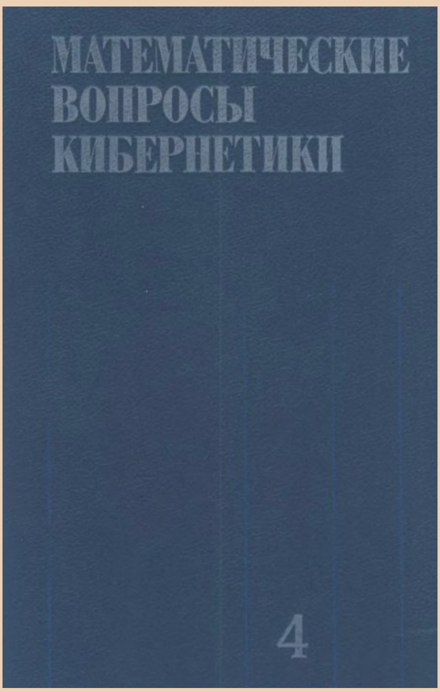


Б. Г. Заславский

# Положительные системы управления с дискретным временем

# ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

*Б. Г. ЗАСЛАВСКИЙ*

(САНКТ-ПЕТЕРБУРГ)

Первые практические успехи теории оптимального управления были связаны с техническими приложениями. К решению биологических задач она стала привлекаться сравнительно недавно [16]. Новая сфера приложений породила новые постановки. В задачах математической биологии внешние воздействия, как правило, не меняют знак в процессе движения. Вот несколько примеров: отлов или отстрел особей в популяции без добавления извне, введение химических препаратов в живой организм без изъятия, поливы без осушения, внесение удобрений, укосы на сельскохозяйственном поле и т. д. Специфика ситуаций состоит в том, что нуль является граничной точкой множества допустимых значений. Критерий управляемости Калмана получен для случая, когда нуль является внутренней точкой этого множества, и в данной постановке не работает [6]. Условия достижимости начала координат при ограничении на знак управления оказались значительно более сложными [5, 9—13]. Еще одна особенность биологических объектов управления состоит в ограничениях на фазовые переменные в процессе движения. Большое число математических моделей биологических объектов принадлежит классу систем с кооперативным взаимодействием. Правые части дифференциальных или разностных уравнений таких систем являются монотонно возрастающими функциями. Кооперативные системы эволюционируют в инвариантном подмножестве евклидова пространства, которое с помощью переноса начала координат легко отождествить с положительным конусом этого пространства. Внешние управляющие воздействия на такие системы часто нарушают условие инвариантности положительного конуса. В этом случае траектории движений принадлежат всему евклидову пространству, а множество начальных точек ограничено положительным конусом. Естественно возникает вопрос, как выглядят условия достижимости начала координат из произвольной точки, имеющей неотрицательные компоненты? Ниже дается решение данной проблемы для линейных и квазилинейных систем с дискретным временем. Для систем управления с непрерывным временем соответствующие результаты приведены в работах [3, 5].

Задача вычисления текущих координат движущегося объекта по доступным наблюдениям, т. е. задача наблюдения, является двойственной задаче управления [6]. В моделях биологических объектов очень часто содержательный смысл можно придавать лишь тем переменным состояния, которые имеют неотрицательные значения. В работе показано, что задача получения неотрицательных значений фазовых переменных по неотрицательным значениям наблюдения, т. е. задача положительной наблюдаемости, является двойственной задаче управляемости при знакопостоянных управлениях. Для динамических систем с непрерывным временем соответствующие результаты приведены в работах [4, 5].

Ниже будут использованы следующие обозначения. Если вектор $X \in \mathbf{R}^m$ или матрица $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ имеют неотрицательные компоненты, то будем писать $X \geqslant 0$ или $A \geqslant 0$. Множество неотрицательных (неположительных) векторов евклидова пространства будем обозначать через $\mathbf{R}_+^m (\mathbf{R}_-^m)$. Таким образом, $X \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathbf{R}_+^m$. Если все компоненты вектора $X$ строго положительны, то будем писать $X > 0$. Таким образом, $X > 0$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathring{\mathbf{R}}_+^m$, где $\mathring{\mathbf{R}}_+^m$ — внутренность конуса $\mathbf{R}_+^m$. Скалярное произведение векторов $X$ и $Y$ будем обозначать через $\langle X, Y \rangle$. Условие транспонирования будем обозначать звездочкой — $*$. Через $\operatorname{rank}(A, B)$ будем обозначать ранг матрицы $[B, AB, \ldots, A^{m-1}B]$.

## 1. Управляемость

Рассмотрим процесс управления

$$X_{t+1} = AX_t + BU_t, \tag{1.1}$$

где $A$ — $m \times m$-матрица с неотрицательными компонентами, $B$ — $m \times p$-матрица, $X_t$ — $m$-мерный вектор и $U_p$ — $p$-мерная вектор-функция. При нулевом управлении и $t \geqslant 0$ положительный конус $\mathbf{R}_+^m$ является инвариантным множеством системы (1.1). Естественно предположить, что множество значений управления также ограничено некоторым конусом. Для простоты будем считать, что это отрицательный конус евклидова пространства, т. е. $U_t \in \mathbf{R}_-^p$ при $t \geqslant 0$.

Рассмотрим задачу достижимости начала координат из всех точек положительного конуса $m$-мерного евклидова пространства. Достижимость означает, что для каждого $m$-мерного вектора с неотрицательными компонентами найдется $p$-мерная функция времени с неположительными компонентами $U_t$, при которой процесс управления за конечное число шагов переходит в точку с нулевыми компонентами. Принадлежность процесса управления положительному конусу во все моменты времени не предполагается, и компоненты вектора фазового состояния могут менять знак в процессе движения.

Ввиду неотрицательности компонент матрицы $A$ она обладает неотрицательным собственным значением $\lambda(A)$, которое равняется спектральному радиусу этой матрицы [2]. Если матрица $A$ неразложима, то число $\lambda(A)$ является единственным положительным собственным значением, которое равняется ее спектральному радиусу. Обозначим через $Y$ собственный вектор матрицы $A^*$ со строго положительными компонентами [2], который отвечает собственному значению $\lambda(A)$. Пусть $V$ — собственный вектор матрицы $A^*$, который отвечает произвольному положительному собственному значению этой матрицы, отличному от $\lambda(A)$. Вследствие неразложимости по крайней мере две компоненты этого вектора имеют разные знаки, и этот вектор отвечает собственному значению, которое лежит внутри круга радиуса $\lambda(A)$ [2].

Неразложимые матрицы могут быть примитивными и импримитивными [2]. Если $\lambda(A)$ является единственным собственным значением, которое равно по модулю спектральному радиусу, то неразложимая матрица называется примитивной. Условие примитивности следует, например, из существования на главной диагонали матрицы $A$ хотя бы одного положительного элемента. Если матрица импримитивная, то некоторая степень $h$ этой матрицы является блочно-диагональной, образованной примитивными блоками. Задача управления системой (1.1), в которой матрица $A$ является импримитивной, сводится к задаче управления системой, в которой матрица $A$ является разложимой. Для этого следует перейти к шагу по времени $t = nh$ и считать управление постоянным при $t \neq nh$ $(n \geqslant 0)$.

Теорема 1.1. *Пусть матрица $A$ является неразложимой и примитивной. Предположим, что*

$$\operatorname{rank}(A,\ B) = m. \tag{1.2}$$

*Для того чтобы начало координат было достижимо решениями системы (1.1) из любой точки $\mathbf{R}^m_+$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\langle Y, BU\rangle < 0 \text{ при некотором } U \in \mathbf{R}^p_-, \tag{1.3}$$

$$\langle V, BU\rangle \text{ меняет знак на } U \in \mathbf{R}^p_-. \tag{1.4}$$

Доказательство. Необходимость условия (1.3) очевидна. Докажем необходимость условия (1.4). Выпишем решение системы (1.1):

$$X_t = A^t X_0 + \sum_{k=1}^{t} A^{k-1} BU_{t-k}. \tag{1.5}$$

Не умаляя общности, будем считать, что $\langle V,\ BU\rangle \geqslant 0$ при $U \in \mathbf{R}^p_-$. Тогда $\left\langle V,\ \sum_{k=1}^{t} A^{k-1}BU_{t-k}\right\rangle = \sum_{k=1}^{t} \rho^{k-1}\langle V,\ BU_{t-k}\rangle \geqslant 0$, так как $\rho$ — положительное собственное значение матрицы $A$, которое отвечает собственному вектору $V$. По крайней мере две компоненты вектора $V$ имеют разные знаки. Пусть $i$-я компонента этого вектора положительна. Обозначим через $E_i = (\underbrace{0,\ \ldots\ 1}_{i}\ \ldots\ 0)^*$ и возьмем этот вектор в качестве начальной точки. Предположим, что существует управление, при котором $X_t = 0$ для некоторого $t$. Тогда по формуле (1.5) имеем:

$$\left\langle V, \sum_{k=1}^{t} A^{k-1}BU_{t-k}\right\rangle = -\langle V,\ A^t E\rangle = -\rho^t \langle V,\ E\rangle < 0.$$

Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Будем считать, что последние $N$ временных шагов управление тождественно равно нулю. Тогда условие попадания в начало координат имеет вид

$$A^t X_0 + \sum_{k=N+1}^{t} A^{k-1}BU_{t-k} = 0 \tag{1.6}$$

при $U_{t-k} \leqslant 0$ $(k = N+1,\ \ldots,\ t)$. Обозначим через $A^D$ обратную матрицу Дразина [1, с. 44]. Матрица $A^D$ строится следующим образом. Выбирается базис, в котором матрица $A$ имеет жорданову каноническую форму. На место нильпотентных блоков ставятся нули. Остальным жордановым блокам сопоставляются обратные этим блокам матрицы. Обозначим через $M$ инвариантное подпространство матрицы $A^D$ максимальной размерности, на котором она не имеет нулевых собственных значений.

По условию теоремы $A^N > 0$ при всех достаточно больших $N$ [2]. Введем в рассмотрение конус $A^N\mathbf{R}^m_+ (A^N R^m_+ \subset \mathring{R}^m_+)$. Пусть, кроме того, $N \geqslant m - 1$. Тогда $A^N\mathbf{R}^m \subset M$.

*Множеством достижимости линейной системы управления* будем называть множество точек фазового пространства, в которые можно попасть из начала координат за конечное время.

Лемма 1.1.1. *Если множество достижимости системы*

$$Z_{t+1} = A^D Z_t + B^D W_t, \tag{1.7}$$

*где $B^D = A^{N-1}B$, при управлении $W_t \geqslant 0$ $(t \geqslant 0)$ содержит $A^N\mathbf{R}^m_+$, то при любом $X_0 \in R^m_+$ задача* (1.6) *имеет решение.*

Доказательство. Умножим уравнение (1.6) слева на $(A^D)^{t-N}$. Имеем:

$$(A^DA)^{t-N} A^N X_0 + \sum_{k=N+1}^{t} (A^D)^{t-k} (A^DA)^{k-N} A^{N-1} BU_{t-k} = 0.$$

Из определения $A^D$ и условия $\lambda(A) \neq 0$ следует, что $(A^DA)^k A^n = A^n$ при $n \geqslant m - 1$ и $k \geqslant 0$ [1]. Отсюда получаем:

$$A^N X_0 + \sum_{k=N+1}^{t} (A^D)^{t-k} A^{N-1} BU_{t-k} = 0.$$

Положим $j = t - k$, $n = t - N$ и $W_{n-j} = -U_{j-1}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Окончательно имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} (A^D)^{k-1} A^{N-1} BW_{n-k} = A^N X_0.$$

Таким образом, исходная задача сведения к проблеме попадания решений системы (1.7) из начала координат в произвольные точки конуса $A^N\mathbf{R}^m_+$ при управлении $W_t \geqslant 0$. Лемма доказана.

Далее рассуждаем от противного. Допустим, что существует точка $Z_0 \in A^N\mathbf{R}^m_+ \subset M$, не достижимая решениями системы (1.7) из начала координат. Поскольку $Z_t \in M$ и множество достижимости является выпуклым множеством, по теореме Хана — Банаха найдется вектор $C \notin R^m \backslash M$ такой, что

$$\langle C, Z_t \rangle \geqslant \langle C, Z_0 \rangle \quad \text{при} \quad t \geqslant 0. \tag{1.8}$$

Для точек множества $A^N\mathbf{R}^m_+$ вектор $C$ в формуле (1.8) не может быть произвольным.

Убедимся в том, что вектор $C$ не принадлежит инвариантному подпространству матрицы $(A^D)^*$, которое отвечает нулевому собственному значению, т. е. $C^*(A^D)^t \neq 0$ при $t \geqslant 0$.

Действительно, любой вектор из этого подпространства ортогонален $M$.

Убедимся в том, что $C \notin \mathbf{R}^m_+$. Действительно, пусть $C \in \mathbf{R}^m_+$. Поскольку начало координат принадлежит множеству достижимости системы (1.7) и $Z_0 > 0$, получаем противоречие

$$0 \geqslant \langle C, Z_0 \rangle > 0.$$

Убедимся в том, что $C \neq -Y$. Допустим противное. Полагая $t = 1$, из формулы (1.8) получаем:

$$-\lambda^{N-1}(A) \langle Y, BU \rangle \geqslant \langle -Y, Z_0 \rangle \quad \text{при} \quad U \in \mathbf{R}^p_+.$$

Ввиду линейности и неограниченности вектора $U$ имеем:

$$\lambda^{N-1}(A) \langle Y, BU \rangle \geqslant 0 \quad \text{при} \quad U \in \mathbf{R}^p_-.$$

Это противоречит условию (1.3).

Поскольку множество достижимости системы (1.7) является конусом, то вместо нарушения условия (1.8) достаточно доказать, что нарушается условие

$$\langle C, Z_t \rangle \geqslant 0. \tag{1.9}$$

Предварительно установим вспомогательные результаты, которые имеют место для процессов вида (1.7). Разложим матрицу $A^D$ по компонентам [2] так, что $A^D = Q + T$, $QT = 0$, $TQ = 0$, спектр матрицы $Q$ не пересекается с $\mathbf{R}^1_+$, а спектр матрицы $T$ принадлежит $\mathbf{R}^1_+$.

Лемма 1.1.2. *Предположим, что выражения* $\sum\limits_{k=0}^{n_1} \langle C, Q^k B^D U^1_k \rangle$ *и* $\sum\limits_{k=n}^{n_2} \langle C, T^{lk} B^D U^2_k \rangle$ *принимают как положительные, так и отрицательные значения при* $U^i_k \in \mathbf{R}^p_+$ $(k = 1, \ldots, n_i,\ i = 1, 2)$, $n_2 \geqslant n$ *и знак суммы не зависит от* $l \neq 0$. *Тогда выражение* $\langle C, Z_t \rangle$ *при соответствующем выборе допустимых управлений принимает значения разных знаков.*

Доказательство. Идея доказательства содержится в лемме 4 работы [10]. Если $C^*T = 0$, то доказательство очевидно. Рассмотрим случай, когда $C^*T \neq 0$. Обозначим через $P(\lambda)$ полином с положительными коэффициентами, который обладает свойствами $P(Q) = 0$ и $P(0) \neq 0$. По лемме 1 работы [10] такой полином существует. Предположим, что неравенство (1.9) выполнено при любом $t$ и любых допустимых значениях управления. Тогда $\sum\limits_{k=n}^{n_2} \langle C, T^k P(T) B^D U^2_k \rangle \geqslant 0$ при $U^2_k \in \mathbf{R}^p_+$ и всех $n_2 \geqslant n$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 1.1.3. *Предположим, что* $C^*T = 0$ *и* $C^*(A^D)^t \neq 0$ *при* $t \geqslant 0$. *Тогда выражение* $\sum\limits_{k=0}^{n} \langle C, (A^D)^k B^D U_k \rangle$ *принимает значения разных знаков при некотором* $n$ *и всех* $U_k \in \mathbf{R}^p_+$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Доказательство. По условию леммы $C^*Q^t \neq 0$ при $t \geqslant 0$. Ввиду предположения (1.2) размерность подпространства $QB^DU$ при $t \geqslant 0$ равняется рангу матрицы $Q$. Поэтому пара $(Q, Q^{m-1}B)$, которая является ограничением пары $(A^D, B^D)$ на инвариантное подпространство $Q\mathbf{R}^m$, управляема. Воспользовавшись леммой 5 работы [10], заключаем, что сумма $\sum\limits_{k=0}^{n} Q^{k+N-1} B U_k$ при $U_k \in \mathbf{R}^p_+$ порождает инвариантное подпространство $Q\mathbf{R}^N$. Следовательно, выражение $\sum\limits_{k=0}^{n} \langle C, (A^D)^k B^D U_k \rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} \langle C, Q^{k+N-1} B U_k \rangle$ при $U_k \in \mathbf{R}^p_+$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Лемма доказана.

Лемма 1.1.4. *Предположим, что неотрицательная матрица* $A$ *является неразложимой и примитивной. Пусть* $C^*Q = 0$, $C^*(A^D)^t \neq 0$ *при* $t \geqslant 0$ *и* $C \neq Y$. *Тогда выражение* $\sum\limits_{k=0}^{n} \langle C, (A^D)^{lk} B^D U_k \rangle$ $(l \neq 0)$ *принимает значения разных знаков при некотором* $n$ *и всех* $U_k \in \mathbf{R}^p_+$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Доказательство. Нам потребуется следующее свойство собственных векторов обратной матрицы Дразина. Пусть $X$ — собственный вектор матрицы $A$, отвечающий собственному значению $\rho$ и $X^D$ — собственный вектор матрицы $A^D$, отвечающий собственному значению $1/\rho$. Тогда $X = A^{N-1}X^D$. Действительно, $A^{N-1}X^D = A^N A^D X^D = A(A^{N-1}X^D)/\rho$. Обозначим через $1/\rho$ максимальное собственное значение матрицы $A^D$, на инвариантное подпространство которого вектор $C$ имеет ненулевую проекцию. Так как $1/\lambda(A)$ — минимальное собственное значение матрицы $T$ и $C \neq Y$, то $1/\rho > \lambda(A)$. Тогда по лемме 6 работы [10] легко видеть, что

$$\langle C, (A^D)^n B^D U_n \rangle = \rho^{-n} \binom{n}{r} \left( \langle V^D, A^{m-1} B U_n \rangle + o(1) \right),$$

где $V^D$ — левый собственный вектор матрицы $A^D$, который не зависит от

$U_n$, и $\dot{r}$ — целое число. Обозначим: $V=(A^{N-1})^*V^D$. Воспользовавшись тождеством

$$\langle V^D,\ B^DU_n\rangle = \langle V^D,\ A^{N-1}BU_n\rangle = \langle V,\ BU_n\rangle,$$

окончательно получаем

$$\left\langle C,\ (A^D)\,B^DU_n\right\rangle = \rho^{-n}\binom{n}{r}(\langle V,\ BU_n\rangle + o(1)). \qquad (1.10)$$

Применение условия (1.4) завершает доказательство леммы.

Пусть теперь $C^*Q\neq 0$ и $C^*T\neq 0$. Воспользовавшись леммами 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4 и ограничениями на вектор $C$, приходим к единственному неразобранному варианту, когда $C^*Q\neq 0$ и $C^*T=\pm Y$. Обозначим через $1/\rho$ наибольшее по модулю собственное значение матрицы $Q$, на инвариантное подпространство которого вектор $C$ имеет ненулевую проекцию. Число $\rho$ является собственным значением матрицы $A$. Докажем невыполнимость условия (1.9). Для этого положим $W_i=0$ при $i=1,\ldots,t-1$. Тогда неравенство (1.9)

$$\langle C,\ Z_t\rangle = C^*(A^D)^tB^DW_0 = |\rho|^{-t}(|\rho|^tC^*Q^tB^DW_0 \pm (|\rho|/\lambda(A))^tY^*BW_0)\geqslant 0$$

нарушается по лемме 1.1.3. Теорема доказана.

Следствие 1.1.1. *Пусть матрица $A$ в системе* (1.1) *неразложима и примитивна, выполнены условия* (1.2), (1.3) *и все собственные значения этой матрицы, лежащие внутри круга радиуса $\lambda(A)$, не являются положительными числами. Тогда начало координат достижимо из любой точки $\mathbf{R}^m_+$.*

Рассмотрим процесс управления в случае, когда матрица $A$ является разложимой. С помощью соответствующей перенумерации переменных в системе (1.1) приведем ее к блочно-треугольному виду [2]. Кроме того, будем считать, что матрица B также имеет блочно-треугольный вид:

$$A=\begin{vmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0\\ A_{21} & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_s\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} B_1 & 0 & \ldots & 0\\ B_{21} & B_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ B_{s1} & B_{s2} & \ldots & B_s\end{vmatrix}, \qquad (1.11)$$

где $A_i=A_{ii}$ — неразложимые матрицы и $B_i=B_{ii}$ $(i=1,\ \ldots,\ s)$. Ранее отмечалось, что диагональные блоки матрицы $A$ при соответствующем выборе временно́го шага можно считать примитивными.

Пусть $\omega(i)$ — набор возрастающих номеров максимальной длины таких, что $i=i_0<i_1<\ldots<i_q$ и $A_{i_{k+1}i_k}\neq 0$ $(k=0,\ \ldots,\ q-1)$. Обозначим через $\Omega_i$ набор номеров, вошедших в объединение всех $\omega(i)$. Предположим, что $B_{ij}=0$, если $j\in\Omega_k$ и $i\notin\Omega_k$ при некотором $k=1,\ \ldots,\ s$. Пусть $X_i\in\mathbf{R}^{m_i}$ и $U_i\in\mathbf{R}^{p_i}_-$. Введем в рассмотрение векторы $P_k(X)=(X_i)_{i\in\Omega_k}$, $P_k(U)=(U_i)_{i\in\Omega_k}$ и матрицы $P_k(A)=\{A_{ij}\}_{i,j\in\Omega_k}$ и $P_k(B)=\{B_{ij}\}_{i,j\in\Omega_k}$.

Таким образом, оператор $P_k(\cdot)$ задает ограничение исходной системы на инвариантное подпространство, получаемое при $X_j=0$ и $U_j=0$, где $j\notin\Omega_k$. Обозначим через $P_k(V)$ вещественный собственный вектор матрицы $P_k^*(A)$, имеющий по крайней мере две компоненты разных знаков и отвечающий положительному собственному значению.

Теорема 1.2. *Пусть каждая пара $(A_i,\ B_i)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1.1. *Для того чтобы начало координат было достижимо решениями системы* (1.1) *из любой точки $\mathbf{R}^m_+$, необходимо и достаточно, чтобы каждое выражение $\langle P_k(V),\ P_k(B),\ P_k(U)\rangle$ принимало как положительные, так и отрицательные значения при $P_k(U)\leqslant 0$ и $k=1,\ 2,\ \ldots,\ s$.*

Доказательство. Предположим вначале, что $\lambda(A)=0$. Тогда $A\equiv 0$ и задача имеет тривиальное решение. Пусть $\lambda(A)\neq 0$. Необходимость доказывается повторением таких же, как и в теореме 1.1, рассуждений для каждого ограничения $P_k(\cdot)$ исходной системы на инвариантное подпространство.

Докажем достаточность. Рассуждаем по индукции. При $s=1$ выполнены условия теоремы 1.1. Предположим, что теорема верна для $P_k(\cdot)$ $(k\geqslant 2)$. Докажем ее для исходной системы. Итак, считаем, что начальное состояние не лежит в инвариантном подпространстве $P_k(\mathbf{R}^m)$ $(k\geqslant 2)$. Отсюда, повторяя рассуждения теоремы 1.1, получаем, что множество начальных состояний можно считать принадлежащим $\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^m_+\cap M$. Будем предполагать, что $P_1(A)=A$. Иначе работает индуктивное предположение.

Вначале приведем некоторые вспомогательные результаты. Обозначим через $T_i=(T_{ki})_{k=1}^{s}$ и $\theta_i=(\theta_{ki})_{k=1}^{s}$ собственные векторы матрицы $A^*$, отвечающие собственным значениям $\lambda(A_i)$ и $\rho_i$ $(|\rho_i|<\lambda(A_i))$ матрицы $A_i$. По построению $T_{ki}=\theta_{ki}=0\in\mathbf{R}^{m_k}$ при $k>i$, $T_{ii}\in\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{m_i}_+$ и $\theta_{ii}\notin\mathbf{R}^{m_i}_+$, ввиду неразложимости матрицы $A_i$. Пусть $\omega_i\in\omega(1)$. Обозначим: $\overline{T}_{\omega_i}=\left(T_{k\omega_i}\right)_{k\in\omega(1)}$ и $\overline{\theta}_{\omega_i}=\left(\theta_{k\omega_i}\right)_{k\in\omega(1)}$ — векторы, полученные из $T_{\omega_i}$ и $\theta_{\omega_i}$ вычеркиванием компонент, не вошедших в $\omega(1)$. Для них верна [3]

Лемма 1.2.1. *Если $T_{k\omega_i}\in\mathbf{R}^{m_k}_+$ при $1\leqslant j\leqslant k\leqslant\omega_i$ и $j\in\omega(1)$, то $T_{j\omega_i}\notin\mathbf{R}^{m_j}_+$ тогда и только тогда, когда $\lambda(A_j)>\lambda\left(A_{\omega_i}\right)$. Если $\lambda(A_j)=\lambda\left(A_{\omega_i}\right)$ при некотором $\omega_i>j\in\omega(1)$, то собственного вектора $T_{\omega_i}\left(T_{\omega_i}\geqslant 0\right)$ не существует. Если $T_{k\omega_i}\in\mathbf{R}^{m_k}_+$, то $T_{k\omega_i}\in\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{m_k}_+$ при $k\in\omega(1)$ и $k\leqslant\omega_i$; $\theta_{\omega_i\omega_i}\notin\mathbf{R}^{m_i}_+$.*

Доказательство. Используется тот факт, что

$$\left(\lambda\left(A_{\omega_i}\right)I-A_j^*\right)T_{j\omega_i}=+\ldots+A_{kj}^*T_{k\omega_i}+\ldots,$$

где $A_{kj}^*\underset{\neq}{\geqslant}0$ при $k,\ j\in\omega(1)$ и $k>j$.

Для простоты рассуждений будем считать, что $\omega(1)=\{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Вектор $T_i$ является решением следующей системы уравнений:

$$\left(\lambda(A_i)I-A_1^*\right)T_{1i}=\sum_{k=2}^{s}A_{k1}^*T_{ki},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\lambda(A_i)I-A_g^*\right)T_{gi}=\sum_{k=g+1}^{s}A_{kg}^*T_{ki},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\lambda(A_i)I-A_s^*\right)T_{si}=0.$$

Вектор $T_i$ обладает свойствами: $T_{ki}=0$ при $k>i$ и $T_{ii}>0$ ввиду неразложимости матрицы $A_i$ $(i=1,\ \ldots,\ s)$. Пусть $j_0$ $(j\leqslant j_0<i)$ — ближайший к $i$ номер, при котором $\lambda\left(A_{j_0}\right)\geqslant\lambda(A_i)$. Рассуждаем по индукции: $T_{i-1,i}=\left(\lambda(A_i)I-A_{i-1}^*\right)^{-1}A_{i,i-1}^*T_{ii}+\ldots>0$ ввиду неразложимости $A_{i-1}$ и неравенства $\lambda(A_i)>\lambda(A_{i-1})$. Тогда $\left(\lambda(A_i)I-A_{j_0}^*\right)T_{j_0i}=A_{j_0+1,j_0}^*T_{j_0+1,i}+\ldots$ Пусть $X>0$ — собственный вектор матрицы $A_{j_0}$, отвечающий $\lambda\left(A_{j_0}\right)$. Умножим последнее равенство на $X^*$ слева. Имеем: $\left(\lambda(A_1)-\lambda\left(A_{j_0}\right)\right)X_{j_0i}^*\underset{\neq}{\geqslant}\underset{\neq}{\geqslant}0$. Отсюда, если $\lambda\left(A_{j_0}\right)>\lambda(A_i)$, то получаем противоречие с предположением $T_{ii}\neq 0$. Лемма доказана.

Для того чтобы изучить случай равных между собой положительных собственных значений, рассмотрим функцию $P_k(Y_t) = ((P_k^D(A))^*)^t P_k(C)$. Эта функция представляет собой решение уравнения $P_k(Y_{t+1}) = (P_k^D(A))^* P_k(Y_t)$ с начальным условием $P_kY(0) = P_k(C)$. Разложим ее по степеням собственных значений матрицы $P_k^D(A)$. Обозначим через $L_k(t)$ член ее разложения, содержащий собственные значения $\rho_i^{-t}$, которые равны $\lambda^{-t}(A_1)$. Он, очевидно, может равняться нулю.

Лемма 1.2.2. *Пусть выполнено условие* $\lambda(A_1) = \lambda(A_i)$ *при некотором* $i \neq 1$ *и* $i \in \omega(1)$. *Тогда имеет место одно из двух*: а) *либо* $L_1(t) = \lambda^{-t}(A_1)\alpha_1 T_1$, б) *либо* $L_k(t) = t^r\lambda^{-t}(A_1)(\alpha_i P_k(T_i) + \varepsilon(t))$ *при некоторых* $i \geqslant k \geqslant 1$, *где* $\alpha_1$, $\alpha_i = \pm 1$, $r \geqslant 0$, $\varepsilon(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$, $P_k(T_i) = (T_{ji})_{j\in\Omega_k}$ — *собственный вектор матрицы* $P_k^*(A)$, *отвечающий* $\lambda(A_i) = \lambda(A_1)$ *и* $\alpha_i T_{ji} \notin R_+^{m_j}$ *при некотором* $i \geqslant j \geqslant k$ *и* $j \in \omega(1)$.

Доказательство. Пусть $i_\omega \in \omega(1)$ — максимальный номер, для которого $\lambda(A_{i_\omega}) = \lambda(A_1)$. Обозначим через $j_\omega$ максимальный на множестве $\omega(1) \setminus i_\omega$ номер, для которого $\lambda(A_{j_\omega}) = \lambda(A_1)$. Пусть $j_0 = \max\{j_\omega \mid \omega(1) \in \Omega_1\}$. Ограничимся рассмотрением $P_j(Y_t)$. Далее для простоты считаем, что $j_0 = 1$. Таким образом, на любом пути $\omega(1)$ лежит не более двух равных $\lambda(A_1)$ собственных значений матрицы $A$. Если для некоторого вектора $L_k(t)$ $(k = 2, \ldots, s)$ выполнено условие б), то лемма доказана. Предположим, что $L_k(t) \geqslant 0$ с точностью до $t^r\varepsilon(t)$ при $k \geqslant 2$. Множество $I = \{2, \ldots, s\}$ естественным образом распадается на невложенные множества $\Omega_i$ $(i \in I_1 \subset I_0)$. Выберем среди них такие множества $\Omega_i$ $(i \in I_1 \subset I_0)$, для которых $\lambda(A_{k(i)}) = \lambda(A_1)$ при некотором $k(i) \in \Omega_i$. Случай а) имеет место тогда и только тогда, когда $I_1 = \varnothing$. Пусть $I_1 \neq \varnothing$. Тогда $L_i = \lambda^{-t}(A_1)\alpha_i P_i(T_{k(i)})$, где $P_i(T_{k(i)}) = (T_{lk(i)})_{l=i}^s$ — собственный вектор матрицы $P_i^*(A)$, отвечающий $\lambda(A_{k(i)}) = \lambda(A_1)$ $(i \in I_1)$ $(\alpha_i \geqslant 0$ при $i \in I_1$ и $\sum_{i\in I_1} \alpha_i > 0)$. По построению $A_{i1}^* > 0$ и в $\Omega_i$ существует путь, соединяющий $i$ и $k(i)$. Следовательно, по лемме 1.2.1 $T_{ik(i)} \in \mathring{R}_+^{m_i}$ и, значит, $A_{i1}^* T_{ik(i)} > 0$. Вектор $Y_t$ является решением уравнения $Y_{t+1} = (A^D)^* Y_t$.

Нас интересует проекция этого решения на инвариантное подпространство матрицы $A^D$, отвечающее собственному значению $\lambda(A_1)$. В связи с этим, не умаляя общности, будем считать, что вектор $Y_t$ принадлежит требуемому подпространству. По определению $A^D$ на этом инвариантном подпространстве оператор $AA^D$ является тождественным. Воспользовавшись данным свойством, приведем исходное уравнение к следующему виду: $A^*Y_{t+1} = Y_t$. Нас интересует составляющая решения этого уравнения, которая соответствует $\lambda^{-t}(A_1)$ при разложении его по степеням собственных значений матрицы $A$. Обозначим через $Y_{1t}$ проекцию вектора $Y_t$ на подпространство $\mathbf{R}^{m_1}$. Воспользовавшись полученными ранее результатами, имеем:

$$A_1^* Y_{1,t+1} + \lambda^{-t-1}(A_1) \sum_{i\in I_1} \alpha_i \sum_{i\leqslant l\leqslant k(i)} A_{l1}^* T_{lk(i)} = Y_{1t}.$$

Составляющая решения этого уравнения, которая соответствует $\lambda^{-t}(A_1)$, принадлежит инвариантному подпространству матрицы $A_1^*$, отвечающему собственному значению $\lambda(A_1)$. Ввиду неразложимости данной матрицы это подпространство порождается собственным вектором $H_1 \in \mathring{\mathbf{R}}_+^{m_1}$. Пусть $X_1 \in \mathring{\mathbf{R}}_+^{m_1}$ — собственный вектор матрицы $A_1$, отвечающий $\lambda(A_1)$ и удовлетворяющий условию $\langle X_1, H_1 \rangle = 1$. Тогда проекция вектора $L_1(t)$

на подпространство $R^{m_1}$ имеет вид $\xi(t)H_1$, где $\xi(t)=\langle X_1, Y_{1t}\rangle$. Умножим уравнение, которому удовлетворяет $Y_{1t}$, слева на $X_1^*$. Получаем: $\lambda(A_1)\xi(t+1)+\lambda^{-t-1}(A_1)a=\xi(t)$, где $a=X_1^*\sum_{i\in I_1}\alpha_i\sum_{i<l<k(i)}T_{lk(i)}>0$ по построению. Отсюда имеем $\xi(t)=\frac{t}{\lambda^t(A_1)}\left(-\frac{a}{\lambda(A_1)}+\frac{\xi(0)}{t}\right)$. Таким образом, $Y_{1t}=\xi(t)H_1\notin \mathbf{R}_+^{m_1}$ при достаточно больших $t$. Лемма доказана.

Так же как и при доказательстве теоремы 1.1, исследуем асимптотику выражения $C^*(A^D)^tB^DW_0$. Разложим матрицу $A^D$ по компонентам [2] и воспользуемся рассуждениями, фигурировавшими в теореме 1.1 при выводе формулы (1.10). Тогда (см. лемму 6 работы [10]) для всех достаточно больших $t$ имеем:

$$\langle C, (A^D)^t B^D W_0\rangle=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\lambda^{-t}(A_i)\sigma_i(t)\left(T_i^*BW_0+o(1)\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\beta_i|\rho_i|^{-t}\delta_i(t)\left(\left(\rho_i^{-t}\theta_i^*+\overline{\rho_i^{-t}\theta_i^*}\right)BW_0\right)|\rho_i|^t+o(1)\big), \quad (1.12)$$

где числа $\alpha_i$, $\beta_i$ принимают значения $+1$, $-1$ и 0, $\sigma_i(t)=t^{r_i}$, $\delta_i(t)=t^{l_i}$. По построению все собственные значения $\lambda(A_i)$, $\rho_i$ $(i=1, \ldots, s)$ попарно различны.

Будем говорить, что $k$-я векторная компонента вектора $D_i=(D_{ki})_{k=1}^s=\alpha_iT_i+\beta_i\theta_i=\alpha_i(T_{ki})_{k=1}^s+\beta_i(\theta_{ki})_{k=1}^s$ обладает свойством перемены знака, если либо $\beta_i\neq 0$, либо $\alpha_i\neq 0$ и $\alpha_iT_{ki}\notin\mathbf{R}_+^{m_k}$ при некотором $k\leqslant i$. Составим матрицу $D=\{D_{ki}\}_{k,i=1}^s$. Хотя бы один столбец этой матрицы обладает свойством перемены знака. Предположим противное. Так же, как при доказательстве теоремы 1.1, легко показать, что $C\notin\mathbf{R}^+$ и $C^*(A^D)^t\neq 0$. При $\sigma_i(t)\equiv 1$ проекция этого вектора хотя бы на один из векторов со свойством перемены знака не равна нулю. Если $\sigma_i(t)=t^{r_i}$ $(r_i>0)$, то по лемме 1.2.2 найдется такое $k$, при котором хотя бы один собственный вектор матрицы $P_k^*(A)$ обладает свойством перемены знака. В этом случае ограничиваем исходную задачу на инвариантное подпространство $P_k(\mathbf{R}^m)$ меньшей размерности. Дальнейшие рассуждения можно считать относящимися к этому ограничению.

Покажем, что неравенство (1.9) не выполняется, если матрица $D$ имеет хотя бы одну компоненту со свойством перемены знака. Пусть перемена знака в матрице $D$ имеет место не только в первой строке. Тогда, пользуясь приводимыми ниже рассуждениями, можно доказать, что неравенство (1.9) нарушается при ограничении исходной задачи на подпространство меньшей размерности. Индуктивное предположение делает этот случай неинтересным. Поэтому предположим, что маскимальный номер строки, в которой существует хотя бы одна перемена знака, равен единице. Фиксируем набор номеров $\omega(1)$ и возьмем все векторы $\alpha_{\omega_i}T_{\omega_i}+\beta_{\omega_i}\theta_{\omega_i}$ с номерами $\omega_i\in\omega(1)$. Вычеркнем у них компоненты с номерами, не вошедшими в $\omega(1)$. Из полученного набора укороченных векторов образуем матрицу $D_\omega=\left[\alpha_1\overline{T}_1+\beta_1\overline{\theta}_1, \ldots, \alpha_{\omega_q}\overline{T}_{\omega_q}+\beta_{\omega_q}\overline{\theta}_{\omega_q}\right]$, где $1, \ldots, \omega_q\in\omega(1)$ и $\omega_q\leqslant s$. Некоторым наборам номеров, начинающихся с единицы, таким образом сопоставляются матрицы со столбцами, обладающими свойством перемены знака. Обозначим множество таких наборов номеров через $N$. Пусть $\omega_0=1$. Предположим для определенности, что число ненулевых столбцов в матрице $D_\omega$ равно $q$. Обозначим через $\omega_{i-1}$ номер $i$-го по порядку, считая слева направо, ненулевого столбца.

Лемма 1.2.3. *Для любого набора номеров, начинающегося с единицы* $\omega(1)$, *имеют место соотношения*: $\alpha_{\omega_1}>0, \ldots, \alpha_{\omega_q}>0$; $\beta_{\omega_1}=\ldots=\beta_{\omega_q}=0$ *и* $\lambda(A_{\omega_1})<\ldots<\lambda(A\omega_q)$. *Если* $\omega(1)\notin N$, *то* $\alpha_1>0$, $\beta_1=0$ *и* $\lambda(A_1)<\lambda(A_{\omega_1})$. *Если* $\omega(1)\in N$, *то возможны варианты*:

а) *если* $\overline{T}_{\omega_1}$ *не обладает свойством перемены знака, то первая компонента первого столбца матрицы* $D_\omega$ *обладает свойством перемены знака и* $\lambda(A_1)<\lambda(A_{\omega_1})$;

б) *если* $\overline{T}_{\omega_1}$ *обладает свойством перемены знака, то* $\overline{T}_{1\omega_1}\notin R_+^{m_1}$ *и* $\lambda(A_1)>\lambda(A_{\omega_1})$.

Доказательство является очевидным следствием леммы 1.2.1.

Перейдем к построению управления, при котором нарушается неравенство (1.9).

Пусть $W_0=(W_{01}^*, \ldots, W_{0s}^*)^*$, где $W_{0i}\in\mathbf{R}_+^{p_i}$. Предположим, что для всех наборов $\omega(1)$ выполняется условие а) предыдущей леммы. Положим $W_{0i}=0$ при $i\neq 1$. На основании леммы 1.2.3 заключаем, что в правой части (1.12) первые слагаемые в обеих суммах доминируют при достаточно больших $t$.

Пусть в доминирующем члене разложения (1.12) присутствуют одновременно степени положительных и неположительных собственных значений. Выбирая управление так же, как в лемме 1.1.2, можно добиться того, что слагаемые, отвечающие неположительной части спектра, обратятся в нуль. Далее используется лемма 1.1.4. Если в доминирующем члене (1.12) степень положительного собственного значения не присутствует, используется лемма 1.1.3.

Предположим, что $T\nu_1 \not\geqslant 0$ для некоторых наборов номеров $\nu(1)\subset N_1$ (вариант б) предыдущей леммы).

Рассуждая так же, как и в лемме 1.1.2, сведем задачу к случаю, когда $\beta_1=0$. Выберем $\lambda\left(A_{\nu_1^0}\right)=\min\{\lambda_{\nu_i}\mid\nu_i\in\nu(1)\}$. Пусть это число единственное. В силу леммы 1.2.3 при достаточно больших $t$ ему соответствует максимальное слагаемое в формуле (1.12). От укороченного вектора $\overline{T}_{\nu_1^0}$ вернемся к вектору $T_{\nu_1^0}$ матрицы $A$. Далее управление строится так же, как и в лемме 1.1.4.

Рассмотрим случай равенства минимальных собственных значений: $\lambda\left(A_{\nu_1^0}\right)=\lambda\left(A_{\mu_1^0}(\nu_1(1), \mu_1(1)\in N_1)\right)$. Пусть для определенности $\nu_1^0<\mu_1^0$. Применив лемму 1.2.2 к матрице $P_{\nu_1^0}(A)$ и воспользовавшись индуктивным предположением о перемене знака в первой строке матрицы $D$, заключаем, что $\Omega_{\nu_1^0}\cap\Omega_{\mu_1^0}\neq\varnothing$. Следовательно, в разложении (1.12) собственным значениям $\lambda\left(A_{\nu_1^0}\right)$ и $\lambda\left(A_{\mu_1^0}\right)$ отвечают собственные векторы $\alpha_{\nu_1^0}T_{\nu_1^0}$ и $\alpha_{\mu_1^0}T_{\mu_1^0}$. Сумма $Z$ этих векторов также является собственным вектором матрицы $A$. Воспользовавшись схемой рассуждений леммы 1.2.1, заключаем, что $(Z)_1\notin\mathbf{R}_+^{m_1}$. Таким образом, приходим к предыдущей ситуации. Теорема доказана.

Следствие 1.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2 и управление имеет ограниченную норму* $\|U\|\leqslant 1$. *Тогда начало координат достижимо для всех точек* $\mathbf{R}_+^m$, *которые лежат достаточно близко от начала координат. Для того чтобы начало координат было достижимо для всех точек* $\mathbf{R}_+^m$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\lambda(A_i)\leqslant 1$ $(i=1,2,\ldots,s)$.

Доказательство достижимости в малой окрестности начала координат очевидно. Докажем необходимость полуустойчивости матрицы $A$.

Пусть $\lambda(A_i)>1$ при некотором $1\leqslant i\leqslant s$ и $Y_i\in \mathring{\mathbf{R}}_+^{m_i}$ — отвечающий ему собственный вектор. Положим $X_k=0$ $(k=0,\ \ldots,\ i-1)$. При достаточно больших по норме $X_i(0)$ для решения системы (1.1) имеем:

$$\langle Y_i,\ (X_{t+1})_i\rangle=\lambda(A_i)\langle Y_i,\ (X_t)_i\rangle+\langle Y_i,\ BU_t\rangle>\langle Y_i,\ (X_t)_i\rangle.$$

Поэтому $\langle Y_i,\ (X_t)_i\rangle\to\infty$ при $t\to\infty$.

Докажем достаточность полуустойчивости. Рассмотрим ограничение исходной системы на инвариантное подпространство $P_k(\mathbf{R}^m)$ $(k=1,\ldots,s)$. Для упрощения записи будем считать, что $P_k(A)=A$. Нам предстоит повторить ход доказательства теоремы 1.2, учитывая ограничение на норму управления. Лемма 1.1.1, очевидно, сохраняет силу, если допустимыми считать управления вида $W_t\geqslant 0$, $\|W_t\|\leqslant 1$ $(t\geqslant 0)$. Воспользовавшись этой леммой, будем доказывать невыполнимость неравенства (1.8) при $C\notin\mathbf{R}_+^m$, $C^*(A^D)^t\neq 0$. Величина $\langle C,\ Z_0\rangle$ ввиду произвольности ее составляющих может быть сколь угодно малым наперед заданным вещественным числом. Далее установим следующий аналог леммы 1.1.2.

Лемма 1.1.2 (С). *Пусть выражения* $\sum\limits_{k=0}^{n_1}\left\langle C,\, Q^kB_DU_k^1\right\rangle$ *и* $\sum\limits_{k=0}^{n_2}\left\langle C,\, T^{lk}B^DU_k^2\right\rangle$ *принимают сколь угодно малые значения при* $U_k^i\in\mathbf{R}_+^p$, $\|U_k^i\|\leqslant 1$, $\{k=1,\ \ldots,\ n_i\}$, $n_i$ — *достаточно больших* $(i=1,\ 2)$ *и знак суммы не зависит от* $l\neq 0$. *Тогда неравенство* (1.8) *невыполнимо.*

Доказательство состоит в дословном повторении рассуждений леммы 1.1.2 за исключением последних фраз. Вместо них приведем следующие соображения. Пусть неравенство (1.8) выполнено при любых $W_k\in\mathbf{R}_+^p$, $\|W_k\|\leqslant 1$ и некотором $\langle C,\ Z_0\rangle=-N$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}\left\langle C,\, P(T)\,T^kB^DU_k^2\right\rangle\geqslant -aN$ при всех $n$ и всех допустимых управлениях, где $a$ — максимальный коэффициент полинома $P(\lambda)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 1.1.3 (С). *Предположим, что* $C^*(A^D)^t\neq 0$ *при* $t\geqslant 0$ *и* $C^*T=0$. *Тогда выражение* $\sum\limits_{i=0}^{t}\left\langle C,\, (A^D)^i\,B^DU_i\right\rangle$ *принимает сколь угодно малые значения при* $U_i\in\mathbf{R}_+^p$ *и* $\|U_i\|\leqslant 1$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$ *и достаточно больших* $t\geqslant 0$.

Доказательство. Рассуждения, приведенные в лемме 1.1.3, позволяют ограничиться доказательством следующего факта. Пусть пара матриц $(Q,\ B_Q)$ управляема в пространстве $\mathbf{R}^n$, где $n$ — размерность матрицы $Q$, спектр матрицы $Q$ лежит вне внутренности единичного круга и не пересекается с $\mathbf{R}_+^1$. Тогда выражение $\sum\limits_{i=0}^{t}\left\langle C,\, Q^iB_QU_i\right\rangle$ можно сделать сколь угодно малым с помощью соответствующего выбора допустимых управлений и числа $t$. Докажем это утверждение. Установим вначале следующий вспомогательный факт. Существует $\varepsilon>0$ такое, что при любых $C\in\mathbf{R}^n$ имеет место неравенство

$$\mu=\min\left\{\sum_{i=0}^{k}\left\langle C,\, Q^iB_QU_i\right\rangle\,|\,U_i\in\mathbf{R}_+^p,\,\|U_i\|\leqslant 1,\,t\geqslant 0\right\}<-\varepsilon\|C\|.$$

Действительно, из работы [10] очевидным образом следует, что множество $S=\left\{\sum\limits_{i=0}^{k}Q^iB_QU_i\,|\,U_i\in\mathbf{R}_+^p,\,\|U_i\|\leqslant 1,\,t\geqslant 0\right\}$ является окрестностью начала координат в $\mathbf{R}^n$. Следовательно, существует $\varepsilon>0$ такое, что $-\varepsilon C/\|C\|\in S$ при всех $C\in\mathbf{R}^n$. Отсюда имеем $\mu\leqslant\langle C,\ -\varepsilon C/\|C\|\rangle=-\varepsilon\|C\|$. Напомним, что спектр $Q$ лежит вне внутренности единичного круга. Поэтому $\|(Q^*)^t C\| \geqslant \alpha\|C\|$, где $\alpha > 0$. В итоге имеем, что выражение

$$\min_{U_{i+t}} \sum_{t\geqslant 0} \sum_{i=0}^{k} \langle C, Q^{t+i} B_Q U_{i+t}\rangle = \min_{U_{i+t}} \sum_{t\geqslant 0} \sum_{i=0}^{k} \langle (Q^*)^t C, Q^i B_Q U_{i+t}\rangle \leqslant -\varepsilon\alpha\|C\| t$$

принимает сколь угодно малые значения при достаточно больших $t$. Лемма доказана.

На основании доказанного выше осталось рассмотреть случай, когда вектор $((A^D)^*)^t C$ с точностью до величин $o(\|(A^D)^*)^t C\|)$ принадлежит инвариантному подпространству, отвечающему положительной части спектра матрицы $A$. При доказательстве теоремы 1.2 установлено, что

$$\langle C, (A^D)^t B^D W_0\rangle = \rho^{-t} t^r (\langle T, BW_0\rangle + o(1)),$$

где $\rho$ — положительное собственное значение матрицы $A$ и $\langle T, BW_0\rangle / \|W_0\| \leqslant -b < 0$ при некотором $W_0 \in \mathbf{R}_+^p$. Поскольку $\rho^{-1} \geqslant 1$, существует допустимое управление и числа $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$ такие, что

$$\sum_{i\geqslant t}^{(n+1)t} \rho^{-i} i^r (\langle T, BW_i\rangle + o(1)) \leqslant -bn.$$

Использование леммы 1.1.2 (C) завершает доказательство следствия 1.2.1.

Следствие 1.2.2. *Заменим в условиях* (1.3), (1.4) *конус* $\mathbf{R}_-^p$ *на произвольный выпуклый конус* $K$. *Потребуем, чтобы в некоторых точках* $K$ *выполнялись соответствующие строгие неравенства. Тогда в формулировках теорем* 1.1 *и* 1.2 *и следствия* 1.2.1 *конусы* $\mathbf{R}_-^p$ $\left(\mathbf{R}_-^{p_i}\ (i = 1, \ldots, s)\right)$ *можно заменить на произвольные выпуклые конусы* $K$ $(k_i (i = 1, 2, \ldots, s))$ *с вершиной в начале координат.*

Доказательство очевидно.

Полученные результаты допускают перенесение на нелинейные системы управления, определенные в окрестности равновесных точек. Рассмотрим процесс

$$X_{t+1} = F(X_t, U_t), \tag{1.13}$$

где $X_t \in \mathbf{R}^m$, $U_t \in \mathbf{R}_+^p$ и $\|U\| \leqslant 1$. Предположим, что $F(0, 0) = 0$. Правую часть системы считаем дифференцируемой в окрестности начала координат и монотонной по первому аргументу. Введем обозначения $A = D_x F(0, 0)$ и $B = D_U F(0, 0)$. В отличие от линейного случая предполагаем, что матрица $A$ неособенная. Если эта матрица неразложимая, то оператор $F(X, U)$ будем называть неразложимым. В противном случае будем использовать следующее понятие.

Определение. Нелинейный оператор $F(X, U)$ называется *разложимым*, если матрица $A$ разложимая и каждому инвариантному подпространству, получаемому в результате применения оператора $P_k(\cdot)$ $(k = 1, \ldots, s)$ к (1.1), отвечает аналогичное инвариантное подпространство системы (1.13).

Теорема 1.3. *Пусть система* (1.1) *является линейным приближением системы* (1.13). *Пусть выполнены условия теорем* 1.1 *и* 1.2 *и в случае разложимости* $A$ *имеет место разложимость нелинейного оператора* $F(X, U)$. *Тогда начало координат достижимо всеми точками* $\mathbf{R}_+^m$, *лежащими достаточно близко от него.*

Доказательство. Пусть начальное состояние процесса $X_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i E_i$, где $E_i = \{\underbrace{0 \ldots 1}_{i} \ldots 0\}$ и $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Рассмотрим замкнутый конус $K = \left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i A^m E_i \mid \lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\right\}$. Этот конус принадлежит внутренности инвариантного подпространства $\mathbf{R}^n$ системы (1.1). Если $A$ — разложимая матрица и $\alpha_i = 0$ при некоторых $i = 1, \ldots, m$, то в общем случае $n \leqslant m$. Для нелинейного процесса (1.13) в достаточно малой окрестности начала координат $\mathbf{R}_+^m$ все решения при $U_t \equiv 0$ за время $m$ также попадают в некоторый замкнутый конус $N$, принадлежащий внутренности $\mathbf{R}_+^n$. В дальнейшем будем рассматривать ограничение исходной системы на инвариантное подпространство $\mathbf{R}^n$. Поскольку это не меняет сути дела, будем считать $n = m$ и $N \subset \mathring{\mathbf{R}}_+^m$. В силу сказанного, предположение $X_0 \in N$ не ограничивает общности рассмотрения. Для системы (1.1) построим допустимые управления $U_t^i$, которые за $T$ шагов переводят базисные векторы $E_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ в начало координат. Пусть $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^* \in \mathbf{R}_+^m$ и $U_t(\Xi) = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i U_t^i$. Обозначим через $X_t(\Xi)$ решение системы (1.13) с начальным условием $X_0$ и управлением $U_t(\Xi)$. Рассмотрим уравнение $X_T(X_0, \Xi) = 0$. Поскольку $D_{X_0} X_{t+1} = D_X F D_{X_0} X_t$ при $\Xi = 0$ и $\det D_x F(0, 0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции определено гладкое отображение $X_0 = \Gamma(\Xi)$. Построим касательное отображение в точке $\Xi = 0$. Обозначим через $Y = D_\Xi F(0)$. Из условия $\Xi = 0$ имеем $U_t \equiv 0$ и $X_0 = 0$. Дифференцируя $X_t(X_0, \Xi) = 0$ по $\Xi$, получаем:

$$A^T Y + \sum_{t=1}^{T} A^{t-1} B \left[U_t^1, \ldots, U_t^m\right] = 0.$$

По определению $U_t^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ имеем $Y = D_\Xi \Gamma(0) = I$ — тождественное отображение. Пусть $V$ принадлежит границе $\mathbf{R}_+^m$ и $X_0 \in N$. Тогда очевидно, что $\|V - X_0\| \geqslant \alpha \|V\|$ при некотором $\alpha > 0$. Ввиду гладкости $\|\Gamma(V) - V\| \leqslant \alpha^2 \|V\|$ в достаточно малой окрестности начала координат. Отсюда $\|\Gamma(V) - V\| \leqslant \|V - X_0\|$ при $V$, принадлежавшем грани $\mathbf{R}_+^m$ и $X_0 \in N$. Воспользовавшись схолией работы [7, с. 276], имеем, что $X_0 = \Gamma(\Xi)$ для некоторого $\Xi \in \mathbf{R}_+^m$. Тогда $U_t(\Xi) \geqslant 0$ при любом $t$. Конус $N$ можно считать не зависящим от начальной точки. Действительно, если $\|(X_0)_i\| \gg \|(X_0)_j\|$, то условие $j \in \Omega_i$ невозможно. Если $j \notin \Omega_i$, то с помощью малого по модулю управления можно добиться того, что $\left(X_{t_0}\right)_j = 0$. Остальные компоненты вектора $X_{t_0}$ по-прежнему будут неотрицательными. Далее рассматривается задача управления на конусе меньшей размерности. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть динамика численности популяции микроорганизмов, имеющих $m$ фаз развития и дающих в последней фазе $q$ потомков, задается системой

$$Z_{t+1} = A Z_t - B U_t - C,$$

где [8]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & q \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 10 \end{bmatrix}, \tag{1.14}$$

$U_t$ — интенсивность поступления лекарственного препарата в организм, $B$ — чувствительность к нему микроорганизмов $(B \geqslant 0)$, $C$ — естественная скорость гибели клеток в результате взаимодействия с иммунной системой организма $(C > 0)$ [8]. Требуется с помощью лекарственной терапии уменьшить численность популяции до некоторого минимального уровня. Возьмем в качестве этого минимального уровня точку $C_0 = A^{-1} C$.

Так как

$$A^{-1} = \frac{1}{q} \begin{bmatrix} 0 & q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

то $C_0 > 0$. Поставим следующую задачу. Для каждой точки $Z \geqslant C_0$ найти управление, переводящее эту точку в $C_0$. Делаем замену переменных $Z = C_0 + X$. Так как $Z \geqslant 0$, то $X \geqslant -A^{-1}C$, т. е. может принимать отрицательные значения. В малой окрестности точки $C_0$ достаточно использовать управление малой амплитуды. Поэтому для начальных точек из окрестности $C_0$ движения могут покидать положительный конус сохранением биологического смысла задачи. Возвращаясь к системе

$$X_{t+1} = AX_t - BU_t,$$

приходим к задаче достижимости нуля из точек положительного конуса.

Обозначим через $E_i = \{\underbrace{0 \dots 1}_{i} \dots 0\}^*$ и предположим для конкретности, что $B = E_1$. Легко видеть, что $A^{k-1}B = E_k$ $(k \leqslant m)$ и $A^m = qI$. Поэтому задача попадания в начало координат с помощью неотрицательных управлений разрешима за $m$ шагов и решение имеет вид:

$$U_0 = q\langle E_m, X_0\rangle, \; U_1 = q\langle E_{m-1}, X_0\rangle, \; \dots, \; U_{m-1} = q\langle E_1, X_0\rangle.$$

## 2. Положительная наблюдаемость

Предположим, что динамика объекта задается системой с непрерывно дифференцируемой правой частью

$$X_{t+1} = F(X_t), \tag{2.1}$$

где $F = (f_i)_{i=1}^m\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ — монотонно возрастающая функция, т. е. $\partial f_i/\partial x_j \geqslant 0$ $(i, j = 1, \dots, m)$ и $F(0) = 0$. Таким образом, положительный конус $\mathbf{R}_+^m$ является инвариантным множеством системы. Пусть измеряемый сигнал задается непрерывно дифференцируемой функцией:

$$Y_t = H(X_t), \tag{2.2}$$

где $H$: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^q$ и $H(0) = 0$. В реальной ситуации величину $Y_t = H(X_t)$ точно определить невозможно, так как на полезный сигнал накладывается помеха. Отсюда возникают следующие проблемы:

1) построить оператор, который по идеальному сигналу точно восстанавливает состояние объекта, а по искаженному оценивает состояние с минимальной ошибкой;

2) оценка, полученная по искаженному сигналу, имеет физический смысл.

Остановимся на втором условии подробнее. Монотонные системы обычно являются моделями экологических и экономических процессов. В этих случаях фазовые переменные обозначают численность особей в популяциях, количество продуктов, производимых разными отраслями экономики, и т. д. Таким образом, содержательный смысл можно придать лишь тем векторам состояния, которые имеют неотрицательные компоненты. Допустим, что в эксперименте измеряется сигнал $\widehat{Y}_t = Y_t + \Delta_t$, где $\Delta_t \in \mathbf{R}^q$ — некоторая помеха. Предположим, что помехи $\Delta = \{\Delta_k | t - T \leqslant k \leqslant t - 1\}$ принадлежат линейному пространству конечных последовательностей $L$. На этом пространстве зададим норму $\|\Delta\|_L = \left(\sum_{k=t-T}^{t-1} \|\Delta_k\|^r\right)^{1/r}$, где $1 \leqslant r < \infty$. Случаю $r = \infty$ сопоставим норму $\|\Delta\|_L =$

$=\max\{\|\Delta_k\| \mid t-T\leqslant k\leqslant t-1\}$. Нормированное таким образом пространство конечных последовательностей будем обозначать через $L^r$. Множество последовательностей из $L$, принимающих значения в $\mathbf{R}^q_+\,(\mathring{\mathbf{R}}^q_+)$, обозначим через $L_+(\mathring{L}_+)$. Поставим задачу отыскания липшицевой функции $G$: $L\to\mathbf{R}^m$, которая по неискаженному сигналу точно восстанавливает состояние объекта, дает наименьшую погрешность при ограниченной помехе и на неотрицательных сигналах дает неотрицательное решение, т. е.

1. $G(Y)=X_t$, где $Y=\{Y_k=H(X_k)\mid t-T\leqslant k\leqslant t-1\}$.

2. $\|G(Y+\Delta)-G(Y)\|\leqslant l_G\|\Delta\|_L$, где $l_G$ — наименьшая на множестве операторов, решающих первую задачу, константа Липшица.

3. $G$: $L_+\to\mathbf{R}^m_+$.

Иногда условие 3 полезно заменить более сильным условием строгой положительности

4. $G$: $\mathring{L}_+\to\mathring{\mathbf{R}}^m_+$.

Условие 1 обеспечивает решение задачи наблюдения, условия 1 и 2 — задачи оптимального наблюдения, условия 1 и 3 (1 и 4) — задачи положительного (строго положительного) наблюдения.

Вначале рассмотрим линейный случай:

$$X_{t+1}=AX_t, \tag{2.3}$$

где $A$ — $m\times n$-матрица с неотрицательными элементами. Измеряемый сигнал задается выражением

$$Y_t=CX_t, \tag{2.4}$$

где $C$ — $q\times m$-матрица. Обозначим через $L^*$ пространство, сопряженное пространству помех $L$. Тогда $L^*=L^b$, если $1/b+1/r$ и $L=L^r$. Задача нанаблюдения состоит в построении такого линейного оператора, что $G(Y)=\sum\limits_{k=0}^{T-1},\ W(k)Y_{t-T+k}=X_t$. Его ядро $W(k)$ $(k=0,\ \ldots,\ T-1)$ является $m\times q$-матрицей, каждая строка которой образована транспонированным элементом пространства $L^*$. Оператор наблюдения оптимален, если его норма $\|G\|=\left(\sum\limits_{k=0}^{T-1}\|W(k)\|^b\right)^{1/b}$ минимальна [15]. Наблюдение строго положительно, если матрица $W(k)$ при $0\leqslant k\leqslant T-1$ имеет неотрицательные компоненты.

Теорема 2.1. *Для того чтобы система* (2.3) *была строго положительно наблюдаема по сигналу* (2.4), *необходимо и достаточно, чтобы для системы управления*

$$X_{t+1}=A^*X_t+C^*U(t) \tag{2.5}$$

*начало координат было достижимо из любой точки* $\mathbf{R}^m_+$ *при* $U(t)\in\mathbf{R}^q_-$ *и* $t\geqslant 0$.

*Пусть матрица $A$ неособенная. Тогда задача оптимального наблюдения за интервал времени $T$ эквивалентна $m$ задачам оптимального управления вида*

$$X_0=E_i,\quad X_T=0,\quad \left(\sum_{t=0}^{T-1}\|U_i(t)\|^b\right)^{1/b}\to\min,$$

*где $E_i=(0,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,\ 0)$, $1/b+1/r=1$ и $L^r$ — пространство помех. Ядро* *оператора наблюдения задается формулой*

$$W(k)=\begin{bmatrix} U_1^*(T-k-1) \\ U_2^*(T-k-1) \\ \cdots\cdots \\ U_m^*(T-k-1) \end{bmatrix}, \quad k=0,\ \ldots,\ T-1.$$

Доказательство. Считая $T \geqslant m$, ограничимся рассмотрением решений, принадлежащих инвариантному подпространству $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^m$, на котором оператор $A$ обратим. Выпишем решение системы (2.3): $X_{t-T+k} = A^k X_{t-T}$. Возвращаясь к исходной задаче, имеем: $\sum\limits_{k=0}^{T-1} W(k) CA^k X_{t-T} = X_t$. Это соотношение эквивалентно системе скалярных уравнений:

$$\sum_{k=0}^{T-1} U_i^*(k) CA^k X_{t-T} = \overline{E}_i^* A_{t-T}^T, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $\overline{E}_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,)$ — базис подпространства $\mathbf{R}^n$. Транспонируя выражение и воспользовавшись произвольностью $X_{t-T}$, имеем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} (A^*)^k C^* U_i(k) = (A^*)^T \overline{E}_i,$$

где $U_i(k) \in \mathbf{R}_+^q$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Полученная формула задает искомое условие на решения системы (2.5). Остальное очевидно.

Перейдем к изучению нелинейной задачи. На множество липшицевых функций вида $G\colon L \to \mathbf{R}^m$ определим норму правилом

$$\|G\| = \sup\left\{\frac{G(Y_1)-G(Y_2)}{\|Y_1-Y_2\|}\,\middle|\, Y_1,\ Y_2,\ Y_1 \neq Y_2\right\}.$$

Требование оптимальности наблюдения сводится к отысканию такого оператора $G$, который обладает наименьшей нормой. Обозначим $D_xF(0)$ через $A$ и $D_xH(0)$ через $C$. Предположим, что $\det A \neq 0$ и в случае разложимости матрицы линейного приближения имеет место

$$F(X) = \left[F_i\left(X_{i_1},\ \ldots,\ X_{i_n}\right)\right]_{i=1}^s,$$

$$Y = [Y_i]_{i=1}^s = H(X) = \left[H_i\left(X_{i_1},\ \ldots,\ X_{i_n}\right)\right]_{i=1}^s,$$

где разбиение вектора $X=[X_i]_{i=1}^s$ согласовано с каноническим разбиением матрицы линейного приближения на блоки и

$$\{i_1,\ \ldots,\ i_n\} = \left\{j \,\middle|\, i \in \bigcap_{k=1}^n \omega(j)\right\}, \quad i=1,\ \ldots,\ s.$$

Теорема 2.2. *Если линейная система* (2.5) *перенумерацией переменных приводится к виду, удовлетворяющему условиям теоремы* 1.1 *или* 1.2, *то нелинейная система* (2.1) *строго положительно наблюдаема и оптимально положительно наблюдаема по сигналу* (2.2) *в некоторой окрестности начала координат пространства* $L$.

Доказательство. Пусть оператор $\sum\limits_{k=0}^{T-1} W(k) Y_{t-T+k}$ решает задачу положительной наблюдаемости для линейной системы. Тогда оператор $G(Y) = A^T \sum\limits_{k=0}^{T-1} W(k) Y_{t-2T+k}$ также является положительным наблюдением для линеаризованной системы. Обозначим через $\Gamma$ отображение вида $X \in R^m \to (H(F^{-2T}(X)),\ \ldots,\ H(F^{-1}(X)),\ H(X)) \in L$. Построим суперпозицию отображений $\Phi\colon \mathbf{R}^m \xrightarrow{\Gamma} L \xrightarrow{G} \mathbf{R}^m$. Докажем, что это локальный диффеоморфизм. Очевидно, что $\Phi(0)=0$. Вычисляя производную в точке нуль, имеем:

$$D_X\Phi(0)X = G(CA^{-2\tau}X, \ldots, CA^{-1}X, CX) = X,$$

так как $CA^{-t}X$ — выход системы (2.3), (2.4) в моменты времени $-t$. Отсюда по теореме об обратной функции в малой окрестности начала координат определено отображение $\Phi^{-1}$: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$. Докажем, что $N = \Phi^{-1}(G)$ — положительное наблюдение. По построению $N(\Gamma(X_t)) = X_t$. Это отображение, очевидно, липшицево. Покажем теперь, что $N(\mathring{L}_+) \subset \mathring{\mathbf{R}}^m_+$, где $\mathring{L}_+$ — множество последовательностей, принимающих значения в $\mathring{\mathbf{R}}^m_+$. Доказательство проводится индукцией по числу неразложимых примитивных блоков разложимого оператора. Пусть $s=2$ и $\left(G_1^*(Y_1), G^*(Y_1, Y_2)\right)^*$ решает задачу линейной положительной наблюдаемости. Очевидно, что образ $G_i$ принадлежит $\overline{K}_i \subset \mathring{\mathbf{R}}^{m_i}_+$ при $Y_1 \geqslant 0$, $Y_2 \geqslant 0$, где $\overline{K}_i$ — некоторый замкнутый конус из внутренности $\mathbf{R}^{m_i}_+$ $(i=1, 2)$. Аналогично предыдущему строятся отображения $\Phi_1$: $\mathbf{R}^{m_1} \to \mathbf{R}^{m_1}$, $\Phi_2$: $\mathbf{R}^{m_1} \times \mathbf{R}^{m_2} \to \mathbf{R}^{m_2}$, $N_1 = \Phi_1^{-1}(G_1)$ и $N_2 = (\Phi^{-1})_2(G_1, G_2)$. Отображение $\Phi = \begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}$ близко к тождественному в малой окрестности начала координат. Отсюда $N_1(\mathring{L}_{+1}) \subset \mathring{\mathbf{R}}^{m_1}_+$ и $N_2(\mathring{L}_{+1}, \mathring{L}_{+2}) \subset \mathring{\mathbf{R}}^{m_2}_+$, где $\mathring{L}_{+1} \times \mathring{L}_{+2} = \mathring{L}_+$. Следующий шаг индукции очевиден. Пусть $L_+$ — замыкание пространства $\mathring{L}_+$. По непрерывности получаем $N(L_+) \subset \mathbf{R}^m_+$. Дословное повторение рассуждений теоремы 4 работы [15], с учетом замкнутости множества неотрицательных операторов, доказывает существование оптимального наблюдения. Теорема доказана.

Пример 2. Пусть в системе (2.3) матрица $A$ имеет вид (1.14) и $C=(1, 0, \ldots, 0)$. Это предположение означает, что в эксперименте измеряется динамика численности первой возрастной группы. Требуется определить динамику численности каждой возрастной группы. Реальный эксперимент имеет некоторую погрешность измерений. Получаемые в результате вычислений значения неминуемо наследуют эту погрешность. Ставится задача построить такую процедуру вычислений, в результате которой получались бы биологически осмысленные, т. е. неотрицательные значения численностей. Воспользовавшись примером 1, заключаем, что оператор наблюдения за $m$ шагов имеет вид $G(Y) = WY$, где

$$W = \begin{bmatrix} q & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 01 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

— $m \times m$-матрица.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Новосибирск: Наука, 1980.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц // М.: Наука, 1967.
3. Заславский Б. Г. Управляемость квазимонотонных систем в положительном конусе // Автоматика и телемеханика.— 1987.— № 3.— С. 18—26.
4. Заславский Б. Г. Наблюдаемость квазимонотонных систем // Автоматика и телемеханика.— 1987.— № 11.— С. 39—46.
5. Заславский Б. Г., Полуэктов Р. А. Управление экологическими системами // М.: Наука, 1988.
6. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем // М.: Мир, 1971.

7. Маркус Л., Ли Э. Б. Основы теории оптимального управления // М.: Наука, 1972.
8. Полуэктов Р. А., Пых Ю. А., Швытов И. А. Динамические модели экологических систем // Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
9. Brammer R. F. Controllability in linear autonomous systems with positive controller // SIAM J. on Control.— 1972.— V. 10, № 2.— P. 339—359.
10. Evans M. E., Murthy N. P. Controllability of discrete time linear systems with positive control // Proc. of the 7 Triennial World Congress of IFAC, ed. Nienni, NY, Pergamon Press.— 1979.— V. 4.— P. 2403—2407.
11. Kusuoka H., Maeda H., Kodama S. On reachability of discrete-time compartmental systems with nonnegative input constrains // Electronics and Communications in Japan.— 1980.— V. 63-A, № 2.— P. 10—17.
12. Maeda H., Kodama S. Reachability, observability and realizability of linear systems with positive constraints // Electronics and Communications in Japan.— 1980.— V. 63-A, № 10.— P. 35—42.
13. Murthy D. N. P. Controllability of a linear positive dynamic systems // Int. J. of System Sci.— 1986.— V. 17.— P. 49—54.
14. Ohta J., Maeda H., Kodama S. Reachability, observability and realizability of continious time positive systems // SIAM J. on Control and optimization.— 1984.— V. 22, № 2.— P. 171—180.
15. Rolewicz S. On optimal observability of Lipschits systems // Lect. Notes in Economics and Math. Systems.— 1984.— № 224.— P. 152—158.
16. Walter E. Identifiability of state space models // Lect. Notes in Biomathematics.— 1982.— № 46.

Поступило в редакцию: первый вариант 19.III.87,
окончательный вариант 4.II.90