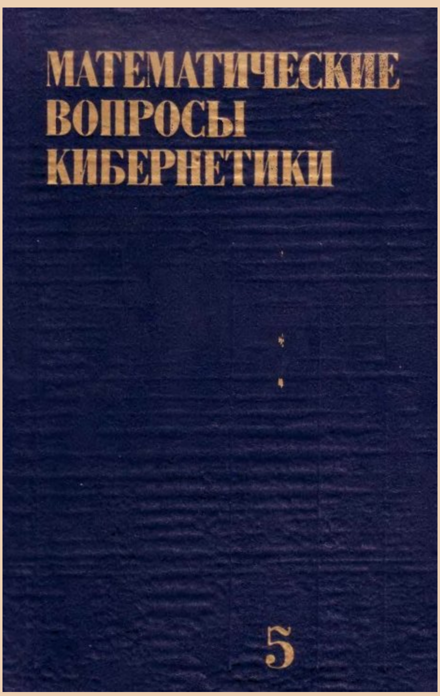

Л. А. Шоломов

Исследование отношений в критериальных пространствах и синтез операторов группового выбора

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТНОШЕНИЙ В КРИТЕРИАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И СИНТЕЗ ОПЕРАТОРОВ ГРУППОВОГО ВЫБОРА

Л. А. ШОЛОМОВ

(МОСКВА)

Широкое применение вычислительной техники в процессе принятия и реализации решений повысило интерес к формальным моделям выбора решений и к абстрактной теории выбора [1, 17, 23]. В данной работе установлена тесная связь задач анализа свойств отношений в моделях многокритериального выбора с проблематикой теории группового (коллективного) выбора, инициированной известной теоремой Эрроу [17, 19, 21, 23]. С помощью развитых в работе логических методов получено значительное продвижение в каждой из этих областей.

В задачах многокритериального выбора варианты характеризуются наборами оценок по некоторой совокупности критериев, а выбор осуществляется на основе бинарного отношения на множестве наборов, описывающего «предпочтительность» одних наборов оценок другим. Отношение называется *порядковым* [4] (*координатным* [10]), если для любой пары наборов оно однозначно определяется результатом сравнения (больше, меньше, равно) одноименных компонент. Порядковое отношение ρ может быть описано двузначной функцией g_ρ от трехзначных аргументов [4, 10].

При построении и исследовании моделей многокритериального выбора возникают задачи анализа свойств порядковых отношений, состоящие в том, чтобы по ρ (точнее, функции g_ρ) определить, является ли отношение ρ транзитивным, ацикличным и др. Этим задачам уделено большое внимание в [4, 10], но результаты там носят лишь качественный характер и не приводят к эффективным алгоритмам. В данной работе операции над отношениями ρ сведены к преобразованиям функций g_ρ и с помощью развитой здесь техники исследования двузначных функций от трехзначных аргументов получены эффективные (полиномиальные) алгоритмы анализа основных свойств монотонных (правильных [4]) порядковых отношений (в немонотонном случае эти задачи оказываются NP-трудными).

В теории группового выбора изучаются вопросы выработки согласованных решений относительно выбора «лучших» вариантов. Варианты здесь являются уже некоторыми абстрактными объектами, не имеющими критериального описания. В наиболее распространенных моделях каждый индивидуум i $(i=\overline{1, n})$, принимающий участие в групповом выборе, характеризуется бинарным отношением r_i, заданным на множестве вариантов и соответствующим его «системе предпочтений». Требуется «агрегировать» набор индивидуальных отношений в групповое отношение $r=F(r_1, \ldots, r_n)$, на основе которого будет производиться окончательный выбор.

Систематическое изучение операторов агрегирования ведет начало с исследований Эрроу [17], который сформулировал ряд аксиоматических требований к операторам, каждое из которых представляется необходимым, и доказал их несовместность. Данный факт получил в литературе название «парадокса Эрроу». Критический анализ использованных аксиом привел к рассмотрению некоторых других требований, видоизменивших парадокс, но не устранивших его.

Формальные требования к операторам агрегирования могут быть разделены на два класса — характеристические условия и структурные ограничения. Первые относятся к свойствам оператора, вторые — к областям его определения и значений. Основным характеристическим условием является бинарность («независимость от посторонних вариантов» в терминологии Эрроу), другими примерами могут служить монотонность операторов, нейтральность к вариантам (подробнее в § 3 данной работы). Структурные ограничения задаются классами отношений $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$. Любой набор отношений класса $\mathscr{R}_1$ оператор должен переводить в групповое отношение класса $\mathscr{R}_2$. Естественно предположить, что при совпадении индивидуальных отношений $r_1 = \ldots = r_n$ групповое отношение будет тем же самым, поэтому обычно считают $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{R}_2$.

В последнее время изучение парадокса Эрроу приняло более конструктивный характер. Появился целый ряд исследований, в которых рассматриваются совместные наборы характеристических условий и структурных ограничений и находится явный вид удовлетворяющих им операторов [2, 3, 5—9, 12, 18, 20]. Эта задача получила название задачи синтеза операторов.

В данной работе показано, что задача синтеза операторов родственна задаче анализа свойств порядковых отношений, а в некоторых постановках — эквивалентна ей. Это позволило найти вид операторов для всех типов основных структурных ограничений, рассматриваемых в теории выбора, и для наиболее распространенного набора характеристических условий. Тем самым получено новое доказательство известных результатов о явном виде агрегирующих операторов, некоторые из известных результатов усилены, установлен ряд новых фактов.

Найденное соответствие операторов и порядковых отношений позволяет объединить исследования в этих областях, ранее проводившиеся параллельно. Оно дало возможность связать ряд результатов по агрегированию с фактами из классической теории отношений (леммой Шпильрайна, теоремой Душника — Миллера). Отметим также, что данный подход сводит достаточно сложные объекты (операторы на множестве отношений) к простым объектам (порядковым отношениям), что облегчает исследование операторов.

Различные логические методы, отличные от методов данной работы, применялись для исследования задач агрегирования в [5, 8, 9, 22], а для анализа порядковых отношений — в [4, 10].

Считаю необходимым выразить признательность Ф. Т. Алескерову, А. В. Владимирову, В. И. Данилову и В. С. Левченкову за полезные обсуждения.

§ 1. Логический метод исследования порядковых отношений

1.1. Бинарные отношения. Будем рассматривать бинарные отношения r на некотором множестве Ω $(r \subseteq \Omega^2)$. Пусть x, y, z, v — произвольные элементы из Ω. Отношение r называется *рефлексивным*, если xrx; *антирефлексивным*, если $x\bar{r}x$; *асимметричным*, если $xry \Rightarrow y\bar{r}x$; *антисимметричным*, если $(x \neq y \,\&\, xry) \Rightarrow y\bar{r}x$; *полным*, если $xry \vee yrx$; *связным*, если $x \neq y \Rightarrow xry \vee yrx$; *транзитивным*, если $xry \,\&\, yrz \Rightarrow xrz$; *негатранзитивным*, если $x\bar{r}y \,\&\, y\bar{r}z \Rightarrow x\bar{r}z$.

Двойственным к r назовем отношение $r^* = \overline{r^{-1}} = \Omega^2 \backslash r^{-1}$, где r^{-1} обратно к r: $xr^{-1}y \Leftrightarrow yrx$. Поскольку $(\overline{r^{-1}}) = (\bar{r})^{-1}$, то двойственное отношение будем записывать в виде $\bar{r}^{-1}$, не указывая очередности выполнения операций обращения и дополнения. Очевидно, $(r^*)^* = r$.

Легко проверить, что пары свойств: рефлексивность — антирефлексивность, асимметрия — полнота, антисимметрия — связность, транзитивность — негатранзитивность,— двойственны, т. е. если одно из отношений r, r^* обладает одним из этих свойств, другое обладает вторым. Кроме того, если $r = \Phi(r_1, \ldots, r_n)$, Φ — теоретико-множественная (т.-м.) операция, то $r^* = \Phi^*(r_1^*, \ldots, r_n^*)$, где $\Phi^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{\Phi}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ — операция, двойственная к Φ (черта означает дополнение множества). Действительно,

$$r^* = (\overline{\Phi}(r_1, \ldots, r_n))^{-1} = \overline{\Phi}(r_1^{-1}, \ldots, r_n^{-1}) = \overline{\Phi}(\bar{r}_1^*, \ldots, \bar{r}_n^*).$$

1.2. Порядковые отношения. Дальше вплоть до § 3 будем считать, что множество Ω совпадает с n-мерным действительным пространством R^n. Исходя из интерпретации в терминах выбора, точки $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ будем называть *вариантами*, компоненту x_i — *оценкой варианта* $\tilde{x}$ по i-му критерию, а само пространство R^n — *критериальным.*

Результат сравнения вариантов $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ будем описывать набором $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \{-1, 0, +1\}^n$, где $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\operatorname{sign}(x_1 - y_1), \ldots, \operatorname{sign}(x_n - y_n))$, $\operatorname{sign}(z)$ означает соответственно $+1$, -1, 0 при $z > 0$, $z < 0$, $z = 0$. Отношение ρ на R^n ($\rho \subseteq R^{2n}$) назовем *порядковым*, если $(\Delta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Delta(\tilde{z}, \tilde{v})) \Rightarrow (\tilde{x}r\tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{z}r\tilde{v})$. Порядковое отношение ρ называется *правильным*, если выполнено свойство монотонности $(\tilde{z} \geqslant \tilde{x} \,\&\, \tilde{x}\rho\tilde{y}) \Rightarrow \tilde{z}\rho\tilde{y}$, где $\tilde{z} \geqslant \tilde{x} \Leftrightarrow z_1 \geqslant x_1, \ldots, z_n \geqslant x_n$.

Обозначим через $P_{3,2}$ класс двузначных функций $g(u_1, \ldots, u_n) = g(\tilde{u})$ от трехзначных аргументов, где $u_s \in \{-1, 0, +1\}$, $s = \overline{1, n}$, $(\forall \tilde{u})(g(\tilde{u}) \in \{0, 1\})$. Порядковое отношение ρ однозначно задается представляющей функцией $g_\rho(\tilde{u}) \in P_{3,2}$, связанной с ρ соотношением $\tilde{x}\rho\tilde{y} \Leftrightarrow g_\rho(\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})) = 1$. Нетрудно видеть, что отношение ρ правильно тогда и только тогда, когда g_ρ принадлежит множеству $M_{3,2}$ *монотонных функций* из $P_{3,2}$ (функция g монотонна, если из $\tilde{u} \geqslant \tilde{v}$ следует $g(\tilde{u}) \geqslant g(\tilde{v})$).

1.3. Свойства функций класса $P_{3,2}$. Введем функции $p(u)$, $p'(u) \in P_{3,2}$ от одного (трехзначного) переменного, положив $p(u) = 1 \Leftrightarrow u > 0$, $p'(u) = 1 \Leftrightarrow u \geqslant 0$. Очевидно, $p(u) \vee p'(u) = p'(u)$, $p(u) \,\&\, p'(u) = p(u)$.

Для функций $g \in P_{3,2}$ будем рассматривать представления

$$g(u_1, \ldots, u_n) = f(p(u_1), \ldots, p(u_n), p'(u_1), \ldots, p'(u_n)), \tag{1.1}$$

где f — булева функция. Введя обозначения p_i и p_i' вместо $p(u_i)$ и $p'(u_i)$ и положив $\tilde{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\tilde{p}' = (p_1', \ldots, p_n')$, запишем (1.1) в виде

$$g(\tilde{u}) = f(\tilde{p}, \tilde{p}'). \tag{1.2}$$

1.1°. *Всякая функция* g *из* $P_{3,2}$ *представима в виде* (1.2). Действительно, учитывая, что $u_i = 1 \Leftrightarrow p_i = 1$, $u_i = 0 \Leftrightarrow \bar{p}_i p_i' = 1$, $u_i = -1 \Leftrightarrow \bar{p}_i' = 1$, можно каждому набору $\tilde{\sigma} \in \{-1, 0, +1\}^n$ соотнести конъюнкцию, составленную из p_i, p_i' и их отрицаний, обращающуюся в 1 лишь на наборе $\tilde{\sigma}$, а в качестве представления (1.2) функции g взять дизъюнкцию конъюнкций, отвечающих ее единичным значениям. Эти рассуждения относятся к функциям, не равным тождественно нулю, а тождественно нулевая функция может быть записана, например, в виде $p_i \bar{p}_i$. □

Здесь и дальше значок □ указывает конец доказательства.

Конъюнкцию $q_{i_1} q_{i_2} \ldots q_{i_s}$, где $q_i \in \{p_i, p_i', \bar{p}_i, \bar{p}_i'\}$, назовем *элементарной*, если при каждом $i = \overline{1, n}$ в нее входит либо не более одного сомножителя, относящегося к переменной u_i, либо произведение двух сомножителей $p_i'\bar{p}_i$. Легко видеть, что всякая конъюнкция, если она не равна тождественно нулю, приводится к элементарной за счет устранения поглощаемых сомножителей. Элементарную конъюнкцию будем записывать также в виде $q_1 \ldots q_n$, где $q_i \in \{p_i, p_i', \bar{p}_i, \bar{p}_i', p_i'\bar{p}_i, 1\}$ называется *элементарным сомножителем*, причем $q_i = 1$ означает отсутствие сомножителя, относящегося к переменной u_i. Пустую конъюнкцию, тождественно равную 1, также удобно считать элементарной. Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (д. н. ф.). Из доказательства утверждения 1.1° следует

1.2°. *Для всякой функции g из $P_{3,2}$, $g \not\equiv 0$, существует д. н. ф.*

Конъюнкцию $K = q_1 \ldots q_n$, в которой $q_i \in \{p_i, p_i', 1\}$, $i = \overline{1, n}$, будем называть *монотонной*. Если монотонная конъюнкция K_1 получена из монотонной конъюнкции K_2 заменой некоторых p_i' на 1, а p_i на p_i' либо 1, то $K_1 \vee K_2 = K_1$, и говорят, что K_1 *поглощает* K_2. Удаление конъюнкции K_2 по этому правилу называется *приведением*. Подобно случаю булевых функций, можно доказать

1.3°. *Если $g \in M_{3,2}$, $g \not\equiv \mathrm{const}$, то для g существует единственная д. н. ф., конъюнкции которой монотонны и не поглощают друг друга.* Такую д. н. ф. будем называть *приведенной*.

По аналогии с понятием двойственной булевой функции $f^*(u_1, \ldots, u_n) = \bar{f}(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ определим *двойственную* к $g(\tilde{u})$ *функцию*, положив $g^*(\tilde{u}) = \bar{g}(-\tilde{u})$, где $-\tilde{u} = -(u_1, \ldots, u_n) = (-u_1, \ldots, -u_n)$. Таким образом, здесь для трехзначной переменной $u \in \{-1, 0, +1\}$ роль отрицания играет диаметральное отрицание $-u$, а отрицание $\bar{g}$ понимается в булевом смысле.

Очевидно, $(g^*)^* = g$. Кроме того, если φ — булева функция и $g_1, \ldots, g_k \in P_{3,2}$, то

$$(\varphi(g_1(\tilde{u}), \ldots, g_k(\tilde{u})))^* = \varphi^*(g_1^*(\tilde{u}), \ldots, g_k^*(\tilde{u})). \tag{1.3}$$

Действительно,

$$(\varphi(g_1(\tilde{u}), \ldots, g_k(\tilde{u})))^* = \bar{\varphi}(g_1(-\tilde{u}), \ldots, g_k(-\tilde{u})) =$$
$$= \varphi^*(\bar{g}_1(-\tilde{u}), \ldots, \bar{g}_k(-\tilde{u})) = \varphi^*(g_1^*(\tilde{u}), \ldots, g_k^*(\tilde{u})).$$

Переход в (1.2) к двойственной функции g^* сводится к построению двойственной булевой функции f^* и замене всех p_i на p_i', а p_i' на p_i, поскольку справедливо

1.4°. *Если g представлена в виде* (1.2), *то*

$$g^*(\tilde{u}) = f^*(\tilde{p}', \tilde{p}).$$

Это вытекает из (1.3) с учетом легко проверяемого факта двойственности функций $p(u)$ и $p'(u)$. □

Обычное понятие самодвойственной функции как функции, удовлетворяющей условию $g = g^*$, в классе $P_{3,2}$ введено быть не может, так как на наборе $\tilde{0} = (0, \ldots, 0)$ имеет место $g^*(\tilde{0}) = \bar{g}(-\tilde{0}) = \bar{g}(\tilde{0})$. В связи с этим функцию g назовем *самодвойственной*, если

$$D_{\tilde{0}}\, g(\tilde{u}) = D_{\tilde{0}}\, g^*(\tilde{u}), \tag{1.4}$$

где $D_{\tilde{0}} = p_1 \vee \bar{p}_1' \vee \ldots \vee p_n \vee \bar{p}_n'$. С помощью функции $D_{\tilde{0}}$, равной 1 всюду кроме $\tilde{0}$, исключается различие g и g^* на нулевом наборе. Эквивалентное (1.4) двойственное определение имеет вид $K_{\tilde{0}} \vee g(\tilde{u}) = K_{\tilde{0}} \vee g^*(\tilde{u})$, где $K_{\tilde{0}} = \bar{p}_1 p_1' \ldots \bar{p}_n p_n'$.

Для функций $g \in M_{3,2}$ эти определения могут быть заменены на

$$D_{\tilde{0}}^{\pm} g(\tilde{u}) = D_{\tilde{0}}^{\pm} g^*(\tilde{u}) \qquad (1.5)$$

и $K_{\tilde{0}}^{\pm} \vee g(\tilde{u}) = K_{\tilde{0}}^{\pm} \vee g^*(\tilde{u})$, где $D_{\tilde{0}}^{\pm} = p_1 \vee \ldots \vee p_n$ и $K_{\tilde{0}}^{\pm} = p_1' \ldots p_n'$. Действительно, домножив обе части (1.4) на $p_1 \vee \ldots \vee p_n$, придем к (1.5). Для доказательства в другую сторону предположим, что имеет место (1.5), а (1.4) нарушено. Без ограничения общности можно считать, что на некотором наборе $\tilde{\sigma} \neq \tilde{0}$ правая часть (1.4) обращается в 1, а левая — в 0. В этом случае $g(\tilde{\sigma}) = 1$, а $g^*(\tilde{\sigma}) = \bar{g}(-\tilde{\sigma}) = 0$, т. е. $g(\tilde{\sigma}) = g(-\tilde{\sigma})$. Переобозначим через $\tilde{\sigma}$ тот из наборов $\tilde{\sigma}$ и $-\tilde{\sigma}$, который имеет хотя бы одну компоненту $+1$. Для него $p_1 \vee \ldots \vee p_n = 1$ и (1.5) дает $g(\tilde{\sigma}) = g^*(\tilde{\sigma}) = \bar{g}(-\tilde{\sigma})$, что противоречит равенству $g(\tilde{\sigma}) = g(-\tilde{\sigma})$, установленному ранее.

Двойственно элементарному сомножителю вводится понятие *элементарного слагаемого* $d_i \in \{p_i, p_i', \bar{p}_i, \bar{p}_i', p_i \vee \bar{p}_i', 0\}$, определяются *элементарная дизъюнкция* $D = d_1 \vee \ldots \vee d_n$ и *конъюнктивная нормальная форма* (к. н. ф.) — конъюнкция элементарных дизъюнкций. Любая функция $g \in P_{3,2}$, $g \neq 1$, представима в виде к. н. ф., а для всякой функции $g \in M_{3,2}$, $g \neq \mathrm{const}$, существует единственная *приведенная к. н. ф.* (понятия, связанные с приведенной к. н. ф., двойственны соответствующим понятиям для д. н. ф.). Если g равна константе 0 или 1, по определению считаем, что ее приведенные д. н. ф. и к. н. ф. совпадают с этой константой.

1.4. Примеры порядковых отношений. Приведем важные для дальнейшего примеры отношений.

1) *Отношение Парето* π: $\tilde{x}\pi\tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{x} \geqslant \tilde{y} \;\&\; \tilde{x} \neq \tilde{y}$. Ему соответствуют д. н. ф. и к. н. ф.

$$g_\pi = p_1 p_2' \ldots p_n' \vee p_1' p_2 p_3' \ldots p_n' \vee \ldots \vee p_1' \ldots p_{n-1}' p_n,$$

$$g_\pi = p_1' p_2' \ldots p_n' (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n).$$

2) *Отношение лексикографии* λ:

$$\tilde{x}\lambda\tilde{y} \Leftrightarrow (x_{i_1} > y_{i_1}) \vee (x_{i_1} = y_{i_1} \;\&\; x_{i_2} > y_{i_2}) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (x_{i_1} = y_{i_1} \;\&\; \ldots \;\&\; x_{i_{n-1}} = y_{i_{n-1}} \;\&\; x_{i_n} > y_{i_n}), \quad i_1 \neq \ldots \neq i_n.$$

Д. н. ф. и к. н. ф. имеют вид

$$g_\lambda = p_{i_1} \vee p_{i_1}' p_{i_2} \vee \ldots \vee p_{i_1}' \ldots p_{i_{n-1}}' p_{i_n},$$

$$g_\lambda = p_{i_1}' (p_{i_1} \vee p_{i_2}') \ldots (p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_{n-2}} \vee p_{i_{n-1}}')(p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_n}). \qquad (1.6)$$

Отношение λ' с представляющей функцией

$$g_{\lambda'} = p_{i_1} \vee p_{i_1}' p_{i_2} \vee \ldots \vee p_{i_1}' \ldots p_{i_{k-1}}' p_{i_k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad i_1 \neq \ldots \neq i_k,$$

будем называть *неполной лексикографией*. Случай $k = 0$ соответствует пустому отношению λ'. Легко проверить, что функция g_λ самодвойственна, а $g_{\lambda'}$ при $k < n$ нет.

Укажем связь отношений лексикографии и Парето. Пусть λ_i, $i = \overline{1, n}$ — произвольная лексикография (полная), в которой старшей является переменная с номером i (т. е. $g_{\lambda_i} = p_i \vee \ldots$). Используя представления функций g_{λ_i} в виде к. н. ф. и правила булевой алгебры, преобразуем конъюнкцию

$$\mathop{\&}_{1 \leqslant i \leqslant n} g_{\lambda_i} = p_1' \ldots p_n' (p_1 \vee \ldots \vee p_n) = g_\pi.$$

Таким образом, пересечение λ_i, $i=\overline{1, n}$, дает π. Отметим также, что π совпадает с пересечением всех лексикографий.

1.5. Теоретико-множественные операции и обращение отношений. Операции над отношениями сводятся к определенным преобразованиям представляющих функций.

1.5°. *Обратному отношению* ρ^{-1} *отвечает представляющая функция* $g_{\rho^{-1}}(\tilde{u}) = g_\rho(-\tilde{u})$, *где* $-\tilde{u} = (-u_1, \ldots, -u_n)$.

Это вытекает из соотношения $\Delta(\tilde{y}, \tilde{x}) = -\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})$. □

Отношение $\widehat{\rho}$, полученное из ρ инвертированием (сменой направлений) некоторых координатных осей в R^n, назовем *однотипным* с ρ. Легко проверить, что $p(-u) = \bar{p}'(u)$, $p'(-u) = \bar{p}(u)$. Поэтому, если функция g_ρ задана в виде (1.2), то $g_{\widehat{\rho}}$ получается из g_ρ заменой p_i на $\bar{p}_i'$ и p_i' на $\bar{p}_i$ для переменных u_i, соответствующих инвертированным осям. В частности, для нахождения $g_{\rho^{-1}}$ достаточно в (1.2) заменить все p_i на $\bar{p}_i'$, а p_i' на $\bar{p}_i$.

Отношение, однотипное с лексикографией λ (неполной лексикографией λ'), будем называть *обобщенной лексикографией* (*обобщенной неполной лексикографией*) и обозначать $\widehat{\lambda}$ (соответственно $\widehat{\lambda'}$). Нетрудно проверить, что представляющая функция отношения обобщенной лексикографии самодвойственна.

1.6°. *Если* $\rho = \Phi(\rho_1, \ldots, \rho_k)$, *где* Φ — *т.-м. операция, то* $g_\rho(\tilde{u}) = \varphi(g_{\rho_1}(\tilde{u}), \ldots, g_{\rho_k}(\tilde{u}))$, *где* φ — *булева функция, соответствующая операции* Φ.

Этот факт очевиден. □

1.7°. *Представляющая функция отношения, двойственного к* ρ, *двойственна к* g_ρ, *т. е.* $g_{\rho^*}(\tilde{u}) = g_\rho^*(\tilde{u})$.

Действительно, согласно 1.5° и 1.6°,

$$g_{\rho^*}(\tilde{u}) = g_{\bar{\rho}^{-1}}(\tilde{u}) = \bar{g}_{\rho^{-1}}(\tilde{u}) = \bar{g}_\rho(-\tilde{u}) = g_\rho^*(u). \quad \square$$

Отсюда и из монотонности представляющих функций правильных отношений следует, что ρ^* правильно тогда и только тогда, когда ρ правильно.

1.6. Произведение отношений. *Произведением отношений* ρ_1 *и* ρ_2 называется отношение $\rho_1 \circ \rho_2$, для которого $\tilde{x}(\rho_1 \circ \rho_2)\tilde{y} \Leftrightarrow (\exists \tilde{z})(\tilde{x}\rho_1\tilde{z} \,\&\, \tilde{z}\rho_2\tilde{y})$.

1.8°. *Произведение порядковых отношений является порядковым отношением, а правильных отношений — правильным отношением.*

Первый факт следует из того, что если $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Delta(\tilde{x}', \tilde{y}')$, то по любому $\tilde{z}$ найдется $\tilde{z}'$, для которого $\Delta(\tilde{x}, \tilde{z}) = \Delta(\tilde{x}', \tilde{z}')$ и $\Delta(\tilde{z}, \tilde{y}) = \Delta(\tilde{z}', \tilde{y}')$. Второй вытекает из сохранения операцией произведения свойства монотонности порядковых отношений. □

Опишем теперь операцию *композиции* функций из $P_{3,2}$, соответствующую произведению отношений. Укажем вначале, как осуществляется композиция монотонных функций. При этом операцию композиции сперва определим для элементарных сомножителей, затем для элементарных конъюнкций и после этого — для произвольных функций из $M_{3,2}$.

Монотонные элементарные сомножители q_i имеют один из видов p_i, p_i' и 1. Операция композиции $q_i \circ q_i'$ выполняется по правилам: $q_i \circ 1 = 1 \circ q_i' = 1$, $q_i \circ q_i' = q_i q_i'$ (конъюнкция) при $q_i, q_i' \neq 1$. Композицию монотонных конъюнкций $K = q_1, \ldots, q_n, K' = q_1' \ldots q_n'$ определим равенством

$$K \circ K' = (q_1 \circ q_1') \ldots (q_n \circ q_n'). \tag{1.7}$$

Пусть теперь $g, g' \in M_{3,2}$, $g, g' \neq \mathrm{const}$, произвольны и их приведенные д. н. ф. имеют вид $g = K_1 \vee \ldots \vee K_a$, $g' = K_1' \vee \ldots \vee K_b'$. Композицией функций g и g' назовем функцию

$$g \circ g' = \bigvee_{s=\overline{1,a},\ t=\overline{1,b}} K_s \circ K'_t. \tag{1.8}$$

В силу единственности приведенной д. н. ф. эта операция задана однозначно. Если же $g \equiv \text{const}$ или $g' \equiv \text{const}$, то считаем по определению $g \circ g' = gg'$.

Операция композиции произвольных функций g, $g' \in P_{3,2}$ определяется на основе операции для g, $g' \in M_{3,2}$. Наряду с переменными u_i, $i = \overline{1, n}$, введем переменные $v_i = -u_i$, полученные инвертированием. Тогда $p(v_i) = p(-u_i) = \overline{p}'(u_i) = \overline{p}'_i$, $p'(v_i) = p'(-u_i) = \overline{p}(u_i) = \overline{p}_i$. Пусть $K = q_1 \ldots q_n$ — элементарная конъюнкция (немонотонная). Заменив в ней $\overline{p}_i$ на $p'(v_i)$, $\overline{p}'_i$ на $p(v_i)$ и учитывая, что $p_i = p(u_i)$, $p'_i = p'(u_i)$, придем к монотонной конъюнкции $K^+ = q'_1 q''_1 \ldots q'_n q''_n$ от переменных $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n$. Здесь $q'_i \in \{p(u_i),\ p'(u_i),\ 1\}$, $q''_i \in \{p(v_i),\ p'(v_i),\ 1\}$, где 1 означает отсутствие соответствующего сомножителя.

Чтобы найти композицию $K_1 \circ K_2$ произвольных элементарных конъюнкций, нужно перейти от них к монотонным конъюнкциям K_1^+ и K_2^+, вычислить $K_3^+ = K_1^+ \circ K_2^+$ и, вернувшись к старым переменным (подстановкой $p(v_i) = \overline{p}'_i$, $p'(v_i) = \overline{p}_i$, $p(u_i) = p_i$, $p'(u_i) = p'_i$), превратить K_3^+ в немонотонную конъюнкцию K_3 и положить $K_1 \circ K_2 = K_3$. Результат композиции элементарных конъюнкций является элементарной конъюнкцией.

В дальнейшем понадобится явный вид операции композиции непосредственно для немонотонных элементарных сомножителей. Она представлена в табл. 1 (индекс i в обозначении сомножителей опущен).

Таблица 1

	p	p'	$\overline{p}$	$\overline{p}'$	$p'\ \overline{p}$	1
p	p	p	1	1	p	1
p'	p	p'	1	1	p'	1
$\overline{p}$	1	1	$\overline{p}$	$\overline{p}'$	$\overline{p}$	1
$\overline{p}'$	1	1	$\overline{p}'$	$\overline{p}'$	$\overline{p}'$	1
$p'\overline{p}$	p	p'	$\overline{p}$	$\overline{p}'$	$p'\ \overline{p}$	1
1	1	1	1	1	1	1

Из таблицы видно, что операция композиции выполняется по правилам: $q_i \circ 1 = 1 \circ q_i = 1$, $q_i \circ (p'_i \overline{p}_i) = (p'_i \overline{p}_i) \circ q_i = q_i$, $q_i \circ q'_i = q'_i \circ q_i = 1$ для $q_i \in \{p_i, p'_i\}$, $q'_i \in \{\overline{p}_i, \overline{p}'_i\}$, в остальных случаях $q_i \circ q'_i = q_i q'_i$ (конъюнкция). При наличии табл. 1 нет необходимости в переходе от K, K' к монотонным конъюнкциям. Композиция $K \circ K'$ элементарных конъюнкций $K = q_1 \ldots q_n$ и $K' = q'_1 \ldots q'_n$ может быть найдена в соответствии с (1.7).

Пусть функции g, $g' \in P_{3,2}$, g, $g' \neq \text{const}$, заданы своими д. н. ф. $g = K_1 \vee \ldots \vee K_a$, $g' = K'_1 \vee \ldots \vee K'_b$. Их композицией назовем функцию, вычисляемую в соответствии с (1.8). Если g или g' равна константе, полагаем $g \circ g' = gg'$. Формально результат операции зависит от д. н. ф., используемых для представления g, g'. Но, как мы увидим дальше, этой зависимости на самом деле нет: разные д. н. ф. функций g, g' приводят к разным д. н. ф. одной и той же функции $g \circ g'$.

Из табл. 1 видно, что операция композиции элементарных конъюнкций идемпотентна ($K \circ K = K$), коммутативна ($K_1 \circ K_2 = K_2 \circ K_1$), ассоциативна ($K_1 \circ (K_2 \circ K_3) = (K_1 \circ K_2) \circ K_3$) и монотонна ($K_1 \geqslant K_2 \Rightarrow K_1 \circ K_3 \geqslant$

$\geqslant K_2 \circ K_3$). Последние три свойства с учетом анонсированного выше факта независимости $g \circ g'$ от представления функций g и g' переносятся на произвольные $g, g' \in P_{3,2}$.

1.9°. *Операция композиции функций*

а) *коммутативна*: $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$;

б) *ассоциативна*: $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$;

в) *монотонна*: $g_1 \geqslant g_2 \Rightarrow g_1 \circ g_3 \geqslant g_2 \circ g_3$.

Из б) следует, что можно рассматривать многоместную операцию $g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_s$.

Связь операции произведения отношений и композиции функций видна из следующего утверждения.

1.10°. *Представляющая функция произведения* $\rho_1 \circ \rho_2$ *образуется композицией представляющих функций для* ρ_1 *и* ρ_2, *т. е.* $g_{\rho_1 \circ \rho_2} = g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$.

Докажем этот факт для случая $g_{\rho_1}, g_{\rho_2} \not\equiv \text{const}$ (при $g_{\rho_1} = \text{const}$ или $g_{\rho_2} = \text{const}$ он очевиден).

Легко видеть, что если элементарная конъюнкция $K = q_1 \ldots q_n$ обращается в 1 на наборе $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})$, то это имеет место тогда и только тогда, когда при каждом i выполнено соотношение $x_i \nu_i y_i$, где $\nu_i \in \{<, \leqslant, >, \geqslant, =, *\}$ ($*$ означает отсутствие соотношений), а ν_i связано с q_i как указано в табл. 2 (индекс i опущен). При таком соответствии табл. 1 может быть переписана в виде табл. 3.

Таблица 2

q	p	p'	$\bar{p}$	$\bar{p}'$	$p'\bar{p}$	1
ν	$>$	$\geqslant$	$\leqslant$	$<$	$=$	$*$

Из ее рассмотрения видно, что если для любых чисел x, y и z взять столбец ν' и строку ν'' такие, что справедливы соотношения $x\nu'z$ и $z\nu''y$, то в их пересечении находится соотношение, которому удовлетворяют x и y. При этом любое соотношение между x и y, указанное в клетке, может быть достигнуто при подходящем выборе z.

Таблица 3

	$>$	$\geqslant$	$\leqslant$	$<$	$=$	$*$
$>$	$>$	$>$	$*$	$*$	$>$	$*$
$\geqslant$	$>$	$\geqslant$	$*$	$*$	$\geqslant$	$*$
$\leqslant$	$*$	$*$	$\leqslant$	$<$	$\leqslant$	$*$
$<$	$*$	$*$	$<$	$<$	$<$	$*$
$=$	$>$	$\geqslant$	$\leqslant$	$<$	$=$	$*$
$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

Пусть для порядковых отношений ρ_1 и ρ_2 имеет место $\tilde{x}\rho_1\tilde{z}$ и $\tilde{z}\rho_2\tilde{y}$. Тогда найдутся конъюнкции $K^{(1)} = q_1^{(1)} \ldots q_n^{(1)}$ из д. н. ф. g_{ρ_1} и $K^{(2)} = q_1^{(2)} \ldots q_n^{(2)}$ из д. н. ф. g_{ρ_2}, обращающиеся в 1 соответственно на наборах $\Delta(\tilde{x}, \tilde{z})$ и $\Delta(\tilde{z}, \tilde{y})$. Из сказанного выше следует, что при каждом i соотношения $(<, >, =)$ между x_i, z_i и между z_i, y_i лежат в пределах соотношений, отвечающих значениям $q_i^{(1)}$, $q_i^{(2)}$, а x_i, y_i удовлетворяют соотношению, отвечающему значению $q_i^{(1)} \circ q_i^{(2)}$. Поэтому конъюнкция $K^{(1)} \circ K^{(2)}$ обращается на наборе $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})$ в 1, а вместе с ней и функция $g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$. Значит, отношение с представляющей функцией $g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$ не меньше $\rho_1 \circ \rho_2$.

Обратно, если на наборе $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})$ функция $g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$ равна 1, то обращается в 1 композиция $K^{(1)} \circ K^{(2)}$ некоторых конъюнкций из д. н. ф. g_{ρ_1}, g_{ρ_2}. В силу достижимости всех соотношений в табл. 3 найдется $\tilde{z}$, для которого $K^{(1)}(\Delta(\tilde{x}, \tilde{z})) = 1$ и $K^{(2)}(\Delta(\tilde{z}, \tilde{y})) = 1$. Это означает $\tilde{x}\rho_1\tilde{z}$ и $\tilde{z}\rho_2\tilde{y}$. Откуда $\tilde{x}(\rho_1 \circ \rho_2)\tilde{y}$ и отношение с представляющей функцией $g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$ не больше $\rho_1 \circ \rho_2$. □

Утверждение 1.10° и независимость отношения $\rho_1 \circ \rho_2$ от способа представления функции $g_{\rho_1 \circ \rho_2}$ приводят к упоминавшемуся выше факту инвариантности операции $g_1 \circ g_2$ относительно представления функций

g_1 и g_2 в виде д. н. ф. Из 1.9° и 1.10° следует, что произведение порядковых отношений коммутативно (а также ассоциативно и монотонно, как для всяких отношений).

1.7. Степени отношений и транзитивное замыкание. Индуктивно определим s-ю *степень отношения* ρ, положив $\rho^1=\rho$, $\rho^s=\rho^{s-1}\circ\rho$ $(s\geqslant 2)$.

1.11°. *Степени порядковых отношений являются порядковыми отношениями, а степени правильных отношений — правильными отношениями. При этом* $\rho\subseteq\rho^2\subseteq\ldots\subseteq\rho^s\subseteq\rho^{s+1}\subseteq\ldots$

Порядковость (или правильность) отношения ρ^s следует из 1.8°. Согласно 1.10° функция g_{ρ^s} является дизъюнкцией всевозможных композиций $K_{u_1}\circ\ldots\circ K_{u_s}$, где $K_{u_1},\ldots,K_{u_s}$ взяты из д. н. ф. функций g_ρ. Но в $g_{\rho^{s+1}}$ имеются конъюнкции

$$K_{u_1}\circ\ldots\circ K_{u_{s-1}}\circ K_{u_s}\circ K_{u_s}=K_{u_1}\circ\ldots\circ K_{u_{s-1}}\circ\left(K_{u_s}\circ K_{u_s}\right)=K_{u_1}\circ\ldots\circ K_{u_s}.$$

Поэтому $g_{\rho^{s+1}}\geqslant g_{\rho^s}$ или, что то же самое, $\rho^{s+1}\supseteq\rho^s$. □

Обозначим через g^s s-кратную композицию $g\circ g\circ\ldots\circ g$. Из 1.10° следует, что $g_{\rho^s}=\overset{s}{g_\rho}$. Результат стабилизации последовательности $\{\rho^s\}$ обозначим через $[\rho]$ и назовем *транзитивным замыканием* отношения ρ. В силу 1.11° транзитивное замыкание порядкового отношения является порядковым отношением, а правильного отношения — правильным отношением. Если обозначить через $[g]$ результат стабилизации последовательности $g\leqslant g^2\leqslant g^3\leqslant\ldots$, то $g_{[\rho]}=[g_\rho]$.

Следующее утверждение дает верхнюю оценку числа s, при котором наступает стабилизация $g^s=[g]$.

1.12°. *Если д. н. ф. функции g содержит l конъюнкций, то стабилизация последовательности $\{g^s\}$ происходит при $s\leqslant\min(2n,\ l)$, а для $g\in M_{3,2}$ — при $s\leqslant\min(n,\ l)$.*

Действительно, пусть $g=K_1\vee\ldots\vee K_l$. Тогда

$$g^s=\bigvee_{i_1,\ldots,i_s}K_{i_1}\circ\ldots\circ K_{i_s}$$

(некоторые из чисел $i_1,\ldots,i_s$ могут совпадать). Одинаковые конъюнкции могут быть устранены из $K_{i_1}\circ\ldots\circ K_{i_s}$ (свойство идемпотентности). В результате получится композиция не более l конъюнкций, которая содержится в g^l. Отсюда следует, что можно взять $s\leqslant l$.

Из табл. 1 видно, что в множестве элементарных сомножителей $\{q_j^{(i_1)},\ldots,q_j^{(i_s)}\}$, относящихся к переменной u_j и конъюнкциям $K_{i_1},\ldots,K_{i_s}$, существуют два сомножителя $q_j^{(v)}$ и $q_j^{(w)}$, для которых $q_j^{(v)}\circ q_j^{(w)}=q_j^{(i_1)}\circ\ldots\circ q_j^{(i_s)}$. Выделим при каждом $j\in\overline{1,\ n}$ по два таких сомножителя; тем самым выделятся не более $2n$ конъюнкций из $K_{i_1},\ldots,K_{i_s}$, которым они принадлежат. Их композиция содержится в g^{2n} и совпадает с $K_{i_1}\circ\ldots\circ K_{i_s}$. Поэтому можно взять $s\leqslant 2n$.

В монотонном случае результат композиции $q_j^{(i_1)}\circ\ldots\circ q_j^{(i_s)}$ совпадает с одним из сомножителей. Поэтому оценка $s\leqslant 2n$ заменяется на $s\leqslant n$. □

Нетрудно привести примеры, показывающие, что оценки из 1.12° достигаются как по n, так и по l. Из утверждения 1.12° следует, что построение замыкания $[g]$ путем последовательного возведения в квадрат g, g^2, g^4, ... требует не более $]\log_2(\min(2n,\ l)[$ шагов, где $]x[$ означает ближайшее целое к x сверху. Если $g\in M_{3,2}$, то $2n$ может быть заменено на n.

1.8. Анализ свойств порядковых отношений. Следующее утверждение связывает свойства порядковых отношений со свойствами представляющих функций.

1.13°. *Отношение* ρ а) *рефлексивно*, б) *антирефлексивно*, в) *асимметрично*, г) *антисимметрично*, д) *полно*, е) *связно*, ж) *транзитивно*, з) *негатранзитивно тогда и только тогда, когда* а) $g_\rho(\widetilde{0})=1$, б) $g_\rho(\widetilde{0})=0$, в) $g_\rho \leqslant g_\rho^*$, г) $D_{\widetilde{0}} g_\rho \leqslant D_{\widetilde{0}} q_\rho^*$, д) $g_\rho \geqslant g_\rho^*$, е) $D_{\widetilde{0}} g_\rho \geqslant D_{\widetilde{0}} g_\rho^*$, ж) $g_\rho \circ g_\rho \leqslant g_\rho$, з) $g_\rho^* \circ g_\rho^* \leqslant g_\rho^*$.

Пункты а), б) следуют из $\Delta(\widetilde{x}, \widetilde{x})=\widetilde{0}$, п. в) — из того, что если ρ асимметрично, то

$$g_\rho(\widetilde{u}) = 1 \Rightarrow g_\rho(-\widetilde{u}) = 0 \Rightarrow \bar{g}_\rho(-\widetilde{u}) = 1 \Rightarrow g_\rho^*(\widetilde{u}) = 1$$

и эти рассуждения могут быть обращены, п. г) вытекает из в), поскольку различие асимметрии и антисимметрии проявляется лишь при $\widetilde{u}=\widetilde{0}$, пп. д), е) двойственны в), г), п. ж) следует из 1.10° и того, что транзитивность эквивалентна условию $\rho^2 \subseteq \rho$, п. з) двойствен ж). □

Приведем результаты о сложности проверки свойств отношений по представляющим функциям, заданным в виде д. н. ф. и к. н. ф.

1.14°. *Свойства рефлексивности и антирефлексивности эффективно (т. е. полиномиально) проверяемы по д. н. ф. и к. н. ф. Свойства асимметрии и антисимметрии эффективно проверяемы по д. н. ф., а задача проверки этих свойств по к. н. ф.* NP-*полна. Свойства полноты и связности эффективно проверяемы по к. н. ф., а задача проверки этих свойств по д. н. ф.* NP-*полна. Задачи проверки транзитивности и негатранзитивности являются* NP-*полными как в случае д. н. ф., так и в случае к. н. ф.*

Очевидно, что соотношения а) и б) эффективно проверяемы по д. н. ф. и к. н. ф. Если функция g_ρ задана посредством д. н. ф., то двойственное представление g_ρ^* является к. н. ф. и, поскольку

$$(K_1 \vee \ldots \vee K_v \leqslant D_1 \ldots D_u) \Leftrightarrow (K_i \leqslant D_j,\ i=\overline{1,\ v},\ j=\overline{1,\ u}),$$

проверка асимметрии с помощью соотношения в) осуществляется эффективно. То же самое относится к свойству антисимметрии, ибо переход от д. н. ф. g_ρ к д. н. ф. функции $D_{\widetilde{0}} g_\rho$ полиномиален, а $D_{\widetilde{0}} g_\rho^*$ представляет собой к. н. ф. Двойственным образом эффективно решается задача распознавания полноты и связности по к. н. ф.

Все остальные задачи являются NP-полными. Докажем это, например, для задачи проверки транзитивности. Случай, когда g_ρ представлена своей д. н. ф., сводится к NP-полной задаче о тождественной истинности д. н. ф. булевых функций. Действительно, пусть задана д. н. ф. булевой функции $f(p_1, \ldots, p_n)$. Если все конъюнкции этой д. н. ф. содержат некоторую переменную p_i, причем в одной и той же форме (p_i либо $\bar{p}_i$), то $f \not\equiv 1$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда такой ситуации нет. Введем отношение ρ, для которого д. н. ф. g_ρ графически совпадает с д. н. ф. f. Композиция всех конъюнкций из д. н. ф. g_ρ тождественно равна 1, поэтому ρ транзитивно в том и только том случае, если $g_\rho \equiv 1$, т. е. $f \equiv 1$.

Проверка транзитивности по к. н. ф. сводится к NP-полной задаче о выполнимости к. н. ф. Пусть $D_1 \ldots D_v$ — к. н. ф. булевой функции $f(p_1, \ldots, p_n)$. Обозначим через $\widehat{f}$ функцию из $P_{3,2}$, задаваемую формулой, графически совпадающей с $D_1 \ldots D_v$, и рассмотрим отношение ρ с представляющей функцией $g_\rho = p_{n+1} \vee \widehat{f} = (p_{n+1} \vee D_1) \ldots (p_{n+1} \vee D_v)$. Если $f \not\equiv 0$, то в силу независимости $\widehat{f}$ от p_{n+1} и p'_{n+1} композиция p_{n+1} с любой конъюнкцией из д. н. ф. функции $\widehat{f}$ дает пустую конъюнкцию. Это означает $[g_\rho] \equiv 1 \not\equiv g_\rho$, т. е. что ρ нетранзитивно. Если же $f \equiv 0$, то $g_\rho = p_{n+1}$

и ρ транзитивно. Таким образом, к. н. ф. выполнима тогда и только тогда, когда ρ нетранзитивно. □

В заключение отметим, что для правильных отношений дизъюнкция $D_0^{\sim}$ в условиях г) и е) утверждения 1.13° может быть заменена на $D_0^{\pm}$. Это доказывается аналогично (1.5).

§ 2. Классы порядковых отношений

2.1. Классы отношений. Введем основные классы бинарных отношений (на множестве Ω), рассматриваемые в теории выбора.

Транзитивное антирефлексивное отношение называется (строгим) *частичным порядком* (ч. п.), связный ч. п.— *линейным порядком* (л. п.), а негатранзитивное асимметричное отношение — *слабым порядком* (с. п.). Ч. п. r с дополнительным свойством

$$xry \;\&\; zrv \Rightarrow xrv \vee zry \tag{2.1}$$

называется *интервальным порядком* (и. п.), а и. п. r со свойством $xry\;\&\;\&\;yrz \Rightarrow xrv \vee vrz$ — *полупорядком* (п. п.). Отношение r *ациклично*, если в нем отсутствуют *циклы* $x_1rx_2 \;\&\; x_2rx_3 \;\&\; \ldots \;\&\; x_{s-1}rx_s \;\&\; x_srx_1$, $s \geqslant 1$.

Обозначим соответственно через $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{W}$, $\mathscr{I}$ и $\mathscr{S}$ классы отношений частичного, линейного, слабого, интервального порядка и полупорядка, а через $\mathscr{A}$ — класс ацикличных отношений. Имеет место цепочка строгих включений [14]

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{W} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{I} \subset \mathscr{P} \subset \mathscr{A}. \tag{2.2}$$

Классы цепочки (2.2) так или иначе связаны с возможностью критериального описания [14]. Отношения $W \in \mathscr{W}$ представимы скалярным критерием φ (числовой функцией на множестве Ω): $xWy \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(y)$. При дополнительном условии $x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$ получаем отношения класса $\mathscr{L}$. Отношения $I \in \mathscr{I}$ представимы критерием с погрешностью: $xIy \Leftrightarrow \varphi^-(x) > \varphi^+(y)$, где φ^- и φ^+ — нижняя и верхняя оценка критерия φ, $\varphi^-(x) \leqslant \varphi^+(x)$. В случае постоянной погрешности δ получаем отношения S класса $\mathscr{S}$: $xSy \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(y) + \delta$. Отношения $P \in \mathscr{P}$ представимы набором критериев $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$:

$$xPy \Leftrightarrow (\forall j \in \overline{1, k})\, \varphi_j(x) \geqslant \varphi_j(y) \;\&\; (\exists s)\, \varphi_s(x) > \varphi_s(y),$$

а для всякого отношения $A \in \mathscr{A}$ существует критерий φ такой, что $xAy \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(y)$.

Дополнительно к (2.2) будем рассматривать класс транзитивных отношений $\mathscr{T}$.

Легко проверить, что переход к однотипному отношению не нарушает введенных в п. 1.1 свойств отношений и не выводит отношения классов цепочки (2.2) за пределы этих классов.

2.2. Ацикличные отношения. Основным результатом данного пункта является теорема, дающая характеризацию представляющих функций ацикличных порядковых отношений и отвечающая на вопросы, относящиеся к трудности проверки ацикличности.

Теорема 2.1. а) *Отношение ρ ациклично тогда и только тогда, когда существует обобщенная лексикография $\widehat{\lambda}$ такая, что $g_\rho \leqslant g_{\widehat{\lambda}}$. В случае правильных отношений роль $\widehat{\lambda}$ играет лексикография λ.*

б) *Если g_ρ задана в виде д. н. ф., существует эффективный (полиномиальный) алгоритм проверки ацикличности. При задании g_ρ в виде к. н. ф. проверка ацикличности правильных отношений может быть осуществлена эффективно, а для произвольных порядковых отношений эта задача NP-полна.*

Доказательство теоремы 2.1 распадается на ряд лемм.

Лемма 2.1. *Если $\rho\in R^{2n}$ ациклично, то отношение $\rho'\in R^{2(n-1)}$, для которого функция $g_{\rho'}$ получена из g_ρ подстановкой $u_i=0$, также ациклично.*

Доказательство. Можно считать, что $i=1$. Если ρ' имеет цикл $\tilde{x}_1'\rho'\tilde{x}_2'\rho'\ldots\rho'\tilde{x}_s'\rho'\tilde{x}_1'$, то функция $g_{\rho'}$ обращается в 1 на наборах $\Delta(\tilde{x}_1', \tilde{x}_2'), \ldots, \Delta(\tilde{x}_{s-1}', \tilde{x}_s'), \Delta(\tilde{x}_s', \tilde{x}_1')$. Возьмем произвольное число a и положим $\tilde{x}_i=(a, \tilde{x}_i')$, $i=\overline{1, s}$. Тогда $\Delta(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)=(0, \Delta(\tilde{x}_i', \tilde{x}_j'))$ и функция q_ρ обращается в 1 на наборах $\Delta(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \ldots, \Delta(\tilde{x}_{s-1}, \tilde{x}_s), \Delta(\tilde{x}_s, \tilde{x}_1)$. Это означает, что ρ имеет цикл $\tilde{x}_1\rho\tilde{x}_2\rho\ldots\rho\tilde{x}_s\rho\tilde{x}_1$. □

Лемма 2.2. *Если $\rho\in\mathcal{A}$, то $(\exists\widehat{\lambda})g_\rho\leqslant g_{\widehat{\lambda}}$. Для правильных отношений роль $\widehat{\lambda}$ играет λ.*

Доказательство. Если $g_\rho\equiv 0$, утверждение очевидно. Предположим, что $g_\rho\not\equiv 0$ и $g_\rho=K_1\vee\ldots\vee K_t$ — представление в виде д. н. ф.

Будем говорить, что $K=q_1\ldots q_n$ является *конъюнкцией типа* $\tilde{0}$, если $q_i\in\{p_i', \bar{p}_i, p_i'\bar{p}_i, 1\}$. Конъюнкции типа $\tilde{0}$ и только они обращаются в 1 на наборе $\tilde{0}$. Если ρ ациклично, то $[\rho]$ антирефлексивно, а потому $[g_\rho]$ не имеет конъюнкций типа $\tilde{0}$ и, в частности, $K=K_1\circ\ldots\circ K_t$ не является конъюнкцией типа $\tilde{0}$. Пусть i_1 — один из индексов переменных, входящих в K. По определению композиции элементарные сомножители q_{i_1} всех конъюнкций $K_1, \ldots, K_t$ либо содержатся в множестве $\{p_{i_1}, p_{i_1}', p_{i_1}'\bar{p}_{i_1}\}$ и хотя бы один совпадает с p_{i_1}, либо — в множестве $\{\bar{p}_{i_1}, \bar{p}_{i_1}', p_{i_1}'\bar{p}_{i_1}\}$ и хотя бы один совпадает с $\bar{p}_{i_1}'$. Заменяя при необходимости переменную u_{i_1} на $-u_{i_1}$, можно считать, что имеет место первый случай (переход к однотипному отношению не влияет на ацикличность, п. 2.1). Тогда функция g_ρ может быть записана в виде

$$g_\rho=p_{i_1}g_1\vee p_{i_1}'g_2\vee p_{i_1}'\bar{p}_{i_1}g_3.$$

Заменяя g_1 на 1, воспользовавшись правилами булевой алгебры и обозначив $g^{(1)}=g_2\vee g_3$, получаем

$$g_\rho\leqslant p_{i_1}\vee p_{i_1}'g_2\vee p_{i_1}'\bar{p}_{i_1}g_3=p_{i_1}\vee p_{i_1}'g^{(1)}. \tag{2.3}$$

Введем отношение ρ_1, положив $g_{\rho_1}=g^{(1)}$. Функция g_{ρ_1} может быть получена из g_ρ подстановкой $u_{i_1}=0$. В силу леммы 2.1 отношение ρ_1 ациклично. Поэтому к g_{ρ_1} применимы те же рассуждения, и если $g_{\rho_1}=g^{(1)}\not\equiv 0$, то (с точностью до однотипности) $g_{\rho_1}\leqslant p_{i_2}\vee p_{i_2}'g^{(2)}$. Подставляя это неравенство в (2.3), получаем

$$g_\rho\leqslant p_{i_1}\vee p_{i_1}'(p_{i_2}\vee p_{i_2}'g^{(2)})=p_{i_1}\vee p_{i_1}'p_{i_2}\vee p_{i_1}'p_{i_2}'g^{(2)}.$$

Продолжая эту цепочку, пока при некотором k не окажется $g^{(k)}\equiv 0$, придем к

$$g_\rho\leqslant p_{i_1}\vee p_{i_1}'p_{i_2}\vee\ldots\vee p_{i_1}'\ldots p_{i_{k-1}}'p_{i_k}.$$

Если $k=n$, то выражение в правой части задает лексикографию, а если $k<n$, то оно может быть дополнено до лексикографии. Поскольку рассуждения велись с точностью до однотипности, то всякое ациклическое отношение может быть дополнено до обобщенной лексикографии. В случае правильных отношений инвертирований не требуется и получаем лексикографию. □

С элементарной конъюнкцией $K=q_1\ldots q_n$ свяжем множества $I(K)=\{i\in\overline{1, n}\mid q_i\neq 1\}$ и $I_0(K)=\{i\in\overline{1, n}\mid q_i=p_i'p\}$.

Лемма 2.3. *Если ρ — правильное отношение, $g_\rho = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \ldots \vee K_t$ — приведенная д. н. ф. и $I(K_1) \subseteq I(K_2) \subseteq \ldots \subseteq I(K_t)$, то ρ транзитивно.*

Доказательство. Композиция любых двух конъюнкций из приведенной д. н. ф. g_ρ не превосходит одной из них (более короткой), поэтому $[g_\rho] = g_\rho$. □

Лемма 2.4. *Если $g_\rho \leqslant g_{\widehat{\lambda}}$, то ρ ациклично.*

Доказательство. Из (1.6) и леммы 2.3 следует, что лексикография транзитивна. Кроме того, она антирефлексивна (g_λ не содержит конъюнкций типа $\widetilde{0}$), а потому ациклична. Однотипная с ней обобщенная лексикография $\widehat{\lambda}$ также ациклична, и всякое отношение ρ, вложенное в $\widehat{\lambda}$, ациклично. □

Из лемм 2.2 и 2.4 следует п. а) теоремы. В последующем понадобится другая формулировка п. а).

Следствие. *Отношение ρ ациклично тогда и только тогда, когда функция g_ρ представима в виде $g_\rho = g_{\widehat{\lambda}} g$, где $g \in P_{3,2}$, $\widehat{\lambda}$ — обобщенная лексикография. Аналогичный факт справедлив для правильных отношений при условии, что $g \in M_{3,2}$, а $\widehat{\lambda}$ является лексикографией.*

Для множества элементарных конъюнкций $\mathscr{K} = \{K_1, \ldots, K_t\}$ обозначим $I(\mathscr{K}) = I(K_1 \circ \ldots \bullet K_t)$. Если $g \in M_{3,2}$ ($g \neq \mathrm{const}$) и $\mathscr{K}_g$ — множество конъюнкций ее приведенной д. н. ф., положим $I(g) = I(\mathscr{K}_g)$. Далее, рассмотрим все одноэлементные дизъюнкции (имеющие вид $\widehat{p_j} \in \{p_j, p_j'\}$) приведенной к. н. ф. функции $g \in M_{3,2}$. Множество всех j, соответствующих этим дизъюнкциям, обозначим $J(g)$, т. е., если $J(g) = \{j_1, \ldots, j_s\}$, то $g = \widehat{p}_{j_1} \ldots \widehat{p}_{j_s} D_1 \ldots D_m$.

Лемма 2.5. *Для любой функции $g \in M_{3,2}$ имеет место $I(g) = J(g)$.*

Доказательство. Легко видеть, что $i \in I(g)$ тогда и только тогда, когда функция g на наборе $\widetilde{\sigma}_i$, в котором i-я компонента равна -1, а остальные равны 1, обращается в 0. Также легко видеть, что то же условие $g(\widetilde{\sigma}_i) = 0$ является необходимым и достаточным для $i \in J(g)$. □

Завершение доказательства теоремы 2.1. Из доказательства леммы 2.2 извлекается следующий алгоритм проверки ацикличности по д. н. ф. Если $g_\rho \equiv 0$, отношение ρ ациклично. Пусть $g_\rho \not\equiv 0$ и $\mathscr{K} g_\rho$ — множество конъюнкций д. н. ф. g_ρ. Если $I(\mathscr{K} g_\rho) = \varnothing$, то ρ неациклично. В случае $I(\mathscr{K} g_\rho) \neq \varnothing$ обозначим через $g_\rho^{(1)}$ функцию, полученную из g_ρ подстановкой $u_i = 0$ для всех $i \in I(\mathscr{K} g_\rho)$ и к ней применим ту же процедуру. Алгоритм остановится, если на некотором шаге t окажется $g_\rho^{(t)} \equiv 0$ (тогда ρ ациклично) либо $I\left(\mathscr{K} g_\rho^{(t)}\right) = \varnothing$ и $g_\rho^{(t)} \not\equiv 0$ (тогда неациклично). Поскольку $I(\mathscr{K} g)$ по д. н. ф. g находится эффективно, этот алгоритм эффективен.

Если функция $g_\rho \in M_{3,2}$ задана своей к. н. ф., может быть использован тот же алгоритм, но в соответствии с леммой 2.5 роль множеств $I(g) = I(\mathscr{K} g)$ в нем будут играть $J(g)$, которые по к. н. ф. находятся эффективно.

NP-полнота задачи проверки ацикличности по к. н. ф. для немонотонного случая (произвольных порядковых отношений) устанавливается тем же способом, что и в 1.14° для транзитивности, поскольку при $f \equiv 0$ там получается функция p_{n+1}, задающая ацикличное отношение. □

2.3. Линейные и слабые порядки. Сформулируем результаты, относящиеся к классу $\mathscr{L}$.

Теорема 2.2. а) *В классе порядковых отношений обобщенные лексикографии и только они являются линейными порядками. То же справедливо для правильных отношений при замене обобщенных лексикографий на лексикографии.*

б) *Для правильных отношений задачи распознавания линейных порядков по д. н. ф. и по к. н. ф. представляющих функций решаются эффективно, для порядковых отношений общего вида эти задачи* NP-*полны.*

Доказательство. Рассмотрим отношение лексикографии λ. Согласно лемме 2.3 оно транзитивно. Поскольку λ также антирефлексивно, то представляет собой ч. п. Из самодвойственности g_λ (п. 1.4) вытекает связность λ (1.13°), следовательно, λ — л. п. То же относится и к обобщенной лексикографии $\widehat{\lambda}$, ибо переход к однотипному отношению не выводит за пределы $\mathscr{L}$ (п. 2.1).

Обратно, пусть ρ — произвольный л. п. Он ацикличен и согласно лемме 2.2 может быть дополнен до обобщенной лексикографии $\widehat{\lambda}$. Но в силу связности л. п. не допускает расширения с сохранением свойства асимметрии, поэтому $\rho=\widehat{\lambda}$. Правильные л. п., будучи монотонными, совпадают с лексикографии. Пункт а) доказан.

Явный вид приведенных д. н. ф. и к. н. ф. лексикографий указан в п. 1.4. Задачи распознавания обобщенных лексикографий по к. н. ф. и по д. н. ф. сводятся к NP-полным задачам о выполнимости к. н. ф. и о тождественной истинности д. н. ф.

Рассмотрим, например, случай к. н. ф. Пусть $D_1\ldots D_v$ — к. н. ф. булевой функции, f — функция из $P_{3,2}$, графически совпадающая с $D_1\ldots D_v$, λ — лексикография, $\widehat{\lambda}$ — обобщенная лексикография, полученная из λ инвертированием всех переменных u_i, а $g_{\rho_1}=g_\lambda \vee f$, $g_{\rho_2}=g_{\widehat{\lambda}}\vee f$. Поскольку

$$\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant u} D_i' \vee \mathop{\&}_{1\leqslant j\leqslant v} D_j = \mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant u,1\leqslant j\leqslant v} (D_i' \vee D_j),$$

то к. н. ф. функций g_{ρ_1} и g_{ρ_2} находятся эффективно по к. н. ф. f, g_λ и $g_{\widehat{\lambda}}$. Можно доказать, что

$$D_1\ldots D_v\equiv 0 \Leftrightarrow \rho_1,\ \rho_2 \text{ — обобщенные лексикографии. } \square$$

Замечание. Если рассматривать нестрогие (рефлексивные) л. п., то они идентичны отношениям $\widehat{\lambda}^*$, двойственным обобщенной лексикографии.

Из интерпретации обобщенных лексикографий, даваемой теоремой 2.2, видно, что лемма 2.2 представляет собой аналог для порядковых отношений леммы Шпильрайна [13] о возможности расширения ч. п. до л. п.

Применительно к классу $\mathscr{W}$ теорема 2.2 модифицируется следующим образом.

Теорема 2.3. а) *В классе порядковых отношений обобщенные неполные лексикографии и только они являются слабыми порядками. То же справедливо для правильных отношений при замене обобщенных неполных лексикографий на неполные лексикографии.*

б) *Для правильных отношений задачи распознавания слабых порядков по д. н. ф. и по к. н. ф. представляющих функций решаются эффективно, для порядковых отношений общего вида эти задачи* NP-*полны.*

Доказательство. Отношение неполной лексикографии задается функцией $g_{\lambda'}=p_{i_1}\vee p_{i_1}'p_{i_2}\vee\ldots\vee p_{i_1}'\ldots p_{i_{k-1}}'p_{i_k}$, а двойственное к нему отношение $(\lambda')^*$ — функцией $g_{\lambda'}^*=p_{i_1}\vee\ldots\vee p_{i_1}'\ldots p_{i_{k-2}}'p_{i_{k-1}}\vee p_{i_1}'\ldots\ldots p_{i_k}'$. Из неравенства $g_{\lambda'}\leqslant g_{\lambda'}^*$ следует асимметрия λ' (1.13°), а из транзитивности отношения $(\lambda')^*$ (в соответствии с леммой 2.3) — негатранзитивность λ'. Поэтому λ' — с. п., и то же относится к однотипному с ним отношению $\widehat{\lambda}'$.

Обратное утверждение, что все с. п. имеют указанный вид, будет следовать из более сильного факта, доказанного дальше (лемма 2.7).

Правильные с. п. очевидным образом эффективно распознаваемы по д. н. ф. и к. н. ф. NP-полнота этих задач для произвольных порядковых отношений устанавливается путем сведения к ним задач о тождественной истинности д. н. ф. $K_1 \vee \ldots \vee K_t$ и выполнимости к. н. ф. $D_1 \ldots D_v$ от переменных $p_1, \ldots, p_n$. Для этого нужно рассмотреть отношения ρ_1 и ρ_2 с $g_{\rho_1} = p_{n+1}(K_1 \vee \ldots \vee K_t)$ и $g_{\rho_2} = p_{n+1} \vee D_1 \ldots D_v$.

2.4. Интервальные порядки и полупорядки. Для $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{-1, 0, +1\}^n$ введем конъюнкции $K_{\tilde{\sigma}} = q_1 \ldots q_n$ и $K_{\tilde{\sigma}}^{+} = q_1' \ldots q_n'$, где при $i = \overline{1, n}$

$$q_i = \begin{cases} p_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ p_i \bar{p}_i', & \text{если } \sigma_i = 0, \\ \bar{p}_i', & \text{если } \sigma_i = -1; \end{cases} \qquad q_i' = \begin{cases} p_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ p_i', & \text{если } \sigma_i = 0, \\ 1, & \text{если } \sigma_i = -1. \end{cases}$$

$K_{\tilde{\sigma}}$ и $K_{\tilde{\sigma}}^{+}$ являются наименьшей и наименьшей монотонной конъюнкциями, обращающимися в 1 на наборе $\tilde{\sigma}$.

Лемма 2.6 *Если ρ — и. п., то для любого $\tilde{\sigma} \in \{-1, 0, +1\}^n$ имеет место одно из соотношений $K_{\tilde{\sigma}} \circ g_\rho \leqslant g_\rho$ и $K_{-\tilde{\sigma}} \circ g_\rho \leqslant g_\rho$.*

Доказательство. Отметим вначале, что из условия (2.1) вытекает справедливость для любых $x, y \in \Omega$ одного из включений $r^{-1}(x) \supseteq r^{-1}(y)$ и $r^{-1}(y) \supseteq r^{-1}(x)$, где $r^{-1}(x) = \{z \in \Omega \mid zrx\}$.

Пусть ρ — и. п. и $\tilde{\sigma}$ — любой набор из $\{-1, 0, +1\}^n$. Возьмем произвольные $\tilde{x}, \tilde{y} \in R^n$ с $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\sigma}$. Поскольку ρ удовлетворяет условию (2.1), имеет место включение $\rho^{-1}(\tilde{x}) \supseteq \rho^{-1}(\tilde{y})$ либо $\rho^{-1}(\tilde{y}) \supseteq \rho^{-1}(\tilde{x})$ (пусть, для определенности, первое). Введем отношение ρ_1 с представляющей функцией $g_{\rho_1} = K_{-\tilde{\sigma}}$. Очевидно, $\tilde{y}\rho_1\tilde{x}$.

Рассмотрим произвольное $\tilde{z} \in \rho^{-1}(\tilde{y})$. Представив $\tilde{z} - \tilde{x} = (\tilde{y} - \tilde{x}) + (\tilde{z} - \tilde{y})$ и учитывая $\tilde{z}\rho\tilde{y}$ и $\tilde{y}\rho_1\tilde{x}$, заключаем, что $\tilde{z}(\rho_1 \circ \rho)\tilde{x}$. При варьировании $\tilde{z} \in \rho^{-1}(\tilde{y})$ набор $\Delta(\tilde{z}, \tilde{y})$ пробегает область истинности функции g_ρ, а набор $\Delta(\tilde{z}, \tilde{x})$ — область истинности функции $K_{-\tilde{\sigma}} \circ g_\rho$. В последнем можно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных использованным в 1.11°, принимая во внимание, что $\Delta(\tilde{y}, \tilde{x}) = -\tilde{\sigma}$ является единственным набором, обращающим $K_{-\tilde{\sigma}}$ в 1. С другой стороны, из $\rho^{-1}(\tilde{x}) \supseteq \rho^{-1}(\tilde{y})$ следует, что $\Delta(\tilde{z}, \tilde{x})$ не выходит за пределы области истинности функции g_ρ, а потому $K_{-\tilde{\sigma}} \circ g_\rho \leqslant g_\rho$.

Случай включения $\rho^{-1}(\tilde{y}) \supseteq \rho^{-1}(\tilde{x})$ аналогичным образом приводит к соотношению $K_{\tilde{\sigma}} \circ g_\rho \leqslant g_\rho$. □

Элементарную конъюнкцию K будем называть *импликантом* функции $g \in P_{3,2}$, если $(\forall \tilde{\sigma})(K(\tilde{\sigma}) = 1 \Rightarrow g(\tilde{\sigma}) = 1)$. Импликант называется *простым*, если не существует другого импликанта K', такого что $K' \geqslant K$.

Лемма 2.7. *Всякий и. п. ρ является обобщенной неполной лексикографией.*

Доказательство. Пусть ρ — и. п. Рассмотрим ту д. н. ф. функции g_ρ, множество $\mathcal{K} g_\rho$ конъюнкций которой совпадает с множеством ее простых импликантов.

Композиция K всех конъюнкций из $\mathcal{K} g_\rho$ обладает свойствами

а) $K \in \mathcal{K} g_\rho$;

б) $K(\tilde{0}) \neq 1$;

в) $(\forall K' \in \mathcal{K} g_\rho)\, I(K) \subseteq I(K')$;

г) $(\forall K' \in \mathcal{K} g_\rho)\, I_0(K) \subseteq I_0(K')$.

Первые два свойства вытекают соответственно из транзитивности и антирефлексивности отношения ρ, два последних — из определения операции композиции. Путем инвертирования некоторых переменных u_i

можно добиться, чтобы сомножители q_i конъюнкции K принимали значения из множеств $\{p_i, p'_i, p'_i\bar{p}_i\}$. При этом ρ перейдет в однотипное отношение, также являющееся и. п. (чтобы не вводить переобозначений, будем считать, что оно совпадает с ρ).

Из б) следует, что в K найдется сомножитель q_{i_1}, имеющий вид p_{i_1}. Образуем набор $\tilde{\sigma}=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, положив $\sigma_{i_1}=1$ и $\sigma_i=-1$ при $i\neq i_1$. Конъюнкция $K_{-\tilde{\sigma}}$ имеет i-м сомножителем $\bar{p}'_{i_1}$, поэтому $I(K_{-\tilde{\sigma}}\circ K)\subseteq\subset I((K)\setminus\{i_1\})$. Отсюда согласно в) $(K_{-\tilde{\sigma}}\circ K)\notin\mathcal{K}g_\rho$. Это означает, что $K_{-\tilde{\sigma}}\circ K$ не является импликантом, неравенство $K_{-\tilde{\sigma}}\circ K\leqslant g_\rho$ нарушено и, тем более, нарушено $K_{-\tilde{\sigma}}\circ g_\rho\leqslant g_\rho$.

Тогда в соответствии с леммой 2.6 должно быть выполнено $K_{\tilde{\sigma}}\circ g_\rho\leqslant g_\rho$. Откуда $K_{\tilde{\sigma}}\circ K\leqslant g_\rho$, т. е. $K_{\tilde{\sigma}}\circ K\in\mathcal{K}g_\rho$. Сомножители конъюнкции $K_{\tilde{\sigma}}=\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_n$ имеют вид $\widehat{q}_i=\bar{p}'_i$, $i\neq i_1$, $\widehat{q}_{i_1}=p_{i_1}$. Поэтому $I_0(K_{\tilde{\sigma}})=\varnothing$ и согласно г) $I_0(K)=\varnothing$. В этом случае по определению композиции имеет место $K_{\tilde{\sigma}}\circ K=p_{i_1}$. Учитывая $K_{\tilde{\sigma}}\circ K\in\mathcal{K}g_\rho$, из в) получаем $I(K)=I(K_{\tilde{\sigma}})=\{i_1\}$, что приводит к $K=p_{i_1}$.

Все конъюнкции $K'\in\mathcal{K}g_\rho$ имеют сомножитель $q'_{i_1}\in\{p_{i_1}, p'_{i_1}, p'_{i_1}\bar{p}_{i_1}\}$, иначе $i_1\notin I(K)$. Поэтому функция g_ρ может быть представлена в виде

$$g_\rho=p_{i_1}\vee p'_{i_1}g_1\vee p'_{i_1}\bar{p}_{i_1}g_2=p_{i_1}\vee p'_{i_1}(g_1\vee g_2)=p_{i_1}\vee p'_{i_1}g_{\rho_1}. \quad (2.4)$$

Здесь g_{ρ_1} получено из g_ρ подстановкой $g_{i_1}=0$. Нетрудно видеть, что подстановка константы 0 сохраняет асимметрию, транзитивность и свойство (2.1). Поэтому ρ_1 также является и. п. и аналогично предыдущему допускает (с точностью до однотипности) представление $g_{\rho_1}=p_{i_2}\vee p'_{i_2}g_{\rho_2}$, что совместно с (2.4) дает $g_\rho=p_{i_1}\vee p'_{i_1}p_{i_2}\vee p'_{i_1}p'_{i_2}g_{\rho_2}$. Продолжая эти рассуждения, пока на некотором шаге $k+1$ не придем к функции $g_{\rho_{k+1}}\equiv\equiv 0$, получим представление

$$g_\rho=p_{i_1}\vee p'_{i_1}p_{i_2}\vee\ldots\vee p'_{i_1}\ldots p'_{i_{k-1}}p_{i_k},$$

дающее общий вид и. п. с точностью до однотипности. □

Из леммы 2.7, теоремы 2.3 и включений (2.1) вытекает

Теорема 2.4. *Для порядковых отношений классы $\mathcal{W}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{Y}$ совпадают.*

Отметим, что для отношений на произвольном Ω эти классы существенно различны [14].

2.5. Частичные порядки. Основным результатом данного пункта является

Теорема 2.5. а) *Отношение ρ представляет собой ч. п. тогда и только тогда, когда g_ρ преобразуется к виду $g_\rho=g_{\widehat{\lambda}_1}\ldots g_{\widehat{\lambda}_k}$, где $\widehat{\lambda}_i$ $(i=\overline{1, k})$ — обобщенная лексикография.*

б) *Правильное отношение ρ является ч. п. тогда и только тогда, когда g_ρ преобразуется к виду $g_\rho=g_{\lambda'_1}\ldots g_{\lambda'_k}$, где λ'_i $(i=\overline{1, k})$ — неполная лексикография. Неполные лексикографии здесь могут быть заменены на полные тогда и только тогда, когда $g_\rho\geqslant g_\pi$.*

в) *Для правильных отношений задачи распознавания ч. п. по д. н. ф. и к. н. ф. представляющих функций решаются эффективно, для произвольных порядковых отношений они NP-полны.*

Пункт а) является аналогом для порядковых отношений известной теоремы Душника — Миллера [13], утверждающей возможность разложения всякого ч. п. (на произвольном Ω) в пересечение л. п. Пункт б) показывает, что для правильных ч. п. это не так, но они могут быть представлены как пересечение с. п. Пересечением л. п. могут быть образованы те и только те правильные ч. п., которые включают отношение Парето.

В одну сторону утверждения пп. а) и б) очевидны, поскольку пересечения л. п. и с. п. дают ч. п.

Лемма 2.8. *Порождающая функция всякого ч. п.* ρ *представима в виде* $g_\rho = g_{\widehat{\lambda}_1} \ldots g_{\widehat{\lambda}_k}$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что если ρ — ч. п. и $g_\rho(\tilde{\sigma}) = 0$ для некоторого $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma} \neq \tilde{0}$, то ρ можно дополнить до обобщенной лексикографии $\widehat{\lambda}$ с сохранением свойства $g_{\widehat{\lambda}}(\tilde{\sigma}) = 0$. Тогда ρ получается пересечением всех $\widehat{\lambda}$, построенных по наборам $\tilde{\sigma}$, таким что $g_\rho(\tilde{\sigma}) = 0$. Рассуждения будем проводить с точностью до однотипности отношений, поэтому можно считать, что компонентами набора $\tilde{\sigma}$ являются -1 и 0.

Убедимся в ацикличности отношения с представляющей функцией $g_\rho \vee K_{-\tilde{\sigma}}$, где $K_{-\tilde{\sigma}}$ определено для набора $-\tilde{\sigma}$ как перед леммой 2.7. Если предположить противное, то найдется конъюнкция $K = q_1 \ldots q_n$ из д. н. ф. g_ρ, для которой $K \circ K_{-\tilde{\sigma}}$ является конъюнкцией типа $\tilde{0}$. Если $\sigma_i = -1$ (при некотором i), то в $K_{-\tilde{\sigma}}$ присутствует сомножитель p_i, а потому $q_i \in \{1, \bar{p}_i, \bar{p}'_i\}$ (иначе $K \circ K_{-\tilde{\sigma}}$ не имеет типа $\tilde{0}$). Если же $\sigma_i = 0$, то в $K_{-\tilde{\sigma}}$ присутствует сомножитель $p'_i\bar{p}_i$ и $q_i \in \{1, p'_i, \bar{p}_i, p'_i\bar{p}_i\}$. Отсюда получаем $K(\tilde{\sigma}) = 1$, что приводит к противоречию $g_\rho(\tilde{\sigma}) = 1$.

Воспользовавшись леммой 2.2, дополним ациклическое отношение, представленное функцией $g_\rho \vee K_{-\tilde{\sigma}}$, до обобщенной лексикографии $\widehat{\lambda}$. Тогда $g_{\widehat{\lambda}}(-\tilde{\sigma}) \geqslant K_{-\tilde{\sigma}}(-\tilde{\sigma}) = 1$ и в силу асимметрии $\widehat{\lambda}$ выполнено $g_{\widehat{\lambda}}(\tilde{\sigma}) = 0$. □

Лемма 2.9. *Порождающая функция правильного ч. п.* ρ *представима в виде* $g_\rho = g_{\lambda'_1} \ldots g_{\lambda'_k}$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что если ρ — правильный ч. п. и $g_\rho(\tilde{\sigma}) = 0$ для некоторого $\tilde{\sigma} \neq \tilde{0}$, то ρ можно дополнить до неполной лексикографии λ' с сохранением свойства $g_{\lambda'}(\tilde{\sigma}) = 0$.

Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1 $((\exists i)\, \sigma_i = -1)$. Убедимся вначале, что отношение с представляющей функцией $g_\rho \vee K^+_{-\tilde{\sigma}}$ ($K^+_{-\tilde{\sigma}}$ определено перед леммой 2.6) ациклично.

Предположим противное. Тогда найдется конъюнкция K из д. н. ф. g_ρ, такая что $K \circ K^+_{-\tilde{\sigma}}$ — конъюнкция типа $\tilde{0}$. Отсюда можно заключить, что $K(\tilde{\sigma}) = 1$. Действительно, если $\sigma_i = -1$, то в $K^+_{-\tilde{\sigma}}$ присутствует сомножитель p_i, а потому $i \notin I(K)$. Если же $\sigma_i = 0$, то в $K^+_{-\tilde{\sigma}}$ входит сомножитель p'_i, поэтому в K сомножитель q_i либо отсутствует, либо входит в форме p'_i. Равенство $K(\tilde{\sigma}) = 1$ приводит к противоречию $g_\rho(\tilde{\sigma}) = 1$.

Воспользовавшись леммой 2.2, дополним ациклическое отношение, представленное функцией $g_\rho \vee K^+_{-\tilde{\sigma}}$, до лексикографии λ. Тогда $g_\lambda(-\tilde{\sigma}) \geqslant K^+_{-\tilde{\sigma}}(-\tilde{\sigma}) = 1$ и в силу асимметрии λ выполнено $g_\lambda(\tilde{\sigma}) = 0$.

Случай 2 ($\widetilde{\sigma} \in \{0, 1\}^n$). Пусть $I = \{i | \sigma_i = 0\}$. Обозначим через $g_\rho|_I$ функцию, полученную из g_ρ подстановкой $u_i = 1$ (т. е. $p_i = p_i' = 1$) для $i \in I$. Отношение ρ_I на множестве $R^{|I|}$, определяемое равенством $g_{\rho_I} = g_\rho|_I$, является ч. п. Его транзитивность вытекает из транзитивности ρ, а антирефлексивность — из $g_{\rho_I}(\widetilde{0}_I) = g_\rho(\widetilde{\sigma}) = 0$, где $\widetilde{0}_I$ — нулевой набор из $R^{|I|}$.

По лемме 2.2 дополним ρ_I до лексикографии λ_I на $R^{|I|}$. Отношение λ' на R^n с представляющей функцией $g_{\lambda'} = g_{\lambda_I}$ является неполной лексикографией. При этом $g_{\lambda'} \geqslant g_\rho|_I \geqslant g_\rho$ и, кроме того,

$$g_{\lambda'}(\widetilde{\sigma}) = g_{\lambda_I}(\widetilde{0}_I) = g_{\rho_I}(\widetilde{0}_I) = g_\rho(\widetilde{\sigma}) = 0. \ \square$$

Лемма 2.10. *Правильный ч. п. ρ представим в виде пересечения лексикографий тогда и только тогда, когда $\rho \supseteq \pi$.*

Доказательство. Всякая лексикография λ содержит π, поэтому π включено в пересечение лексикографий. В другую сторону, если $\rho \supseteq \pi$, то $\lambda_i' \supseteq \pi$ для всех λ_i', дающих в пересечении ρ, а это, как нетрудно видеть, означает, что все λ_i' являются лексикографиями. $\square$

Завершение доказательства теоремы 2.5. Пусть функция $g_\rho \in M_{3,2}$ правильного отношения ρ задана своей приведенной д. н. ф. и $\mathscr{K}g_\rho$ — множество ее конъюнкций. Из утверждений 1.10° и 1.13° следует, что ρ — ч. п. тогда и только тогда, в $\mathscr{K}g_\rho$ нет конъюнкций типа $\widetilde{0}$ и для любых $K_1, K_2 \in \mathscr{K}g_\rho$ найдется конъюнкция $K_3 \in \mathscr{K}g_\rho$ такая, что $K_1 \circ K_2 \leqslant K_3$. Этот алгоритм проверки эффективен.

Пусть теперь функция $g_\rho \in M_{3,2}$ задана посредством приведенной к. н. ф. Обозначим через Σ_ρ множество верхних нулей функции g_ρ, т. е. множество всех таких наборов $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{-1, 0, +1\}^n$, что $g_\rho(\widetilde{\sigma}) = 0$ и для всех $\widetilde{\sigma}' > \widetilde{\sigma}$ выполнено $g_\rho(\widetilde{\sigma}') = 1$. Пусть $\Sigma_\rho' = \Sigma_\rho \cap \{0, 1\}^n$, $\Sigma_\rho'' = \Sigma_\rho \setminus \Sigma_\rho'$. Анализируя доказательство леммы 2.9, нетрудно заключить, что правильное отношение ρ является ч. п. тогда и только тогда, когда для любого $\widetilde{\sigma} \in \Sigma_\rho''$ отношение с представляющей функцией $g_\rho \vee K^+_{-\widetilde{\sigma}}$ и для любого $\widetilde{\sigma} \in \Sigma_\rho'$ отношение с представляющей функцией $g_\rho|_{I_{\widetilde{\sigma}}}$, где $I_{\widetilde{\sigma}} = \{i | \sigma_i = 0\}$, ацикличны.

Между дизъюнкциями D_s приведенной к. н. ф. g_ρ и наборами $\widetilde{\sigma}^{(s)} = (\sigma_1^{(s)}, \ldots, \sigma_n^{(s)}) \in \Sigma_\rho$ существует взаимно однозначное соответствие

$$D_s = \left(\bigvee_{\sigma_i^{(s)}=0} p_i\right) \vee \left(\bigvee_{\sigma_j^{(s)}=-1} p_j'\right),$$

поэтому верхние нули находятся эффективно по к. н. ф.. Проверку ацикличности отношения, задаваемого функцией $g_0 = g_\rho \vee K^+_{-\widetilde{\sigma}}$, можно осуществлять с помощью алгоритма, аналогичного использованному при завершении доказательства теоремы 2.1. Некоторое отличие состоит лишь в способе нахождения множеств $J(g_i)$ для функций g_i, возникающих в процессе работы алгоритма. Если g_i имеет вид $g_i' \vee K_i$, где g_i' задана в виде к. н. ф., а K_i — конъюнкция, то согласно лемме 2.5 и определению $I(g)$

$$J(g_i) = I(g_i) = I(g_i') \cap I(K_i) = J(g_i') \cap I(K_i).$$

Проверка ацикличности отношения, задаваемого функцией $g_\rho|_{I_{\widetilde{\sigma}}}$, получаемой из g_ρ подстановками констант, производится прежним способом. Указанный метод распознавания ч. п. по к. н. ф. представляющих функций правильных отношений эффективен.

NP-полнота задач распознавания ч. п. по д. н. ф. и к. н. ф. для произвольных порядковых отношений устанавливается путем сведения к ним задач о тождественной истинности д. н. ф. $K_1 \vee \ldots \vee K_t$ и выполнимости к. н. ф. $D_1 \ldots D_v$ от переменных $p_1, \ldots, p_n$. Для этого нужно рассмотреть отношения ρ_1 и ρ_2 с $g_{\rho_1} = p_{n+2}(p_{n+1} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_t)$ и $g_{\rho_2} = p_{n+1} \vee D_1 \ldots D_v$. □

2.6. Транзитивные отношения. Пусть $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$ — некоторое подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$, а $R^I = R^s$ — соответствующее ему подпространство пространства R^n. Будем говорить, что порядковое отношение является *лексикографией на* R^I, если оно представляет собой неполную лексикографию на R^n и множество I_ρ номеров существенных переменных функции g_ρ совпадает с I. Аналогично вводится понятие *обобщенной лексикографии на* R^I. Основным результатом данного пункта является

Теорема 2.6. а) *Отношение* ρ *транзитивно тогда и только тогда, когда* g_ρ *преобразуется к виду, указанному в* а) *теоремы* 2.5 (если ρ антирефлексивно), *либо к виду* $g_\rho = g_{\widehat{\lambda}_1^*} \ldots g_{\widehat{\lambda}_k^*}$, *где* $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_k$ — *обобщенные лексикографии на одном и том же множестве* I (если ρ рефлексивно).

б) *Правильное отношение* ρ *транзитивно тогда и только тогда, когда* g_ρ *преобразуется к виду, указанному в* б) *теоремы* 2.5 (если ρ антирефлексивно), *либо к виду* $g_\rho = g_{\lambda_1^*} \ldots g_{\lambda_k^*}$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — *лексикографии на одном и том же множестве* I (если ρ рефлексивно).

в) *Для правильных отношений задачи распознавания транзитивности по д. н. ф. и к. н. ф. представляющих функций решаются эффективно, для произвольных порядковых отношений они* NP-*полны.*

Будем различать отношения ρ с точностью до эквивалентности. Отношения ρ_1 на R^{I_1} и ρ_2 на R^{I_2} будем считать *эквивалентными*, если $g_{\rho_1} = g_{\rho_2}$ (с точностью до несущественных переменных). Наряду со строгими ч. п. будем рассматривать *нестрогие ч. п.* — транзитивные, антисимметричные, рефлексивные отношения. Из теоремы 2.6 получаем

Следствие. *Всякое* (*правильное*) *транзитивное отношение эквивалентно* (*правильному*) *ч. п.* (*строгому или нестрогому*) *на некотором множестве* R^I.

Действительно, если ρ антирефлексивно, то оно эквивалентно строгому ч. п., а если рефлексивно, то допускает представление, указанное в теореме, где все $\widehat{\lambda}_i^*$ являются нестрогими линейными порядками на R^I (замечание в п. 2.3). Пересечение линейных порядков дает ч. п. на R^I. □

Таким образом, фактически не существует транзитивных отношений, отличных от ч. п.

Доказательство теоремы 2.6 разбивается на ряд лемм. Обозначим через I_ρ множество номеров всех существенных переменных функции g_ρ.

Лемма 2.11. *Если порядковое отношение* ρ *транзитивно, то оно совпадает с ч. п. либо его представляющая функция может быть записана в виде* $g_\rho = K_0 \vee g_{\rho'}$, *где* ρ' — *ч. п.*, $K_0 = p'_{i_1}\bar{p}_{i_1} \ldots p'_{i_s}\bar{p}_{i_s}$, $\{i_1, \ldots, i_s\} = I_\rho$.

Доказательство. Будем считать, что транзитивное отношение ρ непусто и отлично от R^{2n}, иначе утверждение тривиально. Рассмотрим д. н. ф. функции g_ρ, образованную всеми ее импликантами. Через $\mathcal{K}g_\rho$ обозначим множество конъюнкций этой д. н. ф. Если ρ не является ч. п., то в $\mathcal{K}g_\rho$ имеются конъюнкции типа $\widetilde{0}$. Обозначим через $K^{(0)}$ композицию всех этих конъюнкций. Легко проверить, что $K^{(0)}$ имеет тип $\widetilde{0}$ и поглощает любую конъюнкцию типа $\widetilde{0}$ из $\mathcal{K}g_\rho$.

Убедимся, что $I(K^{(0)})=I_\rho$. Предположим, что в $K^{(0)}$ отсутствует некоторая переменная с номером из I_ρ, и пусть K — содержащий ее простой импликант. Тогда нетрудно видеть, что $K^{(0)}\circ K$ строго больше K. Из транзитивности ρ и 1.10° следует, что $K^{(0)}\circ K$ является импликантом функции g_ρ, а это противоречит простоте импликанта K.

Очевидно, что функция g_ρ может быть представлена в виде $g_\rho = K_0 \vee D_0 g_\rho$, где K_0 взято из формулировки утверждения, а $D_0=\overline{K}_0 = p_{i_1}\vee \overline{p}'_{i_1}\vee\ldots\vee p_{i_s}\vee\overline{p}'_{i_s}$. Осталось убедиться, что отношение ρ' с $g_{\rho'}=D_0 g_\rho$ является ч. п. Поскольку оно антирефлексивно (не содержит конъюнкций типа $\widetilde{0}$), нужно доказать лишь его транзитивность.

Образуем д. н. ф., составленную из всех простых импликантов функции $g_{\rho'}$ и обозначим через $\mathcal{K}_{g_{\rho'}}$ множество входящих в нее конъюнкций. Пусть $K_1,\ K_2 \in \mathcal{K}_{g_{\rho'}}$. Композиция $K_1\circ K_2$ не является конъюнкцией типа $\widetilde{0}$, поскольку иначе $I(K_1\circ K_2)$ строго меньше $I(K_0)$ и конъюнкция K_0 не поглощает $K_1\circ K_2$. Отсюда $D_0(K_1\circ K_2)=K_1\circ K_2$. Из транзитивности ρ вытекает, что $K_1\circ K_2$ является импликантом g_ρ, а в силу полученного соотношения — импликантом $g_{\rho'}$. Поэтому $K_1\circ K_2\leqslant g_{\rho'}$, что в силу произвольности $K_1,\ K_2\in g_{\rho'}$ свидетельствует о транзитивности ρ'. □

Л е м м а 2.12. *Рефлексивное порядковое отношение* ρ *транзитивно тогда и только тогда, когда* $g_\rho = g^*_{\widehat{\lambda}_1}\ldots g^*_{\widehat{\lambda}_k} = g_{\widehat{\lambda}_1^*}\ldots g_{\widehat{\lambda}_k^*}$, *где все* $\widehat{\lambda}_i$ *являются обобщенными лексикографиями на одном и том же множестве* R^I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если имеет место указанное представление, то ρ транзитивно как пересечение транзитивных отношений $\widehat{\lambda}_i^*$ (двойственных к негатранзитивным отношениям $\widehat{\lambda}_i$).

Обратно, пусть ρ — рефлексивное и транзитивное отношение. Воспользовавшись леммой 2.11 и теоремой 2.5 (роль R^n играет R^{I_ρ}), запишем g_ρ в виде $g_\rho = K_0\vee g_{\widehat{\lambda}_1}\ldots g_{\widehat{\lambda}_k} = (K_0\vee g_{\widehat{\lambda}_1})\ldots(K_0\vee g_{\widehat{\lambda}_k})$, где K_0 образовано произведением сомножителей $p'_j\overline{p}_j$ для всех $j\in I_\rho$, а $\widehat{\lambda}_i$ — обобщенная лексикография на R^{I_ρ}. Для доказательства достаточно убедиться, что $K_0\vee g_{\widehat{\lambda}_i} = g_{\widehat{\lambda}_i^*}$.

Будем считать для простоты, что $I_\rho=\{1,\ \ldots,\ s\}$. Путем инвертирования некоторых переменных превратим обобщенную лексикографию $\widehat{\lambda}_i$ в лексикографию λ_i. Конъюнкция K_0 при инвертировании перейдет в себя. Последовательно преобразуя с применением булева равенства $\bar{x}y\vee x = x\vee y$, получаем

$$K_0\vee g_{\lambda_i} = p'_1\overline{p}_1\ldots p'_s\overline{p}_s\vee p_1\vee p'_1p_2\vee\ldots\vee p'_1\ldots p'_{s-1}p_s =$$
$$= p'_1\ldots p'_s\vee p_1\vee p'_1p_2\vee\ldots\vee p'_1\ldots p'_{s-1}p_s = g_{\lambda_i^*}.$$

Осуществив в обоих частях обратное инвертирование переменных, приходим к требуемому равенству. □

Л е м м а 2.13. *Правильное отношение* ρ *транзитивно тогда и только тогда, когда* ρ — *ч. п. либо* $g_\rho = K_0^+\vee g_{\rho'}$, *где* ρ' — *непустой ч. п.,* K_0^+ — *монотонная конъюнкция типа* $\widetilde{0}$, *для которой* $I(K_0)=I_\rho$.

Д о к а з а т е л ь с т в о в одну сторону получается некоторой модификацией доказательства леммы 2.11. В другую сторону, пусть $g_\rho = K_0^+\vee\vee g_{\rho'}$, где K_0^+ и ρ' удовлетворяют условиям леммы. Чтобы установить транзитивность ρ, достаточно убедиться, что для $K\in\mathcal{K}_{g_{\rho'}}$ композиция $K_0^+\circ K$ поглощается конъюнкцией из $\mathcal{K}_{g_\rho}$. Но это действительно так, поскольку $I(K_0^+)\supseteq I(K)$ и, следовательно, $K_0^+\circ K = K$. □

Лемма 2.14. *Правильное рефлексивное отношение* ρ *транзитивно тогда и только тогда, когда* $g_\rho = g^*_{\lambda_1} \ldots g^*_{\lambda_k} = g_{\lambda^*_1} \ldots g_{\lambda^*_k}$, *где все* λ_i *являются лексикографиями на одном и том же множестве* R^I.

Доказательство проводится как в лемме 2.12 и отличается тем, что здесь g_ρ разлагается в произведение сомножителей $K_0^+ \vee g_{\lambda_i'}$. Рассмотрим один из них. Пусть для простоты $I_\rho = \{1, \ldots, s\} = I$ и

$$K_0^+ \vee g_{\lambda_i'} = p_1' \ldots p_s' \vee p_1 \vee p_1'p_2 \vee \ldots \vee p_1' \ldots p_{t-1}'p_t, \quad t \leqslant s.$$

Если $t < s$, возьмем совокупность лексикографий $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}$ на множестве $R^{s-t} = R^{I'}$, $I' = \{t+1, \ldots, s\}$, дающих в пересечении отношение Парето π_{s-t} на R^{s-t} (см. п. 1.4), и введем лексикографии λ_{ij} на $R^s = R^I$, положив $g_{\lambda_{ij}} = g_{\lambda_i'} \vee p_1' \ldots p_t' g_{\lambda^{(j)}}$, $j = \overline{1, r}$. Тогда

$$\mathop{\&}_{1 \leqslant j \leqslant r} g^*_{\lambda_{ij}} = \mathop{\&}_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(g_{\lambda_{ij}} \vee K_0^+\right) = \mathop{\&}_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(g_{\lambda_i'} \vee p_1' \ldots p_t' g_{\lambda^{(j)}} \vee K_0^+\right) =$$

$$= g_{\lambda_i'} \vee K_0^+ \vee p_1' \ldots p_t' \mathop{\&}_{1 \leqslant j \leqslant r} g_{\lambda^{(j)}} = g_{\lambda_i'} \vee K_0^+ \vee p_1' \ldots p_t' g_{\pi_{s-t}} = g_{\lambda_i'} \vee K_0^+.$$

Таким образом, при $t < s$ выражение $K_0^+ \vee g_{\lambda_i'}$ разлагается в конъюнкцию функций g_{λ^*}, соответствующих лексикографиям λ на R^I. При $t = s$ отношение λ_i' является лексикографией λ на R^I, а $K_0^+ \vee g_{\lambda_i'}$ совпадает с g_{λ^*}. Остается заменить каждый сомножитель $K_0^+ \vee g_{\lambda_i'}$ в разложении g_ρ указанным способом. □

Лемма 2.15. *Правильное отношение* ρ *транзитивно тогда и только тогда, когда отношение* ρ' *с представляющей функцией* $g_{\rho'} = (p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_s}) g_\rho$, *где* $\{i_1, \ldots, i_s\} = I_\rho$, *является ч. п.*

Доказательство. Пусть ρ — транзитивное отношение. Если ρ — ч. п., то $g_{\rho'} = g_\rho$ и ρ' является ч. п. В противном случае g_ρ представимо в соответствии с леммой 2.13 и там же доказано, что ρ' — ч. п.

Обратно, пусть ρ' — ч. п. Убедимся, что если в $\mathscr{K} g_\rho$ имеется конъюнкция типа $\tilde{0}$, то она единственна. Предположим, что это не так и K', K'' — две такие конъюнкции. Ни одна из них не поглощает другую, поэтому найдутся $i_1 \in I(K') \setminus I(K'')$ и $i_2 \in I(K'') \setminus I(K')$. Рассмотрим конъюнкции $p_{i_1}K'$, $p_{i_2}K'' \in \mathscr{K} g_{\rho'}$. Поскольку $p_{i_1}K' \circ p_{i_2}K''$ является конъюнкцией типа $\tilde{0}$, это противоречит тому, что ρ' — ч. п. Единственную конъюнкцию типа $\tilde{0}$ обозначим через K_0, тогда $g_\rho = K_0 \vee g$, где g — дизъюнкция всех конъюнкций из $\mathscr{K} g_\rho \setminus \{K_0\}$. При этом $g_{\rho'} = K_0(p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_s}) \vee \vee g$.

Если $g \equiv 0$, то $g_{\rho'}$ — ч. п. в силу леммы 2.3. Пусть $g \not\equiv 0$. Покажем, что для любой конъюнкции $K \in \mathscr{K} g_{\rho'}$ имеет место $I(K_0) \supseteq I(K)$. Предположим, что это не так и $i_1 \in I(K) \setminus I(K_0)$. В конъюнкцию K должна входить некоторая нештрихованная переменная p_{i_2}, где $i_2 \in I(K) \cap I(K_0)$, иначе $K \circ K_0$ поглощает K_0 в g_ρ. Но тогда $K \circ p_{i_2} K_0$ поглощает K в $g_{\rho'}$. Полученное противоречие доказывает, что g_ρ представима в виде, указанном в лемме 2.13, и в соответствии с ней ρ транзитивно. □

Завершение доказательства теоремы 2.6. Если отношение ρ правильно, его транзитивность может быть распознана по приведенной д. н. ф. функции g_ρ эффективно: в этой д. н. ф. композиция любых двух конъюнкций поглощается некоторой конъюнкцией. По приведенной к. н. ф. функции g_ρ транзитивность также распознается эффективно: согласно лемме 2.15 достаточно образовать функцию $g_{\rho'} = (p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_s}) g_\rho$ и, воспользовавшись способом, изложенным при завершении доказательства теоремы 2.5, проверить по к. н. ф. $g_{\rho'}$, является ли ρ' ч. п.

NP-полнота задач проверки транзитивности по д. н. ф. и к. н. ф. установлена в утверждении 1.14°. □

§ 3. Синтез операторов агрегирования

3.1. Требования к операторам. Одним из основных направлений в теории группового выбора является исследование свойств операторов $r = F(r_1, \ldots, r_n)$, агрегирующих индивидуальные отношения $r_1, \ldots, r_n$ в групповое отношение r. Отношения $r, r_1, \ldots, r_n$ предполагаются заданными на одном и том же множестве вариантов Ω, которое будем считать конечным. (Отметим, что варианты здесь уже не считаются точками пространства R^n.)

Известная теорема Эрроу [17, 19, 21, 23] о невозможности совмещения ряда естественных требований к агрегирующим операторам F инициировала целый ряд исследований [2, 3, 5—9, 12, 18, 20], посвященных явному описанию операторов $F\colon \mathscr{R}_1^n \to \mathscr{R}_2$, обладающих определенными свойствами и переводящих произвольные наборы отношений $r_1, \ldots, r_n$ класса $\mathscr{R}_1$ в отношения r класса $\mathscr{R}_2$. Опишем требования (см., например, [3]), которые будут предъявляться к операторам F.

Пусть x, y, x', y' — произвольные варианты из Ω, $(r_1, \ldots, r_n)$, $(r_1', \ldots, r_n')$ — произвольные n-ки отношений на множестве Ω. Для оператора F (n-местного) будем предполагать выполненными следующие свойства:

1) *бинарность*

$$(\forall i = \overline{1, n})\big((xr_iy \Leftrightarrow xr_i'y) \mathbin{\&} (yr_ix \Leftrightarrow yr_i'x)\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big((x, y) \in F(r_1, \ldots, r_n) \Leftrightarrow (x, y) \in F(r_1', \ldots, r_n')\big),$$

2) *ненавязанность*

$$(\forall x, y \in \Omega)(\exists r_1, \ldots, r_n, r_1', \ldots, r_n')\big((x, y) \in F(r_1, \ldots, r_n) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (x, y) \notin F(r_1', \ldots, r_n')\big),$$

3) *нейтральность* (к вариантам)

$$(\forall i = \overline{1, n})((xr_iy \Leftrightarrow x'r_iy') \mathbin{\&} (yr_ix \Leftrightarrow y'r_ix')) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((x, y) \in F(r_1, \ldots, r_n) \Leftrightarrow (x', y') \in F(r_1, \ldots, r_n)).$$

Будем рассматривать также случай, когда к этим условиям добавляется

4) *монотонность*

$$(\forall i = \overline{1, n})\big((xr_iy \Rightarrow xr_i'y) \mathbin{\&} (yr_i'x \Rightarrow yr_ix)\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big((x, y) \in F(r_1, \ldots, r_n) \Rightarrow (x, y) \in F(r_1', \ldots, r_n')\big).$$

Содержательно условие бинарности означает, что взаимоотношение вариантов x и y в групповом отношении определяется лишь их взаимоотношениями в индивидуальных отношениях (и не зависит от других вариантов), условие ненавязанности состоит в том, что для любых вариантов x и y существует набор индивидуальных отношений, при котором x предпочитается y в групповом отношении, и существует набор отношений, при котором это не так, условие нейтральности означает равноценность вариантов при агрегировании, условие монотонности — что улучшение позиций варианта x в индивидуальных отношениях не ухудшает его позиций в групповом отношении.

Нетрудно видеть, что операторы, удовлетворяющие условиям (1)—(3), и только они могут быть записаны в виде

$$F(r_1, \ldots, r_n) = \Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^{-1}, \ldots, r_n^{-1}),$$

где Φ — т.-м. операция, не являющаяся тривиальной, т. е. не дающая тождественно пустого или универсального (полного) множества независимо от значений аргументов.

В дальнейшем вместо r^{-1} будет удобно иметь дело с отношениями $\overline{r_i^{-1}} = \Omega^2 \setminus r^{-1} = r_i^*$. Заменив операцию $\Phi(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$ на $\Phi' = \Phi(X_1, \ldots, X_n, \overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n)$, где черта обозначает дополнение множества (до Ω^2), приведем агрегирующий оператор к виду (штрих опущен)

$$F(r_1, \ldots, r_n) = \Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*) \tag{3.1}$$

и будем рассматривать только такие операторы.

Оператору F может быть сопоставлена булева функция $\varphi(p_1, \ldots \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$, полученная путем замены т.-м. операций в Φ соответствующими булевыми операциями, а переменных отношений r_i, r_i^* — переменными p_i, p_i'. С ее помощью равенство

$$r = \Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*)$$

запишется в виде

$$xry = \varphi(xr_1y, \ldots, xr_ny, xr_1^*y, \ldots, xr_n^*y).$$

Отношения r_i будем предполагать асимметричными. Из условия асимметрии $r_i \cap r_i^{-1} = \varnothing$ вытекает соотношение $r_i \subseteq r_i^*$, и можно считать, что p_i, p_i' удовлетворяют неравенству $p_i' \geqslant p_i$. Поэтому для φ справедливы те же представления в виде д. н. ф. и к. н. ф., что и для функций из $P_{3,2}$, и по тем же правилам может быть найдена двойственная функция φ^*. На основе этого можно определить двойственный к (3.1) оператор F^*. Оператор F монотонен, если он описывается монотонной функцией φ. Нетривиальный монотонный оператор выразим через операции $\cap$ и $\cup$.

3.2. Универсально аксиоматизируемые классы отношений. Классы отношений обычно задаются системами аксиом. Отношение r можно рассматривать как двуместный предикат $r(x, y)$ на Ω, для которого более употребительна запись xry. Аксиомы, с помощью которых определяются содержательные свойства отношений, в большинстве случаев имеют вид

$$(\forall x_1, \ldots, x_s)\, P(x_1, \ldots, x_s), \tag{3.2}$$

где P — формула, содержащая вхождения единственного предикатного символа r и символов логических операций. Отметим (и это существенно), что в P не допускается предикат равенства и, таким образом, P является формулой чистого исчисления предикатов в терминах [11]. Класс отношений $\mathscr{R}$, задаваемый системой аксиом указанного вида, будем называть *универсально аксиоматизируемым.*

Система аксиом не обязательно предполагается конечной. Класс ациклчных отношений, например, описывается счетной системой аксиом

$$(\forall x_1, \ldots, x_s)\,(x_1rx_2 \,\&\, x_2rx_3 \,\&\, \ldots \,\&\, x_{s-1}rx_s \to x_s\bar{r}x_1), \quad s = 1, 2, \ldots$$

Все рассматривавшиеся нами свойства отношений, исключая антисимметрию и связность (в формулировке которых присутствуют неравенства — отрицания равенств), описываются аксиомами вида (3.2), а все классы цепочки (2.2), исключая $\mathscr{L}$, являются универсально аксиоматизируемыми. Предлагаемый ниже подход применим ко всем универсально аксиоматизируемым классам отношений.

3.3. Связь агрегирования с распознаванием свойств отношений. Явное описание операторов $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$ может быть получено на основе следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathscr{R}$ — универсально аксиоматизируемый класс отношений. Оператор $\Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*)$ осуществляет отображение $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$ тогда и только тогда, когда порядковое отношение ρ с представляющей функцией $g_\rho = \varphi(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$ содержится в $\mathscr{R}$.*

Этот факт основывается на следующей лемме (дальше через $\mathscr{R}(\Omega)$ обозначается множество отношений класса $\mathscr{R}$, заданных на Ω).

Лемма 3.1. *Пусть* $r = \Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*)$ *и* $g_\rho = \varphi(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$. *Тогда*

а) $(\forall \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s \in R^n)(\exists \Omega)(\exists r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{W}(\Omega))(\exists x_1, \ldots, x_s \in \Omega)$

$$x_i r x_j \Leftrightarrow \tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j, \quad i, j = \overline{1, s},$$

б) $(\forall \Omega)(\forall r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{W}(\Omega))(\forall x_1, \ldots, x_s \in \Omega)(\exists \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s \in R^n)$

$$x_i r x_j \Leftrightarrow \tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j, \quad i, j = \overline{1, s}.$$

Доказательство. а) Пусть $\tilde{x}_i = (x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)})$, $i = \overline{1, s}$. Каждому $\tilde{x}_i$ сопоставим символ x_i и на множестве $\Omega = \{x_1, \ldots, x_s\}$ определим отношения r_t $(t = \overline{1, n})$, положив $x_i r_t x_j \Leftrightarrow x_i^{(t)} > x_j^{(t)}$. Рассмотрим набор значений переменных $p_t = p(u_t)$, $p_t' = p'(u_t)$, $t = \overline{1, n}$, для $\tilde{u} = \Delta(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)$. Имеем

$$x_i r_t x_j \Leftrightarrow x_i^{(t)} > x_j^{(t)} \Leftrightarrow p_t = 1,$$
$$x_i r_t^* x_j \Leftrightarrow x_j^{(t)} \not> x_i^{(t)} \Leftrightarrow x_i^{(t)} \geqslant x_j^{(t)} \Leftrightarrow p_t' = 1.$$

Если $x_i r x_j$, то при подстановке в φ значений $p_t = x_i r_t x_j$, $p_t' = x_i r_t^* x_j$, $t = \overline{1, n}$, она примет значение 1. По определению функции g_ρ на соответствующем наборе p_t, p_t', $t = \overline{1, n}$,

$$g_\rho(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n') = \varphi(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n') = 1.$$

Это означает $\tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j$, а потому справедлива импликация $x_i r x_j \Rightarrow \tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j$. Обратная импликация $\tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j \Rightarrow x_i r x_j$ доказывается путем обращения этих рассуждений.

б) Поскольку множество Ω, на котором задано отношение $r \in \mathscr{W}$, конечно, то Ω может быть разбито на уровни так, что xry тогда и только тогда, когда уровень элемента x больше, чем уровень y [19]. Уровень элемента x_i в отношении r_t обозначим через $x_i^{(t)}$. Положим $\tilde{x} = (x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)})$. В этом случае $x_i r_t x_j \Leftrightarrow x_i^{(t)} > x_j^{(t)}$, $t = \overline{1, n}$, т. е. x_i, x_j связаны с $\tilde{x}_i$, $\tilde{x}_j$ теми же соотношениями, что и в (а). Далее, рассуждая как в (а), приходим к $x_i r x_j \Leftrightarrow \tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j$, $i, j = \overline{1, s}$. □

Доказательство теоремы 3.1. Пусть F — оператор, переводящий произвольные $r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{W}$ в $r \in \mathscr{R}$ и отношение ρ построено по F указанным в утверждении способом. Возьмем некоторую аксиому вида (3.2), участвующую в определении класса $\mathscr{R}$. Пусть $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s$ — произвольные наборы из R^n. Воспользуемся отношениями $r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{W}$ и элементами, гарантируемыми утверждением а). Отношение $r \in \mathscr{R}$ удовлетворяет формуле $P(x_1, \ldots, x_s)$ из (3.2). Согласно а), $\tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j \Leftrightarrow x_i r x_j$, поэтому для ρ выполнено $P(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s)$. В силу произвольности $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s$ отношение ρ удовлетворяет аксиоме (3.2). Эти рассуждения применимы к любой аксиоме, участвующей в задании $\mathscr{R}$, поэтому $\rho \in \mathscr{R}$.

Обратно, пусть $\rho \in \mathscr{R}$. Убедимся, что оператор F переводит произвольные $r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{W}$ в отношение $r \in \mathscr{R}$. Рассмотрим аксиому вида

(3.2). Пусть $x_1, \ldots, x_s$ произвольны. Воспользовавшись б), возьмем соответствующие $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s$. Отношение ρ удовлетворяет формуле $P(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s)$, а потому для r выполнено $P(x_1, \ldots, x_s)$. Остается сослаться на произвольность аксиомы (3.2) и элементов $x_1, \ldots, x_s$. □

3.4. Операторы $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$. Несколько модифицируя определение из [11], будем оператор, соответствующий лексикографии λ, называть *линейной иерархией* (л. и.) и обозначать Λ. Она имеет вид

$$\Lambda = r_{i_1} \cup \left(r^*_{i_1} \cap r_{i_2}\right) \cup \ldots \cup \left(r^*_{i_1} \cap \ldots \cap r^*_{i_{n-1}} \cap r_{i_n}\right), \tag{3.3}$$

где $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$, $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$. Аналогично определим неполную л. и. Λ', обобщенную л. и. $\widehat{\Lambda}$, обобщенную неполную л. и. $\widehat{\Lambda}'$ и (обобщенную) л. и. на множестве I на основе соответствующих типов лексикографии. Обобщенная л. и. получается из л. и. заменой некоторых отношений r_i на обратные r_i^{-1}. То же относится и к другим типам обобщенной л. и. Оператор Λ^*, двойственный к (3.3), образуется из (3.3) заменой r_{i_n} на $r^*_{i_n}$. Подобным образом осуществляется переход к двойственным операторам и для других типов л. и.

Укажем теперь явный вид агрегирующих операторов F: $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$ для различных классов $\mathscr{R}$. Из теорем 2.3, 2.4 и 3.1 вытекает

Теорема 3.2. *Оператор* (3.1) *осуществляет отображение $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$, где $\mathscr{R} \in \{\mathscr{W}, \mathscr{S}, \mathscr{I}\}$, тогда и только тогда, когда он является обобщенной неполной л. и. $\widehat{\Lambda}'$, а в случае монотонного оператора — неполной л. и. Λ'.*

Для класса $\mathscr{R} = \mathscr{W}$ и монотонных операторов этот результат опубликован в [20], но был известен раньше (соображения об его авторстве см. в [7]), для $\mathscr{R} = \mathscr{W}$ и операторов общего вида он имеется в [5, 9, 12]. Для $\mathscr{R} = \mathscr{S}$ и монотонных операторов данный факт доказан В. И. Даниловым [7]. Как выяснилось при обсуждении результата, теорема 3.2 в полном объеме была известна Ф. Т. Алескерову и А. В. Владимирову. Из нее следует, что при отображениях $\mathscr{W}^n \to \mathscr{S}$ и $\mathscr{W}^n \to \mathscr{I}$ агрегированное отношение всегда оказывается в более узком классе $\mathscr{W}$.

На основе теоремы 2.5 получаем описание всех отображений в класс частичных порядков.

Теорема 3.3. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{W}^n \to \mathscr{P}$ тогда и только тогда, когда он является пересечением обобщенных л. и.*

$$F = \widehat{\Lambda}_1 \cap \ldots \cap \widehat{\Lambda}_k, \tag{3.4}$$

а в монотонном случае — пересечением неполных л. и.

$$F = \Lambda'_1 \cap \ldots \cap \Lambda'_k. \tag{3.5}$$

Этот результат в монотонном случае совпадает с теоремой В. И. Данилова из [7], а в немонотонном несколько уточняет результаты из [5, 9] (где в представлении типа (3.4) могут участвовать обобщенные неполные л. и.). Лемма 2.10 показывает, что в (3.5) неполные л. и. не могут быть, подобно немонотонному случаю, заменены на л. и. На связь своего результата с теоремой Душника — Миллера обратил внимание В. И. Данилов [7], но не дал этому объяснения. Теорема 3.1 делает эту связь прозрачной.

Для более широкого класса транзитивных отношений общий вид агрегирующих операторов вытекает из теоремы 2.6.

Теорема 3.4. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{W}^n \to \mathscr{T}$ тогда и только тогда, когда он представим в одном из двух видов:*

$$F = \widehat{\Lambda}_1 \cap \ldots \cap \widehat{\Lambda}_k, \quad F = \widehat{\Lambda}^*_1 \cap \ldots \cap \widehat{\Lambda}^*_k,$$

где все $\widehat{\Lambda}_i$ являются обобщенными л. и. на одном и том же множестве I.

Если оператор F монотонен, то он представим в одном из двух видов:

$$F = \Lambda_1' \cap \ldots \cap \Lambda_k', \quad F = \Lambda_1^* \cap \ldots \cap \Lambda_k^*, \tag{3.6}$$

где Λ_i' — неполные линейные иерархии, а все Λ_i — линейные иерархии на одном и том же множестве I.

Это утверждение несколько уточняет соответствующие результаты из [5, 9].

Отметим, что первое представление в (3.6) нельзя усилить таким образом, чтобы все Λ_i были л. и. на одном и том же множестве I.

Теорема 2.1 дает возможность описать все операторы, отображающие слабые порядки в класс ацикличных отношений.

Теорема 3.5. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{W}^n \to \mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде $F = \widehat{\Lambda} \cap G$, где $\widehat{\Lambda}$ — обобщенная линейная иерархия, а G — произвольный оператор вида* (3.1). *В случае монотонного F оператор G должен быть взят монотонным, а роль $\widehat{\Lambda}$ играет линейная иерархия Λ.*

Этот результат в несколько иной эквивалентной форме получен в [5].

Напомним, что класс линейных порядков не является универсально аксиоматизируемым из-за использования равенств в определении свойства связности. Попытка построить на основе теоремы 2.2 оператор для отображения $\mathscr{W}^n$ в $\mathscr{L}$, показывает, что условие отсутствия равенств в формулах P из (3.2) принципиально.

3.5. Свойство представляющих функций транзитивных отношений. Выше указан общий вид операторов $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$ для всех классов $\mathscr{R}$ цепочки (2.2), удовлетворяющих естественному условию $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{R}$. Теперь рассмотрим оставшиеся случаи операторов $\mathscr{R}_1^n \to \mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ — произвольные классы цепочки (2.2), такие, что $\mathscr{R}_2 \supseteq \mathscr{R}_1 \supseteq \mathscr{S}$. Здесь уже нельзя впрямую воспользоваться теоремой 3.1, но общий подход, сводящий задачу описания операторов $\mathscr{R}_1^n \to \mathscr{R}_2$ к исследованию представляющих функций g_ρ, $\rho \in \mathscr{R}_2$, сохраняет свою силу.

Различные случаи операторов $\mathscr{R}_1^n \to \mathscr{R}_2$ сводятся к двум основным: $\mathscr{R}^n \to \mathscr{P}$ и $\mathscr{R}^n \to \mathscr{A}$. Явный вид операторов $\mathscr{R}^n \to \mathscr{P}$ является следствием более общего результата об операторах $\mathscr{R}^n \to \mathscr{T}$, который будет получен на основе свойств представляющих функций g_ρ транзитивных отношений ρ. Как и сами отношения, представляющие функции будем рассматривать с точностью до однотипности, т. е. с точностью до инвертирования и перенумерации переменных u_i.

Лемма 3.2. *Если представляющая функция g_ρ транзитивного отношения ρ отлична от тождественной константы, то она либо*

а) *однотипна конъюнкции $p_1 \ldots p_s$, $s \geqslant 1$, либо переходом к однотипной функции, отождествлениями переменных u_i и подстановками $u_i = 0$ приводится к одному из видов:*

б) $p_1'\bar{p}_1$, в) $p_1'\bar{p}_1 p_2$, г) p_1', д) $p_1 \vee p_1' p_2$, е) $p_1 p_2' \vee g$, $g \leqslant p_1' p_2'$.

Доказательство будем вести индукцией по числу n переменных u_i. Базис индукции при $n = 1$ очевиден.

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Обозначим через K композицию всех конъюнкций из д. н. ф. g_ρ. В силу транзитивности ρ

$$g_\rho = K \vee g, \tag{3.7}$$

где g — дизъюнкция всех конъюнкций из д. н. ф. g_ρ, не поглощаемых K. С точностью до однотипности

$$K = p_1 \ldots p_l p_{l+1}' \ldots p_m' p_{m+1}' \bar{p}_{m+1} \ldots p_s' \bar{p}_s. \tag{3.8}$$

Из свойств композиции следует, что все конъюнкции из g содержат при каждом $i=\overline{1,m}$ один из сомножителей p_i, p_i' и $p_i'\bar{p}_i$, а при $i=\overline{m+1,s}$ — сомножитель $p_i'\bar{p}_i$. Поэтому

$$g \leqslant p_1' \dots p_m' p_{m+1}' \bar{p}_{m+1} \dots p_s' \bar{p}_s. \tag{3.9}$$

Рассмотрим различные соотношения параметров l, m и s, которыми исчерпываются все возможности.

1) $m<s$. Из (3.7), (3.8) и (3.9) следует, что функция g_ρ представима в виде

$$g_\rho = p_{m+1}' \bar{p}_{m+1} \dots p_s' \bar{p}_s g'.$$

Если $g'=p_v \dots p_w$ (с точностью до однотипности), то, полагая $u_{m+1}=\dots$ $\dots=u_s$, $u_v=\dots=u_w$, приходим к функции вида в). Если $g'\equiv 1$, то, отождествив $u_{m+1}=\dots=u_s$, получаем функцию вида б). В остальных случаях подставим $u_{m+1}=\dots=u_s=0$ и воспользуемся для g' предположением индукции.

2) $m=s$, т. е. $K=p_1 \dots p_l p_{l+1}' \dots p_m'$. Здесь возникает ряд подслучаев.

2.1) $l=0$, т. е. $K=p_1' \dots p_m'$. При $u_1=\dots=u_m$ приходим к г).

2.2) $1 \leqslant l<m$. Произведя отождествления $u_1=\dots=u_l$, $u_{l+1}=\dots$ $\dots=u_m$, получаем из K конъюнкцию $p_l p_m'$, а из g — функцию g', которая в силу (3.9) (при $s=m$) удовлетворяет неравенству $g' \leqslant p_l' p_m'$. Здесь имеет место случай е).

2.3) $l=m$, т. е. $K=p_1 \dots p_l$. Из (3.7), (3.8) и (3.9) при $l=m=s$ заключаем, что

$$g_\rho = p_1 \dots p_l \vee p_1' \dots p_l' g'. \tag{3.10}$$

2.3.1) $(\forall i \in \overline{1,l})\; p_i \geqslant p_1' \dots p_l' g'$. Тогда $g_\rho=p_1 \dots p_l$, т. е. имеет место а).

2.3.2) $(\exists i \in \overline{1,l})\; p_i \not\geqslant p_1' \dots p_l' g'$ (пусть $i=1$). Подставив в (3.10) $u_1=0$, приходим к функции $p_2' \dots p_l' g''$, где g'' — результат подстановки $u_1=0$ в g'. Пусть K' означает произвольную конъюнкцию вида $p_a \dots p_b$ (с точностью до однотипности), возможно, пустую.

2.3.2.1) $(\forall K')\; p_2' \dots p_l' g'' \neq K'$. К $p_2' \dots p_l' g''$ применимо предположение индукции.

2.3.2.2) $(\exists K')\; p_2' \dots p_l' g''=K'$. Разложим g' по переменной u_1:

$$g' = p_1 f_1 \vee p_1' f_2 \vee p_1' \bar{p}_1 f_3 = p_1 (f_1 \vee f_2) \vee p_1' \bar{p}_1 (f_2 \vee f_3). \tag{3.11}$$

Подставив сюда $u_1=0$, получаем

$$K' = p_2' \dots p_l' g'' = p_2' \dots p_l' (f_2 \vee f_3).$$

Обозначив $f_1 \vee f_2 = f'$ и воспользовавшись (3.10), (3.11), приходим к равенству

$$g_\rho = p_1 \dots p_l \vee p_1' \dots p_l' (p_1 f' \vee p_1' \bar{p}_1 K').$$

Отметим, что из $p_2' \dots p_l' g''=K'$ следует $K'=p_2 \dots p_l K''$, где $K''=p_v \dots$ $\dots p_w$ (допустима пустая конъюнкция $K''\equiv 1$).

2.3.2.2.1) $l=1$, т. е. $g_\rho=p_1 \vee p_1' K'$. Если $K'\equiv 1$, то $g_\rho=p_1'$ и имеет место в). В случае $K'=p_a \dots p_b$, положив $u_a=\dots=u_b$, приходим к функции $p_1 \vee p_1' p_a$ вида д).

2.3.2.2.2) $l \geqslant 2$. Отождествив $u_2=\dots=u_l$, получаем функцию

$$p_1 p_2 \vee p_1 p_2' f'' \vee p_1' \bar{p}_1 p_2 K'' = p_1 p_2 \vee p_1 p_2' f'' \vee p_1' p_2 K''.$$

Если $K''\equiv 1$, имеем е), а при $K''=p_v\ldots p_w$, отождествив $p_v=\ldots=p_w$, приходим к е). □

3.6. Операторы $\mathscr{R}^n\to\mathscr{P}$. Общий вид операторов, приводящих к транзитивным групповым отношениям, дается следующим утверждением.

Теорема 3.6. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{R}^n\to\mathscr{T}$, где $\mathscr{R}\in\{\mathscr{S},\mathscr{I},\mathscr{P}\}$, тогда и только тогда, когда $F=r_{i_1}^{\alpha_1}\cap r_{i_2}^{\alpha_2}\cap\ldots\cap r_{i_s}^{\alpha_s}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_s\in\{1,-1\}$ (r^α означает r при $\alpha=1$, r^{-1} при $\alpha=-1$). Если оператор F монотонен, то $F=r_{i_1}\cap r_{i_2}\cap\ldots\cap r_{i_s}$.*

Доказательство. Поскольку пересечение транзитивных отношений транзитивно, а отношения $r\in\mathscr{P}$ и обратные им отношения транзитивны, то оператор F указанного в утверждении вида осуществляет нужное отображение.

Для доказательства в обратную сторону достаточно ограничиться случаем $\mathscr{R}=\mathscr{S}$. Из включения $\mathscr{W}\subseteq\mathscr{S}$ и теоремы 3.1 следует, что отношение ρ с представляющей функцией $g_\rho=\varphi$ (где φ соответствует оператору F) транзитивно. Если g_ρ подпадает под случай а) в лемме 3.2, то F имеет нужный вид.

В остальных случаях функция g_ρ приводится к одному из видов б) — е). Применительно к оператору F преобразования однотипности сводятся к замене r_i на r_i^{-1} и к перенумерации отношений. Это не выводит за пределы класса $\mathscr{S}$. Отождествления $u_i=u_j$ означают равенства $r_i=r_j$ используемых отношений, а подстановки $u_i=0$ — применение пустых отношений r_i (которые содержатся в $\mathscr{S}$). Установив, что для каждого из операторов, описываемых функциями б) — е), существуют отношения полупорядка, переводимые ими в нетранзитивные отношения, мы тем самым докажем, что функционалов $\mathscr{S}^n\to\mathscr{T}$, отличных от указанных в формулировке теоремы, нет.

Примеры отношений будем задавать на множестве $\Omega=\{1,2,3\}$. Нетрудно проверить, что в случаях б) и г) достаточно взять $r_1=\{(1,2)\}$, в случае в) — отношения $r_1=\{(1,2)\}$ и $r_2=\{(2,3),(3,1),(2,1)\}$, в случае д) — отношения $r_1=\{(1,2)\}$ и $r_2=\{(3,1)\}$, в случае е) — отношения $r_1=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ и $r_2=\{(3,1)\}$. □

Результат теоремы для случая $\mathscr{R}=\mathscr{P}$ доказан А. В. Владимировым [5].

Теорема 3.7. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{R}^n\to\mathscr{P}$ для $\mathscr{R}\in\{\mathscr{S},\mathscr{I},\mathscr{P}\}$ тогда и только тогда, когда $F=r_{i_1}^{\alpha_1}\cap\ldots\cap r_{i_s}^{\alpha_s}$. Если оператор F монотонен, то $F=r_{i_1}\cap\ldots\cap r_{i_s}$.*

Доказательство. Этот факт вытекает из теоремы 3.6, поскольку операторы указанного вида отображают $\mathscr{P}^n$ в $\mathscr{P}$. □

Часть теоремы 3.7, относящаяся к монотонным отображениям $\mathscr{P}^n\to\mathscr{P}$, принадлежит Д. Брауну [18].

Поскольку оператор $r_{i_1}^{\alpha_1}\cap\ldots\cap r_{i_s}^{\alpha_s}$ является обобщенной неполной л. и. лишь в случае $s=1$, в качестве простого следствия теорем 3.2, 3.7 получаем следующий факт.

Теорема 3.8. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{R}_1^n\to\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2\in\{\mathscr{S},\mathscr{I}\}$, $\mathscr{R}_1\subseteq\mathscr{R}_2$, тогда и только тогда, когда он имеет вид $F=r_i^\alpha$, $\alpha\in\{1,-1\}$, а в монотонном случае — вид $F=r_i$.*

3.7. Некоторые утверждения об отношениях. Для нахождения общего вида функционалов $\mathscr{R}^n\to\mathscr{A}$ понадобится ряд вспомогательных утверждений. Мы не будем различать отношения с соответствующими им ориентированными графами и в рассуждениях об отношениях будем пользоваться терминологией теории графов.

Пусть $C=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),\ldots,(x_{s-1},x_s),(x_s,x_1)\}$, $s\geqslant 3$ — ориентированный цикл. Противоположно ориентированный цикл $\{(x_s,x_{s-1}),\ldots$

..., (x_2, x_1), $(x_1, x_s)\}$ обозначим C^{-1}. Будем говорить, что множество дуг M *порождено циклом* C, если $M \subseteq C \cup C^{-1}$. Множество M *асимметрично*, если в нем нет противоположно ориентированных пар (x_i, x_j) и (x_j, x_i). Вершину x_i, через которую проходит цикл C, назовем *изолированной* в M, если в M нет дуг, одним из концов которых является x_i. Дуги множества $M \cap C$ будем называть ориентированными *вдоль цикла* C, дуги множества $M \cap C^{-1}$ — ориентированными *против цикла* C.

Лемма 3.3. *Пусть множество M, порожденное циклом C, асимметрично и $M \cap C \neq \varnothing$, $M \cap C^{-1} \neq \varnothing$. Тогда существует отношение $W \in \mathscr{W}$ такое, что $W \cap (C \cup C^{-1}) = M$.*

Доказательство. Будем считать для определенности, что дугой множества M, ориентированной против C, является (x_1, x_s), $s = |C|$ — длина C. Последовательно, начиная с x_1, припишем каждой вершине x_i число $\varphi(x_i)$. Для этого $\varphi(x_1)$ возьмем произвольным. Если числа $\varphi(x_1)$, ..., $\varphi(x_{i-1})$, $i \leqslant s$, уже приписаны, назначим $\varphi(x_i) < \varphi(x_{i-1})$ произвольно в случае $(x_{i-1}, x_i) \in M$, $\varphi(x_i) > \varphi(x_{i-1})$ произвольно в случае $(x_i, x_{i-1}) \in M$, $\varphi(x_i) = \varphi(x_{i-1})$ при (x_i, x_{i-1}), $(x_{i-1}, x_i) \notin M$. Если в результате окажется $\varphi(x_s) < \varphi(x_1)$, то отношение W, задаваемое критерием φ в соответствии с п. 2.1, обладает требуемым свойством. Если же $\varphi(x_s) \geqslant \varphi(x_1)$, возьмем дугу множества $M \cap C$ (пусть это будет (x_{u-1}, x_u)) и к $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, ..., $\varphi(x_{u-1})$ прибавим одинаковое столь большое число, чтобы после прибавления оказалось $\varphi(x_s) < \varphi(x_1)$. □

Лемма 3.4. *Пусть множество M, порожденное циклом C, асимметрично и содержит изолированную вершину. Тогда существует отношение $I \in \mathscr{I}$ такое, что $I \cap (C \cup C^{-1}) = M$.*

Доказательство. Будем считать для определенности, что изолированной вершиной в M является x_s. Последовательно, начиная с x_1, припишем каждой вершине x_i числа $\varphi^-(x_i)$ и $\varphi^+(x_i)$, $\varphi^-(x_i) < \varphi^+(x_i)$. Для этого значения $\varphi^-(x_1) < \varphi^+(x_1)$ назначим произвольно. Если $\varphi^-(x_1)$, $\varphi^+(x_1)$, ..., $\varphi^-(x_{i-1})$, $\varphi^+(x_{i-1})$, $i \leqslant s-1$, $s = |C|$, уже определены, полагаем $\varphi^-(x_i) < \varphi^+(x_i) < \varphi^-(x_{i-1})$ произвольно в случае $(x_{i-1}, x_i) \in M$, полагаем $\varphi^+(x_i) > \varphi^-(x_i) > \varphi^+(x_{i-1})$ произвольно в случае $(x_i, x_{i-1}) \in M$, а при (x_{i-1}, x_i), $(x_i, x_{i-1}) \notin M$ полагаем $\varphi^-(x_i) = \varphi^-(x_{i-1})$, $\varphi^+(x_i) = \varphi^+(x_{i-1})$. После того, как найдены величины φ^-, φ^+ для x_1, ..., x_{s-1}, берем

$$\varphi^+(x_s) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s-1} \varphi^+(x_i), \quad \varphi^-(x_s) = \min_{1 \leqslant i \leqslant s-1} \varphi^-(x_i).$$

Легко видеть, что отношение I, задаваемое функциями φ^-, φ^+ в соответствии с п. 2.1, обладает нужными свойствами. □

Лемма 3.5. *Если $M \subseteq C$, то отношение $S \in \mathscr{S}$, удовлетворяющее условию $S \cap (C \cup C^{-1}) = M$, существует тогда и только тогда, когда $|M| < |C|/2$, где $|M|$ — число дуг в множестве M.*

Доказательство. Будем считать, что $|M| \geqslant 1$, иначе утверждение тривиально. Предположим, что отношение S с указанным свойством существует и оно задается функцией φ и числом δ в соответствии с п. 2.1 (можно полагать $\delta = 1$). Поскольку $M \subseteq C$, то $(x_{i+1}, x_i) \notin S$, где $i = \overline{1, s}$, $x_{s+1} = x_1$, а потому $(\forall i = \overline{1, s})\ (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) \geqslant -1)$. Кроме того, если $(x_i, x_{i+1}) \in S$, то $\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1}) > 1$. С учетом этого получаем

$$(\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) + \ldots + (\varphi(x_{s-1}) - \varphi(x_s)) + (\varphi(x_s) - \varphi(x_1)) >$$
$$> |M| - (|C| - |M|) = 2|M| - |C|.$$

Поскольку левая сумма равна 0, приходим к требуемому соотношению.

Обратно, пусть $|M| < |C|/2$. Будем считать для определенности, что одной из дуг множества M является (x_s, x_1). Обозначим $|C| - 2|M| = t$

и последовательно, начиная с x_1, припишем вершинам x_i цикла C значения $\varphi(x_i)$. Величину $\varphi(x_1)$ назначим произвольно. Если $\varphi(x_1), \ldots$ $\ldots, \varphi(x_{i-1})$, $i<s$, уже определены, полагаем $\varphi(x_i)=\varphi(x_{i-1})+1$ в случае $(x_{i-1}, x_i)\notin M$ и $\varphi(x_i)=\varphi(x_{i-1})-1-t/M$ в случае $(x_{i-1}, x_i)\in M$. Условие $(x_i, x_{i+1})\in S \Leftrightarrow (x_i, x_{i+1})\in M$ для $i=\overline{1, s-1}$ выполнено по построению. Осталось убедиться, что $\varphi(x_s)-\varphi(x_1)>1$. Имеем

$$\varphi(x_s)-\varphi(x_1)=-((\varphi(x_1)-\varphi(x_2))+\ldots+(\varphi(x_{s-1})-\varphi(x_s)))=$$
$$=-((|M|-1)(1+t/|M|)-(|C|-|M|))=1+t/|M|. \ \square$$

3.8. Операторы $\mathscr{R}^n\to\mathscr{A}$, $\mathscr{R}\supseteq\mathscr{I}$. Общий вид операторов $\mathscr{R}^n\to\mathscr{A}$ для всех классов $\mathscr{R}$ цепочки (2.2), начиная с $\mathscr{I}$, дается следующим утверждением.

Теорема 3.9. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{R}^n\to\mathscr{A}$ для $\mathscr{R}\in\{\mathscr{I}, \mathscr{P}, \mathscr{A}\}$ тогда и только тогда, когда $F=r_i^\alpha\cap G$, где $\alpha\in\{1, -1\}$, G — произвольный оператор. Если оператор F монотонен, то $F=r_i\cap G$, а G — произвольный монотонный оператор.*

Доказательство. В одну сторону это утверждение очевидно, поскольку отношения классов $\mathscr{I}$, $\mathscr{P}$, $\mathscr{A}$ ацикличны и меньшие отношения также ацикличны. Для доказательства в другую сторону достаточно рассмотреть случай $\mathscr{R}=\mathscr{I}$.

Пусть оператор F отображает $\mathscr{I}^n$ в $\mathscr{A}$ и ему соответствует функция $\varphi(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$. Если предположить, что F имеет вид, отличный от указанного в утверждении, то $\varphi\neq p_i\psi$ и $\varphi\neq\bar{p}_i'\psi$. Запишем φ в виде д. н. ф. $\varphi=K_1\vee\ldots\vee K_s$, положим $\Omega=\{a_1, a_2, \ldots, a_{2s-1}, a_{2s}\}$ и построим на Ω отношения $I_1, \ldots, I_n\in\mathscr{I}$. С этой целью введем обозначения $v_l=$ $=(a_{2l-1}, a_{2l})$, $v_l'=(a_{2l}, a_{2l+1})$, $w_l=(a_{2l}, a_{2l-1})$, $w_l'=(a_{2l+1}, a_{2l})$, где $l=\overline{1, s}$, $a_{2s+1}=a_1$, и образуем множества

$$M_i=\{v_l, v_l' \mid p_i\in K_l\}\cup\{w_l, w_l' \mid p_i'\in K_l\}, \quad i=\overline{1, n}.$$

Отметим, что множество $C=\{v_1, v_1', \ldots, v_s, v_s'\}$ представляет собой ориентированный цикл, а $C^{-1}=\{w_1, w_1', \ldots, w_s, w_s'\}$.

Множества M_i асимметричны и, поскольку $\varphi\neq p_i\psi$, $\varphi\neq\bar{p}_i'\psi$, каждое из них отлично от C и от C^{-1}. Это означает, что при всех i либо $M_i\cap C\neq$ $\neq\varnothing$ и $M_i\cap C^{-1}\neq\varnothing$, либо M_i строго содержится в одном из множеств C и C^{-1} (пусть в C). В первом случае в соответствии с леммой 3.3 дополним M_i до отношения $I_i\in\mathscr{W}\subset\mathscr{I}$. Во втором случае в множестве M_i отсутствует некоторая пара v_l, v_l' последовательных дуг, вершина a_{2l} оказывается изолированной и по лемме 3.4 множество M_i может быть дополнено до отношения $I_i\in\mathscr{I}$.

Отношению I_i сопоставим набор значений переменных $u_l^{(i)}$, $l=\overline{1, s}$, положив

$$u_l^{(i)}=\begin{cases} 1, & v_l\in I_i,\\ -1, & w_l\in I_i,\\ 0, & v_l, w_l\notin I_i.\end{cases}$$

По построению I_i при каждом $l=\overline{1, s}$ конъюнкция $K_l\in P_{3,2}$ обращается в 1 на наборе $\tilde{u}_l=(u_l^{(1)}, \ldots, u_l^{(n)})$, и, следовательно, $v_l\in r=F(I_1, \ldots$ $\ldots, I_n, I_1^{-1}, \ldots, I_n^{-1})$. Дуги v_l, v_l' входят в одни и те же отношения I_i, и то же самое относится к дугам w_l, w_l'. Поэтому v_l' также содержатся в r, а это означает, что $r\supseteq C$. $\square$

3.9. Операторы $\mathscr{S}^n\to\mathscr{A}$. Этот случай приводит к типам операторов, ранее не встречавшихся в литературе. Введем ряд понятий.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *пороговой*, если существуют такие числа $w_1, \ldots, w_n$ (веса) и t (порог), что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow w_1x_1 + \ldots + w_nx_n \geqslant t.$$

Набор $(w_1, \ldots, w_n, t)$ называется *реализацией* функции f. Дальше функцию f будем считать монотонной. При этом все веса можно предполагать неотрицательными. Обозначим через $Th_{1/2}$ класс всех монотонных пороговых функций, для которых существует реализация $(w_1, \ldots, w_n, t)$ с $t = (w_1 + \ldots + w_n)/2$. Путем нормировки она приводится к виду $(w_1, \ldots, w_n, 1/2)$, где $w_1 + \ldots + w_n = 1$.

Каждой монотонной булевой функции

$$f = \bigvee_{\{i_1, \ldots, i_s\}} x_{i_1} \ldots x_{i_s}$$

сопоставим функцию

$$\theta_f = \bigvee_{\{i_1, \ldots, i_s\}} \mathop{\&}_{i \in \{i_1, \ldots, i_s\}} p_i \mathop{\&}_{j \in \overline{1,n} \setminus \{i_1, \ldots, i_s\}} p_j', \tag{3.12}$$

а через T_f обозначим соответствующий ей агрегирующий оператор. Класс операторов T_f, отвечающих функциям $f \in Th_{1/2}$, обозначим через $\mathscr{T}h^0_{1/2}$, а более общий класс всех однотипных с ними операторов — через $\mathscr{T}h_{1/2}$.

Теорема 3.10. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{S}^n \to \mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда он представим в виде $F = T \cap G$, где $T \in \mathscr{T}h_{1/2}$, а G — произвольный оператор. Если F монотонен, то $T \in \mathscr{T}h^0_{1/2}$, а G — произвольный монотонный оператор.*

Пусть $\varphi(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$ — функция, соответствующая оператору F, а $\varphi = K_1 \vee \ldots \vee K_l$ — ее представление в виде некоторой д. н. ф. Положим $I(\varphi) = I(K_1 \circ \ldots \circ K_t)$. Из теоремы 3.1 и включения $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{S}$ следует, что отношение с представляющей функцией φ ациклично. Поэтому $K_1 \circ \ldots \circ K_t$ не является конъюнкцией типа $\widetilde{0}$ и, следовательно, $I(\varphi) \neq \varnothing$. Пусть $|I(\varphi)| = d$.

Путем перехода от φ к однотипной функции (за счет инвертирования некоторых u_i) можно добиться того, чтобы элементарные сомножители конъюнкций $K_1, \ldots, K_t$, относящиеся к переменным u_i, $i \in I(\varphi)$, имели не более 3 видов: p_i, p_i', $p_i'\overline{p}_i$. Чтобы не вводить переобозначений, будем считать, что этим свойством обладает исходная функция φ.

Упорядочим переменные функции φ так, чтобы первые d мест занимали переменные с индексами из $I(\varphi)$. Обозначим через $q_i^{(l)}$ элементарный сомножитель конъюнкции K_l, относящийся к переменной u_i. Образуем $(d \times t)$ — матрицу $B_0 = \|b_{li}\|$ (с d строками и t столбцами), положив при $i = \overline{1, d}$, $l = \overline{1, t}$

$$b_{li} = \begin{cases} 1, & q_i^{(l)} = p_i, \\ 0, & q_i^{(l)} \in \{p_i', p_i'\overline{p}_i\}. \end{cases}$$

На основе B_0 введем функцию $\varphi_0(u_1, \ldots, u_d)$:

$$\varphi_0 = K_1^0 \vee \ldots \vee K_t^0, \quad K_l^0 = \mathop{\&}_{i:\, b_{li}=1} p_i \mathop{\&}_{j:\, b_{lj}=0} p_j', \quad l = \overline{1, t}.$$

Здесь и дальше одинаковые конъюнкции K_l^0, отвечающие разным K_l, удобно считать разными. Через F_0 обозначим оператор, соответствующий функции φ_0.

Доказательство теоремы 3.10 разобьем на ряд лемм.

Лемма 3.6. *Оператор F_0 осуществляет отображение $\mathcal{S}^d \to \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда не существует таких положительных чисел $h_1, \ldots, h_t$, $h_1 + \ldots + h_t = 1$, что*

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant t} h_l b_{li} < 1/2, \quad i = \overline{1, d}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Предположим, что оператор F_0 в применении к $S_1, \ldots, S_d \in \mathcal{S}$ дает отношение r, обладающее циклом $C = \{v_1, \ldots, v_s\}$, где $v_j = (a_j, a_{j+1})$, $j = \overline{1, s}$, $a_{s+1} = a_1$. Через u_j обозначим дугу (a_{j+1}, a_j), обратную v_j. Каждой дуге v_j сопоставим набор $\tilde{\beta}_j = (\beta_j^{(1)}, \ldots, \beta_j^{(d)})$, где

$$\beta_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & v_j \in s_i, \\ -1, & u_j \in s_i, \\ 0, & v_j, u_j \notin s_i. \end{cases}$$

Из $v_j \in r$ следует, как нетрудно видеть, что $\varphi_0(\tilde{\beta}_j) = 1$. Обозначим через $K^{(j)}$ одну из конъюнкций $\overline{K_l^0}$, обращающихся на наборе $\tilde{\beta}_j$ в 1. Поскольку в K_l^0 при каждом $i = \overline{1, d}$ входит сомножитель p_i либо p_i', набор $\tilde{\beta}_j$ состоит лишь из 0 и 1, а это означает, что отношения S_i не имеют дуг, направленных против цикла C.

Если обозначить через $\tilde{b}_l$ набор, соответствующий l-му столбцу матрицы B_0, то в силу монотонности φ_0 выполнено $\tilde{b}_l \leqslant \tilde{\beta}_j$, где $K^{(j)} = K_l^0$. Пусть среди конъюнкций $K^{(j)}$, $j = \overline{1, s}$, конъюнкция K_l^0 встречается $m_l \geqslant 0$ раз, $m_1 + \ldots + m_t = s$. Из $\tilde{b}_l \leqslant \tilde{\beta}_j$ и из леммы 3.5 следует, что при каждом $i = \overline{1, d}$

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant t} m_l b_{li} \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} \beta_j^{(i)} < s/2 = 1/2 \sum_{1 \leqslant l \leqslant t} m_l.$$

Разделив обе части на $s = m_1 + \ldots + m_l$ и положив $h_l = m_l/s$, придем к (3.13). Среди чисел h_l здесь могут встречаться нулевые, но поскольку неравенства (3.13) строгие, можно, не нарушив их, сделать все числа h_l положительными.

Обратно, пусть выполнены неравенства (3.13). Можно считать числа h_l рациональными и, домножив на общий знаменатель, привести (3.13) к виду

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant t} m_l b_{li} < 1/2 \sum_{1 \leqslant l \leqslant t} m_l,$$

где все m_l целые. Возьмем произвольный цикл C длины $s = m_1 + \ldots + m_t$, сопоставим m_l $(l = \overline{1, t})$ дугам этого цикла конъюнкцию K_l^0 и построим в соответствии с леммой 3.5 отношения $S_1, \ldots, S_d \in \mathcal{S}$ такие, что дуга v_j цикла C принадлежит S_i тогда и только тогда, когда конъюнкция K_l^0, сопоставленная дуге v_j, имеет сомножитель p_i. Нетрудно проверить, что оператор F_0 в применении к $S_1, \ldots, S_d$ дает отношение, содержащее цикл C. □

Лемма 3.7. *Оператор F отображает $\mathcal{S}^n$ в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда F_0 отображает $\mathcal{S}^d$ в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Предположим, что существуют $S_1, \ldots, S_d \in \mathcal{S}$, в применении к которым оператор F_0 дает отношение, содержащее цикл. Из доказательства леммы 3.6 видно, что тогда найдутся некоторые другие d отношений из $\mathcal{S}$ (чтобы не вводить переобозначений, будем считать их теми же самыми), результат агрегирования которых содержит цикл $C = \{v_1, \ldots, v_s\}$ такой, что каждой его дуге v_j соответствует конъюнкция $K^{(j)}$, совпадающая с некоторой K_l^0, и каждая K_l^0 соответствует некоторой дуге. При этом если образовать $(d \times s)$-матрицу $B = \|b_{ji}\|$, j-м столбцом которой при $j=\overline{1,\ s}$ является столбец $\bar{b}_l$ матрицы B_0, где $K_l^0=K^{(j)}$, то $S_i\cap C^{-1}=\varnothing$ и $S_i\cap C=\{v_j|b_{ji}=1\}$, $i=1,\ d$.

Построим теперь $((n-d)\times s)$-матрицу $B'=\|b'_{ji}\|$, соответствующую $n-d$ индексам из $\bar{I}(\varphi)$. Пусть дуге $v_j\in C$ сопоставлена конъюнкция $K^0_{l_j}$, а $q_i^{(l)}$ обозначает элементарный сомножитель, относящийся в конъюнкции K_l к переменной u_i. Тогда при $i=\overline{1,\ n-d}$, $j=\overline{1,\ s}$ полагаем

$$b'_{ji}=\begin{cases}1, & q_{d+i}^{(l_j)}\in\{p_{d+i},\ p'_{d+i}\},\\ -1, & q_{d+i}^{(l_j)}\in\{\bar{p}_{d+i},\ \bar{p}'_{d+i}\},\\ 0, & q_{d+i}^{(l_j)}=p'_{d+i}\bar{p}_{d+i},\\ *, & q_{d+i}^{(l_j)}=1.\end{cases}$$

По определению операции композиции каждая строка матрицы B' содержит либо элемент $*$, либо противоположные элементы 1 и -1. Это означает, что путем подстановки вместо элементов $*$ значений 1 либо -1 можно добиться того, чтобы в каждой строке встречались элементы 1 и -1. Полученную в результате матрицу обозначим B''.

Пусть u_j означает дугу, противоположную v_j. С каждой строкой i матрицы B'' свяжем множество дуг M_i, включив в него дуги v_j, соответствующие в строке i элементам 1, и дуги u_j, соответствующие элементам -1. В соответствии с леммой 3.3 дополним множество M_i до отношения $W_i\in\mathscr{W}$. В результате получим отношения $W_1,\ \ldots,\ W_{n-d}$.

Путем записывания матрицы B'' под B образуем $(n\times s)$-матрицу B'''. Легко видеть, что при $j=\overline{1,\ s}$ набор, расположенный в столбце j матрицы B''', обращает конъюнкцию K_{l_j} в 1. Отсюда вытекает, что в результате агрегирования набора отношений $S_1,\ \ldots,\ S_d,\ W_1,\ \ldots,\ W_{n-d}$ применением оператора F получаем отношение, содержащее цикл C. Таким образом, если F_0 не отображает $\mathscr{S}^d$ в $\mathscr{A}$, то и F не отображает $\mathscr{S}^n$ в $\mathscr{A}$.

Предположим теперь, что F_0 осуществляет отображение $\mathscr{S}^d\to\mathscr{A}$. Оператор F_0, рассматриваемый на множестве $\mathscr{S}^n$ (существенно зависящий от первых d отношений), дает отношения из $\mathscr{A}$. Очевидно, что $\varphi_0\geqslant\varphi$, а потому F представим в виде $F_0\cap G$ при некотором G. Отсюда следует, что F переводит набор отношений из $\mathscr{S}^n$ в отношение из $\mathscr{A}$. □

Лемма 3.8. *Если оператор F_0 осуществляет отображение $\mathscr{S}^d\to\mathscr{A}$, то он представим в виде $F_0=T\cap G$, $T\in\mathscr{T}h_{1/2}$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.6 не существует таких чисел $h_l>0$, $l=\overline{1,\ t}$, что выполнены неравенства (3.13), которые с учетом $h_1+\ldots+h_t=1$ можно переписать в виде

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant t}h_l(b_{li}-1/2)<0,\quad i=\overline{1,\ d}.$$

В процессе доказательства леммы 3.6 установлено, что не существует таких чисел h_l, удовлетворяющих и более слабому условию $h_l\geqslant 0$.

Отсюда на основании теоремы Д. Гейла (следствие 2.10 в [16]) заключаем, что найдутся положительные $w_1,\ \ldots,\ w_d$ (можно считать $w_1+\ldots+w_d=1$), для которых

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant d}w_i(b_{li}-1/2)\geqslant 0,\quad l=\overline{1,\ t}.$$

Эти неравенства могут быть переписаны в виде

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant d}w_ib_{li}\geqslant 1/2,\quad l=\overline{1,\ t},\tag{3.14}$$

и означают, что столбец $\tilde{b}_l$, $l=\overline{1,\,t}$, матрицы B_0 обращает в 1 пороговую функцию $f\in\mathscr{T}h_{1/2}$, имеющую реализацию $(w_1,\,\ldots,\,w_d,\,1/2)$. Отсюда следует соотношение $\varphi_0\leqslant f$, которое применительно к операторам может быть переписано в виде $F_0=T_f\cap G$ при некотором G. □

Лемма 3.9. *Оператор F, осуществляющий отображение $\mathscr{S}^n\to\mathscr{A}$, представим в виде $F=T\cap G$, $T\in\mathscr{T}h_{1/2}$.*

Доказательство. Если F отображает $\mathscr{S}^n$ в $\mathscr{A}$, то согласно лемме 3.7 оператор F_0 отображает $\mathscr{S}^d$ в $\mathscr{A}$ и в силу леммы 3.8 он представим в виде $F_0=T\cap G$. С другой стороны, поскольку $\varphi_0\geqslant\varphi$, то $F=$ $=F_0\cap G_1$ при некотором G_1, а потому $F=T\cap G_2$, где $G_2=G\cap G_1$. □

Лемма 3.10. *Всякий оператор F, представимый в виде $F=T\cap G$, $T\in\mathscr{T}h_{1/2}$, отображает $\mathscr{S}^n$ в $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что оператор $T\in\mathscr{T}h^0_{1/2}$ переводит наборы отношений из $\mathscr{S}^n$ в ацикличные отношения. Пусть $\theta=K_1\vee\ldots\vee K_t$ — функция из $M_{3,2}$, соответствующая оператору T. Будем считать, что θ зависит существенно от d переменных и в представлении θ в виде д. н. ф. присутствуют только эти переменные. Обозначим через B_0 $(d\times t)$-матрицу, столбцы $\tilde{b}_l$ которой соответствуют конъюнкциям $K_l=q_1^{(l)}\,\ldots\,q_d^{(l)}$, $l=\overline{1,\,t}$:

$$b_{li}=\begin{cases}1, & q_i^{(l)}=p_i,\\ 0, & q_i^{(l)}=p_i',\end{cases}$$

где $i=\overline{1,\,d}$. Тогда при некоторых $w_i>0$, $i=\overline{1,\,d}$, выполнены неравенства (3.14). Обращая рассуждения из леммы 3.8 и используя теорему Д. Гейла в другую сторону, заключаем, что система неравенств (3.13) не имеет неотрицательного решения, а потому согласно лемме 3.6 оператор T отображает $\mathscr{S}^d$ в $\mathscr{A}$. □

Из лемм 3.9, 3.10 следует утверждение теоремы 3.10.

3.10. Выяснение агрегирующих возможностей операторов. Теоремы 3.2—3.10 описывают способ порождения всех операторов заданного типа $\mathscr{R}_1^n\to\mathscr{R}_2$для классов цепочки (2.2). Однако они не дают способа проверки по произвольному оператору, представим ли он в виде, указанном в теоремах. Каждому оператору F, удовлетворяющему условиям 1)—3) из п. 3.1, однозначно отвечает функция $\varphi(p_1,\,\ldots,\,p_n,\,p_1',\,\ldots,\,p_n')$. Будем считать, что φ задана в форме д. н. ф. или к. н. ф. Соответствующую форму оператора F будем обозначать через $\cup\cap$ или $\cap\cup$.

Сформулируем результаты о сложности проверки по оператору F (заданному в форме $\cup\cap$ или $\cap\cup$), осуществляет ли он требуемое отображение $\mathscr{R}_1^n\to\mathscr{R}_2$. Ответ на этот вопрос нам неизвестен лишь в случае монотонных операторов F: $\mathscr{S}^n\to\mathscr{A}$ в форме $\cap\cup$.

Теорема 3.11. *Для пар классов $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ $(\mathscr{R}_1\subseteq\mathscr{R}_2)$ цепочки* (2.2) *задача выяснения по оператору F, заданному в одной из форм $\cup\cap$ и $\cap\cup$, осуществляет ли он отображение $\mathscr{R}_1^n\to\mathscr{R}_2$,*

а) *решается эффективно во всех случаях, когда F монотонен, исключая, быть может, указанный выше случай, где ответ неизвестен;*

б) *является NP-полной во всех случаях, когда F немонотонен, исключая случай $\mathscr{R}_2=\mathscr{A}$ и F в форме $\cup\cap$, в котором она решается эффективно.*

Доказательство. Результаты для $\mathscr{R}_1=\mathscr{W}$ вытекают из теорем 2.1, 2.3—2.5 в силу теоремы 3.1. Остановимся на отображениях $\mathscr{R}_1^n\to\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_1\neq\mathscr{W}$.

Нетрудно доказать, что задачи распознавания операторов $\mathscr{R}_1^n\to\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_2\in\{\mathscr{S},\mathscr{I},\mathscr{P}\}$, $\mathscr{R}_1\subseteq\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_2\neq\mathscr{W}$, в немонотонном случае являются NP-полными (это относится и к представлениям $\cup\cap$ и к $\cap\cup$). В монотонном случае указанные задачи тривиальны, так как операторы имеют вид r_i либо $r_{i_1} \cap \ldots \cap r_{i_s}$.

Задачи распознавания операторов типа $\mathscr{R}^n \to \mathscr{A}$, $\mathscr{R} \in \{\mathscr{S}, \mathscr{I}, \mathscr{P}, \mathscr{A}\}$, решаются эффективно даже в немонотонном случае, если они заданы в форме $\cup\cap$. Для $\mathscr{R} \supseteq \mathscr{I}$ этот факт очевиден, ибо функция φ, соответствующая оператору F, имеет вид $p_i\psi$ (либо $\bar{p}'_i\psi$) и сомножитель p_i (либо $\bar{p}'_i$) входит во все конъюнкции д. н. ф. φ. В случае $\mathscr{R} = \mathscr{S}$ задача распознавания решается следующим образом. По функции $\varphi = K_1 \vee \ldots \vee K_t$ эффективно находятся множество $I(\varphi) = I(K_1 \circ \ldots \circ K_t)$ и функция φ_0 на $I(\varphi)$. Инвертированием переменных функция φ_0 превращается в монотонную, и в силу лемм 3.6 и 3.7 вопрос о том, имеет ли оператор F тип $\mathscr{S}^n \to \mathscr{A}$, сводится к выяснению существования у системы (3.13) неотрицательного решения. Это может быть сделано с полиномиальной сложностью [15].

Если используется задание операторов в форме $\cap\cup$, то, как нетрудно доказать, в немонотонном случае задача распознавания операторов $\mathscr{R}^n \to \mathscr{A}$, $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{A}$, является NP-полной. В монотонном случае эта задача для $\mathscr{R} \supseteq \mathscr{I}$ очевидным образом решается эффективно (относительно $\mathscr{R} = \mathscr{S}$ нам ничего не известно). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Выбор вариантов.— М.: Наука, 1990.
2. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы) // Автоматика и телемеханика.— 1983.— № 9.— С. 127—151.
3. Алескеров Ф. Т., Владимиров А. В. Квазилокальные операторы коллективного выбора // Автоматика и телемеханика.— 1987.— № 3.— С. 127—140.
4. Березовский Б. А., Борзенко В. И., Кемпнер Л. Н. Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации.— М.: Наука, 1981.
5. Владимиров А. В. Функции алгебры логики в теории коллективного выбора // Управление сложными техническими системами: сборник трудов.— М.: Ин-т проблем управления, 1987.
6. Владимиров А. В. Исследование процедур построения коллективных решений.— Автореф. дис. ... канд. техн. наук/Ин-т проблем управления.— М., 1987.
7. Данилов В. И. Модели группового выбора // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1983.— № 1.— С. 143—164.
8. Левченков В. С. Теория группового выбора: алгебраический подход/Препринт ВНИИСИ.— М., 1985.
9. Левченков В. С. Теория группового выбора: общий вид функций агрегирования/Препринт ВНИИСИ.— М., 1985.
10. Макаров И. М., Виноградская Т. М., Рубчинский А. М., Соколов В. Б. Теория выбора и принятия решений.— М.: Наука, 1982.
11. Мальцев А. И. Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.
12. Моркялюнас А. Групповой выбор при независимости и слабой симметрии альтернатив // Математические методы в социальных науках. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР, 1985.— Вып. 18.— С. 57—60.
13. Оре О. Теория графов.— М.: Наука, 1980.
14. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений.— М.: Наука, 1978.
15. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм линейного программирования // ДАН СССР.— 1979.— Т. 244, № 5.— С. 1093—1096.
16. Черников С. Н. Линейные неравенства.— М.: Наука, 1968.
17. Arrow K. J. Social choice and individual values.— 2nd edition.— New Heaven, London: Yale University Press, 1963.
18. Brown D. J. Aggregation of preferences // Quart. J. Econom.— 1975.— V. 89.— P. 45—56.
19. Fishburn P. C. The theory of social choice.— Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1973.
20. Fishburn P. C. Axioms for lexicographic preferences // Rev. of Econ. Stud.— 1975.— V. XVII(3), N 131.— P. 415—419.
21. Kelly J. S. Arrow impossibility theorems.— N. Y.: Acad. Press, 1978.
22. Murakami Y. Logic and social choice.— London: Routledge & Kegan Paul Ltd, N. Y.: Dover Publication Inc, 1968.
23. Sen A. K. Collective choice and social welfare.— San Francisco: Holden-Day, 1970.

Поступило в редакцию 14 X 1990