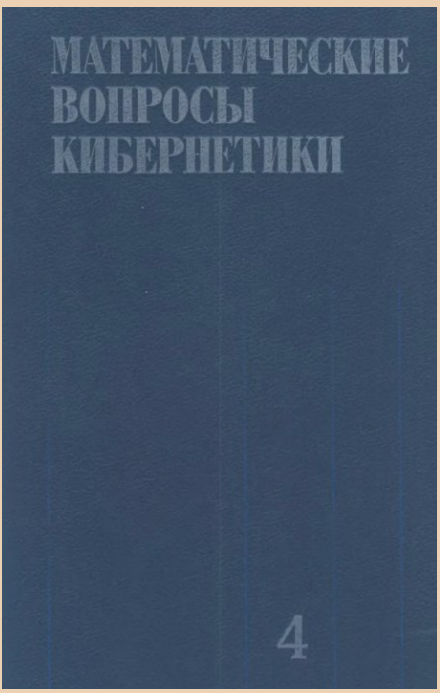
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 4



А. В. Макаров

О гомоморфизмах функциональных систем многозначных логик

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Макаров А. В. О гомоморфизмах функциональных систем многозначных логик // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. — М.: Наука, 1992. — С. 5–29. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1992-5

О ГОМОМОРФИЗМАХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ МНОГОЗНАЧНЫХ ЛОГИК

А. В. МАКАРОВ

(МОСКВА)

Введение

Изучение гомоморфизмов функциональных систем является важной частью исследований в дискретной математике.

Исследование изоморфизмов и гомоморфизмов k-значной логики было проведено А. И. Мальцевым в работе [5]. В этой статье им была получена полная классификация замкнутых классов l-значной логики, изоморфных всей k-значной логике, и было показано, что все гомоморфизмы k-значной логики, не являющиеся изоморфизмами, тривиальны.

С. В. Яблонским [8] приведены примеры гомоморфных прообразов k-значной логики в l-значной. Гомоморфные прообразы k-значной логики в l-значной изучались в статьях М. Ф. Рацы [6], В. П. Малая [4]. Г. Буроша и др. [11].

В настоящей работе изучаются гомоморфизмы двух видов функциональных систем — предельных логик и k-значных логик, в частности, дается полное описание всех максимальных в смысле включения гомоморфных прообразов k-значной логики, лежащих в l-значной.

Для изучения гомоморфизмов необходимо уточнить рассматриваемую модификацию k-значной логики. Как функциональная система k-значная логика определяется множеством функций и системой операций. С. В. Яблонским [8] и А. И. Мальцевым [5] различным образом определяются как понятие функции k-значной логики, так и система операций. Все рассмотрения данной работы связаны с моделью k-значной логики из [8].

Перейдем к определению основных понятий.

Пусть $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$, $k \geqslant 2$; $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ — счетный алфавит переменных. Пусть E_k^p — декартова степень множества E_k. Функция вида $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *функцией k-значной логики* $\mathfrak{P}_k$, $k \geqslant 2$, если ее переменные и значения определены на множестве E_k. *Местностью* функции называется число переменных, от которых она зависит. Две функции $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$ называются *равными*, если 1) наборы $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$ совпадают как подмножества множества X; без ограничения общности предположим, что множество $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ содержит p различных элементов множества X, а именно: $x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}$, где $l_1 < \ldots < l_p$; 2) при задании функций $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$ таблицами, в которых слева выписаны все наборы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ длины p из множества E_k^p в лексикографическом порядке, причем число α_1 соответствует переменной x_{l_1}, число α_2 соответствует x_{l_2} и т. д., а справа выписаны значения функций $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$ на этих наборах, получаются одинаковые таблицы.

Функции будем обозначать, как правило, латинскими буквами f, g, h, u, v и т. д.

Селекторами называются функции вида $e_m^n(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_m$, $m = 1, \ldots, n$, $n \in N$, где $N = \{1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел. Через $\mathfrak{S}$ обозначим множество всех селекторов.

Предикатом называется функция k-значной логики, принимающая значения из $E_2 = \{0, 1\}$. Предикаты будем обозначать, как правило, латинскими буквами P, Q, R, T, S и т. д.

Пусть $R(x_1, \ldots, x_m)$, $m \geqslant 1$, — m-местный предикат, E_R — множество всех наборов из E_k^m, на которых $R(x_1, \ldots, x_m)$ равен 1. Для наборов $\tilde{\sigma}_i = (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{im})$, и $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{P}_k$ обозначим через $f(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n)$ набор $\tilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ такой, что $\delta_j = f(\sigma_{1j}, \ldots, \sigma_{nj})$, $j = 1, \ldots, m$. Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет предикат* R, если для любых наборов $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n$ из E_R набор $f(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n)$ также принадлежит E_R.

Множество всех функций k-значной логики, сохраняющих предикат R, обозначим через $U(R)$. Отметим, что $\mathfrak{S} \subseteq U(R)$ при любом предикате R.

Подмножества функций k-значной логики будем, как правило, обозначать готическими буквами $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}$ и т. д.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное множество функций из $\mathfrak{P}_k$. Будем считать, что функции из $\mathfrak{M}$ задаются следующими элементарными термами (или, как более привычно на языке дискретной математики, элементарными формулами): $f_1(x_1, \ldots, x_{n_1})$, $f_2(x_1, \ldots, x_{n_2})$, $\ldots$, $f_m(x_1, \ldots, x_{n_m})$, $\ldots$

Стандартным образом определим множество $\langle\mathfrak{M}\rangle$ термов (формул) над множеством $\mathfrak{M}$:

1) если $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}$, то $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in \langle\mathfrak{M}\rangle$ (здесь $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ не предполагаются различными переменными);

2) если $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}$ и каждое Φ_i, $i = 1, \ldots, n$, есть либо формула из $\langle\mathfrak{M}\rangle$, либо символ переменной, то $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \in \langle\mathfrak{M}\rangle$;

3) множество $\langle\mathfrak{M}\rangle$ не содержит никаких других формул, кроме полученных согласно пунктам 1) и 2).

Каждая формула из множества $\langle\mathfrak{M}\rangle$ естественным образом задает некоторую функцию из $\mathfrak{P}_k$. Множество всех таких функций из $\mathfrak{P}_k$ будем обозначать $[\mathfrak{M}]$.

Операция последовательного получения из заданных функций множества $\mathfrak{M}$ новых (быть может) функций, определяемая 1) и 2), называется *операцией суперпозиции*. Множество $[\mathfrak{M}]$ называется *замыканием* $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}]$, то $\mathfrak{M}$ называется *замкнутым классом* k-значной логики. Отметим, что для любого предиката R множество всех функций $U(R)$, сохраняющих этот предикат, является замкнутым классом (см. [1]).

Обычным образом можно ввести понятия полной системы, базиса, конечного базиса, предполного класса (см. [8]).

Множество всех замкнутых классов в $\mathfrak{P}_k$ частично упорядочено отношением включения одного замкнутого класса в другой как подмножества. Структура всех замкнутых классов в $\mathfrak{P}_2$ описана (см. [9]). В $\mathfrak{P}_k$ при $k > 2$ структура замкнутых классов не описана.

Иногда мы будем употреблять в дополнение к операции суперпозиции операцию *введения фиктивного переменного* (см. [5], [8]), которая кратко описывается так: пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция k-значной логики; тогда функция $g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, вычисляемая по формуле $g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, получена из $f(x_1, \ldots, x_n)$ операцией введения фиктивной переменной x_{n+1}. Случаи, когда используется операция введения фиктивной переменной, мы будем каждый раз специально оговаривать.

Введем основное определение гомоморфного отображения одного замкнутого класса функций l-значной логики на другой замкнутый класс k-значной логики (см. [8]).

Пусть $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{G}$ — замкнутые классы функций, $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}_l$, $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}_k$. Обозначим через $\{x_i\}$ (соответственно $\{y_i\}$) множество символов всех переменных, встречающихся у функций класса $\mathfrak{P}$ (соответственно $\mathfrak{G}$).

Скажем, что *класс $\mathfrak{P}$ функций f гомоморфно отображен на класс $\mathfrak{G}$ функций g*, если каждому символу x_i взаимно однозначно соответствует символ y_i и каждой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{P}$ отвечает одна и только одна функция $g(y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathfrak{G}$, зависящая от соответствующих аргументов (следовательно, число аргументов у соответствующих функций одинаковое, области значений могут быть различными), и при этом выполнены следующие два условия:

1) если функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{P}$ отвечает функция $g(y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathfrak{G}$, то функции $f\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\right)$ из $\mathfrak{P}$ отвечает функция $g\left(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}\right)$ из $\mathfrak{G}$;

2) если функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{P}$ отвечает функция $g(y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathfrak{G}$, а в списке Φ_i, $i = 1, \ldots, n$, каждый член есть либо символ переменной x_j из X, либо функция $f_p\left(x_{p1}, \ldots, x_{pn_p}\right)$ из $\mathfrak{P}$, и каждому члену этого списка поставлен в соответствие либо символ переменной y_j из Y, либо функция $g_p\left(y_{p1}, \ldots, y_{pn_p}\right)$ из $\mathfrak{G}$, образующие список Ψ_i, $i = 1, \ldots, n$, то функции $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ из $\mathfrak{P}$ поставлена в соответствие функция $g(\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ из $\mathfrak{G}$.

Если при этом отображении соответствие между функциями классов $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{G}$ взаимно однозначно, то говорят, что замкнутые классы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{G}$ изоморфны.

Для обозначения гомоморфизмов будем использовать латинские буквы $\mathscr{H}$, $\mathscr{F}$ и т. д. В структуре всех замкнутых классов в $\mathfrak{P}_k$ выделим множество всех замкнутых классов, которые можно гомоморфно отобразить на $\mathfrak{P}_l$. Обозначим это частично упорядоченное множество $\mathscr{L}^k_l$. Аналогично можно определить частично упорядоченное множество $\mathscr{L}^k_{\mathfrak{M}}$, где $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}_l$ — замкнутый класс.

Опишем кратко содержание работы.

В гл. 1 определяется понятие предельной логики, впервые введенное в рассмотрение С. В. Яблонским, напоминаются определения поглощаемости для предельных логик и таблицы предельной логики, введенные в статье Я. Деметровича [2]. Впервые строится пример предельной логики, таблица которой пуста, показывается, что отношение поглощаемости для предельных логик не транзитивно. В этой же главе вводится стандартное определение делимости и показывается, что существует предельная логика, которая делится на любую предельную логику. Показывается, что существует континуум предельных логик, попарно не делящих друг друга, а мощность множества всех попарно не делящих друг друга гомоморфных прообразов k-значной логики в счетнозначной гиперконтинуальна. Таким образом, сформулированные результаты исправляют и дополняют ряд утверждений из работы [2].

В гл. 2 доказано, что частично упорядоченное множество $\mathscr{L}^l_k$ при $l > k$ бесконечно, а при $l \geqslant k+2$ континуально. Доказано, что каждый замкнутый класс из $\mathscr{L}^l_k$ содержится в некотором максимальном замкнутом классе и содержит некоторый минимальный замкнутый класс, которые также можно отобразить на $\mathfrak{P}_k$. Число этих максимальных и минимальных классов конечно. В гл. 3 дано полное описание всех максимальных элементов в частично упорядоченном множестве $\mathscr{L}^l_k$ и всех гомоморфизмов всех замкнутых классов из $\mathscr{L}^l_k$.

ГЛАВА 1
ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

§ 1. Определения

Пусть $E = N \cup \{0\}$, $\mathfrak{P}_\infty$ — множество всех функций счетнозначной логики, т. е. множество тех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, переменные и значения которых определены на множестве E.

Аналогично тому, как это делается для k-значной логики во введении, определяем понятия суперпозиции и гомоморфного отображения замкнутого класса $\mathfrak{P}$ счетнозначной логики на замкнутый класс $\mathfrak{G}$ счетнозначной или k-значной логики.

Замкнутый класс $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}_\infty$ называется *предельной логикой*, если

1) мощность множества $\mathfrak{M}$ счетна;

2) для любого $k \geqslant 2$, $k \in N$, существует замкнутый класс $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{A}_k \subseteq \mathfrak{M}$, такой, что существует гомоморфизм $\mathcal{H}$: $\mathfrak{A}_k \to \mathfrak{P}_k$.

В [2] введены важные понятия сравнимости, сильной сравнимости, поглощаемости, взаимной поглощаемости, а также моделируемости предельных логик. Напомним их.

Предельная логика $\mathfrak{A}$ *сравнима с предельной логикой* $\mathfrak{B}$, если существует гомоморфизм $\mathcal{H}$: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Обозначение: $\mathfrak{A} \geqslant \mathfrak{B}$.

Предельные логики $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *сильно сравнимы*, если $\mathfrak{A} \geqslant \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \geqslant \mathfrak{A}$. Обозначение: $\mathfrak{A} \langle\ \rangle \mathfrak{B}$.

Предельная логика $\mathfrak{A}$ *поглощает предельную логику* $\mathfrak{B}$, если существует предельная логика $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{A}' \langle\ \rangle \mathfrak{B}$. Обозначение: $\mathfrak{A} | \supset \mathfrak{B}$.

Предельные логики $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *взаимно поглощают друг друга*, если $\mathfrak{A} | \supset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} | \supset \mathfrak{A}$. Обозначение: $\mathfrak{A} \subset | \, | \supset \mathfrak{B}$.

Замкнутый класс функций $\mathfrak{A}$ *моделирует* k*-значную логику* $\mathfrak{P}_k$, $k \geqslant 2$, *на множестве* $\mathcal{E}_k = \{e_0, \ldots, e_{k-1}\}$, если существует $f(x_1, x_2)$ из $\mathfrak{A}$ такая, что сужение функции $f(x_1, x_2)$ на множество $\mathcal{E}_k$ (обозначение: $\bar{f}_{\mathcal{E}_k}(x_1, x_2)$), т. е. при этом $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}_k \times \mathcal{E}_k$, удовлетворяет равенству:

$$\bar{f}_{\mathcal{E}_k}(x_1, x_2) = \begin{cases} e_{i+1}, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant k-2 \ \text{ и } \ \max(x_1, x_2) = e_i, \\ e_0, & \text{если } \max(x_1, x_2) = e_{k-1}. \end{cases}$$

Заметим, что если замкнутый класс функций $\mathfrak{A}$ моделирует $\mathfrak{P}_k$ на $\mathcal{E}_k$, то существует замкнутый класс $\mathfrak{A}_k \subseteq \mathfrak{A}$ такой, что $\mathfrak{A}_k$ можно гомоморфно отобразить на $\mathfrak{P}_k$.

Систему $T_\mathfrak{A}$ конечных подмножеств $\mathcal{E}_k$ множества E назовем *таблицей предельной логики* $\mathfrak{A}$, если множество $\mathcal{E}_k = \{e_0, \ldots, e_{k-1}\}$ принадлежит $T_\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда класс $\mathfrak{A}$ моделирует k-значную логику $\mathfrak{P}_k$, $k \geqslant 2$, на множестве $\mathcal{E}_k$.

Предельная логика $\mathfrak{A}$ *делится на предельную логику* $\mathfrak{B}$ (обозначение: $\mathfrak{A} | \mathfrak{B}$), если существует замкнутый класс $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ такой, что $\mathfrak{A}' \geqslant \mathfrak{B}$.

Пусть $c(x_1, x_2) = \dfrac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + 1)}{2} + x_2$ — пеановская функция. Эта функция осуществляет взаимно однозначное отображение множества $E \times E$ на E.

§ 2. Предельная логика с пустой таблицей. Нетранзитивность отношения поглощаемости предельных логик

Теорема 1. *Замкнутый класс* $\mathfrak{C} = [\{c(x_1, x_2)\}]$ *есть предельная логика, таблица* $T_\mathfrak{C}$ *которой пуста* (ср. с леммой 17 из [2]).

Доказательство. Индуктивно определим понятие *глубины суперпозиции* над множеством $\{c(x_1, x_2)\}$:

1) переменная из алфавита X имеет глубину 0;

2) если f_1 и f_2 имеют соответственно глубину a_1 и a_2, то глубина $c(f_1, f_2)$ равна $\max(a_1, a_2)+1$. Глубину функции f будем обозначать через $\Gamma(f)$.

Индукцией по глубине суперпозиции можно доказать, что различным формулам над $\{c(x_1, x_2)\}$ соответствуют и различные функции. Поэтому отображение $\mathscr{H}$: $c(x_1, x_2)\to v_k(y_1, y_2)$ (где $v_k(y_1, y_2)$ — известная функция Вебба) продолжается до гомоморфизма $\mathscr{H}$: $\mathfrak{C}\to\mathfrak{P}_k$.

При $x_2\neq 0$ справедливо неравенство $c(x_1, x_2)>\max(x_1, x_2)$, поэтому никакая функция $f(x_1, x_2)$ из $\mathfrak{C}$ не сохраняет никакого конечного множества $\mathscr{E}_k$, мощность которого $k\geqslant 2$ (мощность множества $\mathscr{E}$ мы будем обозначать символом $\#\mathscr{E}$). Поэтому таблица $T_{\mathfrak{C}}$ предельной логики $\mathfrak{C}$ пуста, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Отношение поглощаемости для предельных логик не транзитивно. Отношение делимости транзитивно.*

Доказательство. Представим множество E в виде объединения множества $E_0=\{0\}$ и счетного числа счетных множеств M_i, $i\in E$, где $M_i=\{2^i, 2^i\cdot 3, 2^i\cdot 5, 2^i\cdot 7, \ldots, 2^i\cdot(2n+1), \ldots\}$.

Определим функции $c_i(x_1, x_2)$ счетнозначной логики, $i\in E$:

$$c_i(x_1, x_2)=\begin{cases}2^i\cdot(2c(n_1, n_2)+1), & \text{если } x_1=2^i\cdot(2n_1+1),\ x_2=2^i\cdot(2n_2+1),\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Разобьем множество M_0 на счетное число конечных множеств N_j, $j\in N\setminus\{1\}$, где $N_2=\{1, 3\}$, $N_3=\{5, 7, 9\}$ и, вообще, $N_j=\{j(j-1)-1, j(j-1)+1, \ldots, j(j-1)+2j-3\}$.

Определим функции $\varphi_j(x_1, x_2)$, $j\in N\setminus\{1\}$, счетнозначной логики $((x_1, x_2)\in N_j\times N_j)$:

$$\varphi_j(x_1, x_2)=\begin{cases}\max(x_1, x_2)+2, & \text{если } x_i\neq j(j-1)+2j-3,\ i=1, 2,\\ j(j-1)-1, & \text{если } x_1=j(j-1)+2j-3\\ & \text{или } x_2=j(j-1)+2j-3,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Рассмотрим замкнутые классы функций:

$$\mathfrak{Q}=[\{c_i(x_1, x_2),\ i\in E\}],$$
$$\mathfrak{R}=[\{c_i(y_1, y_2),\ i\in N\}\cup\{\varphi_j(y_1, y_2),\ j\in N\setminus\{1\}\}],$$
$$\mathfrak{U}=[\{\varphi_j(z_1, z_2),\ j\in N\setminus\{1\}\}].$$

Из теоремы 1 следует, что $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{R}$ — предельные логики. Очевидно, что $\mathfrak{U}$ — предельная логика. Покажем, что $\mathfrak{Q}\mid\supset\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}\mid\supset\mathfrak{U}$, но неверно, что $\mathfrak{Q}\mid\supset\mathfrak{U}$. Покажем, что $\mathfrak{Q}\langle\ \rangle\mathfrak{R}$. Для этого рассмотрим отображение $\mathscr{H}_1$ множества $\{c_i(x_1, x_2),\ i\in E\}$ в множество $\{c_i(y_1, y_2),\ i\in N\}\cup\{\varphi_j(y_1, y_2),\ j\in N\setminus\{1\}\}$:

$$\mathscr{H}_1(c_{2k+1}(x_1, x_2))=c_{k+1}(y_1, y_2),\quad k\in E;$$
$$\mathscr{H}_1(c_{2k}(x_1, x_2))=\varphi_{k+2}(y_1, y_2),\quad k\in E.$$

Можно доказать, что отображение $\mathscr{H}_1$ продолжается до гомоморфизма $\mathscr{H}_1$: $\mathfrak{Q}\to\mathfrak{R}$, т. е. $\mathfrak{Q}\geqslant\mathfrak{R}$. Гомоморфизм $\mathscr{H}_2$: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{Q}$ строится как продолжение следующего отображения:

$$\mathscr{H}_2(c_k(y_1, y_2))=c_{k-1}(x_1, x_2),\quad k\in N;$$
$$\mathscr{H}_2(\varphi_j(y_1, y_2))=0(x_1, x_2)\in\mathfrak{Q},\quad j\in N\setminus\{1\}$$

(здесь $0(x_1, x_2)$ — функция двух переменных, тождественно равная 0).

Из того, что $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{R}$, следует, что $\mathfrak{R} \mid\supset \mathfrak{U}$. Докажем, что не верно отношение $\mathfrak{Q} \mid\supset \mathfrak{U}$. Предположим от противного, что существует $\mathfrak{Q}' \subseteq \mathfrak{Q}$ такое, что $\mathfrak{Q}' \geqslant \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U} \geqslant \mathfrak{Q}'$. Тогда существует гомоморфизм $\mathscr{H}$: $\mathfrak{U} \to \mathfrak{Q}'$. Тогда некоторой функции $\varphi_j(z_1, z_2)$ из $\mathfrak{U}$ соответствует функция $\psi(x_1, x_2)$ из $\mathfrak{Q}'$, тождественно не равная 0. Тогда существует k такое, что $\psi(x_1, x_2) \in [\{c_k(x_1, x_2)\}]$. Следовательно, $\psi(x_1, x_2)$ однозначно отображает множество $M_k \times M_k$ в множество M_k. Поэтому функция $\psi(x_1, x_2)$ обладает таким же свойством, что и функция $c(x_1, x_2)$: любые две функции из множества $[\{\psi(x_1, x_2)\}]$ равны тогда и только тогда, когда равны суперпозиции, их реализующие. Но в множестве $[\{\varphi_j(z_1, z_2)\}]$ существуют различные суперпозиции, реализующие одну и ту же функцию. Получили противоречие с тем, что существует предельная логика $\mathfrak{Q}' \subseteq \mathfrak{Q}$ такая, что $\mathfrak{U} \geqslant \mathfrak{Q}'$. Итак, отношение поглощаемости не транзитивно. Транзитивность отношения делимости очевидна. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Существует предельная логика $\mathfrak{U}$, которая делится на любую предельную логику $\mathfrak{Q}$.*

Доказательство. Заметим, что любая предельная логика содержит при любом $n \in N$ счетное множество функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим счетный алфавит переменных X и счетный алфавит функциональных символов $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \{f_1^j, f_2^j, \ldots, f_i^j, \ldots\}$ (f_i^j обозначает функциональный символ от j переменных, i — его порядковый номер). Рассмотрим множество T всех формул над этим алфавитом переменных и функциональных символов. На множестве T естественным образом определим функции f_i^j, $j \in N$, $i \in N$. Все эти функции однозначно отображают множество T в себя (подставляя различные формулы в функцию f_i^j, получим в результате различные формулы). Приведенная конструкция стандартна и используется, например, при построении свободных алгебр в теории универсальных алгебр. Множество T счетно и его можно занумеровать числами из E, поэтому множество функций f_i^j можно рассматривать как множество функций счетнозначной логики. Множество функций f_i^j порождает замкнутый счетный класс $\mathfrak{U}$ из $\mathfrak{P}_\infty$, который является предельной логикой и гомоморфно отображается на любую предельную логику. Теорема 3 доказана.

§ 3. Континуальность семейства предельных логик, попарно не делящих друг друга

Используя идеи и конструкции работы [2], докажем следующую теорему, доказательство первой части которой дает другой пример континуального семейства предельных логик, попарно не делящих друг друга, чем указанный в работе [3].

Теорема 4. *Существует континуальное семейство предельных логик, которые попарно не делят друг друга. Множество попарно не делящих друг друга гомоморфных прообразов k-значной логики в счетнозначной имеет мощность гиперконтинуума.*

Доказательство. Пусть A — множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1.

Рассмотрим последовательность $P = \{p_i\}_{i \in N}$ всех простых чисел, т. е. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ и т. д. Положим $p_0 = 0$.

Множество E представим в виде объединения множеств $\mathscr{E}_{p_i}$, $i \in E$, которые мы определим индуктивно. Пусть $\mathscr{E}_{p_0} = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathscr{E}_{p_1} = \{4, 5\}$, $\mathscr{E}_{p_i} = \{e_{p_i}, e_{p_i} + 1, \ldots, e_{p_i} + p_i - 1\}$, где $i \geqslant 1$. Обозначим $e_{p_i} + p_i$ через $e_{p_{i+1}}$. Тогда положим $\mathscr{E}_{p_{i+1}} = \{e_{p_{i+1}}, e_{p_{i+1}} + 1, e_{p_{i+1}} + 2, \ldots, e_{p_{i+1}} +$

$+ p_{i+1} - 1\}$. Определим следующие функции $f_{p_i}(x)$, $i \in N$, одного переменного на E:

$$f_{p_i}(x) = \begin{cases} e_{p_i} + j, & \text{если } x = e_{p_i} + j - 1 \text{ и } 1 \leqslant j \leqslant p_i - 1, \\ e_{p_i}, & \text{если } x = e_{p_i} + p_i - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность $MP = \{m \cdot p_m\}_{m \in N}$. Можно доказать, что $(m+1) \cdot p_{m+1} - m \cdot p_m > 2m$.

Определим множества $\mathscr{E}_k^0$, где $k \in N$: $\mathscr{E}_1^0 = \{0, 1, 2, 3\}$,

$$\mathscr{E}_k^0 = \left\{\frac{k(k-1)}{2} + 3, \frac{k(k-1)}{2} + 4, \ldots, \frac{k(k-1)}{2} + k + 2\right\}, \quad \text{если} \quad k \geqslant 2.$$

Определим множества $\mathscr{E}_k^1$, $k \geqslant 2$:

$$\mathscr{E}_k^1 = \{k \cdot p_k + 1, k \cdot p_k + 2, \ldots, k \cdot p_k + 2k - 1\}.$$

Определим множества $\mathscr{E}_k^2$, $k \geqslant 2$:

$$\mathscr{E}_k^2 = \{k \cdot p_k + k, k \cdot p_k + k + 1, \ldots, k \cdot p_k + 2k - 1\}.$$

Множества $\mathscr{E}_k^1$ попарно не пересекаются. Пусть $\mathscr{E} = \bigcup\limits_{k=2}^{\infty} \mathscr{E}_k^1$. Тогда $MP \subset N \backslash \mathscr{E}$.

Положим $s_k = (k \cdot p_k + k) - \left(\frac{k(k-1)}{2} + 3\right)$.

Определим функции $\varphi_k(x_1, x_2)$ на $\mathscr{E}_k^0 \times \mathscr{E}_k^2$:

$$\varphi_k(x_1, x_2) = \begin{cases} \max(x_1, x_2 - s_k) + 1, & \text{если } x_1 \neq \frac{k(k-1)}{2} + k + 2 \\ & \text{и } x_2 \neq k \cdot p_k + 2k - 1, \\ \frac{k(k-1)}{2} + 3 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для любой последовательности $\alpha \in A$ определим на $E \times E$ функцию $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$:

$$\varphi_\alpha(x_1, x_2) = \begin{cases} \varphi_k(x_1, x_2), & \text{если } (x_1, x_2) \in \mathscr{E}_k^0 \times \mathscr{E}_k^2, \quad k \geqslant 2 \\ x_1 + 1, & \text{если } x_1 = x_2 \text{ и } x_2 \neq 0, \\ f_{p_{2i}}(x_2), & \text{если } x_1 = x_2 + p_i \text{ и } \alpha_i = 1, \\ f_{p_{2i-1}}(x_2), & \text{если } x_1 = x_2 + p_i \text{ и } \alpha_i = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Обозначим $\mathfrak{U}_\alpha = [\{\varphi_\alpha(x_1, x_2)\}]$. Докажем, что семейство $\{\mathfrak{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть семейство предельных логик, попарно не делящих друг друга. Аналогично доказательству лемм 7—9 из работы [2] можно провести доказательство следующих лемм 1—3.

Лемма 1. *Класс функций $\mathfrak{U}_\alpha$ является предельной логикой.*

Лемма 2. *В логике $\mathfrak{U}_\alpha$ каждый базис имеет вид $\{\varphi_\alpha(x_i, x_j)\}$, где $i \neq j$.*

Лемма 3. *Если α не совпадает с β, то предельные логики $\mathfrak{U}_\alpha$ и $\mathfrak{U}_\beta$ не сравнимы.*

Введем индуктивно понятие *полной глубины суперпозиции над множеством* $\{\varphi_\alpha(x_1, x_2)\}$ (см. [2]):

1) $\varphi_\alpha(x_i, x_j)$ имеет полную глубину 1,

2) если f_1 и f_2 имеют полную глубину $m-1$, то суперпозиция $\varphi_\alpha(f_1, f_2)$ имеет полную глубину m.

Заметим, что любая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая полную глубину m над $\{\varphi_\alpha(x_1, x_2)\}$ обладает свойством:

$$f(x, \ldots, x) = g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x + m, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет неполную глубину* m, если $\Gamma(f) = m$, но глубина f не является полной.

Неполная глубина не может быть равна единице. Справедлива

Лемма 4. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{U}_\alpha$ *и* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет неполную глубину* m. *Тогда* $f(x, \ldots, x) = g(x)$ *принимает ненулевое значение лишь на конечном множестве.*

Лемма 4 дословно повторяет лемму 11 из [2]. Доказательство этой леммы проводится индукцией по неполной глубине и также дословно повторяет доказательство указанной леммы и в нашей работе не приводится.

Лемма 5. *Для любой функции* $h(x_1, x_2) \in \mathfrak{U}_\alpha$, *имеющей полную глубину* l, *и для любого* $m \geqslant 2$ *при* $x_1 = x_2 + m \cdot p_m$ *и* $x_2 = x_1 + m \cdot p_m$ *функция* $h(x_1, x_2)$ *тождественно равна* 0, *т. е.*

$$h(x, x + m \cdot p_m) = h(x + m \cdot p_m, x) \equiv 0.$$

Доказательство. Применим индукцию по полной глубине l суперпозиции $h(x_1, x_2)$ над $\{\varphi_\alpha(x_1, x_2\}$. Справедливость леммы 5 при $l = 1$ следует из определения функции $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$. Пусть лемма 5 доказана для всех суперпозиций полной глубины $l \geqslant 1$. Пусть $h(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(f_1, f_2)$, где f_1 и f_2 имеют полную глубину l. Если хотя бы одна из функций f_1 и f_2 зависит от обеих переменных x_1 и x_2, то суперпозиция $\varphi_\alpha(f_1, f_2)$ обладает требуемым свойством, так как $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$ такова, что, если хотя бы одна из переменных x_1 и x_2 принимает значение 0, то и $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$ принимает значение 0.

Осталось рассмотреть два случая:

1) $h(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(f_1(x_1), f_2(x_2))$,

2) $h(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(f_1(x_2), f_2(x_1))$.

Они аналогичны, так как

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x + l, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому для этих случаев справедливость леммы 5 легко проверяется. Лемма 5 доказана.

Докажем первое утверждение теоремы 4.

Предположим противное: при $\alpha \neq \beta$ имеем, что $\mathfrak{U}_\alpha | \mathfrak{U}_\beta$. Тогда существует $\mathfrak{U}'_\alpha \subseteq \mathfrak{U}_\alpha$ и существует гомоморфизм $\mathscr{H}\colon \mathfrak{U}'_\alpha \to \mathfrak{U}_\beta$. Тогда существует $\psi_\alpha(x_1, x_2) \in \mathfrak{U}_\alpha$ такая, что $\mathscr{H}(\psi_\alpha(x_1, x_2)) = \varphi_\beta(y_1, y_2)$. $\psi_\alpha(x_1, x_2)$ не может иметь глубину 1 (противоречие с леммой 3). Пусть $\psi_\alpha(x_1, x_2)$ имеет глубину l, $l \geqslant 2$. Если эта глубина неполная, то $f_\alpha(x) = \psi_\alpha(x, x)$ порождает конечное множество функций от переменной x, в то время как $f_\beta(y) = \varphi_\beta(y, y)$ порождает бесконечное множество функций от переменной y. Следовательно, глубина $\psi_\alpha(x_1, x_2)$ полная. Поэтому существует l, $l \geqslant 2$, такое, что

$$f_\alpha(x) = \psi_\alpha(x, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x + l, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующие функции:

$$f_\beta(y) = \varphi_\beta(y, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0, \\ y + 1, & \text{если } y \neq 0. \end{cases}$$

$$f_\beta^{p_l}(y) = \underbrace{f_\beta(f_\beta(\ldots f_\beta}_{p_l}(y)\ \ldots)),$$

$$f_\alpha^{p_l}(x) = \underbrace{f_\alpha(f_\alpha(\ldots f_\alpha}_{p_l}(x)\ \ldots)),$$

$$F_\alpha(x) = \psi_\alpha\left(f_\alpha^{p_l}(x),\ x\right), \quad F_\beta(y) = \varphi_\beta\left(f_\beta^{p_l}(y),\ y\right).$$

Имеем следующее равенство: $\mathscr{H}(F_\alpha(x)) = F_\beta(y)$. Но $F_\beta(y)$ в силу определения функции $\varphi_\beta(x_1, x_2)$ порождает циклическую группу простого порядка, а функция $F_\alpha(x)$ тождественно равна 0. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы 4.

Определим функции $\rho_\alpha(x_1, x_2)$, $\alpha \in A$:

$$\rho_\alpha(x_1, x_2) = \begin{cases} \max(x_1, x_2) + 1, & \text{если } 1 \leqslant x_1 \leqslant k-1 \text{ и } 1 \leqslant x_2 \leqslant k-1, \\ 1, & \text{если } x_1 = k \text{ или } x_2 = k,\ 1 \leqslant x_1,\ x_2 \leqslant k, \\ x_1 + 1, & \text{если } x_1 = x_2 \text{ и } x_2 > k, \\ f_{p_{2(i+k^k)}}(x_2), & \text{если } x_1 = x_2 + p_{i+k^k} \text{ и } \alpha_i = 1, \\ f_{p_{2(i+k^k)-1}}(x_2), & \text{если } x_1 = x_2 + p_{i+k^k} \text{ и } \alpha_i = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть Θ — множество всех таких непустых подмножеств B множества A, которые попарно не содержат друг друга. Рассмотрим гиперконтинуальное семейство замкнутых классов счетнозначной логики $\{\mathfrak{B}_B\}_{B\in\Theta}$, где $\mathfrak{B}_B = [\{\rho_\alpha(x_1, x_2)\,|\,\alpha \in B\}]$.

Тогда справедливы следующие леммы.

Лемма 1′. *Существует гомоморфизм $\mathscr{H}$: $\mathfrak{B}_B \to \mathfrak{P}_k$.*

Доказательство. Очевидно.

Лемма 2′. *Для любого $B \in \Theta$ любой базис в $\mathfrak{B}_B$ отличается от множества $\{\rho_\alpha(x_1, x_2)\,|\,\alpha \in B\}$ лишь переименованием переменных у функций $\rho_\alpha(x_1, x_2)$ (без отождествления).*

Доказательство. Никакая из функций $\rho_\alpha(x_1, x_2)$ не принимает значения $k+1$, а значение $k+2$ принимает лишь при $x_1 = k+1$ и $x_2 = k+1$. Поэтому никакая суперпозиция глубины $l \geqslant 2$ над множеством $\{\rho_\alpha(x_1, x_2)\,|\,\alpha \in B\}$ не принимает значения $k+2$. Отметим, что понятие глубины над множеством $\{\rho_\alpha(x_1, x_2)\,|\,\alpha \in B\}$ вводится аналогично понятию глубины над множеством, состоящим из одной функции. Лемма 2′ доказана.

Лемма 3′. *Замкнутые классы $\mathfrak{M}_\alpha = [\{\rho_\alpha(x_1, x_2)\}]$ и $\mathfrak{M}_\gamma = [\{\rho_\gamma(x_1, x_2)\}]$ при $\alpha \neq \gamma$ не сравнимы.*

Доказательство. Пусть существует гомоморфизм $\mathscr{H}$: $\mathfrak{M}_\alpha \to \mathfrak{M}_\gamma$. Тогда либо 1) $\mathscr{H}(\rho_\alpha(x_1, x_2)) = \rho_\gamma(y_1, y_2)$, либо 2) $\mathscr{H}(\rho_\alpha(x_1, x_2)) = \rho_\gamma(y_2, y_1)$. Рассмотрим случай 1). Положим:

$$f_\alpha(x) = \rho_\alpha(x, x), \quad f_\alpha^m(x) = \underbrace{f_\alpha(\ldots f_\alpha}_{m}(x)\ \ldots), \quad F_\alpha^m(x) = \rho_\alpha\left(f_\alpha^m(x),\ x\right),$$

$$f_\gamma(y) = \rho_\gamma(y, y), \quad f_\gamma^m(y) = f_\gamma(\ldots f_\gamma(y)\ \ldots),$$

$$F_\gamma^m(y) = \rho_\gamma\left(f_\gamma^m(y),\ y\right).$$

Тогда $\mathscr{H}\left(F_\alpha^m(x)\right) = F_\gamma^m$. Из того, что $\alpha \neq \gamma$, следует, что $\exists i \in N\,(\alpha_i \neq \gamma_i)$. Не ограничивая общности, считаем, что $\alpha_i = 1$, $\gamma_i = 0$. Пусть $m = p_{i+k^k}$. Тогда существует $u(x)$, принимающая значения из $\{1, \ldots, k\}$, такая, что

$$F_\alpha^m(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ u(x), & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant k, \\ f_{p_{2(i+k^k)}}(x), & \text{если } x > k; \end{cases}$$

$$F_\gamma^m(y) = h(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0, \\ u(y), & \text{если } 1 \leqslant y \leqslant k, \\ f_{p_{2(i+k^k)-1}}(y), & \text{если } y > k. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность функций: $u(x)$, $u^2(x) = u(u(x))$, $u^3(x) = u(u(u(x)))$, ..., $u^{(n)}(x) = u(u \ldots u(x) \ldots)$, ... Тогда существуют t и s такие, что $u^t(x) = u^s(x)$, $t < s \leqslant k^k$. Положим $p = p_{(2i+k^k)}$, $q = p_{2(i+k^k)-1}$, p и q взаимно просты. Рассмотрим функции: $g^t(x) = g_1(x)$, $h_1(y) = h^t(y)$, $g^{t+p(s-t)}(x) = g_2(x)$, $h^{t+p(s-t)}(y) = h_2(y)$. Тогда $h_1(y) \neq h_2(y)$. Но должно $\mathscr{H}(g_1(x)) = h_1(y)$, $\mathscr{H}(g_2(x)) = h_2(y)$, $g_1(x) = g_2(x)$. Противоречие. Осталось рассмотреть случай 2). Для функции $G_\alpha^m(x) = \rho_\alpha(x, f_\alpha^m(x))$, где $m = p_{1+k^k}$, получаем следующее: $\mathscr{H}(G_\alpha^m(x)) = F_\gamma^m(y)$, где $F_\gamma^m(y) = \rho_\gamma(f_\gamma^m(y), y)$. Но $G_\alpha^m(x)$ при $x > k$ тождественно равна 0, в то время, как $F_\gamma^m(y)$ при $y > k$ равна одной из двух функций: $f_{p_{2(1+k^k)}}(y)$ или $f_{p_{2(1+k^k)-1}}(y)$. Противоречие: множество $[\{G_\alpha^m(x)\}]$ содержит не более, чем k^k функций, зависящих от переменной x, тогда как $[\{F_\gamma^m(y)\}]$ содержит больше k^k функций, зависящих от переменной y. Лемма 3′ доказана.

Аналогично определению полной и неполной глубины суперпозиции над множеством из одной функции можно ввести понятия полной и неполной глубины суперпозиции над множеством $\{\rho_\alpha(x_1, x_2) \mid \alpha \in B\}$.

Аналогично леммам 4 и 5 доказываем леммы 4′ и 5′.

Лемма 4′. *Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{B}_B$ имеет неполную глубину над множеством $\{\rho_\alpha(x_1, x_2) \mid \alpha \in B\}$. Тогда $f(x, \ldots, x) = g(x)$ принимает ненулевое значение лишь на конечном множестве.*

Лемма 5′. *Для любой функции $h(x_1, x_2)$ из $\mathfrak{B}_B$, имеющей полную глубину l, и для любых $m \geqslant 2$ и $i > k^k$ при $x_1 = x_2 + m \cdot p_i$, где $x_2 > k$, и при $x_2 = x_1 + m \cdot p_i$, где $x_1 > k$, функция $h(x_1, x_2)$ тождественно равна 0, т. е. при $x > k$, $i > k^k$, $m \geqslant 2$ имеем равенство:*

$$h(x, x + m \cdot p_i) = h(x + m \cdot p_i, x) \equiv 0.$$

Докажем вторую часть теоремы 4. От противного предположим, что при $B \neq B'$ имеет место отношение: $\mathfrak{B}_{B'}$ делится на $\mathfrak{B}_B$. Тогда существует гомоморфизм $\mathscr{H}$: $\mathfrak{B}'_{B'} \to \mathfrak{B}_B$, где $\mathfrak{B}'_{B'} \subseteq \mathfrak{B}_{B'}$. Из того, что $B \neq B'$, следует, что существует β такое, что $\beta \notin B'$, но $\beta \in B$. Пусть $\psi(x_1, x_2) \in \mathfrak{B}'_{B'}$ такова, что $\mathscr{H}(\psi(x_1, x_2)) = \rho_\beta(y_1, y_2)$, где функция $\rho_\beta(y_1, y_2)$ из $\mathfrak{B}_B$. Тогда $\psi(x_1, x_2)$ не может иметь глубину 1 над множеством $\{\rho_\alpha(x_1, x_2) \mid \alpha \in B'\}$ (иначе возникает противоречие с леммой 3′). Следовательно, $\Gamma(\psi) \geqslant 2$. Если глубина $\psi(x_1, x_2)$ неполная, то функция $f(x) = \psi(x, x)$ порождает конечное множество функций от переменной x и отображается при гомоморфизме $\mathscr{H}$ на $g(y) = \rho_\beta(y, y)$, которая порождает бесконечное множество функций, зависящих от переменной y. Противоречие. Следовательно, глубина $\psi(x_1, x_2)$ полная. Поэтому $f(x)$ при $x > k$ имеет вид $x + l$, где $l \geqslant 2$.

Выберем i такое, что $i > k^k$. Рассмотрим $f^{p_i}(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{p_i}(x) \ldots))$.

При $x > k$ имеем: $f^{p_i}(x) = x + l \cdot p_i$. Тогда $F(x) = \psi(f^{p_i}(x), x)$ при $x > k$ равна 0. Но $G_\beta(y) = \rho_\beta(g^{p_i}(y), y)$ при $y > k$ равна одной из функций $f_{p_{2i}}(y)$ или $f_{p_{2i-1}}(y)$, Так как $p_{2i} > p_{2i-1} > p_i > k^k$, то замкнутый класс $[\{G_\beta(y)\}]$ содержит более k^k функций, зависящих от переменной y, в то время как замкнутый класс $[\{F(x)\}]$ содержит не более k^k функций, зависящих от переменной x. Противоречие с тем, что $\mathscr{H}(F(x)) = G_\beta(y)$. Вторая часть теоремы 4 доказана.

ГЛАВА 2
О СВОЙСТВАХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ $\mathscr{L}_k^l$ и $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^l$

§ 1. Континуальность $\mathscr{L}_k^l$ и $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^l$ при $l \geqslant k+2$

При $l \geqslant k+2$ рассмотрим следующую систему функций из $\mathfrak{P}_l$, являющуюся видоизменением функций из известного класса (см. [10]).

Пусть $i \in N \backslash \{1\}$. Тогда

$$f_i(x_1, \ldots, x_i) = \begin{cases} \max(x_1, x_2) + 1 \pmod k, & \text{если } x_j \in E_k \text{ при } j = 1, \ldots, i, \\ l-2, & \text{если существует } j,\ j = 1, \ldots, i, \text{ такое, что } x_j = l-2, \text{ а все остальные } x_m,\ m \neq j, \text{ равны } l-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — замкнутый класс из $\mathfrak{P}_l$, порожденный системой функций $\mathfrak{F} = \{f_i(x_1, \ldots, x_i) \mid i \in N \backslash \{1\}\}$, т. е. $\mathfrak{B} = [\mathfrak{F}]$. Докажем, что эта система функций есть единственный счетный базис класса $\mathfrak{B}$. Для доказательства достаточно показать, что $\mathfrak{B}$ гомоморфно отображается на замкнутый класс $\mathfrak{M}_3$ из $\mathfrak{P}_3$, который порождается следующей системой функций ([10]) $g_i(y_1, \ldots, y_i)$, $i \in N \backslash \{1\}$:

$$g(y_1, \ldots, y_i) = \begin{cases} 1, & \text{если существует } j,\ j = 1, \ldots, i \text{ такой. что } y_j = 1, \text{ а все остальные } y_m,\ m \neq j, \text{ равны } 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Действительно, класс $\mathfrak{B}$ лежит в предполном в $\mathfrak{P}_l$ классе $U_{\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2}$ типа U (см. [8]) всех функций, сохраняющих разбиение множества E_l на три непересекающихся множества $\mathscr{E}_0 = \{0, 1, \ldots, l-3\}$, $\mathscr{E}_1 = \{l-2\}$, $\mathscr{E}_2 = \{l-1\}$. Как показано в [8], класс $U_{\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2}$ можно гомоморфно отобразить на $\mathfrak{P}_3$, т. е. существует гомоморфизм $\mathscr{H}$: $U_{\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2} \to \mathfrak{P}_3$. Класс $\mathfrak{B}$ при этом гомоморфизме отобразится на замкнутый класс $\mathfrak{M}_3 \subset \mathfrak{P}_3$, причем $\mathscr{H}(f_i) = g_i$ для всех $i \in N \backslash \{1\}$. Система функций $\{g_i(y_1, \ldots, y_i) \mid i \in N \backslash \{1\}\}$ является базисом класса $\mathfrak{M}_3$, следовательно, никакая из функций f_i не может быть выражена через остальные функции системы $\mathfrak{F}$.

Так как класс функций $\mathfrak{B}$ лежит в предполном в $\mathfrak{P}_l$ классе $T_{E_k, 0}$ типа T (см. [8]) всех функций, сохраняющих множество $E_k \subset E_l$, то, как показано в [8], класс $T_{E_k, 0}$ можно гомоморфно отобразить на $\mathfrak{P}_k$, т. е. существует гомоморфизм $\mathscr{H}_1$: $T_{E_k, 0} \to \mathfrak{P}_k$. При этом гомоморфизме для всех $i \in N \backslash \{1\}$ функции $\mathscr{H}_1(f_i) = h_i$ будут функциями, отличающимися от функции Вебба $v_k(y_1, y_2) = \max(y_1, y_2) + 1 \pmod k$ лишь, быть может, фиктивными переменными, т. е. можно написать равенство:

$$h_i(y_1, y_2, \ldots, y_i) = \max(y_1, y_2) + 1 \pmod k,$$

или, с полной строгостью:

$$h_i(y_1, \ldots, y_i) = \max\left(e_1^i(y_1, \ldots, y_i), y_2\right) + 1 \pmod k.$$

Поэтому замкнутый класс $\mathfrak{B}$ отобразится при гомоморфизме $\mathscr{H}_1$ на $\mathfrak{P}_k$.

Для любого $\mathscr{J} \subseteq N \backslash \{1\}$, $\mathscr{J} \neq \varnothing$, рассмотрим замкнутый класс $\mathfrak{B}_{\mathscr{J}} \subseteq \mathfrak{B}$, который порождается системой функций $\{f_j(x_1, \ldots, x_j) \mid j \in \mathscr{J}\}$. Таких классов континуум. Каждый из них при гомоморфизме $\mathscr{H}_1$ отображается на $\mathfrak{P}_k$. Они не изоморфны друг другу. Таким образом, доказана

Теорема 5. *При $l \geqslant k+2$ частично упорядоченное множество $\mathscr{L}_k^l$ содержит континуум попарно не изоморфных замкнутых классов.*

Замечание 1. Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}_k$ — замкнутый класс, который замкнут и относительно операции введения фиктивного переменного. Пусть $l \geqslant k+2$. Тогда можно показать, что и частично упорядоченное множество $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^l$ также содержит континуум попарно не изоморфных замкнутых классов.

§ 2. Бесконечность $\mathscr{L}_k^l$ и $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^l$ при $l = k+1$

Пусть $l = k+1$. Рассмотрим следующую систему функций из $\mathfrak{P}_l$, $f_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1})$, $\mu \in N \backslash \{1, 2\}$:

$$f_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1}) = \begin{cases} \max(x_1, x_2) + 1 \pmod k, & \text{если } x_j \in E_k \text{ при } j = 1, \ldots, \mu+1, \\ l-1, & \text{если из } \mu+1 \text{ переменных } x_1, \ldots, x_{\mu+1} \text{ по крайней мере } \mu \text{ переменных приняли значение } l-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{B}_3$ — замкнутый класс в $\mathfrak{P}_l$, порожденный системой функций $\mathfrak{F}_3 = \{f_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1}) \mid \mu \in N \backslash \{1, 2\}\}$, т. е. $\mathfrak{B}_3 = [\mathfrak{F}_3]$. Класс $\mathfrak{B}_3$ лежит в предполном классе $U_{\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1}$ типа U, где $\mathscr{E}_0 = E_k$, $\mathscr{E}_1 = \{l-1\}$. Существует гомоморфизм (см. [8]) $\mathscr{H}\colon U_{\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1} \to \mathfrak{P}_2$. При этом гомоморфизме класс $\mathfrak{B}_3$ отображается на класс $F_6^3 \subset \mathfrak{B}_2$ — класс всех монотонных α-функций, удовлетворяющих условию $\langle A^3 \rangle$ (см. [9]).

Рассмотрим классы $\mathfrak{B}_p \subseteq \mathfrak{B}_3$, $p \in N \backslash \{1, 2\}$, которые порождаются системой функций $\mathfrak{F}_p = \{f_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1}) \mid \mu \in N \backslash \{1, 2, \ldots, p-1\}\}$, т. е. $\mathfrak{B}_p = [\mathfrak{F}_p]$. При гомоморфизме $\mathscr{H}$ класс $\mathfrak{B}_p$ отображается на класс F_6^p, $F_6^p \subset \mathfrak{P}_2$ — класс всех монотонных α-функций, удовлетворяющих условию $\langle A^p \rangle$. Известно (см. [9]), что класс F_6^p имеет базис:

$$h_p(x_1, \ldots, x_{p+1}) = \bigvee_{i=1}^{p+1} x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{p+1},$$

а также то, что классы F_6^p образуют бесконечно убывающую цепь классов $F_6^3 \supset F_6^4 \supset \ldots \supset F_6^p \supset \ldots$ При гомоморфизме $\mathscr{H}$ имеем: $\mathscr{H}(f_\mu) = h_\mu$, $\mu \geqslant 3$. Функция $h_q(x_1, \ldots, x_{q+1})$, $q \geqslant 3$, не выражается через множество всех функций $\{h_p(x_1, \ldots, x_{p+1}),\ p > q\}$, следовательно, и функция $f_q(x_1, \ldots, x_{q+1})$ не выражается через множество всех функций $\{f_p(x_1, \ldots, x_{p+1}),\ p > q\}$. Учитывая то, что класс $\mathfrak{B}_3$ лежит в предполном в $\mathfrak{P}_l$ классе $T_{E_k, 0}$ типа T (классе всех функций, сохраняющих множество E_k), который гомоморфно отображается на $\mathfrak{P}_k$, т. е. существует гомоморфизм $\mathscr{H}_1\colon T_E \to \mathfrak{P}_k$, получаем $\mathscr{H}_1(\mathfrak{B}_3) = \mathfrak{P}_k$, поскольку $\mathscr{H}_1(f_\mu) = g_\mu(y_1, \ldots, y_{\mu+1}) = \max(y_1, y_2) + 1 \pmod k$ — функция Вебба в $\mathfrak{P}_k$. Аналогично показываем, что $\mathscr{H}_1(\mathfrak{B}_p) = \mathfrak{P}_k$ и для всех $p \in N \backslash \{1, 2, 3\}$. Классы $\mathfrak{B}_{p_1}$ и $\mathfrak{B}_{p_2}$ при $p_1 > p_2$ не изоморфны: число функций от $p_2 + 1$ переменных $x_1, \ldots, x_{p_2+1}$ у них различно. Итак, доказана

Теорема 6. *При $l = k+1$ частично упорядоченное множество $\mathscr{L}_k^l$ содержит бесконечное число попарно не изоморфных классов.*

Следует отметить, что бесконечность множества в $\mathscr{L}_2^3$ вытекает из построений работы [4].

Замечание 2. Пусть замкнутый класс $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}_k$ таков, что он замкнут и относительно операции введения фиктивного переменного. Пусть $l = k + 1$. Тогда можно показать, что и частично упорядоченное множество $\mathscr{L}^l_{\mathfrak{M}}$ также содержит бесконечное число попарно не изоморфных замкнутых классов.

§ 3. Конечность числа максимальных классов в $\mathscr{L}^l_k$ и конечность числа их гомоморфизмов на $\mathfrak{P}_k$

Теорема 7. *Каждый замкнутый класс $\mathfrak{N}$ из частично упорядоченного множества $\mathscr{L}^l_k$ содержится в некотором максимальном замкнутом классе из $\mathscr{L}^l_k$ и содержит некоторый минимальный замкнутый класс из $\mathscr{L}^l_k$. Число максимальных и минимальных классов из $\mathscr{L}^l_k$ конечно. Каждый максимальный класс из $\mathscr{L}^l_k$ имеет конечное число гомоморфизмов на $\mathfrak{P}_k$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}_l$ гомоморфно отображается на $\mathfrak{P}_k$ (при $l > k$ $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{P}_l$ см. [5]), т. е. существует гомоморфизм $\mathscr{H}\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{P}_k$. Тогда существует k подмножеств множества всех одноместных функций из $\mathfrak{P}_l$: $\mathscr{E}^0 = \left\{e^0_1(x), \ldots, e^0_{m_0}(x)\right\}$, $\mathscr{E}^1 = \left\{e^1_1(x), \ldots, e^1_{m_1}(x)\right\}$, $\ldots$, $\mathscr{E}^{k-1} = \left\{e^{k-1}_1(x), \ldots, e^{k-1}_{m_{k-1}}(x)\right\}$ таких, что $\mathscr{E}^j$ есть полный гомоморфный прообраз функции $j(y) \in \mathfrak{P}_k$, тождественно равной j. Кроме того, существуют множества $\mathscr{E}^k, \ldots, \mathscr{E}^{k^k-1}$, которые отображаются на оставшиеся $k^k - k$ одноместных функций из $\mathfrak{P}_k$, зависящих от переменной y.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{P}_l$ сохраняет систему подмножеств $\mathscr{E}^0, \ldots, \mathscr{E}^{k-1}$, если для любого набора $(j_1, \ldots, j_n)$ (где $j_m \in E_k$ для любого $m = 1, \ldots, n$) существует $j \in E_k$ такое, что для любых функций $e^{j_1}_{s_1}(x) \in \mathscr{E}^{j_1}$, $e^{j_2}_{s_2}(x) \in \mathscr{E}^{j_2}$, $\ldots$, $e^{j_n}_{s_n}(x) \in \mathscr{E}^{j_n}$, где s_i, $i = 1, \ldots, n$, принимает значения от 1 до m_{j_i}, верно соотношение:

$$f\left(e^{j_1}_{s_1}(x), e^{j_2}_{s_2}(x), \ldots, e^{j_n}_{s_n}(x)\right) \in \mathscr{E}^j.$$

В дальнейшем мы широко будем пользоваться общепринятой логической символикой, к использованию которой мы уже прибегали. Тогда приведенное определение можно записать в следующем виде:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \text{ сохраняет систему множеств } \mathscr{E}^0, \ldots, \mathscr{E}^{k-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall (j_1, \ldots, j_n) \in E^n_k \exists j \in E_k \forall s_1 = 1, \ldots, m_{j_1} \forall s_2 =$$
$$= 1, \ldots, m_{j_2} \ldots \forall s_n = 1, \ldots, m_{j_n} \left(f\left(e^{j_1}_{s_1}(x), \ldots, e^{j_n}_{s_n}(x)\right) \in \mathscr{E}^j\right).$$

Очевидно, что любая функция f из $\mathfrak{B}$ сохраняет систему множеств $\mathscr{E}^0, \ldots, \mathscr{E}^{k-1}$. Множество $\mathfrak{S}$ всех селекторов также принадлежит множеству всех функций, сохраняющих систему множеств $\mathscr{E}^0, \ldots, \mathscr{E}^{k-1}$, которое мы обозначим через $U_{\mathfrak{B}}$. Можно доказать, что $U_{\mathfrak{B}}$ замкнутый класс. Докажем, что существует гомоморфизм $\mathscr{K}\colon U_{\mathfrak{B}} \to \mathfrak{P}_k$. Действительно, пусть $g(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $U_{\mathfrak{B}}$. Поставим в соответствие $g(x_1, \ldots, x_n)$ такую функцию $h(y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathfrak{P}_k$, что истинна формула:

$$\forall (j_1, \ldots, j_n) \in E^n_k \exists j \in E_k (h(j_1, \ldots, j_n) = j) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall s_1 = 1, \ldots, m_{j_1} \ldots \forall s_n = 1, \ldots, m_{j_n} \left(g\left(e^{j_1}_{s_1}(x), \ldots, e^{j_n}_{s_n}(x)\right) \in \mathscr{E}^j\right).$$

Это определение корректно в силу того, что $g(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет систему множеств $\mathscr{E}^0, \ldots, \mathscr{E}^{k-1}$. Можно проверить, что это соответствие есть гомоморфизм $U_{\mathfrak{B}}$ на $\mathfrak{P}_k$.

Докажем, что $U_{\mathfrak{B}}$ предикатно описывается. Рассмотрим следующие наборы длины l:

$$\forall i \in E_k \forall j = 1, \ldots, m_i \left(e_j^i(0), e_j^i(1), \ldots, e_j^i(l-1)\right).$$

Рассмотрим следующие множества R_i, где $i \in E_k$:

$$R_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} \left(e_j^i(0), e_j^i(1), \ldots, e_j^i(l-1)\right).$$

Для любого $i \in E_k$ рассмотрим множество $R_i \times R_i$. Будем считать, что множество $R_i \times R_i$ состоит из наборов длины $2l$. Рассмотрим предикат R, для которого множество наборов, на которых он равен 1, есть множество $\bigcup_{i=0}^{k-1} R_i \times R_i$. Класс $U_{\mathfrak{B}}$ таков, что выполняется равенство $U_{\mathfrak{B}} = U(R)$. Предикатов местности $2l$ на множестве E_l конечное число, следовательно, и максимальных классов, которые можно отобразить на $\mathfrak{P}_k$ конечное число. В каждом из этих максимальных классов содержится конечное число одноместных функций, зависящих от переменной x. Это множество можно лишь конечным числом способов разбить на непересекающиеся подмножества функций $\mathscr{E}^0, \ldots$ $\ldots, \mathscr{E}^{k-1}, \mathscr{E}^k, \ldots, \mathscr{E}^{k^k-1}$, следовательно, и гомоморфизмов у каждого из максимальных классов лишь конечное число.

Конечность числа минимальных классов очевидна. Теорема 7 доказана.

Замечание 3. Можно доказать, что все те классы в $\mathfrak{P}_l$, которые изоморфны $\mathfrak{P}_k$ (описание этих классов см. в [5]), являются минимальными. Кроме изоморфных классов среди минимальных есть и другие. Например, можно показать, что в $\mathscr{L}_2^3$ существует 15 минимальных классов, из них 6 изоморфных $\mathfrak{P}_2$ (причем изоморфных с сохранением операции введения фиктивного переменного, см. [5]). Минимальные классы, описанные в работе [5], мы будем называть мальцевскими. Отметим, что описание всех замкнутых классов в $\mathfrak{P}_l$, изоморфных $\mathfrak{P}_k$ без операции введения фиктивного переменного, не получено.

Замечание 4. Так как $U_{\mathfrak{B}}$ содержит все селекторы, то гомоморфизм $\widetilde{\mathscr{H}}\colon U_{\mathfrak{B}} \to \mathfrak{P}_k$ таков, что он сохраняет и операцию введения фиктивной переменной, даже если гомоморфизм $\mathscr{H}$ не сохранял эту операцию.

Замечание 5. Теорема 7 остается верной, если потребовать дополнительно, чтобы гомоморфизм $\mathscr{H}$ сохранял операцию введения фиктивной переменной.

Аналогично доказательству теоремы 7 можно доказать и следующую теорему 8.

Теорема 8. *В частично упорядоченном множестве $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^l$, где $\mathfrak{M}$ предикатно описывается и содержит все константные функции $j(x) \equiv j$ из $\mathfrak{P}_k$, каждый элемент подчинен некоторому максимальному, который предикатно описывается, и число этих максимальных конечно. Каждый из этих максимальных классов имеет лишь конечное число гомоморфизмов на $\mathfrak{M}$. Если класс $\mathfrak{M}$ обладает конечным базисом, то каждый класс из $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^l$ содержит некоторый минимальный замкнутый класс из $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^l$ и число этих минимальных конечно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}_l$ и существует гомоморфизм $\mathscr{H}$: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}$ предикатно описывается, то существует m-график $\Gamma_{\mathfrak{M}}^m$

класса $\mathfrak{M}$ такой, что $\mathfrak{M} = U(\Gamma^m_{\mathfrak{M}})$. Доказательство этого факта приведено, например, в [1]. Напомним, что m-графиком класса $\mathfrak{M}$ называется следующий k^m-местный предикат S. Берем все k^m наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_k^m$ и выписываем их в лексикографическом порядке $\tilde{\alpha}_0, \ldots, \tilde{\alpha}_{k^m-1}$. Берем множество всех m-местных функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_m$, из класса $\mathfrak{M}$: $\{f_0(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_{t-1}(x_1, \ldots, x_m)\}$. Обозначим это множество через $\mathfrak{M}^m$. Тогда множество L всех t наборов $\left(f_i(\tilde{\alpha}_0), \ldots, f_i(\tilde{\alpha}_{k^m-1})\right)$, $i = 0, \ldots, t-1$, и есть то множество, на котором предикат S обращается в 1, т. е. $E_S = L$.

Так как $\mathfrak{M}$ предикатно описывается и содержит все константы, то мы можем считать, что $f_0(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0, \ldots, f_{k-1}(x_1, \ldots, x_m) \equiv k-1$.

Символом $\mathscr{H}^{-1}(f_i)$ мы обозначим полный гомоморфный прообраз функции f_i. Пусть $\mathscr{E}^i = \mathscr{H}^{-1}(f_i)$, где $i = 0, \ldots, t-1$. Пусть $E_t = \{0, \ldots, t-1\}$. Пусть $\mathscr{E}^i = \left\{g_1^i(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_{p_i}^i(y_1, \ldots, y_m)\right\}$, $i = 0, \ldots, t-1$.

Рассмотрим $\mathscr{E} = \bigcup\limits_{i=0}^{t-1} \mathscr{E}^i$. *Функция* $g(y_1, \ldots, y_n)$ *из* $\mathfrak{P}_l$ *сохраняет систему функций* $\mathscr{E}^i$, $i \in E_t$, если для любого набора $(j_1, \ldots, j_n) \in E_t^n$ существует $j \in E_t$ такое, что для любых функций $g_{s_1}^{j_1}(y_1, \ldots, y_m) \in \mathscr{E}^{j_1}, \ldots, g_{s_n}^{j_n}(y_1, \ldots, y_m) \in \mathscr{E}^{j_n}$ справедливо следующее соотношение:

$$g\left(g_{s_1}^{j_1}(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_{s_n}^{j_m}(y_1, \ldots, y_m)\right) \in \mathscr{E}^j.$$

Если $g(y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathfrak{B}$, то можно доказать, что $g(y_1, \ldots, y_n)$ сохраняет систему функций $\mathscr{E}^i$, $i = 0, \ldots, t-1$.

Заметим, что любая функция из $\mathfrak{B}$ сохраняет также и систему функций $\mathscr{E}^i$, $i = 0, \ldots, k-1$. Положим $\tilde{\mathscr{E}}$ равным $\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \mathscr{E}^i$.

Рассмотрим класс $U_{\mathfrak{B}}$ всех функций из $\mathfrak{P}_l$ таких, что они, во-первых, сохраняют систему функций $\mathscr{E}^i$, $i \in E_t$, а во-вторых, сохраняют и систему функций $\mathscr{E}^i$, $i \in E_k$.

Определим отображение $\tilde{\mathscr{H}}$ класса $U_{\mathfrak{B}}$ на некоторый класс $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{P}_k$. Если $g(y_1, \ldots, y_n)$ принадлежит $U_{\mathfrak{B}}$, то поставим ей в соответствие функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{P}_k$ такую, что является истинной следующая формула:

$$\forall (j_1, \ldots, j_n) \in E_k^n \, \exists j \in E_k (f(j_1, \ldots, j_n) = j \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall s_1 = 1, \ldots, p_{j_1} \ldots \forall s_n = 1, \ldots, p_{j_n} \left(g\left(g_{s_1}^{j_1}(y_1, \ldots, y_m), \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots, g_{s_n}^{j_n}(y_1, \ldots, y_m)\right) \in \mathscr{E}^j\right).$$

Это определение корректно. так как функция $g(y_1, \ldots, y_n)$ сохраняет систему множеств $\mathscr{E}^i$, $i = 0, \ldots, k-1$. Для всех $g \in \mathfrak{B}$ имеем: $\tilde{\mathscr{H}}(g) = \mathscr{H}(g)$. Поэтому $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$. Можно проверить, что $\tilde{\mathscr{H}}$ есть гомоморфизм $U_{\mathfrak{B}}$ на $\mathfrak{N}$.

Докажем, что $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $\mathfrak{N}$. Тогда существует $\psi(y_1, \ldots, y_n)$ из $U_{\mathfrak{B}}$ такая, что $\tilde{\mathscr{H}}(\psi) = \varphi$. Докажем, что φ сохраняет предикат $\Gamma^m_{\mathfrak{M}}$. Действительно, возьмем любые n наборов из $\Gamma^m_{\mathfrak{M}}$. Им соответствуют функции $f_{q_1}(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_{q_n}(x_1, \ldots, x_m)$ из $\mathfrak{M}^m$. Тогда существуют функции $g_{q_1}(y_1, \ldots, y_m)$ из $\mathscr{E}^{q_1}, \ldots, g_{q_n}(y_1, \ldots, y_m)$ из $\mathscr{E}^{q_n}$ такие, что

$\mathscr{H}(q_{q_i}) = \widetilde{\mathscr{H}}(q_{qi}) = f_{q_i}$. Так как согласно определению класса $U_{\mathfrak{B}}$ функция $\psi(y_1, \ldots, y_n)$ сохраняет систему $\mathscr{E}^i$, $i=0, \ldots, t-1$, то существует j, $j \in E_i$, такое, что имеем следующее: $\psi(g_{q_1}(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_{q_n}(y_1, \ldots, y_m)) = F(y_1, \ldots, y_m) \in \mathscr{E}^j$. Тогда $\widetilde{\mathscr{H}}(F) = f_j$. С другой стороны, $\widetilde{\mathscr{H}}(F) = \varphi(f_{q_1}, \ldots, f_{q_n})$, что и означает, что φ сохраняет предикат Следовательно, $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

Определим следующий предикат P местности $4 \cdot l^m$, которым описывается класс $U_{\mathfrak{B}}$. Пусть $g(y_1, \ldots, y_m)$ из $\mathscr{E}$. Рассмотрим набор ее значений длины $r = l^m$: $(g(\widetilde{\beta}_0), \ldots, g(\widetilde{\beta}_{r-1}))$, где $\widetilde{\beta}_0, \ldots, \widetilde{\beta}_{r-1}$ — все наборы длины m из E_l, выписанные в лексикографическом порядке. Пусть M — множество всех таких наборов. Определим предикат R местности r такой, что $E_R = M$. Тогда система множеств $\mathscr{E}^i$, $i = 0, \ldots, t-1$, задает эквивалентность ρ на M. Определим предикат R_ρ местности $2r$:

$$1 = R_\rho(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, \delta_1, \ldots, \delta_r) \text{ тогда и только тогда, когда наборы}$$
$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \text{ и } (\delta_1, \ldots, \delta_r) \text{ эквивалентны относительно } \rho$$
$$\text{и при этом } R(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) = R(\delta_1, \ldots, \delta_r) = 1.$$

Пусть $\widetilde{N}$ — множество всех наборов длины r значений всех функций из $\widetilde{\mathscr{E}} = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \mathscr{E}^i$. Определим предикат Q такой, что $E_Q = \widetilde{N}$. Тогда система множеств $\mathscr{E}^i$, $i = 0, \ldots, k-1$, задает эквивалентность π на $\widetilde{N}$. Аналогично определению предиката R_ρ определим предикат Q_π. Рассмотрим множество $E_{R_\rho} \times E_{Q_\pi}$. Будем считать, что оно состоит из наборов длины $4r$. Определим предикат P такой, что $E_P = E_{R_\rho} \times E_{Q_\pi}$. Тогда предикат P таков, что $U_{\mathfrak{B}} = U(P)$.

Так как предикатов местности $4l^m$ на E_l конечное число, то и классов вида $U_{\mathfrak{B}}$ конечное число. Среди них можно выбрать конечное число максимальных по включению. У каждого из этих максимальных конечное число функций от переменных $y_1, \ldots, y_m$, которое можно конечным числом способов разбить на t множеств $\mathscr{E}^0, \ldots, \mathscr{E}^{t-1}$. Отсюда и следует, что число гомоморфизмов класса $U_{\mathfrak{B}}$ на $\mathfrak{M}$ конечно.

Утверждение теоремы 8 о свойствах минимальных классов из $\mathscr{L}^l_{\mathfrak{M}}$, когда $\mathfrak{M}$ имеет конечный базис, очевидно.

В заключение отметим, что всевозможные свойства, о которых шла речь при доказательстве теоремы 8, а именно: возможность гомоморфного отображения класса $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{P}_l$, задаваемого предикатом местности $4l^m$, на класс $\mathfrak{M}$, заданный m-графиком $\Gamma^m_{\mathfrak{M}}$; включение одного класса $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{P}_l$, описываемого предикатом местности $4l^m$, в другой класс $\mathfrak{G}$ из $\mathfrak{P}_l$, также описываемый некоторым предикатом местности $4l^m$; возможность гомоморфного отображения класса из $\mathfrak{P}_l$, заданного конечным базисом, на класс $\mathfrak{M}$, заданный m-графиком; включение одного класса из $\mathfrak{P}_l$, имеющего конечный базис, в другой класс из $\mathfrak{P}_l$, также имеющий конечный базис,— все эти свойства алгоритмически проверяются. Теорема 8 доказана.

Замечание 6. Так как класс $U_{\mathfrak{B}}$, определенный при доказательстве теоремы 8, содержит все селекторы, то гомоморфизм $\widetilde{\mathscr{H}}$, определенный в этом доказательстве, таков, что он сохраняет и операцию введения фиктивной переменной.

Замечание 7. Теорема 8 остается верной, если потребовать дополнительно, чтобы гомоморфизм $\mathscr{H}$ сохранял операцию введения фиктивной переменной.

З а м е ч а н и е 8. Можно доказать следующее усиление теоремы 8. Пусть $\mathfrak{M}$ — предикатно описываемый класс в k-значной логике $\mathfrak{P}_k$. Рассмотрим частично упорядоченное множество $\mathscr{L}^l_{\mathfrak{M}}$ всех тех замкнутых классов в l-значной логике $\mathfrak{P}_l$, которые можно гомоморфно отобразить на замкнутый класс $\mathfrak{M}$. Тогда любой замкнутый класс из множества $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ содержится в некотором максимальном замкнутом классе из множества $\mathscr{L}^l_{\mathfrak{M}}$ и число этих максимальных классов конечно. Все эти максимальные классы предикатно описываются. Таким образом, можно не требовать наличия константных функций в предикатно описываемом классе $\mathfrak{M}$.

Отметим также, что интересен следующий вопрос. Пусть $\mathfrak{M}$ — предполный класс в k-значной логике $\mathfrak{P}_k$, $\mathscr{L}^l_{\mathfrak{M}}$ — частично упорядоченное множество тех замкнутых классов l-значной логики $\mathfrak{P}_l$, которые допускают гомоморфное отображение на замкнутый класс $\mathfrak{M}$. Верно ли тогда, что любой максимальный замкнутый класс из $\mathscr{L}^l_{\mathfrak{M}}$ содержится в некотором максимальном замкнутом классе из частично упорядоченного множества $\mathscr{L}^l_k$.

Г Л А В А 3

ОПИСАНИЕ ВСЕХ МАКСИМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В $\mathscr{L}^l_k$ И ГОМОМОРФИЗМОВ ВСЕХ ЭЛЕМЕНТОВ В $\mathscr{L}^l_k$

§ 1. Формулировка основной теоремы

Пусть E_{li}, $i=0, \ldots, k-1$,— система попарно не пересекающихся непустых подмножеств множества E_l. Пусть $E = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} E_{li}$, $E \subseteq E_l$. Тогда система множеств E_{li}, $i=0, \ldots, k-1$, задает разбиение D множества $E = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} E_{li}$. Эквивалентность на E, которую задает разбиение D, будем обозначать так: $\alpha \sim \beta \pmod D$. Символ $\nsim$ означает, что α и β не эквивалентны.

Рассмотрим замкнутый класс $T_{E,0}$ в $\mathfrak{P}_l$ типа T (см. [8]) всех функций, сохраняющих множество E. Если $E \neq E_l$, то $T_{E,0}$ есть предполный в $\mathfrak{P}_l$ класс. В классе $T_{E,0}$ рассмотрим замкнутый класс T_D всех функций, сохраняющих разбиение D, т. е.

$$f(x_1, \ldots, x_n) \in T_D \Leftrightarrow \forall \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E^n \forall \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E^n$$
$$((\exists i = 1, \ldots, n\, (\alpha_i \nsim \beta_i \pmod D)) \vee (f(\tilde{\alpha}) \sim f(\tilde{\beta}) \pmod D))).$$

Если $\forall i = 0, \ldots, k-1$ $(\# E_{li} = 1)$, то замкнутые классы T_D и $T_{E,0}$ совпадают. В противном случае можно показать, что класс T_D предполон в $T_{E,0}$, причем в случае, когда $E \neq E_l$, класс $T_{E,0}$ есть единственный предполный класс, в котором содержится класс T_D. Можно доказать, что при $\# E > k$ и $E \neq E_l$ класс $T_{E,0}$ нельзя отобразить на $\mathfrak{P}_k$, а также то, что классы вида T_D имеют базис из одной функции.

Справедлива следующая основная теорема данной работы, доказательству которой посвящена гл. 3.

Т е о р е м а 9 (о с н о в н а я т е о р е м а). *Множество всех максимальных элементов в $\mathscr{L}^l_k$ есть множество $\{T_D | D$ — разбиение подмножества E множества E_l вида $E = E_{l0} + E_{l1} + \ldots + E_{l(k-1)}\}$.*

§ 2. Вспомогательные леммы

Рассмотрим множества одноместных функций $\mathscr{E}^0, \ldots, \mathscr{E}^{k-1}$, определенные при доказательстве теоремы 7, т. е. $\mathscr{E}^i$ является полным гомоморфным прообразом константной функции $i(x) \equiv i$, $i \in E_k$.

Пусть $h(x)$ из $\mathscr{E}^0$. Через $\operatorname{Im} h$ обозначим *образ множества* E_l при отображении h. Совокупность всех элементов множества E_l, отображающих h в один и тот же элемент $a_1 \in E_l$, назовем *смежным классом* относительно h и обозначим M_1. Очевидно, различные смежные классы общих элементов не имеют, и совокупность их представляет собой некоторое разбиение множества E_l, т. е. задает некоторую эквивалентность на E_l. Рассмотрим множество всех эквивалентностей, которые задают функции из $\mathscr{E}^0$. Их конечное число. Эти эквивалентности образуют частично упорядоченное множество. Поэтому среди этих эквивалентностей можно выбрать максимальные. Возьмем одно из этих максимальных отношений эквивалентности и обозначим его через B. Эквивалентность B задает следующее разбиение: $E_l = M_1 + \ldots + M_q$, $q \geqslant 1$. Рассмотрим множество всех тех функций из $\mathscr{E}^0$, которые задают именно это разбиение, т. е. задают эквивалентности B на множестве E_l. Это множество функций есть полугруппа. Обозначим его через $\mathscr{E}_{l0}$.

Лемма 6. *Для любой функции $h(x)$ из $\mathscr{E}_{l0}$ существует такое p, что $\underbrace{h(h(\ldots h}_{p}(x)\ldots)) = h^p(x)$ такова, что $\forall m = 1, \ldots, q\big(h^p(M_m) \in M_m\big)$.*

Доказательство очевидно.

В каждом из множеств $\mathscr{E}^i$, $i = 1, \ldots, k-1$, можно выделить множество всех тех функций, которые задают то же отношение эквивалентности B, которое задают и функции из $\mathscr{E}_{l0}$. Обозначим эти множества функций через $\mathscr{E}_{li}$, где $i = 1, \ldots, k-1$. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что функции вида $g_i(h(x))$, где $h(x) \in \mathscr{E}_{l0}$, $g_i(x) \in \mathscr{E}^i$, $i = 1, \ldots, k-1$, задают требуемую эквивалентность B.

Лемма 7. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $U_{\mathfrak{B}}$, где класс $U_{\mathfrak{B}}$ определен при доказательстве теоремы 7. Тогда $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет разбиение множества $\mathscr{E}_l = \bigcup\limits_{j=0}^{k-1} \mathscr{E}_{lj}$ на подмножества $\mathscr{E}_{lj}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}_{lj} = \left\{\tilde{e}_1^j(x), \ldots, \tilde{e}_{m_j'}^j(x)\right\} \subseteq \mathscr{E}^j$, где $j = 0, \ldots, k-1$. Тогда для любого $M_i \in B$, $i = 1, \ldots, q$, имеет место равенство $\tilde{e}_r^j(M_i) = \alpha_{ir}^j$, где α_{ir}^j принадлежит E_l, $r = 1, \ldots, m_j'$. Символ $\tilde{e}_r^j(M_i)$ обозначает то общее число α_{ir}^j из E_l, которое служит значением $\tilde{e}_r^j(x)$ при $x \in M_i$. В силу того, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $U_{\mathfrak{B}}$, а следовательно, сохраняет систему множеств $\mathscr{E}^0, \ldots, \mathscr{E}^{k-1}$, имеем

$$\forall (j_1, \ldots, j_n) \in E_k^n \ \exists j \in E_k \ \forall s_1 = 1, \ldots, m_{j_1}' \ \forall s_2 = 1, \ldots, m_{j_2}' \ldots \ \forall s_n = 1, \ldots, m_{j_n}' \ \left(f\left(\tilde{e}_{s_1}^{j_1}(x), \ldots, \tilde{e}_{s_n}^{j_n}(x)\right) \in \mathscr{E}^j\right).$$

Для любого i из $\{1, \ldots, q\}$ рассмотрим следующее выражение:

$$f\left(\tilde{e}_{s_1}^{j_1}(M_i), \ldots, \tilde{e}_{s_n}^{j_n}(M_i)\right) = f\left(\alpha_{is_1}^{j_1}, \ldots, \alpha_{is_n}^{j_n}\right) \in E_l.$$

Таким образом, функция $\varphi(x) = f\left(\tilde{e}_{s_1}^{j_1}(x), \ldots, \tilde{e}_{s_n}^{j_n}(x)\right)$ принадлежит $\mathscr{E}^j$, и, кроме того, задает то же самое разбиение B множества E_l, что и функция из каждого из множеств $\mathscr{E}_{lj}$, $j \in E_k$. Поэтому $\varphi(x)$ принадлежит $\mathscr{E}_{lj}$, что и требовалось доказать. Лемма 7 доказана.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Пусть $q = 1$. Тогда множества $\mathscr{E}_{lj}$, $j = 0, \ldots, k-1$, имеют простой вид, а именно, каждое из $\mathscr{E}_{ij}$ есть объединение некоторых константных функций одного переменного из $\mathfrak{P}_i$. Пусть $x_0 \in E_i$. Рассмотрим множества

$$\left\{\tilde{e}_1^0(x_0), \ldots, \tilde{e}^0_{m'_0}(x_0)\right\} = \mathscr{E}^{x_0}_{l0}, \ldots, \left\{\tilde{e}_1^j(x_0), \ldots, \tilde{e}^j_{m'_j}(x_0)\right\} =$$

$$= \mathscr{E}^{x_0}_{lj}, \ldots, \left\{\tilde{e}_1^{k-1}(x_0), \ldots, \tilde{e}^{k-1}_{m'_{k-1}}(x_0)\right\} = \mathscr{E}^{x_0}_{l(k-1)}.$$

Положим для любого j из E_k множество E_{lj} равным множеству $\mathscr{E}^{x_0}_{lj}$. По системе множеств E_{lj}, $j = 0, \ldots, k-1$, построим класс T_D, о котором говорится в теореме 9. Тогда $U_{\mathfrak{B}} \subseteq T_D$. Сам класс T_D можно отобразить на $\mathfrak{P}_k$, а никакой из классов $\mathfrak{R}$, содержащих T_D в качестве собственного подмножества, нельзя отобразить на $\mathfrak{P}_k$ (это можно доказать), следовательно, при $q = 1$ утверждение теоремы 9 справедливо.

Пусть $q \geqslant 2$. Снова можно определить множества $\mathscr{E}^{x_0}_{lj}$, $j \in E_k$, $x_0 \in E_l$. Возможны два случая:

$$1)\ \exists x_0 \in E_l\ \forall i \in E_k\ \forall j \in E_k\left((i = j) \vee \left(\mathscr{E}^{x_0}_{li} \cap \mathscr{E}^{x_0}_{lj} = \varnothing\right)\right),$$

$$2)\ \forall x_0 \in E_l\ \exists i \in E_k\ \exists j \in E_k\ \left((i \neq j) \wedge \left(\mathscr{E}^{x_0}_{li} \cap \mathscr{E}^{x_0}_{lj} \neq \varnothing\right)\right).$$

В первом случае, положив для любого j из E_k множество E_{lj} равным множеству $\mathscr{E}^{x_0}_{lj}$, снова получим класс вида $T_D \supseteq U_{\mathfrak{B}}$, и теорема 9 будет доказана.

Второй случай распадается на следующие два подслучая:

$$\text{а)}\ \forall m \in \{1, \ldots, q\}\ \exists \alpha \in M_m\ \exists x_0 \in E_l\ \exists i \in E_k\ \exists j \in$$
$$\in E_k((i \neq j) \wedge (\alpha \in \mathscr{E}^{x_0}_{li} \cap \mathscr{E}^{x_0}_{lj})),$$

$$\text{б)}\ \exists m \in \{1, \ldots, q\}\ \forall \alpha \in M_m\ \forall x_0 \in E_l\ \forall i \in E_k\ \forall j \in$$
$$\in E_k((i = j) \vee (\alpha \notin \mathscr{E}^{x_0}_{li} \cap \mathscr{E}^{x_0}_{lj})).$$

Докажем, что подслучай 2б) невозможен. Действительно, так как

$$\forall m \in \{1, \ldots, q\}\ \forall x_0 \in M_m\ \exists i \in E_k\ \exists j \in E_k((i \neq j) \wedge (\mathscr{E}^{x_0}_{li} \cap \mathscr{E}^{x_0}_{lj} \neq \varnothing)),$$

то для каждого числа m из множества $\{1, \ldots, q\}$ мы найдем две функции $\tilde{e}^{i_m}_{s_m}(x)$ из $\mathscr{E}_{li_m}$ и $\tilde{e}^{j_m}_{r_m}(x)$ из $\mathscr{E}_{lj_m}$ такие, что имеет место следующее: $\tilde{e}^{i_m}_{s_m}(M_m) = \tilde{e}^{j_m}_{r_m}(M_m) = \beta_m$, причем $i_m \neq j_m$. Рассмотрим следующую функцию из $\mathfrak{P}_k$:

$$f(y_1, \ldots, y_q) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists m_0 \in \{1, \ldots, q\} \text{ такое, что } y_{m_0} = j_{m_0}, \text{ а для} \\ & \text{остальных } m \text{ имеем: } y_m = i_m, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Существует гомоморфизм $\widetilde{\mathscr{H}}\colon U_{\mathfrak{B}} \to \mathfrak{P}_k$. Поэтому существует функция $g(x_1, \ldots, x_q)$ из $U_{\mathfrak{B}}$ такая, что $\widetilde{\mathscr{H}}(g) = f$. Рассмотрим набор функций $\varphi_m(x) \in \mathscr{E}_{l1}$, $m \in \{1, \ldots, q\}$, $\psi(x) \in \mathscr{E}_{l0}$:

$$\varphi_m(x) = g\left(\tilde{e}^{i_1}_{s_1}(x), \tilde{e}^{i_2}_{s_2}(x), \ldots, \tilde{e}^{i_{m-1}}_{s_{m-1}}(x), \tilde{e}^{j_m}_{r_m}(x), \tilde{e}^{i_{m+1}}_{s_{m+1}}(x), \ldots, \tilde{e}^{i_q}_{s_q}(x)\right),$$

$$\psi(x) = g\left(\tilde{e}^{i_1}_{s_1}(x), \tilde{e}^{i_2}_{s_2}(x), \ldots, \tilde{e}^{i_{m-1}}_{s_{m-1}}(x), \tilde{e}^{i_m}_{s_m}(x), \tilde{e}^{i_{m+1}}_{s_{m+1}}(x), \ldots, \tilde{e}^{i_q}_{s_q}(x)\right).$$

Для любого m из $\{1, \ldots, q\}$ имеем: $\psi(M_m) = \varphi_m(M_m)$. Поэтому получаем, что в множестве $\mathscr{E}_{l0}$ содержится такая функция $\psi(x)$, которая удовлетворяет условию подслучая 2а), что противоречит предположению о том, что справедлив подслучай 2б), являющийся отрицанием подслучая 2а). Итак, осталось рассмотреть подслучай 2а).

Аналогично доказательству невозможности подслучая 2б) можно показать, что существует функция $\psi(x)$ из $\mathscr{E}_{l0}$ такая, что для любого m из $\{1, \ldots, q\}$ имеет место следующее:

$$\exists\alpha\in M_m\ \exists x_0\in E_l\big((\alpha\in\mathscr{E}_{l0}^{x_0}\cap\mathscr{E}_{l1}^{x_0})\wedge(\alpha\in\operatorname{Im}\psi)\big).$$

Для этого необходимо дословно повторить построения подслучая 2б) и взять в качестве $\psi(x)$ функцию с тем же обозначением из этого построения.

Рассмотрим множества $\mathscr{E}_0=\{0\}$, $\mathscr{E}_1=\{1, \ldots, k-1\}$ и класс $U_{\mathscr{E}_0,\mathscr{E}_1}$ в $\mathfrak{P}_k$ — класс всех функций, сохраняющих разбиение E_k на два множества $\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{E}_1$. Возьмем в $U_{\mathfrak{B}}$ полный гомоморфный прообраз класса $U_{\mathscr{E}_0,\mathscr{E}_1}$ при гомоморфизме $\widetilde{\mathscr{H}}$: $U_{\mathfrak{B}}\to\mathfrak{P}_k$. Обозначим его $\mathfrak{G}$. Можно доказать, что любая функция из класса $\mathfrak{G}$ сохраняет разбиение $\mathscr{E}_l$ на два множества функций $\mathfrak{L}_0$ и $\mathfrak{L}_1$, где $\mathfrak{L}_0=\mathscr{E}_{l0}$, $\mathfrak{L}_1=\bigcup_{j=1}^{k-1}\mathscr{E}_{lj}$. Из существования гомоморфизма $\mathscr{F}$: $U_{\mathscr{E}_0,\mathscr{E}_1}\to\mathfrak{P}_2$ следует, что класс $\mathfrak{G}$ можно гомоморфно отобразить на $\mathfrak{P}_2$, т. е. существует гомоморфизм $\mathscr{H}_1$: $\mathfrak{G}\to\mathfrak{P}_2$. Заметим, что в случае $k=2$ мы имеем: $U_{\mathfrak{B}}=\mathfrak{G}$, исходный гомоморфизм $\widetilde{\mathscr{H}}$ есть гомоморфизм $U_{\mathfrak{B}}$ на $\mathfrak{P}_2$.

Аналогично тому, как были определены множества $\mathscr{E}_{lj}^{x_0}$, $j\in E_k$, определим множества $\mathfrak{L}_0^{x_0}$ и $\mathfrak{L}_1^{x_0}$.

В каждом из множеств одноместных функций $\mathfrak{L}_0$ и $\mathfrak{L}_1$ выделим непустые подмножества $\widehat{\mathfrak{L}}_0$ и $\widehat{\mathfrak{L}}_1$ следующим образом: $\psi(x)$ из $\mathfrak{L}_0$ принадлежит $\widehat{\mathfrak{L}}_0$, если

$$\forall m\in\{1,2,\ldots,q\}\,\exists\alpha\in M_m\ \exists x_0\in E_l\big((\alpha\in\mathfrak{L}_1^{x_0}\cap\mathfrak{L}_0^{x_0})\wedge(\alpha\in\operatorname{Im}\psi)\big);$$

аналогично $\varphi(x)$ из $\mathfrak{L}_1$ принадлежит $\widehat{\mathfrak{L}}_1$, если

$$\forall m\in\{1,2,\ldots,q\}\ \exists\alpha\in M_m\ \exists x_0\in E_l\ \big((\alpha\in\mathfrak{L}_1^{x_0}\cap\mathfrak{L}_0^{x_0})\wedge(\alpha\in\operatorname{Im}\varphi)\big).$$

Непустота множеств $\widehat{\mathfrak{L}}_0$ и $\widehat{\mathfrak{L}}_1$ следует из того, что функции $\psi(x)$ и $\varphi_m(x)$, $m=1, \ldots, q$, определяемые аналогично функциям с тем же обозначением из доказательства невозможности подслучая 2б), таковы, что $\psi(x)\in\widehat{\mathfrak{L}}_0$, $\varphi_m(x)\in\widehat{\mathfrak{L}}_1$ при всех $m=1, \ldots, q$. Для доказательства $\varphi_m(x)\in\in\widehat{\mathfrak{L}}_1$ достаточно рассмотреть следующие функции $\varphi_{mn}(x)$ из $\mathfrak{L}_0$, где m фиксировано, а n пробегает все значения из множества $\{1, 2, \ldots, q\}\setminus\{m\}$: в функцию $g(x_1, \ldots, x_q)$, определенную при доказательстве невозможности подслучая 2б), необходимо подставить вместо переменных x_m и x_n функции $\tilde{e}_{r_m}^{j_m}(x)$ и $\tilde{e}_{r_n}^{j_n}(x)$ соответственно, а вместо остальных переменных (если такие останутся: $q\geqslant 2$) подставить функции $\tilde{e}_{s_p}^{i_p}(x)$, $p\in\in\{1,2,\ldots,q\}\setminus\{m,n\}$. Тогда получим:

$$\forall n\in\{1,2,\ldots,q\}\setminus\{m\}\,(\varphi_m(M_n)=\varphi_{mn}(M_n)).$$

Выделим теперь систему Θ подмножеств множества $\{1, \ldots, q\}$. Множество S принадлежит Θ тогда и только тогда, когда имеет место следующее:

$$\exists\psi(x)\in\widehat{\mathfrak{L}}_0\,\exists\varphi(x)\in\widehat{\mathfrak{L}}_1\ \forall m\in S\ \exists x_0\in E_l\ (\psi(x_0)=\varphi(x_0)\in M_m).$$

Система Θ этих множеств непуста: как следует из только что проведенных построений функций $\varphi_{mn}(x)$, подмножества $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{q\}$ принадлежат Θ.

Выберем в системе Θ одно из тех множеств, которые имеют максимальную мощность. Обозначим это множество $S_{\max}$. Очевидно, $\# S_{\max} < q$, так как в противном случае получится, что $\widehat{\mathfrak{L}}_0 \cap \widehat{\mathfrak{L}}_1 \neq \varnothing$, что противоречит существованию гомоморфизма $\mathscr{H}_1$. Не ограничивая общности, можно считать, что $S_{\max} = \{1, \ldots, q_1\}$, где $q_1 < q$. Итак, имеем следующее:

$$\exists \psi(x) \in \widehat{\mathfrak{L}}_0 \ \exists \varphi(x) \in \widehat{\mathfrak{L}}_1 \ \forall m \in S_{\max} \ \exists x_0 \in E_l \, (\psi(x_0) = \varphi(x_0) \in M_m).$$

Тогда согласно лемме 6 главы 3 имеем:

$$\exists \psi_0(x) \in \widehat{\mathfrak{L}}_0 \ \exists \varphi_1(x) \in \widehat{\mathfrak{L}}_1 \ \forall m \in S_{\max} \, (\psi_0(M_m) = \varphi_1(M_m) \in M_m).$$

Рассмотрим множество M_{q_1+1}, $q_1 < q$. Имеем: $\psi_0(M_{q_1+1}) \in M_m$, где $m > q_1$. Функция $\psi_0(x)$ принадлежит $\widehat{\mathfrak{L}}_0$, поэтому существует $\psi_1(x)$ из $\mathfrak{L}_1$ такая, что $\psi_1(M_{q_1+1}) = \psi_0(M_{q_1+1})$. Рассмотрим функцию $s(y_1, y_2)$ из $\mathfrak{P}_2$ такую, что $s(y_1, y_2) = y_1 + y_2 \pmod 2$. Пусть $h_1(x_1, x_2)$ из $\mathfrak{G}$ такая, что $\mathscr{H}_1(h_1) = s(y_1, y_2)$. Рассмотрим функции:

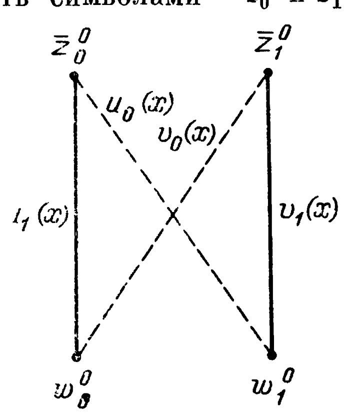
$$h_1(\varphi_1(x), \ \psi_0(x)) = u_1(x) \in \mathfrak{L}_1,$$
$$h_1(\psi_0(x), \ \psi_0(x)) = u_0(x) \in \mathfrak{L}_0,$$
$$h_1(\psi_0(x), \ \psi_1(x)) = v_1(x) \in \mathfrak{L}_1,$$
$$h_1(\varphi_1(x), \ \psi_1(x)) = v_0(x) \in \mathfrak{L}_0.$$

Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\forall m \in S_{\max} (u_1(M_m) = u_0(M_m)), \ \forall m \in S_{\max} (v_1(M_m) = v_0(M_m)),$$
$$u_1(M_{q_1+1}) = v_0(M_{q_1+1}), \quad u_0(M_{q_1+1}) = v_1(M_{q_1+1}).$$

Рассмотрим полный двудольный граф $K_{2,2} = \Gamma_0$ (см. рисунок), вершины которого расположены в два яруса.

Вершины первого яруса мы будем обозначать символами $\bar z_0^0$ и $\bar z_1^0$ (этим символам мы припишем следующие наборы из $E_l^{q_1}$, которые мы обозначим через $\nu(\bar z_0^0)$ и $\nu(\bar z_1^0)$ соответственно: $\nu(\bar z_0^0) = (u_1(M_1), \ldots \ldots, u_1(M_{q_1}))$, $\nu(\bar z_1^0) = (v_1(M_1), \ldots, v_1(M_{q_1})))$.



Вершины второго яруса мы будем обозначать символами w_0^0 и w_1^0 (этим символам мы припишем следующие числа из E_l, которые мы обозначим через $\nu(w_0^0)$ и $\nu(w_1^0)$ соответственно:

$$\nu(w_0^0) = u_1(M_{q_1+1}), \quad \nu(w_1^0) = v_1(M_{q_1+1}).$$

Эти числа различны.

Действительно, предположим от противного, что эти числа равны. Тогда для любого натурального m из множества $\{1, \ldots, q_1, q_1 + 1\}$ имеем следующее равенство: $u_1(M_m) = u_0(M_m)$. Если $q_1 + 1 = q$, то уже получим противоречие: $\mathfrak{L}_0 \cap \mathfrak{L}_1 \neq \varnothing$.

Пусть $q_1 + 1 < q$. Тогда аналогично построениям, использованным при доказательстве невозможности подслучая 2б), докажем следующее:

$$\exists \widehat{\lambda}_{q_1+1}(x) \in \widehat{\mathfrak{L}}_1 \exists \widehat{\mu}_{q_1+1}(x) \in \widehat{\mathfrak{L}}_0 \forall m \in \{1, \ldots, q_1, q_1 + 1\} \left(\widehat{\lambda}_{q_1+1}(M_m) = \widehat{\mu}_{q_1+1}(M_m) \right),$$

что и будет означать противоречие с выбором множества $S_{\max}$.

Проведем эти построения.

Пусть $\lambda_{q_1+1}(x) = u_1(x)$, $\mu_{q_1+1}(x) = u_0(x)$. При доказательстве непустоты множеств $\widehat{\mathfrak{L}}_0$ и $\widehat{\mathfrak{L}}_1$ было установлено:

$$\forall m \in \{q_1+2, \ldots, q\} \ \exists \lambda_m(x) \in \widehat{\mathfrak{L}}_1 \ \exists \mu_m(x) \in \widehat{\mathfrak{L}}_0 (\lambda_m(M_m) = \mu_m(M_m)).$$

Рассмотрим наборы функций $\lambda_m(x)$, $m \geqslant q_1+1$, и $\mu_m(x)$, $m \geqslant q_1+1$. Рассмотрим следующую функцию $f(y_{q_1+1}, \ldots, y_q)$ из $\mathfrak{P}_2$, которая равна 1 на всех $q-q_1$ наборах, содержащих ровно одну единицу, а на всех остальных наборах равную 0. Тогда существует $g(x_{q_1+1}, \ldots, x_q)$ из $\mathfrak{G}$ такая, что $\mathscr{H}_1(g) = f$. Рассмотрим функцию $\widehat{\mu}_{q_1+1}(x)$ из $\mathfrak{L}_0$, которая получается подстановкой в функцию $g(x_{q_1+1}, \ldots, x_q)$ вместо каждой из переменных x_i соответствующей функции $\mu_i(x)$, т. е.

$$\widehat{\mu}_{q_1+1}(x) = g(\mu_{q_1+1}(x), \ldots, \mu_q(x)).$$

Рассмотрим также $q-q_1$ функций $\widehat{\lambda}_{i_0}(x)$, где i_0 пробегает значения от q_1+1 до q, получающихся подстановкой в функцию $g(x_{q_1+1}, \ldots, x_q)$ вместо переменной x_{i_0} функции $\lambda_{i_0}(x)$, а вместо остальных переменных — функций $\mu_j(x)$, $j \in \{q_1+1, \ldots, q\} \setminus \{i_0\}$, т. е.

$$\widehat{\lambda}_{i_0}(x) = g(\mu_{q_1+1}(x), \ldots, \mu_{i_0-1}(x), \lambda_{i_0}(x), \mu_{i_0+1}(x), \ldots, \mu_q(x)).$$

Так как $\forall m \in \{1, \ldots, q_1, q_1+1\} (\lambda_{q_1+1}(M_m) = \mu_{q_1+1}(M_m))$, то и для функций $\widehat{\lambda}_{q_1+1}(x)$ и $\widehat{\mu}_{q_1+1}(x)$ выполняется аналогичное утверждение: $\forall m \in \{1, \ldots, q_1, q_1+1\} (\widehat{\lambda}_{q_1+1}(M_m) = \widehat{\mu}_{q_1+1}(M_m))$.

Для любого $m > q_1+1$ имеет место $\lambda_m(M_m) = \mu_m(M_m)$, поэтому и $\widehat{\mu}_{q_1+1}(M_m) = \widehat{\lambda}_m(M_m)$ при любом $m > q_1+1$, что и доказывает соотношение: $\widehat{\mu}_{q_1+1}(x) \in \widehat{\mathfrak{L}}_0$. Чтобы доказать, что и $\widehat{\lambda}_{q_1+1}(x)$ принадлежит $\widehat{\mathfrak{L}}_1$, достаточно рассмотреть следующие функции $\widehat{\lambda}_{(q_1+1)n}(x)$ из $\mathfrak{L}_0$, где n меняется от q_1+2 до q: в функцию $g(x_{q_1+1}, \ldots, x_q)$ вместо переменной x_{q_1+1} подставлена функция $\lambda_{q_1+1}(x)$, а вместо переменного x_n, где $n \geqslant q_1+2$, подставлена функция $\lambda_n(x)$ из $\widehat{\mathfrak{L}}_1$; вместо остальных переменных x_{j_0} подставлены функции $\mu_{j_0}(x)$. Тогда имеем

$$\forall m \in \{q_1+2, \ldots, q\} (\widehat{\lambda}_{q_1+1}(M_m) = \lambda_{(q_1+1)m}(M_m)),$$

т. е. $\widehat{\lambda}_{q_1+1}(x)$ принадлежит $\widehat{\mathfrak{L}}_1$, что и требовалось доказать.

Итак, противоречие с выбором множества $S_{\max}$.

Заметим, что аналогичными рассуждениями можно доказать, что и наборы, приписанные вершинам $\bar{z}_0^0$ и $\bar{z}_1^0$, различны.

Итак, как только в множествах $\mathfrak{L}_0$ и $\mathfrak{L}_1$ найдутся две функции $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ такие, что $\forall m \in \{1, \ldots, q_1+1\} (\lambda(M_m) = \mu(M_m))$, то найдутся и такие две функции $\widehat{\lambda}(x)$ и $\widehat{\mu}(x)$ в множествах $\widehat{\mathfrak{L}}_0$ и $\widehat{\mathfrak{L}}_1$ соответственно, что для них выполняется аналогичное утверждение:

$$\forall m \in \{1, \ldots, q_1+1\} (\widehat{\lambda}(M_m) = \widehat{\mu}(M_m)).$$

Каждому ребру двудольного графа Γ_0 мы припишем одну из двух цифр: 0 или 1. Ребра, которым приписан символ 0, назовем прерывистыми (на рисунке такие ребра изображены штриховой линией). Ребра, которым приписан символ 1, назовем сплошными (на рисунке такие ребра изображены сплошной линией). Каждому сплошному ребру припишем функцию из $\mathfrak{L}_1$, а каждому прерывистому ребру припишем функцию из $\mathfrak{L}_0$ (на рисунке показано, как приписаны функции ребрам графа Γ_0).

Рассмотрим последовательность полных двудольных графов Γ_n, $n \in N \cup \{0\}$: $\Gamma_n = K_{n_1, n_1}$, где $n_1 = 2^{2^n}$ (граф Γ_0 уже определен). Вершины графов Γ_n расположим в два яруса. Вершины первого яруса будем обозначать символами $\bar{z}_i^n$, $0 \leqslant i \leqslant 2^{2^n} - 1$, i задано своей двоичной записью в двоичной системе счисления, причем длина этой записи равна 2^n. Вершины второго яруса будем обозначать символами w_j^n, $0 \leqslant j \leqslant 2^{2^n} - 1$, j задано своей двоичной записью в двоичной системе счисления длины 2^n. Установим следующее взаимно однозначное соответствие между упорядоченными парами $\left(\bar{z}_{i_1}^n, \bar{z}_{i_2}^n\right)$ вершин графа Γ_n, $n \in N \cup \{0\}$, и вершинами $\bar{z}_i^{n+1}$ графа Γ_{n+1}: $\left(\bar{z}_{i_1}^n, \bar{z}_{i_2}^n\right) \leftrightarrow \bar{z}_{i_1 * i_2}^{n+1}$, где через $i_1 * i_2$ обозначено число, двоичная запись которого получена следующим образом: к началу двоичной записи числа i_2 приписана двоичная запись числа i_1. Точно такое же взаимно однозначное соответствие установим между упорядоченными парами $\left(w_{j1}^n, w_{j2}^n\right)$ вершин графа Γ_n, $n \in N \cup \{0\}$, и вершинами w_j^{n+1} графа Γ_{n+1}.

Предположим, что в графе Γ_n уже осуществлено приписывание всем вершинам $\bar{z}_i^n$ наборов из $E_l^{q_1}$, причем все наборы различны, а всем вершинам w_j^n — чисел из E_l, причем все числа различны. Предположим, что в графе Γ_n все ребра разделены на два вида: сплошные и прерывистые, — и им осуществлено приписывание функций из $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_0$ соответственно (функцию, приписанную ребру, соединяющему $\bar{z}_i^n$ с w_j^n, будем обозначать $u_{\bar{z}_i^n, w_j^n}(x)$; эта функция принадлежит либо $\mathfrak{L}_0$, либо $\mathfrak{L}_1$). Предположим также, что в графе Γ_n выполнено свойство, которое мы назовем основным (и будем обозначать так: свойство $\mathcal{O}$), — для любой упорядоченной пары вершин $w_{j_1}^n$ и $w_{j_2}^n$ из второго яруса существует такая вершина $\bar{z}_i^n$ первого яруса, с которой вершина $w_{j_1}^n$ соединена сплошным ребром, а вершина $w_{j_2}^n$ соединена прерывистым ребром. Свойством $\mathcal{O}$ обладает исходный граф Γ_0.

Осуществим приписывание в графе Γ_{n+1} (т. е. проделаем индукционный шаг), которое таково, что в графе Γ_{n+1} будет выполняться свойство $\mathcal{O}$, и, кроме того, разным вершинам второго яруса будут приписаны разные числа из E_l. Для этого приписывания нам потребуется функция $f(x_1, x_2)$ из $\mathfrak{S}$ такая, что $\mathcal{H}_1(f) = v_2(y_1, y_2) = \max(y_1, y_2) + 1 \pmod 2 = \bar{y}_1 \,\&\, \bar{y}_2$, $v_2(y_1, y_2) \in \mathfrak{P}_2$. Таким образом, функция f есть некоторая фиксированная функция, которая отображается в функцию $\bar{y}_1 \,\&\, \bar{y}_2$, называемую стрелкой Пирса. Напомним, что $[\{\bar{y}_1 \,\&\, \bar{y}_2\}] = \mathfrak{P}_2$. Каждой вершине $\bar{z}_{i_1 * i_2}^{n+1}$ приписываем набор $f\left(\nu\left(\bar{z}_{i_1}^n\right), \nu\left(\bar{z}_{i_2}^n\right)\right)$ (мы естественным образом распространили действие функции $f(x_1, x_2)$ на наборы длины q_1, а именно: функция $f(x_1, x_2)$ действует на этих двух наборах покомпонентно). Каждой вершине $w_{j_1 * j_2}^{n+1}$ мы припишем число $f\left(\nu\left(w_{j_1}^n\right), \nu\left(w_{j_2}^n\right)\right)$. По предположению индукции существуют функции $u_{\bar{z}_{i_2}^n, w_{j_2}^n}(x)$ и $u_{\bar{z}_{i_1}^n, w_{j_1}^n}(x)$ из $\mathfrak{L}_0 \cup \mathfrak{L}_1$, которые приписаны соответственно ребрам $\left(\bar{z}_{i_2}^n, w_{j_2}^n\right)$ и $\left(\bar{z}_{i_1}^n, w_{j_1}^n\right)$. Тогда функция $f\left(u_{z_{i_1}^n, w_{j_1}^n}(x), u_{\bar{z}_{i_2}^n, w_{j_2}^n}(x)\right) = u_{\bar{z}_{i_1 * i_2}^{n+1}, w_{j_1 * j_2}^{n+1}}(x)$ принадлежит $\mathfrak{L}_0 \cup \mathfrak{L}_1$.

Поэтому ребру, соединяющему $\bar{z}^{n+1}_{i_1*i_2}$ с $w^{n+1}_{j_1*j_2}$, мы можем приписать однозначно некоторую функцию из $\mathfrak{L}_0 \cup \mathfrak{L}_1$ и соответственно назвать это ребро сплошным или прерывистым, в зависимости от того, принадлежит ли приписанная функция $\mathfrak{L}_1$ или $\mathfrak{L}_0$. Осталось проверить, что в графе Γ_{n+1} выполняется свойство $\mathcal{O}$. Пусть $w^{n+1}_{j_1*j_2}$ и $w^{n+1}_{r_1*r_2}$ — две разные вершины второго яруса. Тогда пара $\left(w^n_{j_1}, w^n_{j_2}\right)$ не равна паре $\left(w^n_{r_1}, w^n_{r_2}\right)$. Не ограничивая общности можно считать, что $r_1 \neq j_1$. Тогда по свойству $\mathcal{O}$ для графа Γ_n существует вершина $\bar{z}^n_\rho$ из первого яруса такая, что ребро $\left(\bar{z}^n_\rho, w^n_{r_1}\right)$ сплошное, а $\left(\bar{z}^n_\rho, w^n_{j_1}\right)$ прерывистое. Это означает следующее:

$$\text{функция } u_{\bar{z}^n_\rho, w^n_{r_1}}(x) \text{ принадлежит } \mathfrak{L}_1,$$

$$\text{функция } u_{\bar{z}^n_\rho, w^n_{j_1}}(x) \text{ принадлежит } \mathfrak{L}_0.$$

Для вершины $w^n_{j_2}$ найдется вершина $\bar{z}^n_\pi$ такая, что ребро $\left(\bar{z}^n_\pi, w^n_{j_2}\right)$ прерывистое $\left(\text{т. е. } u_{\bar{z}^n_\pi, w^n_{j_2}}(x) \text{ принадлежит } \mathfrak{L}_0\right)$. Это следует из того же основного свойства $\mathcal{O}$ для графа Γ_n. В силу того, что Γ_{n+1} полный двудольный граф, вершина $\bar{z}^n_\pi$ соединена с вершиной $w^n_{r_2}$ некоторым ребром, которому приписана функция $u_{\bar{z}^n_\pi, w^n_{r_2}}(x)$. Рассмотрим вершину $\bar{z}^{n+1}_{\rho*\pi}$ первого яруса. Функция $f\left(u_{\bar{z}^n_\rho, w^n_{j_1}}(x), u_{\bar{z}^n_\pi, w^n_{j_2}}(x)\right)$ принадлежит $\mathfrak{L}_1$, функция $f\left(u_{\bar{z}^n_\rho, w^n}(x), u_{\bar{z}^n_\pi, w^n_{r_2}}(x)\right)$ принадлежит $\mathfrak{L}_0$. Следовательно, ребро $\left(\bar{z}^{n+1}_{\rho*\pi}, w^{n+1}_{j_1*j_2}\right)$ — сплошное, а ребро $\left(\bar{z}^{n+1}_{\rho*\pi}, w^{n+1}_{r_1*r_2}\right)$ — прерывистое.

Итак, свойство $\mathcal{O}$ выполняется для графа Γ_{n+1}, а следовательно, по принципу математической индукции, и для всех графов Γ_n, $n \in N \cup \{0\}$. Но так как $\# E_l < \infty$, а число вершин второго яруса графа Γ_n равно 2^{2^n}, то существует такое n_0, что двум разным вершинам $w^{n_0}_i$ и $w^{n_0}_j$ второго яруса приписано одно и то же число $\varkappa \in E_l$. Тогда найдется вершина $\bar{z}^n_r$ из первого яруса такая, что ребро $\left(\bar{z}^{n_0}_r, w^{n_0}_i\right)$ сплошное, а ребро $\left(\bar{z}^{n_0}_r, w^{n_0}_j\right)$ прерывистое. Это противоречит выбору множества $S_{\max}$. Подслучай 2а) невозможен. Теорема 9 доказана.

Из доказательства теоремы 9 следует теорема 10.

Теорема 10. *Пусть* $\mathfrak{B}$ *из* $\mathcal{L}^l_k$ *и* $\mathcal{H}$: $\mathfrak{L} \to \mathfrak{P}_k$ — *гомоморфизм. Тогда существует класс вида* T_D, *содержащий* $\mathfrak{B}$, *и гомоморфизм* $\mathcal{F}$: $T_D \to \mathfrak{P}_k$ *такой, что гомоморфизм* $\mathcal{H}$ *есть сужение гомоморфизма* $\mathcal{F}$ *на* $\mathfrak{B}$.

Можно доказать, что любой гомоморфизм $\mathcal{F}$: $T_D \to \mathfrak{P}_k$ сохраняет не только операцию суперпозиции над функциями из класса T_D, но и операцию введения фиктивной переменной, что число гомоморфизмов класса T_D на $\mathfrak{P}_k$ конечно и равно $k!$. Таким образом, хотя классов в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}^k$ бесконечно много, но гомоморфизмы этих классов есть сужение лишь конечного числа гомоморфизмов классов T_D. Можно доказать, что классы T_D и T_{D_1}, где D есть разбиение $E = E_{l0} + \ldots + E_{l(k-1)}$, а D_1 есть разбиение $E_1 = E^1_{l0} + \ldots + E^1_{l(k_1-1)}$, изоморфны тогда и только тогда, когда $\# E = \# E_1$, $k = k_1$, и упорядоченный в порядке неубывания набор мощностей множеств E_{li}, $i = 0, \ldots, k-1$, совпадает с аналогично расположенным набором мощностей множеств E^1_{li}, $i = 0, \ldots, k-1$.

Это позволяет разбить классы T_D на системы, состоящие из попарно изоморфных классов. Пусть t_l — число таких систем, которые состоят из классов T_D, содержащихся в $\mathfrak{P}_l$. Тогда t_l связано с числом $p(n)$ решений широко известного уравнения $x_1+\ldots+x_n=n$, $0\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_n$ (см., например, [7, гл. 7]), следующим образом: $t_l=\sum_{n=2}^{l}(p(n)-1)$. Из известной асимптотической формулы для $p(n)$ можно получить следующую асимптотическую формулу для t_l:

$$t_l=\int_1^l \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}}{4\sqrt{3}\,x}\,dx+O\left(\int_1^l \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}}{4x\sqrt{3x}}\,dx\right).$$

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность Алешину Станиславу Владимировичу, под чьим руководством и при чьей постоянной поддержке была выполнена эта работа, а также Горлову Валерию Васильевичу и Макарову Владимиру Владимировичу, внимательно прочитавшим всю рукопись.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А. и др. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969.— № 5.— С. 1—10.
2. Деметрович Я. О некоторых гомоморфизмах и отношениях для предельных логик // Проблемы кибернетики. Вып. 30.— М.: Наука, 1975.
3. Макаров А. В. О некоторых отношениях для предельных логик // Логико-алгебраические конструкции. Калинин. Изд-во Калининского гос. ун-та, 1987.— С. 55—60.
4. Малай В. П. Об одной последовательности цепных классов функций логики 1 матрицы Яськовского // Деп. в ВИНИТИ.— № 54.— В 87.
5. Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика.— 1966.— Т. 5, № 2.— С. 5—24.
6. Раца М. Ф. О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Проблемы кибернетики. Вып. 21.— М.: Наука, 1969.
7. Чандрасекхаран К. Арифметические функции.— М.: Наука, 1975.
8. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН СССР.— 1958.— Т. 5.— С. 5—42.
9. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста.— М.: Наука, 1966.
10. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР.— 1959.— Т. 127, № 1.— С. 44—46.
11. Burosch G., Dassow J., Harnau W., Lau D. On subalgebras of algebra on predikates // EIK.— 1985.— V. 21, № 1.— P. 9—22.

Поступило в редакцию 15.X.88