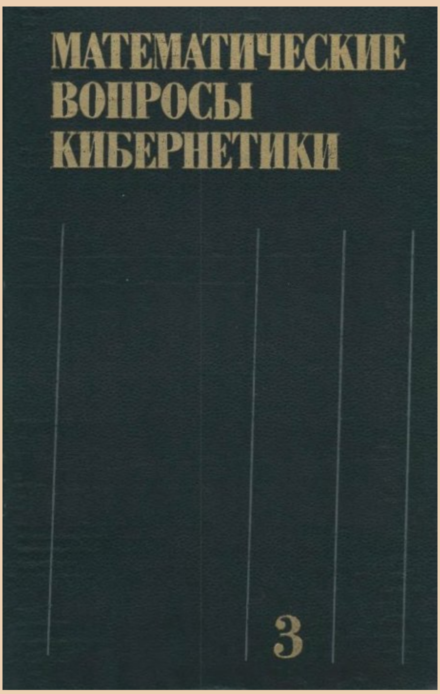

Ю. А. Виноградов

О синтезе трехзначных МДП-схем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Виноградов Ю. А. О синтезе трехзначных МДП-схем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 3. — М.: Наука, 1991. — С. 187–198. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1991-187

О СИНТЕЗЕ ТРЕХЗНАЧНЫХ МДП-СХЕМ

Ю. А. ВИНОГРАДОВ

(МОСКВА)

К многозначным логикам, к их математическому аппарату как к источнику математических моделей, обладающих большими потенциальными возможностями, обращались неоднократно (см., например, [2, 3, 5—8, 10], а также дипломные работы Г. А. Андреева, Т. И. Кирьяновой, РФФ, ГГУ, 1956 г. и Н. А. Логиновой, РФФ, ГГУ, 1957 г.). То обстоятельство, что особый интерес к такого рода моделям проявляется в электронике, в технике больших дискретно функционирующих электронных схем, объясняется прежде всего тем, что традиционный здесь тип глобальной модели, предполагающий строгую двоичность функционирования всех базисных элементов, любого фрагмента схемы, не в состоянии отобразить в себе многих на самом деле существенных для синтеза особенностей техники реализации. Именно этим объясняется то, что инженерный базис даже изначально ориентированных на двоичное функционирование устройств во много раз превосходит достаточный здесь, казалось бы, алгебрологический [2, 4].

В многозначных моделях могут найти свое естественное отображение энергетика, технические запреты, суперпозиционные ограничения, компенсаторные средства и многое другое. Форма и, главное, детальность учета всех этих безусловно важных для инженерного синтеза обстоятельств, обстоятельств, так или иначе учитываемых всегда, представляется существенной. Будет ли эта информация введена в модель и использована оперативно в ходе формирования того или иного фрагмента схемы или же она будет существовать в виде множества надмодельных запретов и ограничений, формирующих область применения модели, практически всегда исключающих наряду с неприемлемым и возможное, может повести и к существенным различиям в результатах.

Многозначный синтез, ограниченный в своих свободах техникой реализации, имеет и ряд особенностей. В настоящей работе мы построим функционально полный в P_3 базис, в котором на компромиссной основе будут согласованы математические и технические (МДП-техники) требования и интересы; рассмотрим некоторые аспекты синтеза электронных схем в этом базисе. Но хотя многозначная МДП-техника представляет интерес и сама по себе, многое из того, с чем мы здесь встретимся — недоопределенные и недоопределяемые функции, сильные и своеобразные суперпозиционные ограничения и др.— является скорее нормой в прикладном синтезе, нежели чем-то необычным; нормой, требующей адекватного отображения и в математической модели. В этом плане данная работа может представлять несколько более общий интерес.

На рис. 1 и 2 изображены принципиальные схемы двух функциональных элементов, назовем их соответственно N- и P-элементами. Зависимость выходного напряжения от входного для каждого из них показана графиками на рис. 3; здесь: $U_п$ — пороговое напряжение МДПтранзистора с индуцированным каналом, U_0, U_1, U_2 — электрические потенциалы, представляющие соответственно 0, 1, 2 — значения переменных и функций в трехзначной логике. N- и P-элементы обладают очевидной устойчивостью (локальной независимостью выходного напряжения от входного) и достаточно высоким ($\sim 10^{14}$ Ом [14]) входным сопротивлением, что дает нам основания рассматривать их в качестве

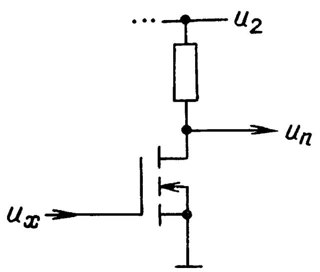

Рис. 1

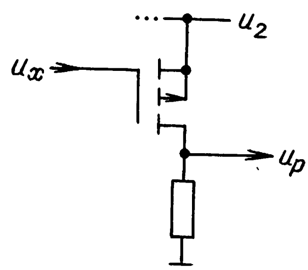

Рис. 2

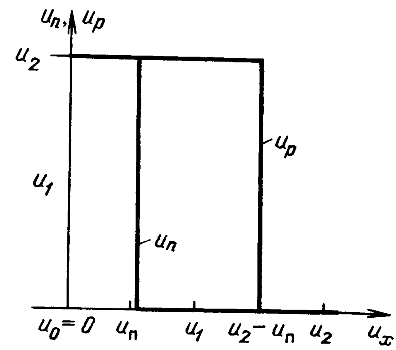

Рис. 3

элементов трехзначной логики, реализующих функции, определенные на множестве {0, 1, 2} и принимающие значения из {0, 2}.

На рис. 4 изображена принципиальная схема еще одного функционального элемента (K-элемента), реализующего функцию $K(x, y, z)$, заданную табл. 1. Наборам переменных $\{x, y, z\}$, на которых эта функция не определена, соответствуют некорректные — по тем или иным причинам недопустимые — режимы работы K-элемента *).

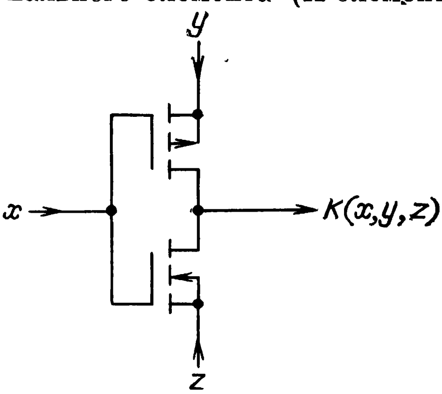

Рис. 4

Дополним эти функциональные элементы источниками базисных констант. Константу 1 будет представлять источник постоянного напряжения с $E = U_1$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением (E — электрический потенциал на выходе ненагруженного источника), константу 2 — такой же источник, но с $E = U_2$. Константа 0 будет представлена объединенными нулевыми полюсами этих двух источников, тем, что в технике принято называть общей шиной питания; здесь $E = U_0 = 0$.

Итак, имеем базисный набор

$$B = \{N(x),\ P(x),\ K(x,\ y,\ z),\ 0,\ 1,\ 2\},$$

где

$$x,\ y,\ z \in \{0,\ 1,\ 2\},$$

$$N(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 2 & \text{при} \quad x = 0, \end{cases}$$

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 2, \\ 2 & \text{при} \quad x \neq 2, \end{cases}$$

*) Недопустимы: сквозной ток через открытые каналы, сквозной ток через открытый канал одного транзистора и открытый p-n-переход канал-подложка другого, отключенный выход. Режим отключенного выхода, именуемый в двоичной технике «третьим состоянием» функционального элемента, не является здесь чем-то принципиально невозможным. В качестве своего рода «четвертого состояния» он мог бы быть использован и в синтезе трехзначных МДП-схем. Но это был бы уже несколько иной базис, отличный от здесь рассматриваемого.

$$K(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z = 0, \quad x \neq 0, \quad y \leqslant x, \\ 1 & \begin{cases} \text{при} \quad y = 1, \quad x = 0, \quad z \neq 2, \\ \text{при} \quad z = 1, \quad x = 2, \quad y \neq 0, \end{cases} \\ 2 & \text{при} \quad y = 2, \quad x \neq 2, \quad z \geqslant x. \end{cases}$$

Синтез схем в этом базисе имеет ряд особенностей. В дополнение к обычным в суперпозиционных схемах запретам на склейку выходов и циклическое включение функциональных элементов здесь обязательно и следующее:

1) входами синтезируемой схемы могут быть лишь x-входы (затворы) ее элементов;

2) выходом схемы может быть лишь выход ее K-элемента;

3) y- и z-входы (истоки) K-элемента можно соединять лишь с выходами K-элементов и источниками базисных констант;

Таблица 1

x	y	z	$K(x, y, z)$	x	y	z	$K(x, y, z)$
0	1	0	1	1	2	1	2
0	1	1	1	1	2	2	2
0	2	0	2	2	0	0	0
0	2	1	2	2	1	0	0
0	2	2	2	2	1	1	1
1	0	0	0	2	2	0	0
1	1	0	0	2	2	1	1

4) синтезированная схема не должна содержать ни единого K-элемента, могущего оказаться в неопределенном состоянии. В дальнейшем нас будут интересовать лишь суперпозиционно корректные схемы.

Назовем B-базисом набор базисных элементов или реализуемых ими функций, B-схемой или B-суперпозицией — схему, реализованную суперпозициями в B-базисе. Синтезируя фрагмент схемы, не содержащий выходного элемента, мы, очевидно, вправе исключить суперпозиционный запрет 2. Такие фрагменты, а также схемы, реализованные в неполных базисах, будем называть $\{N, P, K\}$-, $\{N, K\}$-, $\{P, K\}$-, $\{N, P\}$-суперпозициями (базисные константы не исключаются никогда). Так $\{P, K\}$-суперпозиция — это суперпозиция, реализованная в базисе $\{P(x), K(x, y, z), 0, 1, 2\}$, или, если пользоваться тем же языком, в $\{P, K\}$-базисе.

Теорема 1. *B-базис обладает полнотой в P_3.*

Доказательство. В связи с тем, что классическое доказательство полноты (см. [12]) потребовало бы в данном случае обсуждения его приемлемости и в отношении базиса с такими сильными и своеобразными суперпозиционными ограничениями, воспользуемся доказательством эвристического характера. Нетрудно убедиться в том, что B-суперпозиция $K(P(P(x_1)), K(N(x_2), 2, 1), 0)$ реализует функцию

$$S(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x_1 = 2, \\ 1 & \text{при} \quad x_1 \neq 2, \quad x_2 = 0, \\ 2 & \text{при} \quad x_1 \neq 2, \quad x_2 \neq 0, \end{cases}$$

являющуюся шефферовой в P_3. Последнее легко устанавливается с помощью, например, теоремы Яблонского — Мартина [9].

Из-за своеобразия K-функций и связанных с ним суперпозиционных ограничений, синтез схем в B-базисе может представлять и определенные трудности. Их можно преодолевать, построив, например, эффективную алгебру, но можно, чем-то поступившись, и обойти. Очевидно, в B-базисе могут быть синтезированы элементы другого базиса с более привычными характеристиками: не содержащего недоопределенных функций и не налагающего на синтез никаких особых ограничений. Таким базисом может быть и один из шефферовых. Решив так, попробуем сделать это наилучшим образом.

Примем вес функционального элемента B-базиса равным единице, вес базисной константы — нулю, сложность схемы $M - L(M)$ — суммарному весу составляющих ее элементов. Среди всех B-суперпозиций, реализующих функции Шеффера в P_3, найдем суперпозиции минимальной сложности.

Покажем, что B-базис содержит лишь необходимые функциональные элементы.

Лемма 1. *$\{N, P\}$-базис не обладает полнотой в P_3.*

Доказательство очевидно.

Лемма 2. *$\{P, K\}$-базис не обладает полнотой в P_3.*

Доказательство. В $\{P, K\}$-базисе сохраняется разбиение $\{\{0, 1\}, \{2\}\}$; т. е. все порождаемые в этом базисе функции содержатся в одном из предполных классов, что является достаточным признаком его неполноты [15].

Лемма 3. *$\{N, K\}$-базис не обладает полнотой в P_3.*

Доказательство. В $\{N, K\}$-базисе сохраняется разбиение $\{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Ситуация аналогична рассмотренной в лемме 2.

Рассмотрим структурные особенности B-схем, реализующих функции, принимающие все значения.

Лемма 4. *Если B-схема содержит лишь один K-элемент, то в ней не может быть реализована функция, принимающая все значения.*

Доказательство. В соответствии с суперпозиционными запретами 2) и 3), такая схема должна иметь вид $K(\alpha, C_1, C_2)$, где: α — произвольная суперпозиция, а $C_i \in \{0, 1, 2\}$. Но поскольку $K(\alpha, C_1, C_2) \in \{C_1, C_2\}$, то в $K(\alpha, C_1, C_2)$ не может быть реализована функция, принимающая более двух значений.

Лемма 5. *Если B-схема содержит два K-элемента и реализует функцию, принимающую все значения, то она имеет вид $K(\alpha, K(\beta, 2, 1), 0)$ или $K(\alpha, 2, K(\beta, 1, 0))$.*

Доказательство. Рассмотрим B-схемы, содержащие в точности два K-элемента, ограничив реализацию α и β — фрагментов рассматриваемых схем — лишь условиями леммы.

1) Пусть B-схема имеет вид $K(\alpha, C_1, C_2)$, где: $C_i \in \{0, 1, 2\}$, а α-суперпозиция содержит K-элемент. Но здесь, очевидно, мы имеем лишь частный случай леммы 4.

2) Пусть B-схема имеет вид $K(\alpha, K(\beta, C_1, C_2), C_3) = T_1$, где $C_i \in \{0, 1, 2\}$. Здесь набор $\{C_1 = 2, C_2 = 1, C_3 = 0\}$ устанавливается однозначно, так как $T_1(C_3 \neq 0) \neq 0$, $T_1(C_3 = 0, C_1 \neq 2) \neq 2$, $T_1(C_3 = 0, C_1 = 2, C_2 \neq 1) \neq 1$.

3) Пусть B-схема имеет вид $K(\alpha, C_1, K(\beta, C_2, C_3)) = T_2$, где $C_i \in \{0, 1, 2\}$. Здесь набор $\{C_1 = 2, C_2 = 1, C_3 = 0\}$ устанавливается однозначно, так как $T_2(C_1 \neq 2) \neq 2$, $T_2(C_1 = 2, C_3 \neq 0) \neq 0$, $T_2(C_1 = 2, C_3 = 0, C_2 \neq 1) \neq 1$.

Случаями 1) — 3) исчерпываются, очевидно, все возможные размещения двух K-элементов в B-схеме.

Следствие. Поскольку в *B-схемах, содержащих в точности два K-элемента, α и β могут быть либо независимыми переменными, либо $\{N, P\}$-суперпозициями, реализующими одноместные функции, любые функции двух переменных из P_3, принимающие все значения, могут быть здесь реализованы лишь в виде $K(a(x), K(b(y), 2, 1), 0)$ или $K(c(x), 2, K(d(y), 1, 0))$.*

Лемма 6. *$\{N, P\}$-суперпозициями порождаются лишь функции из $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ (см. табл. 2).*

Доказательство. Прямая проверка: $P(x)=m_1$, $N(x)=m_2$, $P(P(x))=N(P(x))=m_3$, $N(N(x))=P(N(x))=m_4$, $P(m_3)=N(m_3)=m_1$, $P(m_4)=N(m_4)=m_2$. Заметим, что все эти функции монотонны.

Лемма 7. *Суперпозиция $K(a(x), F(y), 0)$, где: $F(y)\in\{1, 2\}$, $a(x)$ монотонна и $a(x)\neq m_3(x)$, не является шефферовой в P_3.*

Доказательство. Пусть $a(0)\neq 0$, но тогда суперпозиция $K(a(0)\neq 0, F(y), 0)=0$ сохраняет 0. Пусть $a(1)=1$, но тогда возможно неопределенное $K(a(1)=1, F(y)=2, 0)$. Если $a(1)=2$, то и $a(2)=2$, но тогда суперпозиция $K(a(\overline{0})=2, F(y), 0)$ сохраняет разбиение $\{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Пусть $a(2)=0$, но тогда $a(x)\equiv 0$ и суперпозиция $K(0, F(y), 0)\equiv F(y)$ не принимает 0. Пусть $a(2)=1$, но тогда возможно неопределенное $K(a(2)= 1, F(y)=2, 0)$. Итак, если $a(x)\neq m_3(x)$, то суперпозиция $K(a(x), F(y), 0)$ либо некорректна, либо в ней реализуется функция, принадлежащая к одному из предполных классов, т. е. не являющаяся шефферовой.

Таблица 2

x	m_1	m_2	m_3	m_4
0	2	2	0	0
1	2	0	0	2
2	0	0	2	2

Лемма 8. *Суперпозиция $K(c(x), 2, F(z))$, где: $F(z)\in\{0, 1\}$, $c(x)$ монотонна и $c(x)\neq m_4(x)$, не является шефферовой в P_3.*

Доказательство. Пусть $c(2)\neq 2$, но тогда суперпозиция $K(c(2)\neq 2, 2, F(z))=2$ сохраняет 2. Пусть $c(1)=1$, но тогда возможно неопределенное $K(c(1)=1, 2, F(z)=0)$. Пусть $c(1)=0$, но тогда и $c(0)=0$, но суперпозиция $K(c(\overline{2})=0, 2, F(z))$ сохраняет разбиение $\{\{0, 1\}, \{2\}\}$. Пусть $c(0)=2$, но тогда $c(x)\equiv 2$ и суперпозиция $K(2, 2, F(z))\equiv F(z)$ не принимает 2. Пусть $c(0)=1$, но тогда возможно неопределенное $K(c(0)=1, 2, F(z)=0)$. Итак, если $c(x)\neq m_4(x)$, то суперпозиция $K(c(x), 2, F(z))$ либо некорректна, либо в ней реализуется функция, принадлежащая к одному из предполных классов, т. е. не являющаяся шефферовой.

Теорема 2. *Минимальные В-схемы, реализующие функции Шеффера в P_3, имеют сложность 5.*

Доказательство. То, что B-схема, реализующая функцию Шеффера в P_3, обязана содержать N-, P- и K-элементы, следует из лемм 1—3. То, что такая схема не может содержать лишь один K-элемент, следует из леммы 4. То, что такая схема, содержащая в точности два K-элемента, может быть реализована лишь в виде $K(m_3(x), K(b(y), 2, 1), 0)$ или $K(m_4(x), 2, K(d(y), 1, 0))$ следует из лемм 5—8. Рассмотрим эти две потенциально шефферовы структуры.

1) Пусть B-схема имеет вид $K(m_3(x), K(b(y), 2, 1), 0)$. Существуют лишь две простейшие реализации функции $m_3(x)$ в $\{N, P\}$-базисе: $P(P(x))$ и $N(P(x))$ (см. лемму 6). То обстоятельство, что суперпозиция, реализующая $m_3(x)$, может и не содержать N-функцию, обязывает иметь эту функцию в суперпозиции, реализующей $b(y)$. Простейшая подстановка $b(y)=N(y)$ дает:

$$K(P(P(x)), K(N(y), 2, 1), 0). \qquad (1)$$

Это функция, к которой мы обращались еще при доказательстве полноты B-базиса в теореме 1. Легко видеть, что суперпозиция (1), как и ее функциональный аналог

$$K(N(P(x)), K(N(y), 2, 1), 0), \qquad (2)$$

имеет сложность 5.

2) Пусть B-схема имеет вид $K(m_4(x), 2, K(d(y), 1, 0))$. Существуют лишь две простейшие реализации функции $m_4(x)$ в $\{N, P\}$-базисе:

$N(N(x))$ и $P(N(x))$ (см. лемму 6). То обстоятельство, что суперпозиция, реализующая $m_4(x)$, может и не содержать P-функцию, обязывает иметь ее в суперпозиции, реализующей $d(y)$. Простейшая подстановка $d(y)=P(y)$ дает:

$$K(N(N(x)),\ 2,\ K(P(y),\ 1,\ 0))=W(x,\ y), \tag{3}$$

где

$$W(x,\ y)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\neq 0, \quad y\neq 2,\\ 1 & \text{при} \quad x\neq 0, \quad y=2,\\ 2 & \text{при} \quad x=0\end{cases}$$

— функция Шеффера в P_3, что нетрудно установить, воспользовавшись той же теоремой Яблонского — Мартина [9]. Легко видеть, что эта суперпозиция, как и ее функциональный аналог

$$K(P(N(x)),\ 2,\ K(P(y),\ 1,\ 0))=W(x,\ y) \tag{4}$$

имеет сложность 5.

Поскольку в синтезе B-схем, реализующих функции Шеффера в P_3, мы пользовались лишь необходимыми элементами и в минимально возможном их числе, а в ситуациях, допускавших варьирование, рассматривались все возможные структуры, полагаем минимальность построенных здесь схем доказанной.

Снимем ограничение на число K-элементов в схеме и проведем синтез $a(x)$ и $c(x)$ в полном базисе, но лишь суперпозициями сложностью не выше 2.

Таблица 3

x	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
0	2	2	0	0	1	2	0	0	1	1
1	2	0	0	2	0	2	0	1	1	2
2	0	0	2	2	0	1	1	1	2	2

Лемма 9. *Все одноместные функции, порождаемые $\{N,\ P,\ K\}$-суперпозициями, содержащими не более двух функциональных элементов, монотонны.*

Доказательство. Прямая проверка. Приведем все одно- и двухэлементные суперпозиции, реализующие одноместные функции, не тождественные константе: $P(x)=m_1$, $N(x)=m_2$, $P(P(x))=N(P(x))=P(K(x,\ 2,\ 1))=K(P(x),\ 2,\ 0)=m_3$, $P(N(x))=N(N(x))=N(K(x,\ 1,\ 0))=K(N(x),\ 2,\ 0)=m_4$, $K(x,\ 1,\ 0)=m_5$, $K(x,\ 2,\ 1)=m_6$, $K(P(x),\ 1,\ 0)=m_7$, $K(N(x),\ 1,\ 0)=K(K(x,\ 1,\ 0),\ 1,\ 0)=m_8$, $K(P(x),\ 2,\ 1)=K(K(x,\ 2,\ 1),\ 2,\ 1)=m_9$, $K(N(x),\ 2,\ 1)=m_{10}$. Их монотонность очевидна (см. табл. 3).

Таким образом и здесь: $a(x)\equiv m_3(x)$, $c(x)\equiv m_4(x)$. Но в полном базисе эти функции порождаются еще четырьмя суперпозициями. Отсюда следуют:

$$K(K(P(x),\ 2,\ 0),\ K(N(y),\ 2,\ 1),\ 0)=S(x,\ y), \tag{5}$$

$$K(P(K(x,\ 2,\ 1)),\ K(N(y),\ 2,\ 1),\ 0)=S(x,\ y), \tag{6}$$

$$K(K(N(x),\ 2,\ 0),\ 2,\ K(P(y),\ 1,\ 0))=W(x,\ y), \tag{7}$$

$$K(N(K(x,\ 1,\ 0)),\ 2,\ K(P(y),\ 1,\ 0))=W(x,\ y). \tag{8}$$

До сих пор поиск минимальных форм мы вели в пределах двух структур, указанных леммой 5. Однако в схемах, содержащих три K-элемента, эти ограничения вовсе не обязательны: одноместные функции могут быть здесь, вообще говоря, обращены в многоместные, а константы — в K-функции. Рассмотрим в этом плане все топологически допустимые изменения в суперпозициях (5) — (8).

Лемма 10.

$$K(K(P(x), K(N(y), 2, 1), 0), K(N(y), 2, 1), 0) = S(x, y). \quad (9)$$

Доказательство. Прямая проверка. Легко убедиться и в том, что: $K(K(P(x), 2, 0), K(N(y), 2, 1), K(N(y), 2, 1))$ некорректна на наборе $\{x=2, y=1\}$, $K(K(P(x), 2, 0), K(N(y), 2, 1), K(P(x), 2, 0))$ — на $\{x=2, y=1\}$, $K(K(P(x), 2, 0), K(N(y), K(P(x), 2, 0), 1), 0)$ — на $\{x=0, y=0\}$, $K(K(P(x), 2, 0), K(N(y), 2, K(P(x), 2, 0)), 0)$ — на $\{x=2, y=0\}$, $K(K(P(x), 2, K(N(y), 2, 1)), K(N(y), 2, 1), 0)$ — на $\{x=0, y=1\}$, а иные подстановки в суперпозиции (5) ведут к образованию циклов.

Лемма 11.

$$K(P(K(x, 2, 1)), K(N(y), K(x, 2, 1), 1), 0) = S(x, y). \quad (10)$$

Доказательство. Прямая проверка. Легко убедиться и в том, что: $K(P(K(x, 2, 1)), K(N(y), 2, 1), K(N(y), 2, 1))$ некорректна на наборе $\{x=2, y=1\}$, $K(P(K(x, 2, 1)), K(N(y), 2, 1), K(x, 2, 1))$ — на $\{x=0, y=0\}$, $K(P(K(x, 2, 1)), K(N(y), 2, K(x, 2, 1)), 0)$ — на $\{x=0, y=0\}$, $K(P(K(x, K(N(y), 2, 1), 1)), K(N(y), 2, 1), 0)$ — на $\{x=1, y=0\}$, $K(P(K(x, 2, K(N(y), 2, 1))), K(N(y), 2, 1), 0)$ — на $\{x=2, y=1\}$, а иные подстановки в суперпозиции (6) ведут к образованию циклов.

Лемма 12.

$$K(K(N(x), 2, K(P(y), 1, 0)), 2, K(P(y), 1, 0)) = W(x, y). \quad (11)$$

Доказательство. Прямая проверка. Легко убедиться и в том, что: $K(K(N(x), 2, 0), K(N(x), 2, 0), K(P(y), 1, 0))$ некорректна на наборе $\{x=0, y=0\}$, $K(K(N(x), 2, 0), K(P(y), 1, 0), K(P(y), 1, 0))$ — на $\{x=0, y=0\}$, $K(K(N(x), K(P(y), 1, 0), 0), 2, K(P(y), 1, 0))$ — на $\{x=1, y=0\}$, $K(K(N(x), 2, 0), 2, K(P(y), K(N(x), 2, 0), 0))$ — на $\{x=0, y=2\}$, $K(K(N(x), 2, 0), 2, K(P(y), 1, K(N(x), 2, 0)))$ — на $\{x=1, y=2\}$, а иные подстановки в суперпозиции (7) ведут к образованию циклов.

Лемма 13.

$$K(N(K(x, 1, 0)), 2, K(P(y), 1, K(x, 1, 0))) = W(x, y). \quad (12)$$

Доказательство. Прямая проверка. Легко убедиться и в том, что: $K(N(K(x, 1, 0)), K(x, 1, 0), K(P(y), 1, 0))$ некорректна на наборе $\{x=1, y=2\}$, $K(N(K(x, 1, 0)), K(P(y), 1, 0), K(P(y), 1, 0))$ — на $\{x=0, y=0\}$, $K(N(K(x, K(P(y), 1, 0), 0)), 2, K(P(y), 1, 0))$ — на $\{x=0, y=0\}$, $K(N(K(x, 1, K(P(y), 1, 0))), 2, K(P(y), 1, 0))$ — на $\{x=1, y=2\}$, $K(N(K(x, 1, 0)), 2, K(P(y), K(x, 1, 0), 0))$ — на $\{x=1, y=2\}$, а иные подстановки в суперпозиции (8) ведут к образованию циклов.

Покажем, что в суперпозициях (1) — (12) содержатся все минимальные B-схемы, реализующие трехзначные функции Шеффера.

Лемма 14. $\{N(x), P(N(x)), K(x, y, z), 0, 1, 2\}$*-суперпозиции не являются шефферовыми в* P_3.

Доказательство. В таких суперпозициях сохраняется разбиение $\{\{0\}, \{1, 2\}\}$.

Лемма 15. $\{P(x), N(P(x)), K(x, y, z), 0, 1, 2\}$*-суперпозиции не являются шефферовыми в* P_3.

Доказательство. В таких суперпозициях сохраняется разбиение $\{\{0, 1\}, \{2\}\}$.

Обозначим через α, β и γ фрагменты B-схем, никак не оговаривая особенностей их реализации: это могут быть и независимые переменные, и любые суперпозиции, не нарушающие условий лемм.

Лемма 16. *Суперпозиции* $K(\alpha, K(\beta, K(\gamma, C_1, C_2), C_3), C_4)=M_1$ и $K(\alpha, K(\beta, C_1, K(\gamma, C_2, C_3)), C_4)=M_2$, где: $L(M_1)=5$, $L(M_2)=5$, $C_i\in \in\{0, 1, 2\}$, *не являются шефферовыми в* P_3.

Доказательство. Достаточно, очевидно, если мы покажем, что суперпозиции M_1 и M_2 не являются шефферовыми при любых $L(\alpha)\leqslant 2$.

Очевидно, что $C_1=2$, $C_4=0$ и $(C_2=1)\vee(C_3=1)$, в противном случае M_1 и M_2 не принимают всех значений. Легко видеть, что $\alpha\notin\{x, y\}$, в противном случае M_1 и M_2 сохраняют разбиение $\{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Очевидно, что $\alpha\notin\{P(x), P(y), N(x), N(y)\}$, в противном случае M_1 и M_2 сохраняют 0. Очевидно, что $\alpha\notin\{P(P(x)), P(P(y)), N(N(x)), N(N(y))\}$, в противном случае M_1 и M_2 реализуются в неполных базисах. Очевидно, что $\alpha\notin\{P(N(x)), P(N(y)), N(P(x)), N(P(y))\}$, в противном случае имеем условия, рассмотренные в леммах 14 и 15.

Лемма 17. *Суперпозиции* $K(\alpha, C_1, K(\beta, C_2, K(\gamma, C_3, C_4)))=M_3$ *и* $K(\alpha, C_1, K(\beta, K(\gamma, C_2, C_3), C_4))=M_4$, *где*: $L(M_3)=5$, $L(M_4)=5$, $C_i\in \in\{0, 1, 2\}$, *не являются шефферовыми в* P_3.

Доказательство. Достаточно, очевидно, если мы покажем, что суперпозиции M_3 и M_4 не являются шефферовыми при любых $L(\alpha)\leqslant 2$.

Очевидно, что $C_1=2$, $C_4=0$ и $(C_2=1)\vee(C_3=1)$, в противном случае M_3 и M_4 не принимают всех значений. Легко видеть, что $\alpha\notin\{x, y\}$, в противном случае M_3 и M_4 сохраняют разбиение $\{\{0, 1\}, \{2\}\}$. Очевидно, что $\alpha\notin\{P(x), P(y), N(x), N(y)\}$, в противном случае M_3 и M_4 сохраняют 2. Очевидно, что $\alpha\notin\{P(P(x), P(P(y)), N(N(x)), N(N(y))\}$, в противном случае M_3 и M_4 реализуется в неполных базисах. Очевидно, что $\alpha\notin\{P(N(x)), P(N(y)), N(P(x)), N(P(y))\}$, в противном случае имеем условия, рассмотренные в леммах 14 и 15.

Лемма 18. *Суперпозиция* $K(\alpha, K(\beta, C_1, C_2), K(\gamma, C_3, C_4))=M_5$, где: $L(M_5)=5$, $C_i\in\{0, 1, 2\}$, *не является шефферовой в* P_3.

Доказательство. Очевидно, что $C_1=2$, $C_4=0$, $(C_2=1)\vee \vee(C_3=1)$, в противном случае M_5 не принимает всех значений. Очевидно, что α, $\beta\notin\{P(x), P(y), N(x), N(y)\}$, в противном случае M_5 сохраняет 2. Очевидно, что α, $\gamma\notin\{P(x), P(y), N(x), N(y)\}$, в противном случае M_5 сохраняет 0.

Рассмотрим возможные варианты из: $\alpha\in\{x, y\}$, $\beta, \gamma\in\{P(x), P(y), N(x), N(y)\}$.

1) Пусть $\beta=N(r)$, $\gamma=P(v)$, где r, $v\in\{x, y\}$. Но $M_5(\alpha=1, r=1, v=1)=K(1, 2, 0)$.

2) Пусть $\beta=P(r)$, $\gamma=N(v)$, где r, $v\in\{x, y\}$. Исследуем корректность суперпозиции $M_5=K(\alpha, K(P(r), 2, C_2), K(N(v), C_3, 0))$ на наборах $\{C_2, C_3\}$, содержащих 1. Заметим, что $C_2\neq 2$ и $C_3\neq 0$, в противном случае возможны неопределенные $M_5=K(P(\bar{2}), 2, 2)$ и $M_5=K(N(\bar{0}), 0, 0)$. Заметим далее, что на наборе $\{\alpha=1, r=1, v=1\}$: $M_5\{C_2=1, C_3=2)=K(1, 1, 2)$, $M_5(C_2=0, C_3=1)=K(1, 0, 1)$, $M_5(C_2=1, C_3=1)= =K(1, 1, 1)$, т. е. для любого набора $\{C_2, C_3\}$, содержащего 1, находится набор $\{x, y\}$, на котором M_5 не определена. Таким образом, при всех возможных в случаях 1) и 2) размещениях обязательных для шефферовых структур N- и P-элементов, суперпозиция M_5 оказывается некорректной.

Пусть M_5 содержит одну из $\{N, P\}$-суперпозиций сложности 2: $P(P(z))$, $N(N(z))$, $P(N(z))$, $N(P(z))$, $z\in\{x, y\}$. Заметим, что M_5, содержащая лишь одну из этих суперпозиций, уже имеет сложность 5.

Очевидно, что суперпозиция M_5, содержащая $P(P(z))$ или $N(N(z))$, не может быть шефферовой, так как в этих случаях она реализуется в неполных базисах. Суперпозиция M_5, содержащая $P(N(z))$ или $N(P(z))$, также не может быть шефферовой, поскольку здесь мы имеем условия, рассмотренные в леммах 14 и 15.

Теорема 3. *Все минимальные B-схемы, реализующие функции Шеффера в P_3, содержатся в суперпозициях* (1)—(12).

Доказательство. При формировании (1)—(12) рассматривались все B-схемы, содержащие два K-элемента, и некоторые, содержащие три K-элемента. Теорема, очевидно, будет доказана, если среди

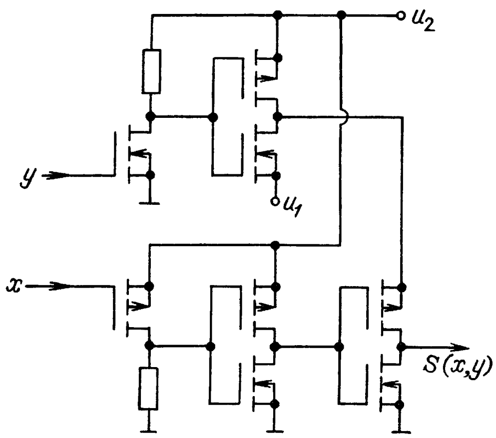

Рис. 5

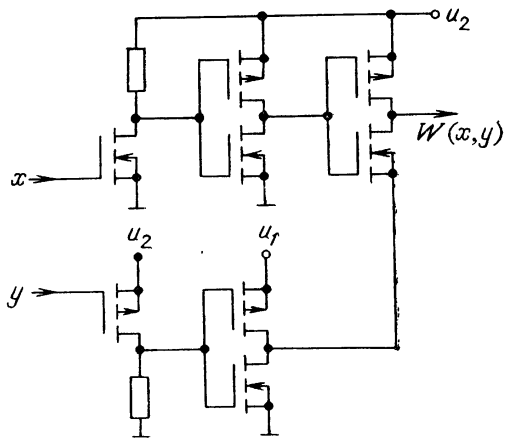

Рис. 6

оставшихся B-схем, содержащих три K-элемента, не окажется шефферовых. Это сделано в леммах 10—18.

Две из этих минимальных структур (суперпозиции (5) и (7)), но уже в виде принципиальных МДП-схем, приведены на рис. 5 и 6.

Минимальность B-схем (1)—(12) не означает, конечно, что они одинаковы и во всех других отношениях. Может быть важным, что одни схемы отличаются относительно малым энергопотреблением, другие — минимальным числом транзисторов, что схемы различаются выходными сопротивлениями, могут быть более или менее удобными при укладке их на кристалл и т. п. Отдать предпочтение той или иной из них можно лишь ориентируясь на конкретные условия. Но и тогда может оказаться целесообразным пользоваться сразу несколькими типами минимальных схем, не исключая, конечно, и прямой, безшефферный синтез трехзначных схем в B-базисе.

И в заключение еще об одном аспекте сделанного. Мы, очевидно, отказались здесь от того, что следовало бы называть бинарной многозначностью — такой ее разновидностью, когда в качестве многозначной переменной рассматривается пространственная или временная двоичная последовательность. И если двоично-пространственная многозначность — это лишь иная лексика, своего рода метаязык, то в нередко реализуемой двоично-временной многозначности, с обязательной здесь организацией переходного процесса в виде некоторой временной последовательности элементарных актов, мы в принципе отказываемся от синтеза быстродействующих схем. Здесь, не поступившись быстродействием, мы получили возможность реализовать важнейшее преимущество многозначной техники — способность обходиться меньшим числом каналов связи (начиная с межэлементных) для передачи тех же информационных потоков.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Среди функциональных элементов B-базиса лишь один — K-элемент (см. рис. 4) выполнен в КМДП-технике. Поскольку и в таком нетрадиционном синтезе комплементарная техника сохраняет свою привлекательность (прежде всего чрезвычайно низким, почти нулевым энергопотреблением в статике), рассмотрим в этом плане некоторые из возможных здесь решений, представляющих достаточно общий интерес.

1. О синтезе произвольных трехзначных функций в квазикомплементарных суперпозициях B-базиса

Теорема П. *Функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в* P_3 *может быть реализована B-суперпозицией, содержащей не более n N-элементов и не более n P-элементов.*

Доказательство. Очевидно, функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть реализована суперпозицией в базисе шефферовых функций вида:

$$S(x, y) = K(K(P(x), 2, 0), K(N(y), 2, 1), 0).$$

Очевидно, что любой элемент такой суперпозиции (кроме выходного) можно рассматривать (учитывая характер его нагрузки) как реализующий функции:

$$N(S(x, y)) = N(K(K(P(x), 2, 0), K(N(y), 2, 1), 0)) \tag{1}$$

и (или)

$$P(S(x, y)) = P(K(K(P(x), 2, 0), K(N(y), 2, 1), 0)). \tag{2}$$

Но легко убедиться в том, что эти функции могут быть реализованы и иначе:

$$N(S(x, y)) = K(P(x), 2, 0), \tag{3}$$

$$P(S(x, y)) =$$

$$= K(K(K(P(x), 2, 0), K(N(y), 2, 1), 0), 2, K(K(N(y), 2, 0), 2, 0)). \tag{4}$$

Заметим, что (3) и (4), в отличие от (1) и (2), при тех же $N(y)$ и $P(x)$, уже не содержат никаких других N- или P-элементов (а $N(S(x, y))$ теряет и $N(y)$).

Начав такого рода эквивалентные преобразования с выходного элемента S-суперпозиции, а также имея в виду, что: $N(c)$, $P(c) \in \{0, 2\}$, если $c \in \{0, 1, 2\}$, мы, очевидно, сможем преобразовать ее в другую суперпозицию, так же функционирующую, но включающую в себя N- и P-элементы лишь в виде $N(x_i)$ и $P(x_j)$, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Но это множество элементов (после исключения функционально тождественных дублей) содержится, очевидно, в $\{N(x_1), N(x_2), \ldots, N(x_n), P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\}$.

2. О синтезе функции $f(x) \equiv x$ в P_3 в K-суперпозициях (в строго комплементарной технике -базиса)

В B-базисе существуют две K-суперпозиции минимальной сложности, реализующие функцию $f(x) \equiv x$, где $x, f \in \{0, 1, 2\}$. Это:

$$K(K(x, 1, 0), K(K(x, 2, 1), 2, 1), 0), \tag{5}$$

$$K(K(x, 2, 1), 2, K(K(x, 1, 0), 1, 0)). \tag{6}$$

Они же, но в виде функциональных схем, приведены на рис. 7 и 8*).

То обстоятельство, что трехзначная функция «тождественный x» может быть здесь реализована строго комплементарными средствами,

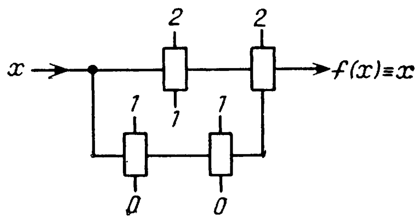

Рис. 7

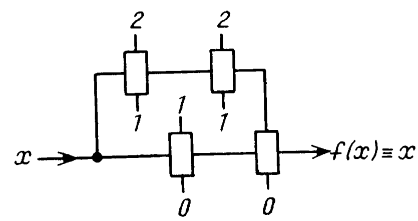

Рис. 8

важно, в частности, тем, что отсутствие каких-либо ограничений на ветвление выхода в элементах, принятое в B-базисе, обретает таким образом серьезное инженерно-техническое обоснование.

3. О синтезе трехзначных КМДП-автоматов

Вопрос о том, возможен ли в B-базисе синтез строго комплементарных автоматов, решается положительно. На рис. 9 приведена функциональная схема такого автомата [9]. В режиме записи ($z = 2$) на его выходе формируется сигнал, тождественно равный x. В режиме хранения ($z = 0$) это значение сохраняется неопределенно долго. Автомат обладает минимальной сложностью при минимально возможной в такого

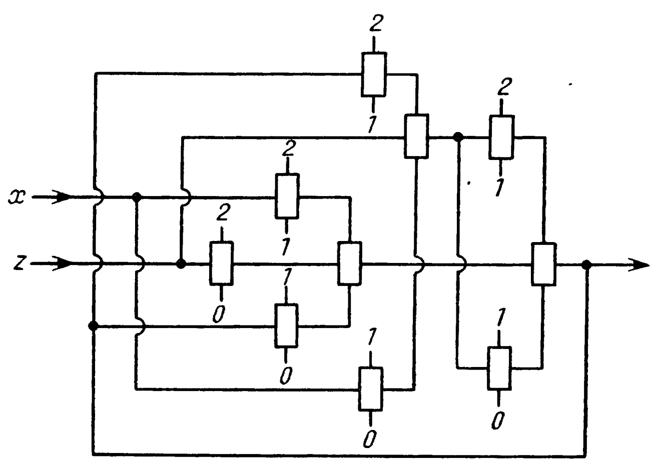

Рис. 9

рода устройствах глубине. Заметим, что организация памяти здесь не требует каких-либо инерционных элементов. Более того, искусственная временная задержка, вносимая в автомат, может повести лишь к уменьшению его быстродействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов Ю. А. О конечнозначных моделях схем с дискретным функционированием // Проблемы кибернетики. Вып. 23.— М.: Наука, 1970.— С. 119—126.
2. Виноградов Ю. А., Иорданский М. А. Машинный анализ схем ЭВМ // Проблемы кибернетики. Вып. 24.— М.: Наука, 1972.— С. 147—160.

*) В обе эти формы легко трансформируется КМДП-структура, реализующая функцию «тождественный x» в P_4 [7].

3. Виноградов Ю. А. О k-значных моделях схем ЭВМ // Проблемы кибернетики. Вып. 26.— М.: Наука, 1973.— С. 259—263.
4. Виноградов Ю. А., Иорданский М. А. Машинный анализ схем ЭВМ. II // Проблемы кибернетики. Вып. 30.— М.: Наука, 1975.— С. 293—311.
5. Виноградов Ю. А. Авторское свидетельство № 1336226.
6. Виноградов Ю. А. Авторское свидетельство № 1336227.
7. Виноградов Ю. А. Авторское свидетельство № 1422399.
8. Виноградов Ю. А. Заявка № 4629065/24—21.
9. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1/Под ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова.— М.: Наука, 1974.— С. 53—54.
10. Моделирующие системы с многозначным и гибридным кодированием // Сб. науч. трудов под ред. М. А. Ракова.— Киев: Наукова думка, 1980.
11. Мурога С. Системное проектирование сверхбольших интегральных схем, т. 1.— М.: Мир, 1985.— С. 232.
12. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН СССР,—1958.— Т. 51.— С. 109—140.