (55) и (65) имеет место $\rho(X_n)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = E_{k+x_n}[\varepsilon]$, откуда следует с помощью выводимости (13), что $(p \vee q)[\varepsilon, \rho(X_n)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]]] = 1$. Из последних трех равенств вытекает

$$\kappa(X_n, Y_n)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = (\square A_{2k+2} \supset E_{k+x_n})[\varepsilon].$$

Но, учитывая неравенство $x_n > 0$ и применяя выводимости (9) и (10), можем упростить правую часть этого равенства и получить

$$\kappa(X_n, Y_n)[\varepsilon, E_k[\varepsilon]] = E_{k+1}[\varepsilon]. \quad (81)$$

Пусть $\beta = \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]$. Тогда справедливо равенство (68), из которого согласно лемме 6 вытекает

$$B_s[(p \& H)][\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = B_{k+s}[\varepsilon], \quad s = 1, 2, \dots \quad (82)$$

Из этого и определения формул $\Theta_0(X_n)$ и $\Theta_k(X_n)$ следует

$$\Theta_0(X_n)[(p \& H)][\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = \Theta_k(X_n)[\varepsilon].$$

Найденные равенства и лемма 10 позволяют заключить, что

$$\pi(X_n)[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = \square A_{2k+4}[\varepsilon]. \quad (83)$$

Кроме того, обозначив элемент $\rho(X_n)[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]]$ через δ и используя равенства (55), (68) и (82), находим

$$\delta = (B_{k+1} \& \dots \& B_{k+x_n} \& \neg \square A_{2k+2})[\varepsilon].$$

Это равносильно тому, что

$$\delta = (B_{k+2} \& \dots \& B_{k+x_n} \& \neg \square A_{2k+3})[\varepsilon]. \quad (84)$$

Учитывая (13) и (4), легко видеть, что из этого следует

$$\square(p \vee q)[\varepsilon, \delta] = \square \varepsilon. \quad (85)$$

Заметим также, что из (84) вытекает равенство

$$\square(\delta \vee \square \varepsilon) = \square((B_{k+2} \vee \square p) \& \dots \& (B_{k+x_n} \vee \square p) \& (\square A_{2k+3} \supset \square p))[\varepsilon],$$

которое, ввиду (4), влечет

$$\square(\delta \vee \square \varepsilon) = \square \varepsilon. \quad (86)$$

Из (84) и (85) следует равенство $(\square(p \vee q) \supset q)[\varepsilon, \delta] = E_0[\varepsilon]$, которое вместе с (83) и (85) позволяет усмотреть, что

$$\begin{aligned} \kappa(X_n, Y_n)[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] &= \\ &= (\square A_{2k+4}[\varepsilon] \supset (E_0[\varepsilon] \& (\Theta_0(Y_n) \& A_{2y_n+1})[(\delta \vee \square \varepsilon)])) \end{aligned}$$

Покажем, что это равносильно тому, что

$$\kappa(X_n, Y_n)[\varepsilon, \neg \square A_{2k+2}[\varepsilon]] = E_0[\varepsilon]. \quad (87)$$

Для этого достаточно убедиться, что справедливы следующие два соотношения, первое из которых основано на выводимости (10):

$$\vdash ((\square A_{2k+4} \supset E_0) \sim E_0),$$

$$(\square A_{2k+4}[\varepsilon] \supset (\Theta_0(Y_n) \& A_{2y_n+1})[(\delta \vee \square \varepsilon)]) = 1. \quad (88)$$

Докажем последнее. Из (84) и (86) следует

$$A_2[(\delta \vee \square \varepsilon)] = \neg \delta. \quad (89)$$

Используя это и (84), находим равенство

$$\square A_2[(\delta \vee \square \varepsilon)] = \square ((B_{k+2} \& \dots \& B_{k+x_n}) \supset \square A_{2k+3})[\varepsilon],$$

которое после упрощения правой части с применением соотношений (4) и (5) равносильно тому, что $\square A_2[(\delta \vee \square \varepsilon)] = \square A_{2k+3}[\varepsilon]$. Из этого и (89) вытекает $A_3[(\delta \vee \square \varepsilon)] = (\delta \vee \square A_{2k+3}[\varepsilon])$. Используя это и (84), получаем $A_3[(\delta \vee \square \varepsilon)] = (B_{k+2} \& \dots \& B_{k+x_n})[\varepsilon]$. Поэтому при всяком $j = 3, 4, \dots$ справедливо равенство

$$\square A_{2k+4}[\varepsilon] \supset \square A_j[(\delta \vee \square \varepsilon)] = 1. \quad (90)$$

Вспомнив определение формулы $\Theta_0(Y_n)$ и то, что $y_n > 1$, может заключить с обращением к выводимости (5), что из (90) уже следует (88).

Пусть $\beta = \varphi_r(Z)[\varepsilon]$. Тогда в случае, когда продукция Π_n применима к слову Z , на основании леммы 22 констатируем соотношение

$$\kappa(X_n, Y_n)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] \in \mathfrak{M}. \quad (91)$$

Пусть далее продукция Π_n не применима к слову Z . Тогда справедливы равенства (71) и (72). Из (71) с помощью леммы 5 получаем

$$A_s[(p \& H)][\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = A_{2r+s}[\varepsilon], \quad s = 2, 3, \dots$$

Используя эти равенства, а также (55) и введя обозначения

$$\gamma \triangleq \pi(X_n)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]], \quad \delta \triangleq \rho(X_n)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]],$$

нетрудно усмотреть, что

$$\gamma = \square (\Theta_r(X_n) \sim (\square A_{2r+2x_n+1} \supset (\square A_{2r+2} \vee \varphi_r(Z))))[\varepsilon],$$

$$\delta = (B_{r+1} \& \dots \& B_{r+x_n} \& \varphi_r(Z))[\varepsilon].$$

Отсюда после преобразования правых частей равенств с учетом выводимости (5) и равенств (55) следует

$$\gamma = \square (\Theta_r(X_n) \sim (\square A_{2r+2x_n+1} \supset (\Theta_r(Z) \& A_{2r+2z+1})))[\varepsilon], \quad (92)$$

$$\delta = (E_{r+x_n} \& \Theta_r(Z) \& A_{2r+2z+1})[\varepsilon]. \quad (93)$$

Последнее из этих положений ввиду (6) и (13) влечет

$$(p \vee q)[\varepsilon, \delta] = A_{2r+2z+1}[\varepsilon]. \quad (94)$$

Поскольку слово X_n не является началом слова Z , то возможны два случая: 1) существует непустое слово U , что $X_n \sqsubseteq ZU$; 2) существуют слова X , U_1 и U_2 , а также различные буквы b_s и b_t , что $X_n \sqsubseteq Xb_sU_1$ и $Z \sqsubseteq Xb_tU_2$.

В случае 1) $z < x_n$. Поэтому из (92) и (10) следует

$$\gamma = \square (\Theta_r(X_n) \sim (\Theta_r(Z) \& (\square A_{2r+2x_n+1} \supset A_{2r+2z+1})))[\varepsilon].$$

Из этого по лемме 9 вытекает равенство

$$\gamma = \square ((\Theta_r(Z) \& \Theta_{r+z}(U)) \sim (\Theta_r(Z) \& (\square A_{2r+2x_n+1} \supset A_{2r+2z+1})))[\varepsilon],$$

которое равносильно тому, что

$$\gamma = \square (\Theta_r(Z) \supset (\Theta_{r+z}(U) \sim (\square A_{2r+2x_n+1} \supset A_{2r+2z+1})))[\varepsilon].$$

Упрощая правую часть этого равенства с использованием выводимостей (11) и (12), находим

$$\gamma = \square (\Theta_{r+z}(U) \sim (\square A_{2r+2x_n+1} \supset A_{2r+2z+1})))[\varepsilon]. \quad (95)$$

С одной стороны, отсюда следует

$$\gamma = (\gamma \& \square (\square \Theta_{r+z}(U) \sim \square (\square A_{2r+2x_n+1} \supset A_{2r+2z+1})) [\varepsilon]).$$

Но ввиду леммы 10 и равенств (4) имеет место

$$\square (\square \Theta_{r+z}(U) \sim \square (\square A_{2r+2x_n+1} \supset A_{2r+2z+1})) [\varepsilon] = \square A_{2r+2z+1} [\varepsilon].$$

Поэтому из предыдущего равенства вытекает $\gamma = (\gamma \& \square A_{2r+2z+1} [\varepsilon])$. С другой стороны, вспомнив определение формулы $\Theta_{r+z}(U)$ и применив выводимость (5), легко видеть, что из (95) следует также равенство $(\gamma \& \square A_{2r+2z+1} [\varepsilon]) = \square A_{2r+2z+1} [\varepsilon]$, которое вместе с предыдущим дает

$$\gamma = \square A_{2r+2z+1} [\varepsilon]. \quad (96)$$

В силу этого и (94) имеет место $(\gamma \supset \square (q \vee \square (p \vee q))) [\varepsilon, \delta] = 1$, откуда — после учета следующего соотношения, основанного на выводимости (5): $\vdash (\square ((q \vee \square (p \vee q)) \& T_1) \supset A_j [((q \vee \square (p \vee q)) \& T_1)])$ ($j \geq 1$) — вытекает важное для рассматриваемого случая положение

$$(\gamma \supset (\Theta_0(Y_n) \& A_{2y_n+1}) [((q \vee \square (p \vee q)) \& T_1)] [\varepsilon, \delta]) = 1. \quad (97)$$

Кроме того, равенства (93), (94) и (96) позволяют заключить, что

$$(\gamma \supset (\square (p \vee q) \supset q) [\varepsilon, \delta]) = (\square A_{2r+2z+1} \supset (E_{r+x_n} \& \Theta_r(Z))) [\varepsilon].$$

Вспомнив, что $z < x_n$ и применив выводимости (9) и (10), упрощаем правую часть этого равенства и находим

$$(\gamma \supset (\square (p \vee q) \supset q) [\varepsilon, \delta]) = E_{r+z} [\varepsilon],$$

а этот факт и (97) уже достаточны, чтобы в рассматриваемом случае усмотреть равенство

$$\kappa(X_n, Y_n) [\varepsilon, \varphi_r(Z) [\varepsilon]] = E_{r+z} [\varepsilon]. \quad (98)$$

В случае 2) сначала пусть $s < t$, а символы P , R_1 и R_2 означают те же формулы, что и в лемме 12 при $k = r$. Тогда равенство (92) в силу леммы 9 и определения формул $\Theta_r(Xb_s)$ и $\Theta_r(Xb_t)$ записываем в виде

$$\gamma = \square ((P \& R_1) \sim (\square A_{2r+2x_n+1} \supset (P \& R_2 \& A_{2r+2z+1}))) [\varepsilon]. \quad (99)$$

Поскольку формула P является конъюнкцией некоторых формул вида B_i , где $0 \leq i \leq r+x+2s$, а R_1 и R_2 — конъюнкции некоторых формул вида B_j ($j > r+x+2s$), то, применяя выводимость (12), находим

$$\vdash ((P \supset R_1) \sim R_1), \quad \vdash ((P \supset R_2) \sim R_2). \quad (100)$$

Кроме того, учитывая неравенства $x+2s < x_n$ и $x+2s < z$ и применяя выводимости (10) и (11), получаем

$$\vdash ((\square A_{2r+2x_n+1} \supset P) \sim P), \quad (101)$$

$$\vdash ((P \supset A_{2r+2z+1}) \sim A_{2r+2z+1}). \quad (102)$$

В силу (101) из равенства (99) следует

$$\gamma = \square ((P \& R_1) \sim (P \& (\square A_{2r+2x_n+1} \supset (R_2 \& A_{2r+2z+1})))) [\varepsilon].$$

Это равносильно тому, что

$$\gamma = \square (P \supset (R_1 \sim (\square A_{2r+2x_n+1} \supset (R_2 \& A_{2r+2z+1})))) [\varepsilon].$$

Упрощая правую часть этого равенства с использованием выводимостей (100) и (102), находим

$$\gamma = \square (R_1 \sim (\square A_{2r+2x_n+1} \supset (R_2 \& A_{2r+2z+1}))) [\varepsilon]. \quad (103)$$

Отсюда, введя обозначение $E \Leftarrow (\square A_{2r+2x_n+1} \supset (R_2 \& A_{2r+2z+1}))$, получаем

$$\gamma = (\gamma \& \square (\square R_1 \sim \square E) [\varepsilon]). \quad (104)$$

Вспомнив вид формул R_1 и R_2 и применив соотношения (4) и (5), усматриваем, что

$$\square R_1[\varepsilon] = \square A_{2r+2x+4s+6}[\varepsilon], \quad (105)$$

$$\square R_2[\varepsilon] = \square A_{2r+2x+4s+4}[\varepsilon]. \quad (106)$$

Привлекая последнее из этих равенств, покажем, что

$$\square E[\varepsilon] = \square A_{2r+2x+4s+4}[\varepsilon]. \quad (107)$$

А именно, с одной стороны, учитывая, что $x + 2s + 2 < z$, имеем

$$\vdash (\square A_{2r+2x+4s+4} \supset \square E). \quad (108)$$

С другой стороны, имеет место

$$\vdash (\square E \supset \square (\square A_{2r+2x_n+1} \supset (\square R_2 \& \square A_{2r+2z+2}))),$$

откуда после использования равенства (106) следует

$$(\square E \supset \square (\square A_{2r+2x_n+1} \supset (\square A_{2r+2x+4s+4} \& \square A_{2r+2z+1})))[\varepsilon] = 1.$$

Учитывая, что $x + 2s + 2 < z$ и $x + 2s + 2 < x_n$, и применяя соотношения (4) и (5), упрощаем левую часть равенства и получаем $(\square E \supset \square \square A_{2r+2x+4s+4})[\varepsilon] = 1$. Из этого и (108) уже вытекает требуемое равенство (107). Аналогично используя (105) и (107), усматриваем равенство $\square(\square R_1 \sim \square E)[\varepsilon] = A_{2r+2x+4s+4}[\varepsilon]$, которое вместе с (104) позволяет получить $\gamma = (\gamma \& A_{2r+2x+4s+4}[\varepsilon])$. Кроме того, с помощью очевидных соотношений

$$\vdash (\square A_{2r+2x+4s+4} \supset R_1), \quad \vdash (\square A_{2r+2x+4s+4} \supset (R_2 \& A_{2r+2z+1}))$$

усматриваем, что из (103) следует равенство

$$(\gamma \& \square A_{2r+2x+4s+4}[\varepsilon]) = \square A_{2r+2x+4s+4}[\varepsilon],$$

которое в сочетании с предыдущим дает

$$\gamma = \square A_{2r+2x+4s+4}[\varepsilon]. \quad (109)$$

Легко заметить, что из (94) и (109) в рассматриваемом случае вытекает равенство (97), а из (93), (94) и (109) — равенство

$$(\gamma \supset (\square (p \vee q) \supset q)[\varepsilon, \delta]) = (\square A_{2r+2x+4s+4} \supset (E_{r+x_n} \& \Theta_r(Z)))[\varepsilon],$$

которое после упрощения правой части с применением выводимостей (9) и (10) равносильно тому, что

$$(\gamma \supset (\square (p \vee q) \supset q)[\varepsilon, \delta]) = E_{r+x+2s+1}[\varepsilon].$$

А на основании этого и (97) имеет место

$$\kappa(X_n, Y_n)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = E_{r+x+2s+1}[\varepsilon]. \quad (110)$$

Далее пусть $t < s$, а символы P , R_1 и R_2 означают формулы

$$\left(\Theta_r(X) \& \bigwedge_{i=1}^t B_{r+x+2i} \right), \quad \left(\bigwedge_{i=t+1}^s B_{r+x+2i} \& B_{r+x+2s+3} \& \Theta_{r+x+2s+3}(U_1) \right)$$

и $(B_{r+x+2t+3} \& \Theta_{r+x+2t+3}(U_2))$, соответственно. Тогда формула (92) записывается в виде (99). Так как P — конъюнкция некоторых формул B_i , где $0 \leq i \leq r+x+2t$, а R_1 и R_2 — конъюнкции некоторых формул B_j ($j > r+x+2t$), то выполняются соотношения (100). А поскольку $x+2t < x_n$ и $x+2t < z$, то справедливы также (101) и (102). С помощью (100)–(102) выводим из (99) как и выше равенства (103) и (104).

Применив (4) и (5), находим

$$\Box R_1[\varepsilon] = \Box A_{2r+2x+4t+4}[\varepsilon], \quad (111)$$

$$\Box R_2[\varepsilon] = \Box A_{2r+2x+4t+6}[\varepsilon]. \quad (112)$$

Учитывая соотношение $x + 2t + 3 \leq z$, констатируем, что

$$\vdash (\Box A_{2r+2x+4t+6} \supset \Box E). \quad (113)$$

Кроме того, используя (112), находим

$$(\Box E \supset \Box (\Box A_{2r+2x_n+1} \supset (\Box A_{2r+2x+4t+6} \& \Box A_{2r+2z+1}))) [\varepsilon] = 1.$$

Но учитывая, что $x + 2t + 3 \leq x_n$ и $x + 2t + 3 \leq z$, и используя (4) и (5), упрощаем левую часть этого равенства, в результате чего получаем $(\Box E \supset \Box A_{2r+2x+4t+6})[\varepsilon] = 1$. Это и (113) дают $\Box E[\varepsilon] = \Box A_{2r+2x+4t+6}[\varepsilon]$. Ввиду последнего и (111) имеет место равенство $\Box(\Box R_1 \sim \Box E)[\varepsilon] = A_{2r+2x+4t+4}[\varepsilon]$, которое в сочетании с (104) позволяет получить $\gamma = (\gamma \& \Box A_{2r+2x+4t+4}[\varepsilon])$. Кроме того, на основании соотношений $\vdash (\Box A_{2r+2x+4t+4} \supset R_1)$ и $\vdash (\Box A_{2r+2x+4t+4} \supset (R_2 \& A_{2r+2z+1}))$ из (103) вытекает равенство $(\gamma \& \Box A_{2r+2x+4t+4}[\varepsilon]) = \Box A_{2r+2x+4t+4}[\varepsilon]$, которое вместе с предыдущим влечет

$$\gamma = \Box A_{2r+2x+4t+4}[\varepsilon]. \quad (114)$$

Очевидно, что из (94) и (114) следует равенство (97), а из (93), (94) и (114) — равенство

$$(\gamma \supset (\Box (p \vee q) \supset q)[\varepsilon, \delta]) = (\Box A_{2r+2x+4t+4} \supset (E_{r+x_n} \& \Theta_r(Z))) [\varepsilon],$$

которое равносильно тому, что

$$(\gamma \supset (\Box (p \vee q) \supset q)[\varepsilon, \delta]) = E_{r+x+2t+1}[\varepsilon].$$

А из этого и (97) получаем

$$\kappa(X_n, Y_n)[\varepsilon, \varphi_r(Z)[\varepsilon]] = E_{r+x+2t+1}[\varepsilon]. \quad (115)$$

Наконец, остается добавить, что соотношения (79) — (81), (87), (91), (98), (110) и (115) завершают доказательство утверждения (53).

§ 7. Основная теорема и следствия

Следующая основная теорема вытекает из леммы 21.

Теорема 1. *Не существует алгоритма, решающего проблему выразимости в логике $S4$ или в логике D^* , или в какой-нибудь промежуточной между ними модальной логике.*

Логика называется разрешимой по выразимости [5], если существует алгоритм, решающий проблему выразимости в ней.

Из теоремы 1 вытекают следующие две теоремы, каждая из которых равносильна ей.

Теорема 2. *Логика $S4$, логика D^* и любая промежуточная между ними модальная логика неразрешимы по выразимости.*

Теорема 3. *Любое расширение логики $S4$, не являющееся локально табличной логикой, неразрешимо по выразимости*).*

Из теоремы 3 и упомянутого во введении аналога результата А. В. Кузнецова [5] вытекает

Теорема 4. *Конечно аксиоматизируемое расширение логики $S4$ разрешимо по выразимости тогда и только тогда, когда оно является локально табличной логикой.*

) Достаточно вспомнить то, что говорилось выше о логике D^ , особенно результат Л. Л. Максимовой [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Г. Теория структур.— М.: ИЛ, 1952.
2. Гросс М., Лантен А. Теория формальных грамматик.— М.: Мир, 1971.
3. Клини С. К. Введение в метаматематику.— М.: ИЛ, 1957.
4. Кузнецов А. В. Аналоги «штриха Шеффера» в конструктивной логике //
5. Кузнецов А. В. О функциональной выразимости в суперинтуиционистских логиках // Матем. исследовани.— 1971.— Т. VI, вып. 4.— С. 75—122.
ДАН СССР.— 1965.— Т. 160, № 2.— С. 274—277.
6. Кузнецов А. В., Муравичкий А. Ю. Доказуемость как модальность // Актуальные проблемы логики и методологии науки.— Киев: Наукова думка, 1980.— С. 193—230.
7. Кузнецов А. В., Раца М. Ф. Критерий функциональной полноты в классической логике предикатов первого порядка // ДАН СССР.— 1979.— Т. 249, № 3.— С. 540—544.
8. Максимова Л. Л. Предтабличные расширения логики S_4 Льюиса // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 1.— С. 28—55.
9. Максимова Л. Л. Модальные логики конечных слоев // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 3.— С. 304—319.
10. Максимова Л. Л., Рыбаков В. В. О решетке нормальных модальных логик // Алгебра и логика.— 1974.— Т. 13, № 2.— С. 188—216.
11. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции.— М.: Наука, 1965.
12. Новиков П. С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической.— М.: Наука, 1977.
13. Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики.— М.: Наука, 1972.
14. Раца М. Ф. О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Проблемы кибернетики. Вып. 21.— М.: Наука, 1969.— С. 185—214.
15. Раца М. Ф. Критерий функциональной полноты в интуиционистской логике высказываний // ДАН СССР.— 1971.— Т. 201, № 4.— С. 794—797.
16. Раца М. Ф. Отсутствие у свободной топобулевой алгебры финитной аппроксимруемости по функциональной полноте // XVI Всесоюзная алгебраическая конференция: Тезисы докладов. Т. 2.— Л., 1981.— С. 110—111.
17. Раца М. Ф. Функциональная полнота в модальных логиках // Rostock. Math. Kolloq., h. 19 (1982).— P. 19—28.
18. Раца М. Ф. Нетабличность логики S_4 по функциональной полноте // Алгебра и логика.— 1982.— Т. 21, № 3.— С. 283—320.
19. Раца М. Ф. О функциональной полноте в интуиционистской логике высказываний // Проблемы кибернетики. Вып. 39.— М.: Наука, 1982.— С. 107—150.
20. Раца М. Ф. Неразрешимость логики S_4 по выразимости // VI Всесоюзная конференция по математической логике: Тезисы докладов.— Тбилиси, 1982.— С. 153.
21. Раца М. Ф. Неразрешимость проблемы функциональной выразимости в модальной логике S_4 // ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 4.— С. 814—817.
22. Раца М. Ф. О функциональной полноте в модальной логике S_5 // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам.— М.: Наука, 1983.— С. 222—280.
23. Фейс Р. Модальная логика.— М.: Наука, 1974.
24. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР.— 1954.— 95, № 6.— С. 1153—1156.
25. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Труды МИАН СССР.— 1958.— Т. 51.— С. 5—142.
26. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста.— М.: Наука, 1966.
27. Gödel K. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls // Ergebnisse math. Koll.— 1933.— V. 4.— P. 39—40.
28. Makinson D. C. There are infinitely many Diodorean modal functions // J. Symb. Logic.— 1966.— V. 31, № 3.— P. 406—408.
29. McKinsey J. C. C., Tarski A. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting // J. Symb. Logic.— 1948.— V. 13.— P. 1—15.
30. Minski M. L. Recursive unsolvability of Post's problem of «TAG» and topics in theory of Turing machines // Ann. Math. 1961.— V. 74.— P. 437—455.
31. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic.— Princeton, 1941.
32. Pratt V. R. Application of modal logic to programming // Studia Logica.— 1980.— 39, № 2/3. P. 257—274.
33. Rosenberg I. La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci.— 1965.— V. 260.— P. 3817—3819.
34. Schumm G. F. On a modal system of D. C. Makinson and B. Sobociński // Notre Dame J. Form Logic.— 1969.— V. 10, № 3.— P. 263—265.