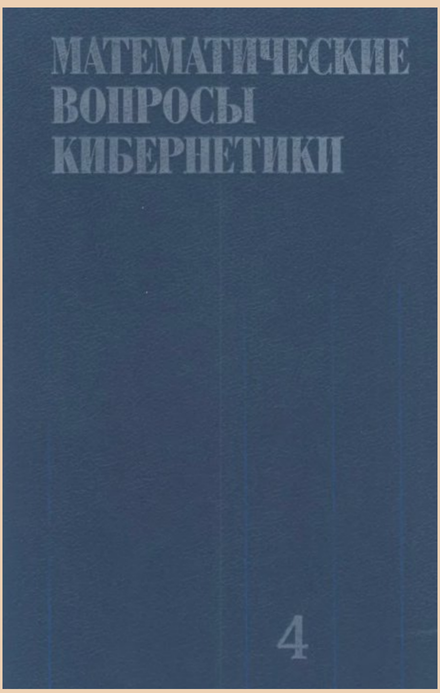

А. С. Асратян,
А. Н. Мирумян

Преобразования учебных расписаний

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УЧЕБНЫХ РАСПИСАНИЙ

А. С. АСРАТЯН, А. Н. МИРУМЯН

(ЕРЕВАН)

Введение

В работе рассматривается учебный процесс школьного типа, который характеризуется тем, что каждый час занятий в группе может проводить лишь один преподаватель и каждый преподаватель может проводить занятие не более чем в одной группе.

Задачи составления учебных расписаний отражают в себе основную закономерность задач теории расписаний [11—13]: как только математическая модель достаточно полно описывает учебный процесс, задача составления расписания становится NP-полной в смысле Р. Карпа [21]. В связи с этим приходится использовать эвристические алгоритмы построения расписаний [20, 23] или рассматривать упрощенные модели учебного процесса [1, 8, 10, 24, 25].

Возможен, однако, и другой подход: построение некоторого «допустимого» расписания и его «улучшение» с помощью преобразований, не выводящих за рамки «допустимости». Нахождению именно такой системы преобразований и посвящена настоящая работа.

Пусть имеется n учебных групп и l преподавателей и задана неотрицательная целочисленная матрица $T=(t_{i\nu})$, $n\times l$, где $t_{i\nu}$ — нагрузка ν-го преподавателя в i-й группе, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant\nu\leqslant l$.

h-расписанием, соответствующим матрице нагрузок T, назовем матрицу $A=(a(i,\ j))$, $n\times h$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $a(i,j)\in\{0,1,\ldots,l\}$, $\quad i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,h.$
2) $|\{j\,|\,a(i,\ j)=\nu,\ 1\leqslant j\leqslant h\}|=t_{i\nu}$, $i=1,\ \ldots,\ n,\quad \nu=1,\ \ldots,\ l.$
3) Ненулевые элементы каждого столбца попарно различны.

Если $a(i,\ j)=\nu$ (или $a(i,\ j)=0$), то это означает, что на j-м часе в i-й группе занятие проводит ν-й преподаватель (соответственно занятий не проводится).

Условие 3) означает, что каждый преподаватель одновременно может проводить занятия не более чем в одной группе.

Известно [8], что h-расписание, соответствующее матрице T, существует тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\nu=1}^{l} t_{i\nu}\leqslant h,\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{i\nu}\leqslant h,\quad \nu=1,\ \ldots,\ l,$$

причем при выполнении этих условий требуемое h-расписание строится с помощью полиномиального алгоритма *).

*) Если преподаватель в некоторой группе должен проводить занятия по нескольким предметам, то после построения h-расписания дополнительно требуется указать наименования предметов в те часы, которые предоставлены данному преподавателю для проведения занятий в этой группе.

Однако реальные расписания, кроме условий 1) — 3), должны удовлетворять некоторым дополнительным требованиям. Зачастую это значительно усложняет задачу нахождения условий существования и разработку алгоритмов построения требуемых расписаний. Некоторые примеры NP-полных задач, связанных с существованием h-расписаний, найдены в [2, 3, 20].

В связи с этим возможен такой подход. Сперва строим некоторое h-расписание, соответствующее матрице T, а затем перестраиваем его в h-расписание, удовлетворяющее требуемым условиям. Для этого необходимо иметь систему преобразований, которая для каждой пары h-расписаний A и C, соответствующих матрице нагрузок T, обеспечивает переход от A к C.

В настоящей работе найдены три типа преобразований, с помощью которых от заданного h-расписания A, соответствующего матрице нагрузок T, можно перейти к любому h-расписанию C, также соответствующему матрице нагрузок T. Предложен полиномиальный алгоритм такого перехода, который заключается в следующем. Строится последовательность $D_1, \ldots, D_r$ h-расписаний, соответствующих матрице нагрузок T, $r=r(A, C)\geqslant 2$, где $D_1=A$, $D_r=C$ и D_{i+1} получено из D_i одним из трех найденных преобразований, $i=1, \ldots, r-1$. Отметим, что эти преобразования локальны в том смысле, что в каждом из них участвуют не более трех столбцов.

Приводятся также некоторые комбинаторные применения полученных результатов. В частности, дано новое доказательство критерия однозначной представимости дважды стохастической матрицы в виде выпуклой комбинации подстановочных матриц. Этот критерий был сформулирован в [4] и доказан в [5]. Графовые аналоги полученных результатов позволили решить для двудольных мультиграфов проблему А. Коцига [22] о локализации преобразований реберных раскрасок.

Авторы благодарны Р. Н. Тонояну за ценные советы и критические замечания.

§ 1. Определения, обозначения и леммы

В дальнейшем везде подразумевается, что матрица нагрузок $T=(t_{i\nu})$ имеет размеры $n\times l$. Множество $\{1, 2, \ldots, m\}$ обозначим через I_m, а множество всех h-расписаний, соответствующих матрице нагрузок T, обозначим через $L(T, h)$. Множество всех матриц $A=(a(i, j))$ размеров $n\times h$, удовлетворяющих условиям 1) и 2), обозначим через $R(T, h)$. Обозначим j-й столбец матрицы A из $R(T, h)$ через $A(j)$, а кратность, с которой число s встречается в $A(j)$,— через $k(s, A(j))$, $0\leqslant s\leqslant l$. Столбец $A(j)$ назовем *допустимым*, если $k(s, A(j))\leqslant 1$ для каждого $s\in T_l$.

Обозначим через $(i, j)\leftrightarrow(i, s)$ преобразование матриц из множества $R(T, h)$, при котором меняются местами j-й и s-й элементы i-й строки, а остальные элементы матриц остаются неизменными. Такое преобразование назовем *транспозицией*.

Транспозицию $(i, j)\leftrightarrow(i, s)$, примененную к матрице $A\in R(T, h)$, обозначим через $A((i, j)\leftrightarrow(i, s))$.

Пусть A, $B\in R(T, h)$, φ — последовательность транспозиций,

$$\varphi=((i_1, j_1)\leftrightarrow(i_1, j_2), \ldots, (i_r, j_{2r-1})\leftrightarrow(i_r, j_{2r})),$$

и $A_1, \ldots, A_{r+1}$ — такая последовательность матриц из $R(T, h)$, что $A_1=A$, $A_{r+1}=B$ и $A_{t+1}=A_t((i_t, j_{2t-1})\leftrightarrow(i_t, j_{2t}))$, $t=1, \ldots, r$. Тогда скажем, что *B получена из A с помощью последовательности транспозиций* φ, и $B=A(\varphi)$.

Пусть A, B, $C\in R(T, h)$ и φ_1, φ_2 — такие последовательности транспозиций, что $B=A(\varphi_1)$, $C=B(\varphi_2)$. Тогда $C=A(\varphi_1\varphi_2)$, где $\varphi_1\varphi_2$ — последовательность, полученная конкатенацией последовательностей φ_1 и φ_2.

Пусть $B=(b(i,\ j))$ и $C=(c(i,\ j))$ — матрицы из $R(T,\ h)$. Для каждого $j\in I_h$ введем обозначения: $Z(B(j),\ C(j))=\{i\in I_n | b(i,\ j)\neq c(i,\ j)\}$.

Пусть $\alpha,\ \beta\in I_h$, $\alpha\neq\beta$ и $\{i_1,\ \ldots,\ i_r\}$ — подмножество I_n, $r\geqslant 1$. Последовательность транспозиций φ,

$$\varphi=((i_1,\ \alpha)\leftrightarrow(i_1,\ \beta),\ \ldots,\ (i_r,\ \alpha)\leftrightarrow(i_r,\ \beta)), \tag{1.1}$$

назовем *цепным* $(\alpha,\ \beta)$*-преобразованием матрицы* $B\in R(T,\ h)$, если выполнены следующие условия:

а) $b(i_r,\ \beta)=0$ или $b(i_r,\ \beta)\notin B(\alpha)$, или $r>1$ и $b(i_r,\ \beta)=b(i_1,\ \alpha)\neq 0$,

б) при $r>1$ $b(i_t,\ \beta)=b(i_{t+1},\ \alpha)\neq 0$, $t=1,\ \ldots,\ r-1$.

Цепное $(\alpha,\ \beta)$-преобразование φ назовем 2*-преобразованием*, если при $r>1$ выполнено $b(i_1,\ \alpha)=0$, или $b(i_1,\ \alpha)=b(i_r,\ \beta)\neq 0$, или $b(i_1,\ \alpha)\notin B(\beta)$, а при $r=1$ выполнено $0=b(i_1,\ \alpha)\neq b(i_1,\ \beta)$, или $b(i_1,\ \alpha)\notin B(\beta)$. Цепное $(\alpha,\ \beta)$-преобразование φ назовем *циклическим* $(\alpha,\ \beta)$*-преобразованием* или *циклическим* 2*-преобразованием*, если $b(i_1,\ \alpha)=b(i_r,\ \beta)\neq 0$ и $r>1$.

Замечание 1. Если $B\in L(T,\ h)$ и φ является 2-преобразованием B, то $B(\varphi)\in L(T,\ h)$.

Для матрицы $B=(b(i,\ j))$ из $R(T,\ h)$ и целых чисел i_1, α, β, где $i_1\in I_n$, $\alpha\neq\beta$, $\alpha,\ \beta\in I_h$, $b(i_1,\ \alpha)\neq b(i_1,\ \beta)$, индуктивно определим последовательность $B(i_1,\ \alpha,\ \beta)$. В качестве первого члена последовательности возьмем i_1. Пусть уже определены первые t членов $i_1,\ \ldots,\ i_t$. Если $b(i_t,\ \beta)=0$, или $b(i_t,\ \beta)\notin B(\alpha)$, или $b(i_t,\ \beta)\in\{b(i_1,\ \alpha),\ \ldots,\ b(i_{t-1},\ \alpha)\}$ или в $B(\alpha)$ существуют не менее двух элементов, равных $b(i_t,\ \beta)$, то $B(i_1,\ \alpha,\ \beta)=(i_1,\ \ldots,\ i_t)$. В противном случае существует единственное число $i_{t+1}\in I_n\backslash\{i_1,\ \ldots,\ i_t\}$, для которого $b(i_{t+1},\ \alpha)=b(i_t,\ \beta)\neq 0$, и в качестве $(t+1)$-го члена последовательности возьмем i_{t+1}.

Пусть $B(i_1,\ \alpha,\ \beta)=(i_1,\ \ldots,\ i_r)$. Тогда последовательность (1.1) назовем *последовательностью транспозиций, соответствующей* $B(i_1,\ \alpha,\ \beta)$.

Последовательность $B(i_1,\ \alpha,\ \beta)$ назовем $(\alpha,\ \beta)$*-циклом*, если $r>1$ и $b(i_1,\ \alpha)=b(i_r,\ \beta)\neq 0$.

Пусть $G=(g(i,\ j))$ — матрица из $R(T,\ h)$, $q\in I_l$, и столбцы $G(\beta)$ и $G(\gamma)$, $\beta\neq\gamma$, удовлетворяют условиям:

в) $k(s,\ G(\beta))+k(s,\ G(\gamma))\leqslant 2$ для каждого $s\in I_l\backslash\{q\}$,

г) $k(q,\ G(\beta))+k(q,\ G(\gamma))\leqslant 3$.

Матрицу G назовем $(\beta,\ \gamma)$*-допустимой*, если столбец $G(\beta)$ — допустимый, $k(s,\ G(\gamma))\leqslant 1$ для каждого s из $I_l\backslash\{q\}$ и $k(q,\ G(\gamma))\leqslant 2$.

Лемма 1. *Пусть $q\in I_l$, $G\in R(T,\ h)$ и столбцы $G(\beta)$ и $G(\gamma)$, $\beta\neq\gamma$, удовлетворяют условиям* в) *и* г). *Если матрица G не является $(\beta,\ \gamma)$-допустимой, то существует такая последовательность транспозиций φ, что матрица $F=G(\varphi)$ является $(\beta,\ \gamma)$-допустимой и $F(j)=G(j)$ для каждого $j\in I_h\backslash\{\gamma,\ \beta\}$.*

Доказательство. Пусть G не является $(\beta,\ \gamma)$-допустимой. Определим последовательность матриц $M=(D_1,\ D_2,\ \ldots)$ следующим образом. В качестве D_1 возьмем матрицу G. Пусть уже определены первые m матриц $D_1,\ \ldots,\ D_m$ и $D_m=(d_m(i,\ j))$. Если для любого $s\in I_l\backslash\{q\}$ выполняется $k(s,\ D_m(\beta))\leqslant 1$ и $k(s,\ D_m(\gamma))\leqslant 1$, то $M=(D_1,\ \ldots,\ D_m)$. Пусть существует $s_m\in I_l\backslash\{q\}$, для которого $k(s_m,\ D_m(\beta))=2$ или $k(s_m,\ D_m(\gamma))=2$. Возможны следующие случаи.

1. В $D_m(\beta)$ существует s_m, $s_m\in I_l\backslash\{q\}$, для которого $k(s_m,\ D_m(\beta))=2$. Возьмем число i_{m1}, для которого $s_m=d_m(i_{m1},\ \beta)$. Так как $k(s_m,\ D_m(\gamma))=0$, то $d_m(i_{m1},\ \beta)\neq d_m(i_{m1},\ \gamma)$. Найдем последовательность $D_m(i_{m1},\ \beta,\ \gamma)$. Пусть ψ_m — последовательность транспозиций, соответствующая $D_m(i_{m1},\ \beta,\ \gamma)$. Тогда в качестве D_{m+1} возьмем матрицу $D_m(\psi_m)$.

2. $k(s, D_m(\beta)) \leqslant 1$ для каждого s из $I_l \setminus \{q\}$, но существует $s_m \in I_l \setminus \{q\}$ с $k(s_m, D_m(\gamma)) = 2$. Найдем число i_{m1}, для которого $s_m = d_m(i_{m1}, \gamma)$. Так как $k(s_m, D_m(\beta)) = 0$, то $d_m(i_{m1}, \gamma) \neq d_m(i_{m1}, \beta)$. Найдем последовательность $D_m(i_{m1}, \gamma, \beta)$. Пусть ψ_m — последовательность транспозиций, соответствующая $D_m(i_{m1}, \gamma, \beta)$. Тогда в качестве D_{m+1} возьмем матрицу $D_m(\psi_m)$.

Покажем, что последовательность M конечна.

Пусть $M_1 = \{D_m \in M \mid$ существует $s_m \in I_l \setminus \{q\}$, для которого $k(s_m, D_m(\beta)) = 2\}$. Из определения M следует, что если $M_1 \neq \varnothing$ и $D_{m+1} \in M_1$, то $D_m \in M_1$, причем число элементов из множества $I_l \setminus \{q\}$, имеющих в $D_{m+1}(\beta)$ кратность 2, на единицу меньше, чем число элементов из $I_l \setminus \{q\}$, имеющих кратность 2 в $D_m(\beta)$. Поэтому последовательность M_1 конечна.

Пусть $M_1 = (D_1, \ldots, D_r)$ и $M_2 = \{D_m \in M \mid k(s, D_m(\beta)) \leqslant 1$ для любого $s \in I_l \setminus \{q\}\}$. Из определения M следует, что если $M_2 \neq \varnothing, D_{m+1} \in M_2$ и $m > r$, то $D_m \in M_2$, причем число элементов из множества $I_l \setminus \{q\}$, имеющих в $D_{m+1}(\gamma)$ кратность 2, на единицу меньше, чем число элементов из $I_l \setminus \{q\}$, имеющих кратность 2 в $d_m(\gamma)$. Поэтому последовательности M_2 и M конечны.

Пусть $M = (D_1, \ldots, D_t)$. Если $k(q, D_t(\beta)) = 1$, то последовательность транспозиций $\varphi = \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_{t-1}$ и матрица $F = G(\varphi) = D_t$ удовлетворяют требованиям леммы 1.

Пусть $k(q, D_t(\beta)) > 1$. Выберем два числа i_1 и r_1, для которых $d_t(i_1, \beta) = d_t(r_1, \beta) = q$. Возможны следующие случаи.

1. Если $k(q, D_t(\beta)) = 2$, то из условия леммы следует, что $k(q, D_t)) \leqslant 1$. Тогда существует такое число $\tau \in \{i_1, r_1\}$, что $d_t(\tau, \beta) \neq d_t(\tau, \gamma)$ и $D_t(\tau, \beta, \gamma)$ не является (β, γ)-циклом. Пусть, для определенности, $\tau = i_1$ и пусть ψ_t — последовательность транспозиций, соответствующая $D_t(i_1, \beta, \gamma)$. Тогда последовательность транспозиций $\varphi = \psi_1 \ldots \psi_{t-1} \psi_t \psi_{t+1}$ и матрица $F = D_t(\psi_t) = G(\varphi)$ удовлетворяют условиям леммы.

2. Если $k(q, D_t(\beta)) = 3$, то из условия леммы следует, что $k(q, D_t(\gamma)) = 0$. Ясно, что последовательности $D_t(i_1, \beta, \gamma)$ и $D_t(r_1, \beta, \gamma)$ не пересекаются. Пусть ψ_t и ψ_{t+1} — последовательности транспозиций, соответствующие $D_t(i_1, \beta, \gamma)$ и $D_t(r_1, \beta, \gamma)$. Тогда последовательность транспозиций $\varphi = \psi_1 \ldots \psi_{t-1} \psi_{t+1}$ и матрица $F = D_t(\psi_t \psi_{t+1})$ удовлетворяют требованиям леммы 1. Лемма доказана.

Замечание 2. Нетрудно проверить, что трудоемкость алгоритма нахождения последовательности транспозиций φ, предложенного в доказательстве леммы 1, составляет $O(n^3)$ операций*).

Пусть $\alpha \in I_h$, $j_1, \ldots, j_r \in I_h \setminus \{\alpha\}$ и $\{i_1, \ldots, i_r\}$ — подмножество I_n, $r \geqslant 2$. Последовательность транспозиций ψ,

$$\psi = ((i_1, \alpha) \leftrightarrow (i_1, j_1), \ldots, (i_r, \alpha) \leftrightarrow (i_r, j_r)),$$

назовем *цепным* (α, β, γ)*-преобразованием матрицы* $B \in L(T, h)$, если выполнены следующие условия:

1) $j_1 = \beta$, $j_2, \ldots, j_r \in \{\beta, \gamma\}$ и существует такое s, $2 \leqslant s \leqslant r$, что $j_s = \gamma$,
2) $b(i_t, j_t) = b(i_{t+1}, \alpha) \neq 0$, $t = 1, \ldots, r-1$,
3) $b(i_r, j_r) = 0$ или $b(i_r, j_r) \notin B(\alpha)$, или $b(i_r, j_r) = b(i_1, \alpha) \neq 0$.

Цепное (α, β, γ)-преобразование ψ назовем *циклическим*, если $b(i_1, \alpha) = b(i_r, j_r) \neq 0$.

Пусть ψ — цепное (α, β, γ)-преобразование h-расписания $B \in L(T, h)$ и матрица $G = B(\psi)$ не принадлежит множеству $L(T, h)$.

---

*) Здесь и далее под операциями подразумеваются операции сравнения, пересылки или присваивания.

Последовательность транспозиций φ назовем *исправляющим* (β, γ)-*преобразованием для* ψ, если матрица $F=G(\varphi)$ принадлежит множеству $L(T, h)$ и $F(j)=G(j)$ для каждого $j\in I_h\setminus\{\beta, \gamma\}$.

Лемма 2. *Пусть ψ — цепное (α, β, γ)-преобразование h-расписания $B\in L(T, h)$, матрица $G=B(\psi)$ не принадлежит множеству $L(T, h)$ и $k(s, G(\beta))+k(s, G(\gamma))\leqslant 2$ для каждого $s\in I_l$. Тогда существует исправляющее (β, γ)-преобразование для ψ.*

Доказательство. Матрица G удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому так же, как в доказательстве леммы 1, найдем последовательность транспозиций φ такую, что матрица $F=G(\varphi)$ является (β, γ)-допустимой и $F(j)=G(j)$ для каждого $j\in I_h\setminus\{\beta, \gamma\}$. Но тогда столбец $F(\gamma)$ также является допустимым и $F\in L(T, h)$. Лемма доказана.

Из доказательств лемм 1 и 2 видно, что исправляющее (β, γ)-преобразование для ψ, вообще говоря, не единственно.

Последовательность транспозиций ψ назовем (α, β, γ)-*преобразованием первого типа* или 3-*преобразованием первого типа матрицы* $B\in L(T, h)$, если $B(\psi)\in L(T, h)$ и выполнено одно из двух условий:

1. ψ является цепным (α, β, γ)-преобразованием.
2. $\psi=\psi_1\varphi$, где ψ_1 — цепное (α, β, γ)-преобразование, $B(\psi_1)\notin L(T, h)$, а φ — исправляющее (β, γ)-преобразование для ψ_1.

3-преобразование ψ первого типа назовем просто 3-*преобразованием*, если $\psi=\psi_1\varphi$, где ψ_1 — циклическое (α, β, γ)-преобразование, $B(\psi_1)\notin L(T, h)$, а φ — исправляющее (β, γ)-преобразование для ψ_1.

Пусть $B\in L(T, h)$, $0\neq b(i_1, \alpha)\neq b(i_1, \beta)$, $B(i_1, \alpha, \beta)=(i_1, \ldots, i_r)$, φ — последовательность транспозиций, соответствующая $B(i_1, \alpha, \beta)$ и $E=B(\varphi)$. Пусть, кроме того, элемент $b(i_1, \alpha)$ не присутствует в столбце $B(\gamma)$ и присутствует в столбце $B(\beta)$, причем $b(i_1, \alpha)=b(\tau, \beta)$, где $\tau\in I_n\setminus\{i_1, \ldots, i_r\}$. Последовательность транспозиций ψ назовем (α, β, γ)-*преобразованием второго типа*, если $\psi=\varphi\psi_1$, где ψ_1 — последовательность транспозиций, соответствующая $E(i_1, \beta, \gamma)$.

Пусть $B=(b(i, j))$ и $C=(c(i, j))$ — матрицы из $R(T, h)$, α — наименьшее число, для которого $B(\alpha)\neq C(\alpha)$ и $\beta_1, \ldots, \beta_r$ — попарно различные числа из множества $I_h\setminus I_\alpha$. Для каждого i, $1\leqslant i\leqslant n$, определим число $j[i]$ следующим образом. Если существует такое $j\in\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$, что $b(i, j)=c(i_1\alpha)$, то $j[i]$ — наименьшее среди таких j. В противном случае $j[i]$ — наименьшее число j из множества $I_h\setminus(I_\alpha\cup\{\beta_1, \ldots, \beta_r\})$, для которого $b(i, j)=c(i, \alpha)$.

Индуктивно определим последовательность $B(C, i_1, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r)$, где i_1 — некоторое число из множества $Z(B(\alpha), C(\alpha))$ и $j[i_1]=\beta_1$. В качестве первого члена последовательности возьмем i_1. Пусть уже определены первые m членов $i_1, \ldots, i_m$ так, что $i_1, \ldots, i_m\in Z(B(\alpha), C(\alpha))$ и $j[i_1], \ldots, j[i_m]\in\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$. Возможны два случая.

1. $b(i_m, j[i_m])=b(i_1, \alpha)$ или $b(i_m, j[i_m])=0$, или $b(i_m, j[i_m])\notin B(\alpha)\setminus\{b(i_1, \alpha), \ldots, b(i_m, \alpha)\}$ или $k(b(i_m, j[i_m]), B(\alpha))\geqslant 2$. Тогда $B(C, i_1, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r)=(i_1, \ldots, i_m)$.

2. Существует единственное число $i_{m+1}\in Z(B(\alpha), C(\alpha))\setminus\{i_1, \ldots, i_m\}$ такое, что $b(i_m, j[i_m])=b(i_{m+1}, \alpha)$.

Если $b(i_{m+1}, \alpha)=c(i_{m+1}, \alpha)$ или $j[i_{m+1}]\notin\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$, то $B(C, i_1, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r)=(i_1, \ldots, i_m)$. В противном случае в качестве $(m+1)$-го члена последовательности возьмем i_{m+1}.

Пусть $B(C, i_1, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r)=(i_1, \ldots, i_t)$. *Последовательностью транспозиций, соответствующей* $B(C, i_1, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r)$, назовем последовательность

$$((i_1, \alpha)\leftrightarrow(i_1, j[i_1]), \ldots, (i_t, \alpha)\leftrightarrow(i_t, j[i_t])).$$

Пусть $B, C\in L(T, h)$.

Лемма 3. *Если* $r \in Z(B(\alpha), C(\alpha))$, $\beta \in I_h \setminus I_\alpha$, $c(r, \alpha) = b(r, \beta) \neq 0$ *и* $b(r, \beta) = b(p, \alpha)$, *то* $p \in Z(B(\alpha), C(\alpha))$.

Доказательство. Поскольку $C(\alpha)$ — допустимый столбец и $c(r, \alpha) \neq 0$, то $c(p, \alpha) \neq c(r, \alpha) = b(p, \alpha)$. Поэтому $p \in Z(B(\alpha), C(\alpha))$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $i_1 \in Z(B(\alpha), C(\alpha))$, ψ — *последовательность транспозиций, соответствующая* $B(C, i_1, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ *и* $G = B(\psi) \in R(T, h)$. *Тогда каждый элемент из* $B(C, i_1, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ *принадлежит множеству* $Z(B(\alpha), C(\alpha))$ *и поэтому* $Z(G(\alpha), C(\alpha))$ *является собственным подмножеством множества* $Z(B(\alpha), C(\alpha))$.

Определим число $i(B, C, \alpha)$ следующим образом. Если $0 \neq b(i_1, \alpha) \in C(\alpha)$ для каждого i из $Z(B(\alpha), C(\alpha))$, то $i(B, C, \alpha)$ — наименьшее число из множества $Z(B(\alpha), C(\alpha))$. В противном случае $i(B, C, \alpha)$ — наименьшее число i из $Z(B(\alpha), C(\alpha))$, для которого $b(i, \alpha) = 0$ или $b(i, \alpha) \notin C(\alpha)$.

Лемма 4. *Пусть* $i_1 = i(B, C, \alpha)$, $\beta, \gamma \in I_h \setminus I_\alpha$, $\beta \neq \gamma$, $B(C, i_1, \alpha, \beta, \gamma) = (i_1, \ldots, i_t)$ *и либо* $b(i_t, j[i_t]) = 0$, *либо* $0 \neq b(i_t, j[i_t]) \notin B(\alpha)$. *Если* $0 \neq b(i_1, \alpha)$, *то* $b(i_1, \alpha) \notin C(\alpha)$.

Доказательство. Поскольку $i_1 \in Z(B(\alpha), C(\alpha))$, то из следствия 1 $i_t \in Z(B(\alpha), C(\alpha))$. По условию леммы или $b(i_t, j[i_t]) = 0$ или $0 \neq b(i_t, j[i_t]) \notin B(\alpha)$. Следовательно, существует $i_p \in Z(B(\alpha), C(\alpha))$ такое, что или $b(i_p, \alpha) = 0$, или $0 \neq b(i_p, \alpha) \notin C(\alpha)$. Но тогда из определения числа $i_1 = i(B, C, \alpha)$ и из $b(i_1, \alpha) \neq 0$ следует, что $b(i_1, \alpha) \notin C(\alpha)$. Лемма доказана.

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 5. *Пусть* $i_1 = i(B, C, \alpha)$, $\beta \in I_h \setminus I_\alpha$, $B(C, i_1, \alpha, \beta) = (i_1, \ldots, i_t)$ *и либо* $b(i_t, \beta) = 0$, *либо* $0 \neq b(i_t, \beta) \notin B(\alpha)$. *Если* $0 \neq b(i_1, \alpha)$, *то* $b(i_1, \alpha) \notin C(\alpha)$.

§ 2. Основные результаты

Пусть L — произвольное множество комбинаторных объектов, а S — некоторая система преобразований над объектами из L.

Пусть $D, U \in L$, $D \neq U$. Скажем, что *U может быть получен из D последовательностью преобразований из S*, если существует такая последовательность $D_1, \ldots, D_r$ из множества L, $r = r(D, U) \geqslant 2$, что $D_1 = D$, $D_r = U$ и D_{i+1} получен из D_i одним из преобразований системы S, $i = 1, \ldots, r-1$. Последовательность $D_1, \ldots, D_r$ назовем *выводом U из D в системе S*, а число r назовем *длиной вывода*. Систему S назовем *полной системой преобразований для L*, если для любых U, D из L объект U может быть получен из D последовательностью преобразований из S.

Пусть S_1 — система, состоящая из двух преобразований: циклического 2-преобразования и 3-преобразования.

Пусть S_2 — система, состоящая из трех преобразований: 2-преобразования и 3-преобразований первого и второго типов.

Теорема 1. *Пусть* $U, D \in L(T, h)$, $U \neq D$ *и* α, β, γ — *попарно различные числа из множества* I_h. *Если* $U(j) = D(j)$ *для каждого* j *из* $I_h \setminus \{\alpha, \beta, \gamma\}$, *то матрица* U *может быть получена из* D *последовательностью преобразований из* S_2.

Доказательство. Определим последовательность $\Pi = (D_1, D_2, \ldots)$ матриц из $L(T, h)$ следующим образом. В качестве D_1 возьмем D. Пусть уже определены первые m матриц $D_1, \ldots, D_m$.

Если $D_m = U$, то $\Pi = (D_1, \ldots, D_m)$. Пусть $D_m \neq U$, $U = (u(i, j))$ и $D_m = (d_m(i, j))$. Возможны два случая.

1. $D_m(\alpha) \neq U(\alpha)$. Возьмем число $i_{m1} = i(D_m, U, \alpha)$. Определим числа β_m и γ_m: β_m — наименьшее число из множества $\{\beta, \gamma\}$, для которого $d_m(i_{m1}, \beta_m) = u(i_{m1}, \alpha)$, а γ_m — это единственный элемент множества

$\{\beta, \gamma\}\setminus\{\beta_m\}$. Найдем последовательность $D_m(U, i_{m1}, \alpha, \beta_m, \gamma_m)$ и соответствующую ей последовательность транспозиций φ_m. Пусть $F_m = D_m(\varphi_m)$. Ясно, что столбец $E_m(\alpha)$ — допустимый. Обозначим число $d_m(i_{m1}, \alpha)$ через b_m. Из следствия 1 вытекает, что множество $Z(E_m(\alpha), U(\alpha))$ является собственным подмножеством множества $Z(D_m(\alpha), U(\alpha))$.

Если $E_m \in L(T, h)$, то в качестве D_{m+1} возьмем матрицу E_m.

Если $E_m \notin L(T, h)$ и φ_m является цепным (α, β_m)-преобразованием, то $b_m \in D_m(\beta_m)$ и $b_m \neq 0$. Но тогда по лемме 5 $b_m \notin U(\alpha)$. Поскольку $k(b_m, U(\beta_m)) \leqslant 1$, $k(b_m, U(\gamma_m)) \leqslant 1$ и $k(b_m, E_m(\beta_m)) = 2$, то $k(b_m, E_m(\gamma_m)) = 0$. Пусть φ — последовательность транспозиций, соответствующая $E_m(i_{m1}, \beta_m, \gamma_m)$. Тогда последовательность $\varphi_m\varphi$ является (α, β, γ)-преобразованием второго типа и $D_m(\varphi_m\varphi) \in L(T, h)$. В качестве D_{m+1} возьмем матрицу $D_m(\varphi_m, \varphi)$.

Пусть $E_m \notin L(T, h)$ и φ_m является цепным $(\alpha, \beta_m, \gamma_m)$-преобразованием. Тогда из определения числа i_{m1} и из леммы 4 следует, что или φ_m — циклическое $(\alpha, \beta_m, \gamma_m)$-преобразование, или $b_m = 0$, или $0 \neq b_m \notin U(\alpha)$. Во всех трех случаях $k(s, E_m(\beta_m)) + k(s, E_m(\gamma_m)) \leqslant 2$ для каждого $s \in I_l$. Тогда по лемме 2 существует исправляющее (β_m, γ_m)-преобразование φ для φ_m, т. е. $D_m(\varphi_m\varphi) \in L(T, h)$. В качестве D_{m+1} возьмем матрицу $D_m(\varphi_m\varphi)$.

2. $D_m(\alpha) = U(\alpha)$. Возьмем число $i_{m1} = i(D_m, U, \beta)$. Найдем последовательность $D_m(U, i_{m1}, \beta, \gamma)$ и соответствующую ей последовательность транспозиций φ_m. Из леммы 5 следует, что φ_m является 2-преобразованием. Поэтому в качестве D_{m+1} возьмем матрицу $D_m(\varphi_m)$.

Ясно, что $D_{m+1} \in L(T, h)$, и из следствия 1 $Z(D_{m+1}(\beta), U(\beta))$ является собственным подмножеством множества $Z(D_m(\beta), U(\beta))$. Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно показать, что последовательность Π конечна, так как в этом случае она является выводом U из D.

Пусть $\Pi_1 = \{D_m \in \Pi \mid D_m(\alpha) \neq U(\alpha)\}$. Из определения Π следует, что если $D_{m+1} \in \Pi_1$ и $m \geqslant 1$, то $D_m \in \Pi_1$, причем множество $Z(D_{m+1}(\alpha), U(\alpha))$ является собственным подмножеством множества $Z(D_m(\alpha), U(\alpha))$. Поэтому Π_1 конечна.

Пусть $\Pi_2 = \{D_m \in \Pi \mid D_m(\alpha) = U(\alpha)\}$ и D_t — матрица с наименьшим номером из Π_2. Для каждой матрицы $D_{m+1} \in \Pi_2$ с $m \geqslant t$ имеем: $D_{m+1}(j) = U(j)$ для каждого $j \in I_h\setminus\{\beta, \gamma\}$ и $Z(D_{m+1}(\beta), U(\beta))$ является собственным подмножеством множества $Z(D_m(\beta), U(\beta))$. Поэтому последовательности Π_2 и Π конечны. Но тогда Π — вывод U из D. С учетом замечания 2 нетрудно проверить, что трудоемкость нахождения Π составляет $O(n^3)$ операций. Теорема доказана.

Машину $T = (t_{i\nu})$ назовем *h-регулярной*, если

$$\sum_{i=1}^{n} t_{i\nu} = h, \quad \nu = 1, \ldots, l,$$

$$\sum_{\nu=1}^{l} t_{i\nu} = h, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следствие 2. *Пусть α, β, γ — попарно различные числа из множества I_h, T является h-регулярной матрицей и D, $U \in L(T, h)$, $U \neq D$. Если $U(j) = D(j)$ для каждого $j \in I_h\setminus\{\alpha, \beta, \gamma\}$, то U может быть получено из D последовательностью преобразований из S_1.*

Доказательство. Поскольку T является h-регулярной матрицей, то $n = l$ и каждый столбец h-расписания B из $L(T, h)$ является перестановкой множества I_n. Но тогда каждая последовательность φ_m в доказательстве теоремы 1 является или циклическим 2-преобразованием, или 3-преобразованием, т. е. U получен из D последовательностью преобразований из S_1. Следствие доказано.

Теорема 2. *Пусть T является h-регулярной матрицей и пусть B, C — два различных h-расписания из множества $L(T, h)$, а α — наименьшее число с $B(\alpha) \neq C(\alpha)$. Тогда существует такое $B' \in L(T, h)$, что B' может быть получено из B последовательностью преобразований из S_1, $Z(B'(\alpha), C(\alpha))$ является собственным подмножеством множества $Z(B(\alpha), C(\alpha))$ и при $\alpha > 1$ имеет место $B'(j) = C(j)$, $j = 1, \ldots, \alpha - 1$.*

Доказательство. Сперва опишем алгоритм $\mathfrak{A}$ построения некоторой матрицы B', а потом докажем, что эта матрица удовлетворяет требованиям теоремы. При этом мы найдем вывод B' из B.

1. Описание алгоритма $\mathfrak{A}$.

Шаг 0. Пусть $B = (b(i, j))$. Выберем некоторое $i_0 \in Z(B(\alpha), C(\alpha))$. Обозначим через β_0 наименьшее число j, $j > 0$, для которого $b(i_0, j) = c(i_0, \alpha)$. Число $b(i_0, \alpha)$ обозначим через q. Пусть $B(C, i_0, \alpha, \beta_0) = (i_0, i_{01}, \ldots, i_{0m})$ и φ_{01} — последовательность транспозиций, соответствующая $B(C, i_0, \alpha, \beta_0)$.

а) Если $b(i_{0m}, \beta_0) = q$, то в качестве B' возьмем матрицу $B(\varphi_{01})$. Конец алгоритма.

б) Если $b(i_{0m}, \beta_0) \neq q$, то существует единственное число $r(0, 1)$ такое, что $r(0, 1) \in Z(B(\alpha), C(\alpha)) \setminus \{i_0, i_{01}, \ldots, i_{0m}\}$, $b(r(0, 1), \alpha) = b(i_{0m}, \beta_0)$ и $b(r(0, 1), \beta) \neq c(r(0, 1), \alpha)$. Обозначим через γ_0 наименьшее число j, большее α, для которого $b(r(0, 1), j) = c(r(0, 1), \alpha)$. Для каждого $i \in Z(B(\alpha))$, $C(\alpha)$ определим число $j_0[i]$ следующим образом. Если существует такое $j \in \{\beta_0, \gamma_0\}$, что $b(i, j) = c(i, \alpha)$, то $j_0[i]$ — наименьшее среди таких j. В противном случае $j_0[i]$ — это наименьшее число j из множества $I_h \setminus (I_\alpha \cup \{\beta_0, \gamma_0\})$, для которого $b(i, j) = c(i, \alpha)$. Положим $t = 0$, $B_0 = B$, $F_0 = B_0(\varphi_{01})$. Переход к шагу 1.

Шаг $4t + 1$ $(t \geqslant 0)$. Пусть $B_t = (b_t(i, j))$, $F_t(C, r(t, 1), \alpha, \gamma_t, \beta_t) = (r(t, 1), \ldots, r(t, n_t))$, φ_{t1} — последовательность транспозиций, соответствующая $B_t(F_t, i_t, \alpha, \beta_t)$, φ_{t2} — последовательность транспозиций, соответствующая $B_t(F_t, r(t, 1), \alpha, \beta_t, \gamma_t)$, а $\varphi_t = \varphi_{t1}\varphi_{t2}$. Найдем матрицу $G_{t+1} = B_t(\varphi_t)$. Переход к шагу $4t + 2$.

Шаг $4t + 2$. Имеем $b_t(i_t, \alpha) = q$.

а) Если $b_t(r(t, n_t), j_t[r(t, n_t)]) = q$, то φ_t — циклическое $(\alpha, \beta_t, \gamma_t)$-преобразование матрицы B_t и матрица G_{t+1} удовлетворяет условиям леммы 2. Так же как в доказательстве леммы 2, найдем некоторое исправляющее (β_t, γ_t)-преобразование для φ_t. Обозначим его через φ_{t3} и в качестве B' возьмем матрицу $G_{t+1}(\varphi_{t3})$. Конец алгоритма.

б) Если $b_t(r(t, n_t), j_t[r(t, n_t)]) \neq q$, то существует единственное число $r(t + 1, 1)$ такое, что $r(t + 1, 1) \in Z(G_{t+1}(\alpha), C(\alpha))$, $b_t(r(t, n_t), j_t[r(t, n_t)]) = b_t(r(t + 1, 1), \alpha)$ и $j_t[r(t + 1, 1)] \notin \{\beta_t, \gamma_t\}$. Обозначим число $b_t(r(t + 1, 1), \alpha)$ через a_t. Переход к шагу $4t + 3$.

Шаг $4t + 3$. Пусть $G_{t+1} = g_{t+1}(i, j)$. Нетрудно заметить, что $g_{t+1}(r(t, n_t), \alpha) = g_{t+1}(r(t + 1, 1), \alpha) = a_t$ и $1 = k(a_t, G_{t+1}(\beta_t)) + k(a_t, G_{t+1}(\gamma_t))$. Кроме того, $k(q, G_{t+1}(\alpha)) = 0$, $k(q, G_{t+1}(\beta_t)) = k(q, G_{t+1}(\gamma_t)) = 1$ и $k(s, G_{t+1}(\alpha)) = 1$, $k(s, G_{t+1}(\beta_t)) + k(s, G_{t+1}(\gamma_t)) = 2$ для каждого $s \in I_l \setminus \{a_t, q\}$. Матрица G_{t+1} удовлетворяет условиям леммы 1. Так же как в доказательстве леммы 1, найдем такую последовательность транспозиций φ_{t3}, что в матрице $F_{t+1} = G_{t+1}(\varphi_{t3})$ выполнены следующие условия: $F_{t+1}(j) = G_{t+1}(j)$ для каждого j из $I_h \setminus \{\beta_t, \gamma_t\}$, $F_{t+1}(\beta_t)$ — допустимый столбец, $k(q, F_{t+1}(\gamma_t)) = 2$ и $k(s, F_{t+1}(\gamma_t)) = 1$ для каждого s из $I_l \setminus \{a_t, q\}$. Переход к шагу $4t + 4$.

Шаг $4t + 4$. Пусть $F_{t+1} = (f_{t+1}(i, j))$. Найдем последовательность $F_{t+1}(r(t, n_t), \alpha, \gamma_t)$ и соответствующую ей последовательность транспозиций φ_{t4}. Поскольку $F_{t+1}(\alpha) = G_{t+1}(\alpha)$, то $f_{t+1}(r(t, n_t), \alpha) = a_t$ и $k(a_t, F_{t+1}(\alpha)) = 2$. Кроме того, $k(q, F_{t+1}(\gamma_t)) = 2$, $k(q, F_{t+1}(\alpha)) = 0$ и $k(s, F_{t+1}(\gamma_t)) = 1$, $k(s, F_{t+1}(\alpha)) = 1$ для каждого $s \in I_l \setminus \{a_t, q\}$. Пусть i_{t+1} — последний член последовательности $F_{t+1}(r(t, n_t), \alpha, \gamma_t)$. Нетрудно проверить, что $f_{t+1}(i_{t+1}, \gamma_t)=q$. Поэтому матрица $B_{t+1}=F_{t+1}(\varphi_{t4})$ принадлежит множеству $L(T, h)$. Положим $\beta_{t+1}=\gamma_t$, а в качестве γ_{t+1} возьмем наименьшее число j, для которого $b_{t+1}(r(t+1, 1), j)=c(r(t+1, 1), \alpha)$. Для каждого $i\in Z(B_{t+1}(\alpha), C(\alpha))$ определим число $j_{t+1}[i]$ следующим образом. Если существует такое $j\in\{\beta_{t+1}, \gamma_{t+1}\}$, что $b(i, j)=c(i, \alpha)$, то $j_{t+1}[i]$ — наименьшее из таких j. В противном случае $j_{t+1}[i]$ — наименьшее число j из множества $I_h\setminus(I_\alpha\cup\{\beta_{t+1}, \gamma_{t+1}\})$, для которого $b(i, j)=c(i, \alpha)$. Увеличим t на единицу и перейдем к шагу $4t+1$.

2. Обоснование алгоритма $\mathfrak{A}$ и построение вывода B' из B. Покажем, что алгоритм $\mathfrak{A}$ конечен и построенная матрица B' удовлетворяет требованиям теоремы. Затем построим вывод B' из B и покажем, что трудоемкость его построения составляет $O(h^4)$ операций.

Если алгоритм $\mathfrak{A}$ завершает работу на шаге 0, то матрица $B'=B(\varphi_{01})$ удовлетворяет требованиям теоремы, так как последовательность транспозиций φ_{01} является циклическим (α, β_0)-преобразованием, $B'\in L(T, h)$ и $\beta_0>\alpha$. При этом (B, B') — вывод B' из B.

Пусть на шаге 0 алгоритм не завершает работу. Рассмотрим шаги 1 и 2. Если φ_0 — циклическое $(\alpha, \beta_0, \gamma_0)$-преобразование, то матрица B', $B'=G_1(\varphi_{03})=B(\varphi_0\varphi_{03})$, удовлетворяет требованиям теоремы, поскольку $\varphi_0\varphi_{03}$ — это 3-преобразование,

$$B(\varphi_0\varphi_{03})\in L(T, h),$$
$$Z(B'(\alpha), C(\alpha))=Z(B(\alpha), C(\alpha))\setminus\{i_0, i_{01}, \ldots, i_{0m}, r(0, 1), \ldots, r(0, n_0)\}.$$

При этом (B, B') — вывод B' из B.

Если φ_0 не является циклическим $(\alpha, \beta_0, \gamma_0)$-преобразованием, то алгоритм $\mathfrak{A}$ последовательно строит тройки матриц (G_1, F_1, B_1), (G_2, F_2, B_2), ... Процесс построения циклический, причем цикл $t+1$, на котором строится тройка G_{t+1}, F_{t+1}, B_{t+1}, состоит из шагов $4t+1$, $4t+2$, $4t+3$, $4t+4$. При каждом t, $t\geqslant 0$, для матриц G_{t+1}, F_{t+1}, B_{t+1} выполнены следующие свойства.

Свойство 1. $G_{t+1}, F_{t+1}\in R(T, h)$, $B_{t+1}\in L(T, h)$.

Свойство 2. $B_{t+1}=B_t(\varphi_{t1}\varphi_{t2}\varphi_{t3}\varphi_{t4})$, $F_{t+1}=B_t(\varphi_{t1}\varphi_{t2}\varphi_{t3})$, $B_{t+1}=F_{t+1}(\varphi_{t4})$.

Свойство 3. Если $\alpha>1$, то $G_{t+1}(j)=F_{t+1}(j)=B_{t+1}(j)=C(j)$ для каждого $j=1, \ldots, \alpha-1$.

Свойство 4. $B_t(j)=B_{t+1}(j)$ для каждого $j\in I_h\setminus\{\alpha, \beta_t, \gamma_t\}$.

Свойство 5. $F_{t+1}=F_t(\varphi_{t2}\varphi_{t3})$, $F_t=B_t(\varphi_{t1})$.

Свойство 6. $Z(F_{t+1}(\alpha), C(\alpha))=Z(F_t(\alpha), C(\alpha))\setminus\{r(t, 1), \ldots, r(t, n_t)\}$.

Свойства 1—4 очевидны. Докажем свойство 5. Поскольку $B_0(\varphi_{01})=F_0$, то при $t=0$ свойство 5 верно, так как $F_0(\varphi_{02}\varphi_{03})=B_0(\varphi_{01}\varphi_{02}\varphi_{03})=F_1$. Пусть $t\geqslant 1$. По свойству 2 $B_t=F_t(\varphi_{t-1,4})$. Нетрудно заметить, что φ_{t1} является обратным преобразованием для $\varphi_{t-1,4}$, т. е. $F_t(\varphi_{t-1,4}\varphi_{t1})=F_t$. Поэтому $F_{t+1}=B_t(\varphi_{t1}\varphi_{t2}\varphi_{t3})=F_t(\varphi_{t-1,4}\varphi_{t1}\varphi_{t2}\varphi_{t3})=F_t(\varphi_{t2}\varphi_{t3})$ и $B_t(\varphi_{t1})=F_t(\varphi_{t-1,4}\varphi_{t1})=F_t$.

Докажем свойство 6. Поскольку $F_{t+1}=F_t(\varphi_{t2}\varphi_{t3})$, то из определения φ_{t2} и φ_{t2} следует, что

$$Z(F_{t+1}(\alpha), C(\alpha))=Z(F_t(\alpha), C(\alpha))\setminus\{r(t, 1), \ldots, r(t, n_t)\}.$$

Из свойства 6 следует, что через конечное число циклов алгоритма мы придем к циклу $p+1$, $p+1<n$, в котором последовательность транспозиций φ_p является циклическим $(\alpha, \beta_p, \gamma_p)$-преобразованием. Тогда матрица $B'=G_{p+1}(\varphi_{p3})$ удовлетворяет требованиям теоремы по следующим причинам.

а) $B'\in L(T, h)$ и при $\alpha>1$ $B'(j)=C(j)$ для каждого $j=1, \ldots, \alpha-1$.

б) Множество $Z(B'(\alpha), C(\alpha))$ является собственным подмножеством множества $Z(B(\alpha), C(\alpha))$. Действительно, $B' = B_p(\varphi_{p1}\varphi_{p2}\varphi_{p3})$ и по свойству 5 $F_p = B_p(\varphi_{p1})$. Поэтому

$$B' = F_p(\varphi_{p2}\varphi_{p3})$$

и

$$Z(B'(\alpha), C(\alpha)) = Z(F_p(\alpha), C(\alpha)) \setminus \{r(p, 1), \ldots, r(p, n_p)\}.$$

Отсюда и из свойства 6 вытекает, что

$$Z(B'(\alpha), C(\alpha)) = Z(B(\alpha), C(\alpha)) \setminus \{i_0, i_{01}, \ldots, i_{0m}\} \Big\backslash \bigcup_{t=1}^{p} \{r(t, 1), \ldots, r(t, n_t)\}$$

в) B' может быть получена из B последовательностью преобразований из S_1. Действительно, $B'(j) = B_p(j)$ для каждого $j \in I_h \setminus \{\alpha, \beta_p, \gamma_p\}$. Тогда, по следствию 2, B' может быть получена из B_p последовательностью преобразований из S_1. Из свойства 4 и следствия 2 имеем: B_{t+1} может быть получена из B_t последовательностью преобразований из S_1, $t = 0, 1, \ldots, p-1$. Следовательно, B' может быть получена из B требуемым образом. Итак, матрица B' удовлетворяет требованиям теоремы.

Оценим трудоемкость алгоритма $\mathfrak{A}$. С учетом замечания 2 нетрудно проверить, что трудоемкость выполнения цикла $t+1$ алгоритма $\mathfrak{A}$ составляет $O(n^3)$ операций, $0 \leqslant t \leqslant p$. Поскольку $p + 1 < n$, то трудоемкость $\mathfrak{A}$ составляет $O(n^4)$ операций.

После того как алгоритм $\mathfrak{A}$ построил h-расписания $B_0, \ldots, B_p, B_{p+1}$, где $B_{p+1} = B'$, вывод B' из B можно построить следующим образом. Для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant p$, так же, как в доказательстве теоремы 1, построим вывод B_{t+1} из B_t, беря в качестве D матрицу B_t, а в качестве U — матрицу B_{t+1}. Этот вывод обозначим через $\Pi(B_t, B_{t+1})$. Тогда последовательность $\Pi(B, B')$,

$$\Pi(B, B') = \Pi(B_0, B_1)\Pi(B_1, B_2)\ldots\Pi(B_p, B_{p+1}),$$

является выводом B' из B. Поскольку $p+1<n$ и трудоемкость построения $\Pi(B_t, B_{t+1})$ составляет $O(n^3)$ операций, $0 \leqslant t \leqslant p$, то трудоемкость построения вывода $\Pi(B, B')$ составляет $O(n^4)$ операций. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Из свойства 6 алгоритма $\mathfrak{A}$ следует, что длина вывода $\Pi(B, B')$, построенного в доказательстве теоремы 2, не больше мощности множества $Z(B(\alpha), C(\alpha))$.

Теорема 3. *S_1 является полной системой преобразований для множества $L(T, h)$ в случае, когда T является h-регулярной матрицей.*

Доказательство. Пусть A, C — два различных h-расписания из множества $L(T, h)$. Опишем алгоритм построения вывода C из A.

Шаг 0. Положим $\alpha = 1$ и $A_1 = A$.

Шаг i ($i \geqslant 1$).

1) Если $A_i(\alpha) \neq C(\alpha)$, то с помощью алгоритма $\mathfrak{A}$ построим такое $A_{i+1} \in L(T, h)$, что A_{i+1} может быть получено из A_i последовательностью преобразований из S_1, $Z(A_{i+1}(\alpha), C(\alpha))$ является собственным подмножеством множества $Z(A_i(\alpha), C(\alpha))$ и при $\alpha > 1$ $A_{i+1}(j) = A_i(i)$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, \alpha - 1$. Для этого достаточно в алгоритме $\mathfrak{A}$ в качестве матрицы B взять A_i. Тогда матрица B' может быть выбрана в качестве A_{i+1}. Затем так же, как в доказательстве теоремы 2, построим вывод A_{i+1} из A_i, обозначим его через $\Pi(A_i, A_{i+1})$ и перейдем к шагу $i+1$.

2) Если $A_i(\alpha) = C(\alpha)$ и $\alpha < n$, то увеличим α на единицу и повторим шаг i.

3) Если $A_i(\alpha) = C(\alpha)$ и $\alpha = n$, т. е. $A_i = C$, то последовательность $\Pi(A, C)$, где $\Pi(A, C) = \Pi(A_1, A_2)\ldots\Pi(A_{i-1}, A_i)$, является выводом C из A. Конец алгоритма.

Ясно, что через конечное число шагов r алгоритм завершит свою работу. Поскольку $r < nh$ и трудоемкость построения вывода $\Pi(A_i, A_{i+1})$ составляет $O(n^4)$ операций, $1 \leqslant i \leqslant r$, то трудоемкость построения вывода $\Pi(A, C)$ составляет $O(n^5h)$ операций. Теперь оценим длину вывода $\Pi(A, C)$. Пусть $X(1) = \{i \in I_r | A_i(1) \neq A_{i+1}(1)\}$ и $X(\alpha) = \{i \in I_r | A_i(\alpha) \neq A_{i+1}(\alpha)$ и $A_i(j) = A_{i+1}(j)$, $j = 1, \ldots, \alpha - 1\}$, $2 \leqslant \alpha \leqslant n$. Если $i \in X(\alpha)$, то из способа построения матрицы A_{i+1} и из замечания 3 следует, что длина вывода $\Pi(A_i, A_{i+1})$ не больше $|Z(A_i(\alpha), A_{i+1}(\alpha)|$. Из описания алгоритма $\mathfrak{A}$ следует, что если $i, t \in X(\alpha)$, то

$$Z(A_i(\alpha), A_{i+1}(\alpha)) \cap Z(A_t(\alpha), A_{t+1}(\alpha)) = \varnothing.$$

Тогда $\sum\limits_{i \in X(\alpha)} |Z(A_i(\alpha), A_{i+1}(\alpha))| \leqslant n, \alpha = 1, \ldots, h$. Поэтому длина вывода $\Pi(A, C)$ не больше числа nh. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *S_2 является полной системой преобразований для множества $L(T, h)$ при любой матрице нагрузок T.*

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что достаточно рассмотреть случай, когда матрица $T = (t_{i\nu})$ не является h-регулярной. Определим квадратную матрицу $T^* = \left(t^*_{i\nu}\right)$ порядка $n + l$ следующим образом:

$$T^* = \left[\begin{array}{c:c} T & T_1 \\ \hdashline T_2 & T_3 \end{array}\right],$$

где T_3 — матрица, транспонированная по отношению к T, T_1 — диагональная матрица размеров $n \times n$,

$$T_1 = \begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_n \end{bmatrix},$$

где $g_i = h - \sum\limits_{\nu=1}^{l} t_{i\nu}$, $i = 1, \ldots, n$, а T_2 — диагональная матрица размеров $l \times l$,

$$T_2 = \begin{bmatrix} k_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_l \end{bmatrix},$$

где $k_\nu = h - \sum\limits_{i=1}^{n} t_{i\nu}, \nu = 1, \ldots, l$. Ясно, что T^* является h-регулярной матрицей.

Каждой матрице $B = (b(i, j))$ из $L(T, h)$ поставим в соответствие матрицу $B^* = (b^*(i, j))$ из множества $L(T^*, h)$, где для любых i, j, ν, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant \nu \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant h$, выполнены условия:

если $\nu \notin B(j)$, то $b^*(\nu + n, j) = \nu$,

если $b(i, j) = \nu$, то $b^*(i, j) = \nu$ и $b^*(\nu + n, j) = i + l$,

если $b(i, j) = 0$, то $b^*(i, j) = i + l$.

Ясно, что соответствие взаимно однозначное: матрицу B можно получить из B^*, удалив строки с номерами $l + 1, \ldots, l + n$ и заменив числа $l + 1, \ldots, l + n$ на 0.

Пусть A и C — два различных h-расписания из $L(T, h)$. Поскольку $A^*, C^* \in L(T^*, h)$, то по теореме 3 существует последовательность $D_1^*, \ldots, D_r^*$ из $L(T^*, h)$ такая, что $D_1^* = A^*$, $D_r^* = C^*$ и D_{i+1}^* получен из D_i^* или циклическим 2-преобразованием, или 3-преобразованием, $i = 1, \ldots, r - 1$.

Последовательность $D_1^*, \ldots, D_r^*$ из $L(T^*, h)$ порождает последовательность $\Pi = (D_1, \ldots, D_r)$ матриц из $L(T, h)$, где D_i и D_{i+1} отличаются не более чем тремя столбцами, $i = 1, \ldots, r-1$. Если существуют такие i, j, что $i < j$ и $D_i = D_j$, удалим из Π матрицы $D_{i+1}, \ldots, D_j$. Такую редукцию проделаем до тех пор, пока это возможно.

В результате получим последовательность попарно различных матриц $D_{i_1}, \ldots, D_{i_t}$ из $L(T, h)$, где $D_{i_1} = A$, $D_{i_t} = C$ и $D_{i_{1+j}}$ отличается от D_{i_j} двумя или тремя столбцами, $j = 1, \ldots, t-1$. Тогда по теореме 1 $D_{i_{1+j}}$ можно получить из D_{i_j} последовательностью преобразований из S_2, $j = 1, \ldots, t-1$. Вывод $D_{i_{j+1}}$ из D_{i_j} можно построить так же, как в доказательстве теоремы 1, беря в качестве D матрицу D_{i_j}, а в качестве U — матрицу $D_{i_{j+1}}$, $j = 1, \ldots, t-1$. Но тогда матрицу $C = D_{i_t}$ также можно получить из A последовательностью преобразований из S_2. Теорема 4 доказана.

§ 3. Некоторые комбинаторные приложения

Многие комбинаторные объекты можно рассматривать как h-расписания, соответствующие некоторой «матрице нагрузок» T, и применить к ним полученные нами результаты. Рассмотрим три примера таких применений.

1. Матрица $A = (a(i, j))$ размеров $n \times h$, где $n \leqslant h$, называется латинским $(n \times h)$-прямоугольником, если каждая строка в A есть некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, h$ и в каждом столбце ни одно число не повторяется [15]. Если $n = h$, то такая матрица называется латинским квадратом порядка n.

Ясно, что множество всех латинских $(n \times h)$-прямоугольников совпадает со множеством $L(T, h)$, где T — матрица размеров $n \times h$, все элементы которой — единицы. Отсюда и из теоремы 3 и 4 вытекает:

а) если $n = h$, то S_1 — полная система преобразований для множества всех латинских квадратов порядка n [6];

б) если $n < h$, то S_2 — полная система преобразований для множества всех латинских $(n \times h)$-прямоугольников.

2. Квадратная матрица с действительными неотрицательными элементами называется дважды стохастической, если суммы элементов в каждом ее столбце и в каждой ее строке равны единице. Дважды стохастическая (0, 1)-матрица называется подстановочной.

Пусть A — некоторая дважды стохастическая матрица порядка n, $n \geqslant 2$. Г. Биркгоф [17] доказал, что A можно представить в виде выпуклой комбинации подстановочных матриц, т. е. в виде

$$A = a_1 T_1 + \ldots + a_h T_h, \tag{3.1}$$

где $\sum_{r=1}^{h} a_r = 1$, $a_r > 0$, $r = 1, \ldots, h$, а $T_1, \ldots, T_h$ — попарно различные подстановочные матрицы порядка n, $T_r = \left(t_{ij}^{(r)}\right)$, $r = 1, \ldots, h$.

Поставим в соответствие каждой матрице T_r, $r = 1, \ldots, h$, перестановку $(j(1, r), \ldots, j(n, r))$ множества I_n, где $j(i, r)$ есть то j, для которого $t_{ij}^{(r)} = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

В работе [4] для случая $h \geqslant 2$ сформулирован, а в [5] доказан критерий однозначной (с точностью перестановки слагаемых) представимости дважды стохастической матрицы A в виде выпуклой комбинации подстановочных матриц*). (Ясно, что в случае $h = 1$ такое представление единственно, так как A — подстановочная матрица.)

---

*) Этот критерий отличен от критерия Бруальди — Гибсона [18].

Теорема 5 [4, 5]. *Для того чтобы при $h \geqslant 2$ (3.1)' было единственным представлением дважды стохастической матрицы A порядка n в виде выпуклой комбинации подстановочных матриц, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий.*

Для любых α, β, $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant h$, в подстановке

$$\begin{pmatrix} j(1, \alpha), \ldots, j(n, \alpha) \\ j(1, \beta), \ldots, j(n, \beta) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

имеется не более одного цикла длины, большей 1.

Если $h \geqslant 3$, то для любых α, β, γ, $1 \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant h$, числа $j(i, \alpha)$, $j(i, \beta)$, $j(i, \gamma)$ попарно различны не более чем для одного $i \in I_n$. (3.3)

Мы дадим здесь новое доказательство этого критерия с использованием теоремы 3.

Пусть $T = \sum_{r=1}^{h} T_r$, где $T_1, \ldots, T_h$ — набор матриц из (3.1). Этот набор порождает h-расписание $J = (j(i, r))$, $i = 1, \ldots, n$, $r = 1, \ldots, h$. Ясно, что T является h-регулярной матрицей и $J \in L(T, h)$. Обратно, каждое h-расписание $B = (b(i, r))$ из $L(T, h)$ порождает набор $(F(B, 1), \ldots \ldots, F(B, h))$ подстановочных матриц порядка n, удовлетворяющих условию $\sum_{r=1}^{h} F(B, r) = T$ и $F(B, r) = (f_{ij}^{(r)})$, где

$$f_{ij}^{(r)} = \begin{cases} 1, & \text{если } b(i, r) = j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad i, j = 1, \ldots, n, \quad r = 1, \ldots, h.$$

Две матрицы из $L(T, h)$ назовем изоморфными, если одна может быть получена из другой перестановкой столбцов.

Лемма 6. *Для того чтобы (3.1) было единственным представлением дважды стохастической матрицы A в виде выпуклой комбинации подстановочных матриц, необходимо и достаточно, чтобы все матрицы из множества $L(T, h)$ были изоморфны h-расписанию J.*

Доказательство. Необходимость докажем от противного. Пусть $L(T, h)$ содержит два неизоморфных h-расписания J и B, где $F(J, r) = T_r$, $r = 1, \ldots, h$.

Ясно, что $\sum_{r=1}^{h} T_r = \sum_{r=1}^{h} F(B, r)$. Без ограничения общности будем считать, что в (3.1) $a_1 = \min_{1 \leqslant r \leqslant h} a_r$. Тогда

$$A = a_1 \sum_{r=1}^{h} T_r + \sum_{r=2}^{h} (a_r - a_1) \cdot T_r,$$

$$A = a_1 \sum_{r=1}^{h} F(B, r) + \sum_{r=2}^{h} (a_r - a_1) T_r. \tag{3.4}$$

Поскольку J и B не изоморфны, то набор $(F(B, 1), \ldots, F(B, h))$ содержит матрицу, не входящую в набор $(T_1, \ldots, T_h)$. Следовательно, раскрыв скобки и приведя подобные члены в (3.4), мы получим отличное от (3.1) представление A в виде выпуклой комбинации подстановочных матриц.

Достаточность также докажем от противного. Пусть A имеет отличное от (3.1) представление $A = \sum_{r=1}^{s} b_r D_r$, где $\sum_{r=1}^{s} b_r = 1$, $b_r > 0$, $r = 1, \ldots, s$ и $D_1, \ldots, D_s$ — попарно различные подстановочные матрицы порядка n. Возможны два случая.

Случай 1. Существует такое $\beta \in \{1, \ldots, s\}$, что $D_\beta \notin \{T_1, \ldots, T_h\}$. Без ограничения общности можно считать, что $\beta = 1$. Тогда целочисленная матрица $T - D_1$ является $(h-1)$-регулярной и ее можно представить (см. [9]) в виде $T - D_1 = \sum_{r=1}^{h-1} T_r^{(1)}$, где $T_1^{(1)}, \ldots, T_{h-1}^{(1)}$ — подстановочные матрицы порядка n. Поскольку $D_1 \notin \{T_1, \ldots, T_h\}$, то набор подстановочных матриц $\left(T_1^{(1)}, \ldots, T_{h-1}^{(1)}, D_1\right)$ порождает h-расписание, которое не изоморфно h-расписанию J.

Случай 2. $\{D_1, \ldots, D_s\} \subset \{T_1, \ldots, T_h\}$. Тогда $h > s \geqslant 2$. Без ограничения общности будем считать, что $D_r = T_r$, $r = 1, \ldots, s$. Ясно, что найдется такое r, $1 \leqslant r \leqslant s$, что $b_r > a_r$. Пусть $r = 1$. Тогда $\sum_{r=2}^{h} a_r T_r = (b_1 - a_1) \cdot T_1 + \sum_{r=2}^{s} b_r T_r$ и дважды стохастическая матрица

$$A' = \frac{1}{1 - a_1}(a_2 T_2 + \ldots + a_h T_h)$$

имеет два различных представления:

$$A' = \frac{a_2}{1 - a_1} T_2 + \ldots + \frac{a_h}{1 - a_1} T_h, \quad A' = \frac{b_1 - a_1}{1 - a_1} T_1 + \ldots + \frac{b_s}{1 - a_1} T_s.$$

Пусть $(h-1)$-расписание J' получено из J удалением столбца $J(1)$. Ясно, что $J' \in L(T', h-1)$, где $T' = \sum_{r=2}^{h} T_r$. Поскольку $T_1 \notin \{T_2, \ldots, T_h\}$, то согласно случаю 1 в множестве $L(T', h-1)$ существует $(h-1)$-расписание B', которое не изоморфно J'. Но тогда h-расписание B, полученное из B' добавлением к нему слева столбца $J(1)$, не изоморфно J. Получим, что в $L(T, h)$ существуют два неизоморфных h-расписания. Лемма доказана.

Лемма 7. *Для того чтобы все h-расписания из $L(T, h)$ были изоморфны h-расписанию J, необходимо и достаточно выполнение условий* (3.2) *и* (3.3).

Доказательство. Необходимость условия (3.2) очевидна. Необходимость условия (3.3) докажем от противного. Пусть для чисел α, β, γ условие (3.3) нарушено, т. е. существуют $n_1, n_2 \in I_n$ такие, что числа $j(n_i, \alpha)$, $j(n_i, \beta)$, $j(n_i, \gamma)$ попарно различны, $i = 1, 2$. Покажем, что тогда существует $B \in L(T, h)$, которое не изоморфно J.

Пусть i_1 — наименьшее число, для которого $j(i_1, \alpha) \neq j(i_1, \beta)$. Ясно, что последовательность транспозиций, соответствующая $J(i_1, \alpha, \beta)$, является циклическим (α, β)-преобразованием. Пусть $J(i_1, \alpha, \beta) = (i_1, \ldots, i_t)$. Из условия (3.2) следует, что $n_1, n_2 \in \{i_1, \ldots, i_t\}$. Без ограничения общности предположим, что в последовательности $J(i_1, \alpha, \beta)$ число n_1 встречается раньше, чем n_2. Пусть $n_2 = i_s$ и $J(n_2, \alpha, \gamma) = (n_2, n_3, \ldots, n_p)$. Ясно, что $J(n_2, \alpha, \gamma)$ является циклическим (α, γ)-преобразованием и каждое $i \in I_n$, удовлетворяющее условию $j(i, \alpha) \neq j(i, \gamma)$, входит во множество $\{n_2, \ldots, n_p\}$. Поэтому $n_1 \in \{n_2, \ldots, n_p\}$. Пусть m — наименьшее число из множества $\{3, \ldots, p\}$, для которого $n_m \in \{i_1, \ldots, i_{s-1}\}$. Пусть $n_m = i_k$. Тогда последовательность транспозиций ψ,

$$\psi = ((i_k, \alpha) \leftrightarrow (i_k, \beta), \ldots, (i_{s-1}, \alpha) \leftrightarrow (i_{s-1}, \beta), (n_2, \alpha) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (n_2, \gamma), \ldots, (n_{m-1}, \alpha) \leftrightarrow (n_{m-1}, \gamma)),$$

является циклическим (α, β, γ)-преобразованием J. По лемме 2 существует исправляющее (β, γ)-преобразование φ для ψ. Тогда матрица $B = J(\psi\varphi)$ является h-расписанием из множества $L(T, h)$ и $B(\alpha) \notin \{J(\alpha), J(\beta), J(\gamma)\}$. Поэтому B не изоморфно J. Необходимость доказана.

Достаточность докажем от противного. Пусть условия (3.2) и (3.3) выполнены, но в $L(T, h)$ существует h-расписание B, которое не изоморфно J. Тогда по теореме 3 существует такая последовательность $D_1, \ldots, D_r$ из $L(T, h)$, что $D_1=J$, $D_r=B$ и D_{m+1} получена из D_m или 3-преобразованием, или циклическим 2-преобразованием, $m=1, \ldots, r-1$. Пусть $D_m=(d_m(i, j))$, $m=1, \ldots, r$, и пусть m_1 — наименьшее число, для которого D_{1+m_1} не изоморфна J. Без ограничения общности примем $m_1=1$. Тогда из (3.2) следует, что

$$\{D_1(\alpha), D_1(\beta), D_1(\gamma)\} \cap \{D_2(\alpha), D_2(\beta), D_2(\gamma)\} = \varnothing \qquad (3.5)$$

и D_2 получена из D_1 некоторым 3-преобразованием $\varphi=\varphi_1\varphi_2$, где φ_1 — циклическое (α, β, γ)-преобразование, а φ_2 — исправляющее (β, γ)-преобразование для φ_1.

Пусть φ_1 соответствует последовательности $D_1(D_2, i_1, \alpha, \beta, \gamma)=(i_1, \ldots, i_p)$, а $D_1(D_2, i_1, \alpha, \beta)=(i_1, \ldots, i_t)$. Ясно, что $t<p$ и для i_{t+1} выполнено $d_1(i_{t+1}, \gamma)=d_2(i_{t+1}, \alpha)\neq d_1(i_{t+1}, \beta)$. Тогда числа $d_1(i_{t+1}, \alpha)$, $d_1(i_{t+1}, \beta)$, $d_1(i_{t+1}, \gamma)$ попарно различны. Отсюда и из (3.3) следует

Свойство 1. Для каждого m, $m\neq t+1$, $1\leqslant m\leqslant p$, среди элементов $d_1(i_m, \alpha)$, $d_1(i_m, \beta)$, $d_1(i_m, \gamma)$ есть два равных элемента.

Пусть $j[i_m]$ — наименьшее число j из множества $\{\beta, \gamma\}$, для которого $d_1(i_m, j[i_m])=d_2(i_m, \alpha)$, $m=t+1, \ldots, p$. Пусть r — наибольшее число, для которого $j[i_m]=\gamma$ для каждого $m\in\{t+1, \ldots, r\}$.

Свойство 2. Если $p\geqslant t+2$, то $d_1(i_m, \alpha)=d_1(i_m, \beta)$, $m=t+2, \ldots, r$.

Действительно, из свойства 1 имеем $d_1(i_m, \beta)\in\{d_1(i_m, \alpha), d_1(i_m, \gamma)\}$ для каждого $m\in\{t+2, \ldots, r)$, но поскольку $j[i_m]=\gamma$, то $d_1(i_m, \alpha)=d_1(i_m, \beta)$.

Свойство 3. Если $p>r$, то $j[i_m]=\beta$ для каждого $m\in\{r+1, \ldots, p\}$.

Действительно, если существует m_1, $r+1<m_1\leqslant p$ такое, что $[i_{m_1}]=\gamma$ и $j[i_{m_1-1}]=\beta$, то элементы $d_1(i_{m_1}, \alpha)$, $d_1(i_{m_1}, \beta)$, $d_1(i_{m_1}, \gamma)$ попарно различны. Это противоречит свойству 1.

Свойство 4. Если $p>r$, то $d_1(i_m, \beta)=d_1(i_m, \gamma)$, $m=r+1, \ldots, p$.

Действительно, из $j[i_r]=\gamma$, $j[i_{r+1}]=\beta$ и из свойства 1 следует, что $d_1(i_{r+1}, \gamma)=d_1(i_{r+1}, \beta)$. Но тогда из свойства 3 при $p\geqslant r+2$ получим: $d_1(i_m, \gamma)=d_1(i_m, \beta)$, $m=r+2, \ldots, p$.

Поскольку φ_1 — циклическое (α, β, γ)-преобразование, то $d_1(i_1, \alpha)=d_1(i_p, j[i_p])$. Кроме того, из свойства 1 следует, что $d_1(i_1, \gamma)\in\{d_1(i_1, \alpha), d_1(i_1, \beta)\}$.

Если $d_1(i_1, \gamma)=d_1(i_1, \alpha)$, то $j[i_p]=\beta$. Но по свойству 4 $d_1(i_p, \gamma)=d_1(i_p, \beta)$. Получим $d_1(i_1, \gamma)=d_1(i_p, \gamma)$. Это противоречит допустимости $D_1(\gamma)$.

Следовательно, $d_1(i_1, \gamma)=d_1(i_1, \beta)$. Но тогда $d_1(i_m, \gamma)=d_1(i_m, \beta)$ для каждого $m\in\{1, \ldots, t\}$. Отсюда и из свойств 3 и 4 получим $D_1(i_1, \alpha, \gamma)=(i_1, \ldots, i_t, \ldots, i_p)$.

Пусть ψ — последовательность транспозиций, соответствующая $D_1(i_1, \alpha, \gamma)$. Поскольку ψ — циклическое (α, γ)-преобразование, то из условия (3.2) следует, что $D_1(\gamma)=D_2(\alpha)$, что противоречит (3.5). Лемма 7 доказана.

Теорема 5 следует из лемм 6 и 7.

3. Раскраской мультиграфа $G=(V, E)$ в h цветов называется отображение f: $E\to\{1, \ldots, h\}$. Если $e\in E$ и $f(e)=i$, то говорят, что ребро e окрашено в цвет i. Раскраску f мультиграфа в h цветов назовем h-раскраской, если $f(e)\neq f(e')$ для любых двух смежных ребер e и e'. Мультиграф G называется h-регулярным, если степень каждой его вершины равна h. Подмножество попарно несмежных ребер из E называется паросочетанием G.

В 1975 г. А. Коциг [22] нашел полную систему преобразования для множества 3-раскрасок кубического, т. е. 3-регулярного графа и поставил проблему: можно ли от одной h-раскраски h-регулярного графа G, $h>3$, перейти к любой другой h-раскраске G, используя преобразования лишь двухцветных и трехцветных подграфов G так, что промежуточные раскраски также были бы h-раскрасками? В терминах полных систем преобразований проблему Коцига можно переформулировать следующим образом: существует ли такая полная система преобразований для множества 3-раскрасок 3-регулярного графа, которая была бы полной системой преобразований и для множества h-раскрасок h-регулярного графа, $h>3$?

Используя теорему 3, мы дадим решение проблемы Коцига для двудольных мультиграфов.

Пусть $G=(V_1, V_2, E)$ — h-регулярный двудольный мультиграф, $h\geqslant 3$, множество вершин которого разбито на два подмножества $V_1=\{v_1, \ldots, v_n\}$ и $V_2=\{u_1, \ldots, u_n\}$ так, что любые две смежные вершины принадлежат разным подмножествам, причем вершины v_i и u_ν соединены $t_{i\nu}$ параллельными ребрами, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant \nu\leqslant n$. (Параллельные ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин, мы считаем равными.) Ясно, что матрица $T=(t_{i\nu})$, $n\times n$, является h-регулярной.

Пусть $L(G, h)$ — множество всех h-раскрасок G, а $R(G, h)$ — множество всех таких раскрасок G в h цветов, что каждая из них удовлетворяет условию: ребра, инцидентные вершине v_i, окрашены в разные цвета, $i=1, \ldots, n$. Ясно, что $\varnothing\neq L(G, h)\subset R(G, h)$. Каждую раскраску $f\in R(G, h)$ можно задать в виде матрицы $\eta(f)$, где $\eta(f)=B=(b(i, j))\in R(T, h)$, следующим образом: если $(v_i, u_\nu)=e\in E$ и $f(e)=j$, то $b(i, j)=\nu$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant\nu\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant h$. Ясно, что соответствие η между множествами $R(G, h)$ и $R(T, h)$ взаимно однозначное, причем $f\in L(G, h)$ тогда и только тогда, когда $\eta(f)\in L(T, h)$.

Пусть $f\in R(G, h)$ и α, β — два различных цвета. Цепь P мультиграфа G называется двухцветной (α, β)-цепью, если множество ее ребер можно разбить на два паросочетания $P(\alpha)$ и $P(\beta)$ так, что при раскраске f ребра из $P(\alpha)$ окрашены в цвет α, а ребра из $P(\beta)$ — в цвет β. Двухцветная (α, β)-цепь называется максимальной, если она не является собственной частью некоторой (α, β)-цепи. Пусть P — максимальная (α, β)-цепь. Из максимальности P и из условия: ребра, инцидентные вершине v_i, окрашены в разные цвета, $i=1, \ldots, n$,— следует, что P имеет вид:

$$P=u_{\nu_1}, e_1, v_{i_1}, e_2, u_{\nu_2}, \ldots, v_{i_r}, e_{2r}, u_{\nu_{r+1}}. \tag{3.6}$$

Перекраской максимальной (α, β)-цепи P называется такое преобразование φ' раскраски f, что для полученной раскраски g выполнены условия:

$$g(e)=\begin{cases} f(e), & \text{если } e\notin P,\\ \beta, & \text{если } e\in P(\alpha),\\ \alpha, & \text{если } e\in P(\beta).\end{cases}$$

Ясно, что $g\in R(G, h)$, причем если $f\in L(G, h)$, то и $g\in L(G, h)$.

Пусть $\eta(f)=B=(b(i, j))$. Покажем, что φ' — графовый аналог 2-преобразования матрицы B. Действительно, если $f(e_{2t-1})=\beta$ и $f(e_{2t})=\alpha$, $t=1, \ldots, r$, то в матрице B имеем: $b(i_t, \alpha)=\nu_{t+1}$, $b(i_t, \beta)=\nu_t$ для каждого t, $1\leqslant t\leqslant r$. А если $f(e_{2t-1})=\alpha$ и $f(e_{2t})=\beta$, $t=1, \ldots, r$, то в матрице B имеем: $b(i_t, \alpha)=\nu_t$, $b(i_t, \beta)=\nu_{t+1}$ для каждого t, $1\leqslant t\leqslant r$. В обоих случаях перекраске максимальной (α, β)-цепи P соответствует 2-преобразование матрицы B. В первом случае оно задается последовательностью транспозиций, соответствующей $B(i_1, \beta, \alpha)$, а во втором случае — последовательностью транспозиций, соответствующей $B(i_1, \alpha, \beta)$.

В случае, когда $\nu_1=\nu_{r+1}$, перекраска (α, β)-цикла P является графовым аналогом циклического 2-преобразования матрицы B.

Пусть f — некоторая h-раскраска мультиграфа G и α, β, γ — различные цвета. Цепь (3.6) назовем трехцветным (α, β, γ)-циклом, если

$$v_1 = v_{r+1}, \quad f(e_{2t-1}) = \alpha \quad \text{и} \quad f(e_{2t}) \in \{\beta, \gamma\}, \quad t = 1, \ldots, r,$$

причем и в цвет β, и в цвет γ окрашено хотя бы по одному ребру из множества $\{e_{2t} \mid t = 1, \ldots, r\}$. Перекраской (α, β, γ)-цикла P назовем такое преобразование ψ' раскраски f, что для полученной раскраски g выполнены условия:

1) $g(e) = f(e)$ для каждого $e \notin P$,
2) $g(e_t) = f(e_{t+1})$, $t = 1, \ldots, 2r-1$,
3) $g(e_{2r}) = f(e_1)$.

Ясно, что $g \in R(G, h)$ и $g \notin L(G, h)$. Пусть $B = \eta(f)$. Нетрудно проверить, что ψ' является графовым аналогом циклического (α, β, γ)-преобразования матрицы B. (Это преобразование обозначим через ψ.) Тогда по лемме 2 существует исправляющее (β, γ)-преобразование φ для ψ, которое представляет собой композицию 2-преобразований. Пусть φ' — преобразование раскраски g, являющееся графовым аналогом преобразования φ. Нетрудно заметить, что тогда φ' является композицией перекрасок максимальных (β, γ)-цепей и раскраска, полученная из g в результате преобразования φ', принадлежит множеству $L(G, h)$. Композиция преобразований ψ' и φ' является графовым аналогом 3-преобразования матрицы $B \in L(T, h)$. Поэтому композицию преобразований ψ' и φ' мы назовем графовым 3-преобразованием.

Пусть S_1' — система, состоящая из двух преобразований: перекраски двухцветного цикла и графового 3-преобразования. Поскольку эти преобразования являются графовыми аналогами преобразований из системы S_1, то из теоремы 3 вытекает

Т е о р е м а 6. *S_1' является полной системой преобразований для множества h-раскрасок h-регулярного двудольного мультиграфа, $h \geqslant 3$.*

Преобразования, входящие в систему S_1', касаются лишь двухцветных и трехцветных подграфов. Поэтому из теоремы 6 вытекает

С л е д с т в и е 3. *Любая полная система преобразований для множества 3-раскрасок 3-регулярного двудольного мультиграфа является полной системой преобразований и для множества h-раскрасок h-регулярного двудольного мультиграфа, $h > 3$.*

Следствие 3 дает решение проблемы Коцига для двудольных мультиграфов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А с р а т я н А. С. О построении реберной раскраски специального вида в двудольном графе и ее применении в задачах теории расписаний // Вестник МГУ. Серия вычисл. мат. и киберн.— 1978.— № 1.— С. 74—81.
2. А с р а т я н А. С., К а м а л я н Р. Р. О двух NP-полных проблемах теории расписаний // «Проблемы автоматического управления». Тезисы докладов IV конференции молодых ученых Закавказских республик.— Тбилиси, 1986.— С. 25—26.
3. А с р а т я н А. С., К а м а л я н Р. Р. Интервальные раскраски ребер мультиграфа // «Прикладная математика» (Межвузовский сборник).— Ереван, 1987.— Вып. 5.— С. 25—34.
4. А с р а т я н А. С., К о с т о ч к а А. В., М и р у м я н А. Н. Дважды стохастические матрицы, имеющие единственное представление // Тезисы докладов VII Всесоюзной конференции «Проблемы теоретической кибернетики».— Иркутск, 1985.— С. 15—16.
5. А с р а т я н А. С., К о с т о ч к а А. В., М и р у м я н А. Н. Критерий однозначной раскрашиваемости ребер двудольных мультиграфов // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач.— Новосибирск, 1987.— Вып. 45.— С. 3—20.
6. А с р а т я н А. С., М и р у м я н А. Н. Преобразования латинских квадратов // Дискретная математика.— 1990.— Т. 2, № 3.

7. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация.— М.: Наука, 1981.
8. Николаев К. Г., Плужников Л. Н. Алгоритм перестановки для построения допустимого расписания // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1969.— № 23.— С. 26—32.
9. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1977.
10. Таланов В. А. О представлении целочисленной матрицы с неотрицательными элементами в виде суммы субперестановочных матриц // Сб. «Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика».— Горький, 1974.— С. 238—246.
11. Танаев В. С., Гордон В. С., Шафранский Я. М. Теория расписаний. Одностадийные системы.— М.: Наука, 1984.
12. Танаев В. С., Сотсков Ю. Н., Струсевич В. А. Теория расписаний. Многостадийные системы.— М.: Наука, 1989.
13. Теория расписаний и вычислительные машины (под ред. Э. Г. Коффмена).— М.: Наука, 1984.
14. Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.
15. Холл М. Комбинаторика.— М.: Мир, 1970.
16. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1986.
17. Birkhoff G. Tres observaciones sobre et algebra linear // Rev. Univ. Nac. Tucuman Revista. Ser. A.— 1946.— V. 5.— P. 147—151.
18. Brualdi R. A., Gibson P. M. Convex poliedra of doubly stochastic matrices. I. Applications of the permanent function // J. Combin. Theory (A).— 1977.— V. 22, № 2.— P. 194—230.
19. Csima J., Gotlib C. C. Tests on a computer method for constructing school time-table //Commun. AMC.— 1964.— № 7.— P. 160—163.
20. Even S., Itai A., Chamir A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems // SIAM J. Comput.— 1976.— V. 5, № 4.— P. 691—703.
21. Karp R. M. Reducibility among combinatorial problems // Complexity of computer computations. Proc. Symp. March 20—22.— 1972.— P. 85—103. [Рус. пер.: Кибернетический сборник (новая серия).— М.: Мир, 1975.— С. 16—38.]
22. Kotzig A. Transformations of edge-colourings of cubic graphs // Discrete math.— 1975.— V. 11.— P. 391—399.
23. Papoulias D. B. The assignment-to-days problem a school time-table a heuristic approach // European J. of Oper. Res.— 1980.— V. 4, № 1.— P. 31—41.
24. de Werra D. Balanced schedules // Canad. J. Oper. Res. and Inform. Process.— 1971.— V. 9, №-3.— P. 230—237.
25. de Werra D. On some combinatorial problems arising in scheduling // Canad. Oper. Res. Soc. J.— 1971.— V. 8, № 3.— P. 165—175.

Поступило в редакцию 16.III.90