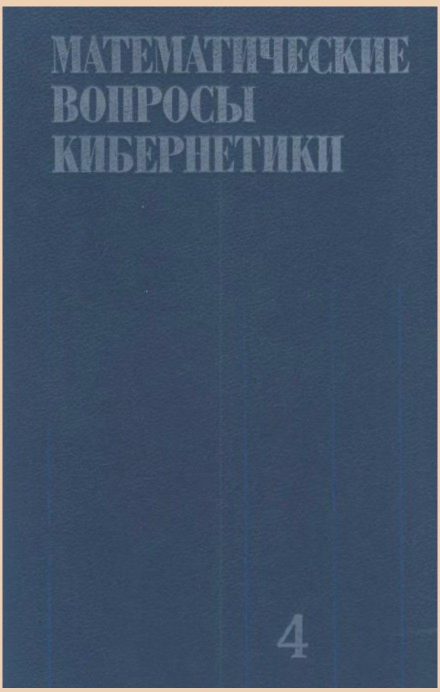

В. Н. Шевченко

Верхние оценки числа крайних точек в целочисленном программировании

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Шевченко В. Н. Верхние оценки числа крайних точек в целочисленном программировании // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. — М.: Наука, 1992. — С. 65–72. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1992-65

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА КРАЙНИХ ТОЧЕК В ЦЕЛОЧИСЛЕННОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

В. Н. ШЕВЧЕНКО

(НИЖНИЙ НОВГОРОД)

В этой статье подход, применяемый автором [4, 6, 7] для оценки числа крайних точек выпуклой оболочки множества M целочисленных решений системы линейных уравнений, развивается в двух направлениях: во-первых, получены оценки, не зависящие от правых частей систем, описывающих M, и во-вторых, показано, как аналогичные вопросы решать для частично целочисленного случая. В п. 1 рассмотрены свойства крайних точек, когда M описано системой линейных уравнений и сравнений, в п. 2 получены различные варианты оценок их числа, в п. 3 то же самое сделано для случая, когда M описано системой линейных неравенств, а в п. 4 рассмотрен частично целочисленный случай. При фиксированной размерности все оценки полиномиальны.

1. Хорошо известно, что вопрос о строении выпуклой оболочки $\mathrm{Co}\, M$ множества M целочисленных решений системы линейных уравнений, сравнений и неравенств весьма важен как в теоретическом, так и в прикладном плане. Имеется ряд результатов, связанных с описанием $\mathrm{Co}\, M$, например [1, 5, 7, 8, 10—12]. Интерес к этому вопросу связан, в частности, с тем, что для максимизации выпуклой ограниченной сверху функции $f(\mathbf{x})$ на M достаточно найти максимум $f(\mathbf{x})$ на множестве N крайних точек $\mathrm{Co}\, M$, а умение оценить число $|N|$ весьма существенно для оценки трудоемкости алгоритма максимизации $f(\mathbf{x})$.

Обозначим через Z кольцо целых чисел и через Z^n — множество n-мерных векторов с целочисленными компонентами.

В этом пункте будем считать, что множество M описано системой

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \geqslant \mathbf{0}, \tag{2}$$

$$\mathbf{x} \in Z^n, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \equiv b_i\,(d_{i-m}), \quad i = m+1, \ldots, m+m_1, \tag{4}$$

где все коэффициенты a_{ij}, b_i, d_i — целые числа, а запись $\alpha \equiv \beta\,(d)$ означает, что целые числа α и β сравнимы по модулю d, т. е. $\alpha - \beta$ делится на d нацело. Рассмотрим также однородную систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \equiv 0\,(d_{i-m}), \quad i = m+1, \ldots, m+m_1 \tag{6}$$

и обозначим множество ее целочисленных решений через L. Приведем несколько результатов о свойствах крайних точек $\mathbf{p} \in N$, часть из которых уже известна для случаев, когда $m = 0$ или $m_1 = 0$.

Лемма 1. *Если для точки* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ *из* M *в* L *найдется такой вектор* $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \neq \mathbf{0}$, *что* $p_j \geqslant |q_j|$ $(j = 1, \ldots, n)$, *то* $\mathbf{p} \notin N$.

Для доказательства достаточно заметить, что p является полусуммой двух различных точек $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ и $\mathbf{p}'' = \mathbf{p} - \mathbf{q}$, очевидно принадлежащих M.

Следствие 1. *Если* $\mathbf{p} \in N$, *а* t *и* t' — *две различные точки из множества* $S(p) = \{\mathbf{x} \in Z^n,\ \mathbf{0} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}\}$, *то найдется такое* $i \in \{1, \ldots, m\}$, *для которого* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \neq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t'_j$, *или такое* $i \in \{m+1, \ldots, m+m_1\}$, *для которого* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \not\equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t'_j \ (d_{i-m})$.

Следствие 2. *Множество* N *обладает свойством (назовем его свойством разделенности): для любой пары различных точек* $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ *и* $\mathbf{t}' = (t'_1, \ldots, t'_n)$ *из* N *найдется такое* j, *что* $t_j \geqslant 2t'_j + 1$.

Для доказательства каждого из следствий достаточно предположить противное и, положив $\mathbf{q} = \mathbf{t} - \mathbf{t}'$, воспользоваться леммой 1.

Пусть A — матрица коэффициентов системы (1) с линейно независимыми строками, a_j — ее j-й столбец, $\delta_i(A)$ — наибольший общий делитель миноров i-го порядка матрицы A, $\Delta_i(A)$ — максимальный по абсолютной величине минор i-го порядка матрицы A, $\mu_i(A) = \Delta_i(A)/\delta_i(A)$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $d = \prod_{i=1}^{m_1} d_i$. Заметим, что если $m = 0$, то можно положить $\mu_i(A) = 1$, а если $m_1 = 0$, то $d = 1$. Кроме того, при $m_1 = 0$ вместо системы сравнений (4) обычно рассматривается [8, 10—12] уравнение $\sum_{j=1}^{n} g_j x_j = g_0$, заданное на абстрактной аддитивной абелевой группе G порядка d $(g_j \in G)$, что на самом деле не является более общим [5].

Лемма 2. *Для любой крайней точки* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ *существует такое* $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$, *что* $\Delta = |\det(a_{j_1}, \ldots, a_{j_m})| \neq 0$ *и* $p_j < d\Delta/\delta_m(A)$ *при* $j \notin J$.

Для доказательства, не уменьшая общности, будем считать, что $p_1 \geqslant \ldots \geqslant p_n$. Если при этом $a_1 = 0$, то $p_1 < d$, так как $(d, 0, \ldots, 0) \in L$, и утверждение леммы тривиально. В противном случае найдем такое s, чтобы система столбцов $a_1, \ldots, a_s$ была линейно независима, а система $a_1, \ldots, a_{s+1}$ — линейно зависима, и рассмотрим множество решений однородной системы линейных уравнений $\sum_{i=1}^{s+1} a_i y_i = 0$. Оно, очевидно, одномерно, и в качестве его базиса можно выбрать целочисленный вектор $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_{s+1})$, где НОД $\{q_1, \ldots, q_{s+1}\} = 1$. По лемме 1 существует такое k, что $p_k < dq_k$, откуда, в частности, следует линейная независимость системы $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_{s+1}\}$. Дополним ее до базиса векторами $a_{j_{s+1}}, \ldots, a_{j_m}$ и покажем, что при $J = \{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, s+1, j_{s+1}, \ldots, j_m\}$ доказываемое утверждение справедливо. Для этого рассмотрим систему линейный уравнений

$$\sum_{i=1}^{s+1} a_i y_i + \sum_{i=s+1}^{m} a_{j_i} y_{i+1} = 0. \qquad (7)$$

Очевидно, что ее множество решений Q одномерно и в качестве его базиса можно взять вектор $\mathbf{q}' = (q_1, \ldots, q_{s+1}, 0, \ldots, 0)$. Известно также [10], что Q содержит вектор $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, -y_2^0, \ldots, (-1)^m y_{m+1}^0)$, где y_i^0 равняется детерминанту, получающемуся при вычеркивании i-го столбца в матрице, составленной из коэффициентов системы, задающей Q, и, в частности, $|y_k^0| = \Delta$. Сократив компоненты вектора $\mathbf{y}^0$ на $\delta_m(A)$, получим, что $y_k^0/\delta_m(A)$ делится на q_k, и, значит, $|q_k| \leqslant \Delta/\delta_m(A)$. Так как $p_n \leqslant \ldots \ldots \leqslant p_k < d|q_k|$, то лемма доказана.

Заметим, что для $m_1 = 0$ лемма 1 и следствие 2 приведены в [4]. В случае $m = 0$ лемма 1 и следствие 1 принадлежат Р. Гомори [8, 10—12]. Он же из следствия 1 вывел

Следствие 3. *Если $m = 0$ и $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ принадлежит N, то*

$$\prod_{j=1}^{n} (p_j + 1) \leqslant d, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \leqslant d - 1. \tag{9}$$

Рассмотрим пример, показывающий, что утверждение, обратное к лемме 1, вообще говоря, не верно. Пусть $n \geqslant 3$, $m = 0$ и система (4) имеет следующий вид:

$$x_1 + (n+1)(x_2 + \ldots + x_{n-1}) + (2n+1)x_n \equiv n(n^2),$$
$$x_3 \equiv \ldots \equiv x_n(n).$$

Легко проверить, что $\mathbf{p} = (1, \ldots, 1)$ принадлежит M и является выпуклой комбинацией точек $\mathbf{p}^1 = (n, 0, \ldots, 0), \ldots, p^n = (0, \ldots, 0, n)$, также принадлежащих M, но ни один вектор $\mathbf{q}$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, с компонентами $q_j \in \{-1, 0, 1\}$ не принадлежит L.

Ответ на вопрос о критерии принадлежности множеству N точки $\mathbf{p}$ из M дает

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{p} \in M$. Тогда следующие условия равносильны:*

а) $\mathbf{p} \notin N$,

б) *в L существует такая система ненулевых векторов $\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^s$ (не обязательно различных), что $\sum_{i=1}^{s} \mathbf{q}^i = \mathbf{0}$ и $\mathbf{q}^i \leqslant \mathbf{p}$ $(i = 1, \ldots, s)$,*

в) *в L существует такая система ненулевых векторов $\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^t$ и такие натуральные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, что $\mathbf{q}^i \leqslant \mathbf{p}$ $(i = 1, \ldots, t)$, $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \mathbf{q}^i = \mathbf{0}$ и система $\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^{t-1}$ линейно независима.*

Доказательство можно получить, повторив рассуждения работы [1], проведенные там для случая $m = 0$, но остающиеся справедливыми и для произвольного m.

Из в) следует, что

$$t \leqslant n - m + 1. \tag{10}$$

Можно ли улучшить эту оценку? Предположив, что $M \backslash N \neq \varnothing$, назовем *числом Каратеодори точки* $\mathbf{p}$ из $M \backslash N$ наименьшее число точек $\mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^s$, отличных от $\mathbf{p}$, выпуклой оболочке которых принадлежит $\mathbf{p}$, обозначим его через $c(\mathbf{p})$ и положим $c(M) = \max\{c(\mathbf{p}),\ \mathbf{p} \in M \backslash N\}$. Нетрудно видеть, что $c(\mathbf{p})$ — наименьшее число векторов в системах из п. в), следовательно, поставленный вопрос сводится к вычислению $c(M)$. Отсюда снова следует неравенство (10), поскольку хорошо известно, что для любого k-мерного множества M $c(M) \leqslant k + 1$.

В предыдущем примере $t = c(\mathbf{p}) = n$, поскольку точки $\mathbf{p}, \mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^n$ принадлежат гиперплоскости $\sum_{j=1}^{n} x_j = n$ и для любой другой точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из M $\sum_{j=1}^{n} x_j > n$. Таким образом, при $m = 0$ улучшить оценку (10) возможно не более чем на 1. Окончательное решение вопроса в этом случае автору неизвестно.

Приведем пример, показывающий неулучшаемость оценки (10) в общем случае. Пусть $n \leqslant \alpha \leqslant 2n-3$, система (1) состоит из одного уравнения $x_1 + \ldots + x_n = \alpha$, а система (4) имеет вид $x_1 \equiv \ldots \equiv x_{n-1}(\alpha)$. Тогда нетрудно проверить, что M состоит из точек

$$\mathbf{p} = (1, \ldots, 1, \alpha - n + 1),\ \mathbf{p}^1 = (\alpha, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{p}^n = (0, \ldots, 0, \alpha)$$

и что $c(\mathbf{p}) = c(M) = n$.

2. Получение верхних оценок числа крайних точек основано на следующем результате комбинаторного характера, частный случай которого (при $q_j = 0$) приводится в [4—6]. Здесь и дальше все логарифмы берутся по основанию 2, а $[\alpha]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее α.

Теорема 2. *Пусть множество различных целочисленных точек $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \ldots, p_{in}),\ i = 1, \ldots, s\}$ обладает свойством разделенности и существуют такие неотрицательные целые числа q_j и Δ_j, что для каждого i $(i = 1, \ldots, s)$ $q_j \leqslant p_{ij} \leqslant q_j + \Delta_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ и $q_n \leqslant p_{in}$; тогда*

$$s \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} [1 + \delta_j], \tag{11}$$

где $\delta_j = \log[1 + \Delta_j/(1 + q_j)]$.

Для доказательства при каждом j $(j = 1, \ldots, n-1)$ положим $\varphi(y_j) = 2^{y_j} q_j + 2^{y_j} - 1$ и рассмотрим множество $K(\mathbf{y})$, состоящее из всех целочисленных точек $\mathbf{x}$, у которых j-я координата, x_j, удовлетворяет неравенству $\varphi(y_j) \leqslant x_j \leqslant 2\varphi(y_j)$. Рассмотрим множество Y целочисленных векторов $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, для которых $0 \leqslant y_j \leqslant \delta_j$ $(j = 1, \ldots, n-1)$. Так как $\Delta_j \leqslant 2\varphi(\delta_j)$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, то для каждой точки $\mathbf{p}_i$ из $\mathcal{P}$ найдется такой $\mathbf{y} \in Y$, что ее проекция $\mathbf{p}_i' = (p_{i1}, \ldots, p_{in-1})$ принадлежит $K(\mathbf{y})$. Предположим, что $K(\mathbf{y})$ содержит проекцию еще одной точки $\mathbf{p}_k$ из $\mathcal{P}$. Поскольку при $j \neq n$ $\varphi(y_j) \leqslant p_{ij} \leqslant 2\varphi(y_j) \leqslant 2p_{kj}$ и аналогично $p_{kj} \leqslant 2p_{ij}$, то из свойства разделенности следует, что $p_{in} \geqslant 2p_{kn} + 1$ и $p_{kn} \geqslant 2p_{in} + 1$. Так как это противоречит неотрицательности p_{in}, то $s \leqslant |Y|$, откуда и следует неравенство (11).

Построим теперь пример, показывающий, что без дополнительных предположений неравенство (11) неулучшаемо. Рассмотрим снова множество Y и положим $y_n = \sum_{j=1}^{n-1} (\delta_j - y_j)$, $\varphi(\mathbf{y}) = (\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_n))$. Нетрудно проверить теперь, что множество $\mathcal{P} = \{\varphi(\mathbf{y}),\ \mathbf{y} \in Y\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и для него неравенство (11) обращается в равенство.

Для того чтобы воспользоваться теоремой 2, осталось ограничить координаты крайних точек. Из [7], где соответствующий результат установлен для $m_1 = 0$, легко получается для произвольного m_1

Лемма 3. *Если $M \neq \varnothing$, то $N \neq \varnothing$ и для $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in N$ справедливо неравенство*

$$p_j < (n + 1 - m) d\mu_m(A, b). \tag{12}$$

Положим $\alpha = \max_{i,j} |a_{ij}|$, $\beta = \max\left\{\alpha, \max_i |b_i|\right\}$ и оценим величину $\Delta_m(A, b)$ по неравенству Адамара: $\Delta_m(A, b) \leqslant (\beta\sqrt{m})^m$. Можно теперь оценить число крайних точек через входные параметры задачи:

$$|N| \leqslant [1 + \log d(n + 1 - m) + m \log(\beta\sqrt{m})]^{n-1}. \tag{13}$$

Если $m_1 = 0$, то $\log d = 0$, и (13) дает оценку из [7], если же $m = 0$, то [4, 6]

$$|N| \leqslant [1+\log d]^{n-1}. \tag{14}$$

Если воспользоваться следствием 3, то оценку (14) можно уточнить [5]:

$$|N| \leqslant \binom{\delta+n-1}{n-1}, \tag{15}$$

где $\delta=[\log d]$, а $\binom{i}{j}$ — число сочетаний из i по j.

Ближайшая наша цель — получить оценку $|N|$, не зависящую от b.

Теорема 3. *Для множества N крайних точек множества M решений системы* (1) — (4) *справедлива оценка*

$$|N| \leqslant \binom{n}{m}[1+\log d\mu_m(A)]^{n-m}[2+\log(n-m)d\mu_m(A)]^{m-1}. \tag{16}$$

Для доказательства выберем в A невырожденную подматрицу B со столбцами $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$, положим $J=\{j_1,\ldots,j_m\}$ и $\Delta=|\det B|$. Рассмотрим множество $N(J)$ таких $\mathbf{p}$ из N, для которых $p_j<d\Delta/\delta(A)$ при $j\notin J$. Для $i=1, \ldots, m$ обозначим через β_{ij} i-ю координату вектора $B^{-1}a_j$ $(j=1, \ldots, n)$ и через β_{i0} — вектора $B^{-1}b$. Нетрудно видеть, что при $j\neq 0$ $|\beta_{ij}|\leqslant \Delta_m(A)/\Delta$. Тогда для p из $N(J)$ $p_{j_i}=\beta_{i0}-\sum_{j\notin J}\beta_{ij}p_j$ и, следовательно,

$$\beta_{i0}-(n-m)d\mu_m(A)<p_{j_i}<\beta_{i0}+(n-m)d\mu_m(A). \tag{17}$$

Положим $I=\{i|\beta_{i0}\leqslant(n-m)d\mu_m(A)\}$. Если $i\in I$, то $p_{j_i}<2(n-m)d\mu_m(A)$ если же $i\notin I$, то в обозначениях теоремы 2 можно из-за (17) взять $q_{j_i}=\beta_{i0}-(n-m)d\mu_m(A)\geqslant 1$ и $\Delta_{j_i}=2(n-m)d\mu_m(A)-1$, откуда $\delta_{j_i}=[\log(n-m)d\mu_m(A)]$. Таким образом, по теореме 2

$$|N(J)| \leqslant [1+\log d\mu_m(A)]^{n-m}[1+\log 2(n-m)d\mu_m(A)]^{m-1},$$

и для окончания доказательства неравенства (16) достаточно воспользоваться леммой 2.

Заметим, что оценки (13) — (15) показывают, что при любой фиксированной размерности n число крайних точек, а следовательно, и граней множества $\operatorname{Co} M$ ограничено некоторым полиномом от $\log\beta d$, а теорема 3 дает более сильное утверждение.

Следствие 4. *При любом фиксированном n число крайних точек и граней $\operatorname{Co} M$ ограничено сверху некоторым полиномом от $\log\alpha d$.*

3. В этом пункте рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ целочисленных решений системы

$$A\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b} \tag{18}$$

и будем считать, что $\mathbf{b}\in Z^m$, $A\in Z^{m\times n}$ и что ранг матрицы A равен n. Известно [7], что последнее условие при $\mathfrak{M}\neq\varnothing$ необходимо и достаточно для существования в $\operatorname{Co}\mathfrak{M}$ крайних точек, множество которых мы обозначим через $\mathfrak{N}$.

Положим

$$\mathbf{y}=\mathbf{b}-A\mathbf{x} \tag{19}$$

и обозначим через y_i i-ю компоненту вектора $\mathbf{y}$, а через a_i — i-ю строку матрицы A. Выберем линейно независимую систему строк $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$, обозначим базисную матрицу, составленную из них, через A_1, оставшуюся часть матрицы A — через A_2 и, соответственно поделив компоненты векторов $\mathbf{y}$ и $\mathbf{b}$ на два класса, перепишем (19):

$$\mathbf{y}^1=\mathbf{b}^1-A_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{y}^2=\mathbf{b}^2-A_2\mathbf{x}.$$

Если теперь положить $\Delta=|\det A_1|$ и $A_1^*=\Delta A_1^{-1}$, то множество $\mathfrak{M}$ описывается через неотрицательные целочисленные переменные y в виде системы сравнений и уравнений:

$$A_1^* \mathbf{y}^1 \equiv A_1^* \mathbf{b}^1 (\Delta), \tag{20}$$

$$-A_2 A_1^* \mathbf{y}^1 + \Delta \mathbf{y}^2 = \overline{\mathbf{b}}, \tag{21}$$

где $\overline{\mathbf{b}} = \Delta \mathbf{b}^2 - A_2 A_1^* \mathbf{b}^1$.

Для получения аналога неравенства (13) можно воспользоваться результатом из [7], аналогичным лемме 3.

Лемма 4. *Если $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ и ранг матрицы A равен n, то $\mathfrak{N} \neq \varnothing$ и для любой точки* $\mathbf{x}$ *из $\mathfrak{N}$ справедливы неравенства*:

$$|x_j| < (n+1)\Delta_n(A, \mathbf{b}) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$y_i < \beta(1 + n(n+1)(\alpha\sqrt{n})^n) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Отсюда легко получается (ср. [7]), что

$$|\mathfrak{N}| \leqslant [1 + \log\beta + n\log(1 + n(n+1)(\alpha\sqrt{n}))]^{m-1}.$$

Чтобы избавиться в этой оценке от β, воспользуемся следующей переформулировкой теоремы 1 из [9].

Лемма 5. *Если $x \in \mathfrak{N}$, то в A существует такая базисная подматрица A_1, для которой*

$$|x_j - x_j^0| < n\Delta_{n-1}(A) \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{22}$$

$$|a_i\mathbf{x} - a_i\mathbf{x}^0| < n\Delta_n(A) \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{23}$$

где $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_A^0) = A_1^{-1}\mathbf{b}^1$.

Зафиксируем A_1, обозначим через $\mathfrak{N}(A_1)$ множество тех $\mathbf{x}$ из $\mathfrak{N}$, для которых выполняются неравенства (22) и (23), и положим $I = \{i \mid b_i - a_i\mathbf{x}^0 \leqslant n\Delta_n(A)\}$. Заметим, что $I' = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$, так как $b_i = a_i\mathbf{x}^0$ при $i \in I'$. Тогда для $\mathbf{x} \in \mathfrak{N}(A_1)$ из (23) следует, что $y_i < n\Delta_n(A)$ при $i \in I'$, $y_i < 2n\Delta_n(A)$ при $i \in I$ и что

$$1 \leqslant b_i - a_i\mathbf{x}^0 - n\Delta_n(A) < y_i < b_i - a_i\mathbf{x}^0 + n\Delta_n(A)$$

при $i \notin I$. Отсюда, воспользовавшись теоремой 2, имеем

$$|\mathfrak{N}(A_1)| \leqslant [1 + \log n\Delta_n(A)]^n [2 + \log n\Delta_n(A)]^{m-n-1}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Если ранг матрицы A равен n, то*

1) *справедлива оценка*

$$|\mathfrak{N}| \leqslant \binom{m}{n} [1 + \log n\Delta_n(A)]^n [2 + \log n\Delta_n(A)]^{m-n-1},$$

2) *при любом фиксированном m число крайних точек и граней* $\mathrm{Co}\,\mathfrak{M}$ *ограничено сверху некоторым полиномом от* $\log\alpha$.

4. В этом пункте покажем, как получать оценки числа крайних точек в частично целочисленном случае.

При заданных целочисленных матрицах $A = (a_{ij})$, $B = (b_{it})$ и целочисленном векторе $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ рассмотрим систему

$$A\mathbf{x} + B\mathbf{y} = \mathbf{b}, \tag{24}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \geqslant \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in Z^n, \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k) \geqslant \mathbf{0},$$

и обозначим множество ее решений через M, а множество крайних точек в $\mathrm{Co}\,M$ — через N.

Положим ранг матрицы B равным r и, выбрав в ней r столбцов, обозначим множество номеров этих столбцов через J, составленную из них подматрицу — через $B(J)$, а через $N(J)$ — множество всех крайних точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, у которых $y_j = 0$ при $j \notin J$. Несложно доказывается

Лемма 6. *Множество N совпадает с объединением множеств $N(J)$ по всем таким J, для которых столбцы матрицы $B(J)$ линейно независимы.*

Зафиксировав J, положим $\mathbf{y}(J)=\{y_j,\ j\in J\}$ и выберем в системе (24) r уравнений так, чтобы подматрица B' матрицы $B(J)$, стоящая в выбранных строках, имела определитель $\Delta\neq 0$, а оставшуюся часть матрицы $B(J)$ обозначим через B''. Тогда разбив аналогично A и $\mathbf{b}$, перепишем систему (24) в виде

$$A'\mathbf{x}+B'\mathbf{y}(J)=\mathbf{b}', \tag{25}$$

$$A''\mathbf{x}+B''\mathbf{y}(J)=\mathbf{b}''. \tag{26}$$

Домножив (25) слева на $\Delta(B')^{-1}$, а (26) — на Δ и положив $\mathbf{z}(J)=\Delta\mathbf{y}(J)$, заметим, что $z(J)$ — целочисленный вектор. Отсюда получается

Лемма 7. *Нахождение множества $N(J)$ сводится к аналогичной полностью целочисленной задаче с $(n+r)$ переменными и максимальным по модулю коэффициентом*

$$\alpha'<(\alpha\sqrt{r})^{r+1},\quad \text{где}\quad \alpha=\max\{|a_{ij}|,\ |b_{it}|\}.$$

Отсюда и из теоремы 3 вытекает

Теорема 5. *При любых фиксированных n и k число крайних точек и граней $\mathrm{Co}\,M$ ограничено сверху некоторым полиномом от $\log\alpha$.*

Аналогичные результаты можно получить и при других способах задания множества M.

5. В заключение рассмотрим задачу нахождения всех крайних точек и граней $\mathrm{Co}\,\mathfrak{M}$. В [7], основываясь на алгоритме Ленстры [13] нахождения целочисленной точки в полиэдре, построен алгоритм решения этой задачи, полиномиальный при фиксированной размерности. Как отмечено в [2], алгоритм Ленстры можно видоизменить так, чтобы его оценка стала независимой от b. Это основано, во-первых, на уже цитировавшемся результате работы [9] — лемме 5 и, во-вторых, на следующем утверждении из [14].

Теорема 6. *Существует полиномиальный алгоритм нахождения рационального решения системы* (18) *с числом операций, не зависящим от b.*

Отсюда и из теоремы 4 следует

Теорема 7. *При любом фиксированном m существует алгоритм нахождения всех крайних точек и граней $\mathrm{Co}\,\mathfrak{M}$, число операций которого ограничено сверху некоторым полиномом от* $\log\alpha$.

Использование теорем 3 и 5 позволяет получить аналогичные результаты и для других способов задания множества M.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веселов С. И., Шевченко В. Н. О гранях и крайних точках задач дикретного программирования // В кн.: Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький, Горьк. ун-т, 1980, С. 26—33.
2. Веселов С. И., Шевченко В. Н. О сложности нахождения целой точки в полиэдре // Тезисы докладов III Всесоюзной школы «Дискретная оптимизация и компьютеры».— Москва, ЦЭМИ, АН СССР, 1987, С. 13.
3. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984, С. 90.
4. Шевченко В. Н. Оценки числа крайних точек в некоторых задачах целочисленного программирования // Тезисы докладов 3-й Всесоюзной конференции по исследованию операций.— Горький, 1978, С. 248—249.
5. Шевченко В. Н. Выпуклые многогранные конусы, системы сравнений и правильные отсечения в целочисленном программировании // В кн.: Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. ун-т, 1979, С. 109—119.
6. Шевченко В. Н. О числе крайних точек в целочисленном программировании // Кибернетика.— 1981.— № 3.— С. 133—134.

7. Шевченко В. Н. Алгебраический подход в целочисленном программировании // Кибернетика.— 1984.— № 4.— С. 36—41.
8. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.— М.: Мир, 1974.— 520 с.
9. Cook W., Gerards A. M. N., Schrijver A., Tardos É. Sensitivity theorems in integer linear programming // Math. Program.— 1986.— V. 34, № 3.— P. 251—264.
10. Gomory R. E. Integer faces of a polyhedron // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1967.— V. 57, № 1.— P. 16—18.
11. Gomory R. E. On the relation between integer and noninteger solutions to linear programs // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1965.— V. 53, № 2.— P. 260—265.
12. Gomory R. E. Some polyhedra related to combinatorial problems // J. Linear Algebra and Its Applications.— 1969.— V. 2, № 4.— P. 451—558.
13. Lenstra H. W. Integer programming with a fixed number of variables // Math. of Oper. Res.— 1983.— V. 8, № 14.— P. 538—548.
14. Tardos É. A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs. Report № 84360-OR. Institut für ökonometric und operations research, Bonn, 1984.

Поступило в редакцию 20.III.90