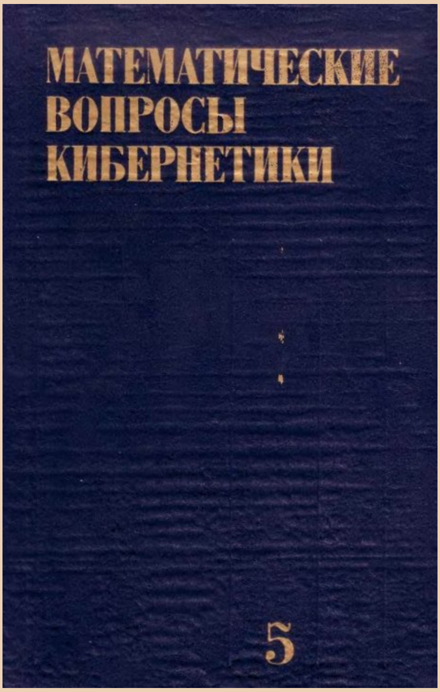

В. А. Захаров

О свободных схемах в формальных моделях программ

О СВОБОДНЫХ СХЕМАХ В ФОРМАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ПРОГРАММ

В. А. ЗАХАРОВ

(МОСКВА)

Одной из центральных задач теоретического программирования является проблема эквивалентности программ. Формулировка ее такова. Формализованная программа задается двумя составляющими компонентами: схемой — графовой или языковой конструкцией, представляющей синтаксическое описание программы,— и семантикой, имеющей, как правило, интерпретационный характер и определяющей функциональные свойства программы [8]. Класс программ, в свою очередь, задается рекурсивным множеством схем и семантикой, единой для всех программ данного класса. Рассматривается класс формализованных программ; каждой программе сопоставляется реализуемая ею функция. Программы, реализующие одинаковые функции, считаются эквивалентными. Задача состоит в разработке процедуры, способной для любой пары программ из заданного класса установить, являются ли эти программы эквивалентными или нет. Исследование проблемы эквивалентности программ создает теоретическую основу и предпосылку для решения других задач программирования, имеющих более ярко выраженный прикладной характер,— автоматизированный синтез, верификация, оптимизация и трансляция программ.

Широко известная в теории алгоритмов теорема Райса [24] гласит, что в (рекурсивном) классе программ, вычисляющем все частично-рекурсивные функции, алгоритмически неразрешимо всякое функциональное свойство (в том числе и функциональная эквивалентность). Примером подобного класса может служить множество стандартных программ с элементарными операторами $x := 0$ $x := x + 1$ и элементарным логическим условием $x = y$ [21]. Проблема эквивалентности, таким образом, не имеет алгоритмического решения для классов программ с весьма простым синтаксисом и семантикой.

Один из методов преодоления возникшей трудности предусматривает поиск подходящих синтаксических ограничений, налагаемых на исследуемые программы, с тем чтобы существенно сократить множество реализуемых функций. В рамках этого подхода был выделен ряд классов программ [21, 25] с рекурсивным отношением функциональной эквивалентности. В целом, однако, подобные попытки продвинуться в решении проблемы функциональной эквивалентности принесли пока мало успеха. Используемые синтаксические ограничения (например, предельная глубина вложенности циклов в схеме) оказались слишком жесткими: сформированные на их основе классы программ либо реализуют очень простые функции, выражаемые формулами арифметики Пресбургера, либо попадают в сферу влияния теоремы Райса и ее аналогов [23].

Другой метод анализа проблемы функциональной эквивалентности программ предусматривает погружение исходного формализма программ в более обширную среду формализмов схем программ. Синтаксическая структура программ и схем одинакова, но отношение эквивалентности для схем может быть определено разнообразными способами в отличие от функциональной эквивалентности программ при заданной интерпретации. Класс схем программ вместе с выбранным отношением эквивалентности называют моделью программ [11]. Модель программ M считается пригодной для изучения заданной функциональной эквивалентности программ, если эквивалентность схем в M влечет эквивалентность соответствующих программ. Выбор перспективной для анализа модели программ M имеет решающее значение. С одной стороны, отношение эквивалентности схем в модели M должно быть рекурсивно, а с другой стороны, желательно, чтобы эквивалентность схем в M была как можно более точным приближением функциональной эквивалентности программ, т. е. M должна отражать особенности семантики программ. Кроме того, при выборе M необходимо предусмотреть возможность построения полной системы эквивалентных преобразований схем программ. Примерами моделей, удовлетворяющих указанным требованиям, могут служить схемы Янова [3, 20], стандартные схемы программ с логико-термальной эквивалентностью [6, 19] и др. В серии работ [11—17] разработана одна из методик выделения перспективных классов моделей программ. Суть ее состоит в следующем. На множестве схем программ задается набор отношений $R_1 \supseteq \ldots \supseteq R_k$ — свойств пар схем, последнее из которых — отношение изоморфизма. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, рассматривается задача построения алгоритма эквивалентного преобразования пары схем, обладающих свойством R_{i-1}, в пару схем, удовлетворяющих отношению R_i. Перспективными надлежит считать те модели, в которых разрешима каждая из указанных задач. Удачный выбор контрольных свойств позволяет уточнить путем последовательных приближений класс перспективных моделей программ и одновременно построить алгоритм, разрешающий проблему эквивалентности схем программ в данных моделях, и полную систему правил эквивалентных преобразований схем. Подобная процедура приведения пары эквивалентных схем к общему виду через цепочку контрольных свойств получила название алгоритма канонизации [16]. На основе описанной методики в [15—17] выделены классы коммутативных s-моделей и моделей с монотонными операторами, исследована проблема эквивалентности и построены алгоритмы канонизации. Выбор контрольных свойств определялся при этом особенностями семантики программ и типом схем.

Одно из свойств схем программ — свойство свободной схемы — имеет, однако, столь общий характер, что оно всегда возглавляет цепочку контрольных свойств в алгоритме канонизации. Схема считается свободной в модели M, если любой синтаксически допустимый путь вычисления в этой схеме реализуем в модели M. Это означает, что свободная в M схема π безызбыточна (в π отсутствуют «лишние», нереализуемые пути вычислений) и значительная часть ее семантических особенностей отражается в синтаксической структуре схемы. Это свойство неоднократно использовалось для выделения классов схем программ с разрешимой проблемой эквивалентности [7, 18]. Известна гипотеза М. Патерсона [10] о разрешимости проблемы эквивалентности для свободных стандартных схем программ, не получившая до сих пор ни опровержения, ни прямого подтверждения. Основной темой настоящего исследования является именно это свойство схем программ и возможности его применения в алгоритме канонизации для одного класса моделей программ — формальных моделей [11, 16].

Статья состоит из 8 разделов. В § 1 приведены основные понятия теории формальных моделей программ и указаны условия, при которых формальная модель становится пригодной для анализа функциональной эквивалентности программ. В § 2 установлены некоторые общие свойства формальных моделей программ. Введение операции замыкания множества функций разметки позволяет ограничиться изучением гладких моделей и переформулировать задачу эквивалентности схем программ на теоретико-языковом уровне. В своей основе эти результаты восходят к работам [12, 13]. В том же разделе введен канонический нормальный вид схемы. Главная особенность его состоит в том, что значения всех элементарных логических условий (логических переменных) на каждом этапе выполнения схемы однозначно определяются маршрутом схемы, реализуемым в процессе этого выполнения. В § 3 определено понятие свободной схемы. Формальная модель M удовлетворяет условию свободной схемы (УСС), если любая схема π имеет в модели M эквивалентную свободную схему π'. Исследованы основные свойства свободных схем программ и УСС-моделей. В § 4 введено понятие вполне-свободной схемы — свободной схемы, представленной в нормальной форме. Вполне-свободные схемы занимают в УСС-моделях то же место, что и совершенные дизъюнктивные нормальные формы среди различных булевых формул, и могут служить канонической формой представления свободной схемы программ. Формальная модель, в которой каждая схема π имеет эквивалентную вполне-свободную схему π', удовлетворяет условию вполне-свободной схемы (УВСС) и называется УВСС-моделью. Естественно возникают следующие вопросы. Верно ли, что любая УСС-модель является одновременно УВСС-моделью? Возможно ли каждую свободную схему представить в канонической форме? В данном разделе показано, что хотя класс УВСС-моделей достаточно обширен, существуют УСС-модели, не удовлетворяющие условию вполне-свободной схемы. В § 5 рассмотрены некоторые простейшие типы синтаксического расширения формальных моделей за счет добавления к имеющемуся базису новых элементарных операторов и логических условий. Показано, что формальная модель M', образованная из УСС-модели M путем введения новых операторов, сохраняет УСС в том и только том случае, когда M удовлетворяет более сильному УВСС. В § 6 исследована взаимосвязь УСС и УВСС при расширении формальной модели за счет новых логических условий, значения которых в процессе выполнения схемы могут изменяться произвольным образом. В § 7 введено понятие регулярной (автоматной) модели [4, 5], являющееся обобщением схем программ со сдвигами Янова [20]. Установлено одно характеристическое свойство регулярных моделей, свидетельствующее о том, что этот класс моделей является наибольшим классом УСС-моделей, устойчивым по отношению к упомянутым типам синтаксического расширения. В § 8 подведены итоги изучения формальных УСС-моделей.

§ 1. Основные понятия

Символьным базисом называется пара конечных множеств

$$S=\{s^1, \ldots, s^n\}, \quad n \geqslant 0, \quad P=\{p_1, \ldots, p_m\}, \quad m \geqslant 0.$$

Элементы S называются *операторными символами* (о. с.), а элементы множества P — *логическими переменными* (л. п.).

Схемой над базисом (S, P) называется нагруженный ориентированный граф π специального вида. В графе выделены две вершины — *вход* и *выход* схемы. Вход имеет одну исходящую дугу и не имеет ведущих в него дуг; выход не имеет ни одной исходящей дуги. Все остальные вершины π распадаются на два класса. Вершины одного класса имеют одну исходящую дугу и называются *преобразователями* (на рисунках они изображаются прямоугольниками); вершины другого класса имеют 2 исходящие дуги, помеченные символами 0 и 1, и называются *распознавате-*

лями (на рисунках они изображаются овалами, причем дуга с пометкой 1 выделена жирной точкой у основания). Вершины, в которые ведут эти дуги, называются соответственно 0- и 1-преемниками распознавателя. Каждому преобразователю сопоставляется о. с. из S, а каждому распознавателю — булева формула над множеством л. п. из P.

Интерпретацией (*семантикой*) *базиса* (S, P) будем называть алгебраическую систему $\sigma = \langle \Sigma, \Sigma_0, I \rangle$ сигнатуры (S, P), где Σ — непустое множество состояний памяти, Σ_0 — множество начальных состояний, а I — отображение, сопоставляющее каждому о. с. $s \in S$ всюду определенную функцию $Is\colon \Sigma \to \Sigma$, а каждой л. п. $p \in P$ — одноместное отношение $Ip\colon \Sigma \to \{0, 1\}$.

Программой над базисом (S, P) будем называть пару (π, σ), где π — схема, а σ — интерпретация базиса (S, P).

Процедура выполнения программы $\langle \pi, \sigma \rangle$ с начальным состоянием памяти $\xi_0 \in \Sigma_0$ представляет собой обход схемы π, начинающийся во входе схемы и сопровождающийся изменением текущего состояния памяти ξ_t. При прохождении через преобразователь с о. с. s память переходит из состояния ξ_t в состояние $\xi_{t+1} = Is(\xi_t)$. При прохождении через распознаватель с булевой формулой $f(p_1, \ldots, p_m)$ состояние памяти ξ_t не изменяется, и обход продолжается по дуге с пометкой δ, исходящей из данного распознавателя, где δ — значение формулы f на наборе $Ip_1(\xi_t), \ldots, Ip_m(\xi_t)$. Если обход схемы достигает ее выхода, то выполнение программы завершается и состояние памяти ξ_T, при котором произошло это событие, считается результатом выполнения программы $\langle \pi, \sigma \rangle$ с начальным состоянием ξ_0; в противном случае результат выполнения неопределен и $\langle \pi, \sigma \rangle$ считается неприменимой к состоянию памяти ξ_0.

Программы $\langle \pi_1, \sigma \rangle$ и $\langle \pi_2, \sigma \rangle$ называются (*функционально*) *эквивалентными* ($\pi_1 \simeq_\sigma \pi_2$), если для любого начального состояния ξ_0 либо обе программы $\langle \pi_1, \sigma \rangle$, $\langle \pi_2, \sigma \rangle$ неприменимы к ξ_0, либо обе применимы, и результаты их выполнения с начальным состоянием ξ_0 совпадают.

Под *формализмом программ* подразумевается множество программ над общим базисом (S, P) с общей семантикой σ.

Опишем теперь устройство формальных моделей программ. Для заданного базиса (S, P) обозначим через S^* (S^ω) множество всех конечных цепочек (сверхцепочек — цепочек бесконечной длины), образованных о. с. из S, а через B_P — множество двоичных наборов значений л. п. из P. Пустое слово e также содержится в S^*.

Функцией разметки [13] над базисом (S, P) назовем любую всюду определенную функцию $\mu : S^* \to B_P$. Множество всех функций разметки над базисом (S, P) обозначим $\mathscr{L}(S, P)$.

Процедура выполнения схемы π на функции разметки μ, как и в случае программы, представляет собой обход, сопровождаемый построением цепочки о. с. Обход начинается во входе схемы с пустой цепочкой e. Прохождение через преобразователь с о. с. s сопровождается приписыванием s к текущей цепочке h_t. При прохождении через распознаватель с булевой формулой $f(p_1, \ldots, p_m)$ вычисляется значение $\mu(h_t) = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ функции разметки μ на текущей цепочке $h_t \in S^*$, и дальнейшее движение продолжается по исходящей из данного распознавателя дуге с пометкой $f(\delta_1, \ldots, \delta_m)$. Процедура выполнения завершается, если в процессе обхода будет достигнут выход схемы; полученная при этом цепочка о. с. h_T считается результатом выполнения схемы π на функции разметки μ. Иначе результат выполнения не определен. Таким образом, каждой схеме π над базисом (S, P) можно сопоставить частичную функцию $F_\pi : \mathscr{L}(S, P) \to S^*$. Значение $F_\pi(\mu)$ определено и равно h в том и только том случае, когда схема π на функции разметки μ заканчивает выполнение с результатом h.

Этапом выполнения схемы π будем называть всякую часть указанного обхода, которая начинается прохождением через преобразователь v или вход схемы и оканчивается вхождением в следующий по порядку выполнения преобразователь u или выход схемы. Если значения л. п. $p_1, \ldots, p_m$ на этапе выполнения схемы образуют набор $\Delta \in B_P$, то вершина u называется при этом *Δ-преемником вершины* v.

Пусть на множестве S^* задано отношение эквивалентности τ и выбрано множество функций разметки $L \subseteq \mathscr{L}(S, P)$. Схемы π_1 и π_2 называются *(τ, L)-эквивалентными* ($\pi_1 \simeq_{\tau,L} \pi_2$), если для любой функции разметки $\mu \in L$ либо оба значения $F_{\pi_1}(\mu)$ и $F_{\pi_2}(\mu)$ не определены, либо $F_{\pi_1}(\mu) = h_1$, $F_{\pi_2}(\mu) = h_2$ и $h_1 \tau h_2$ (h_1 и h_2 — τ-эквивалентные цепочки о. с. из S^*).

Множество схем над базисом (S, P) с соотношением (τ, L)-эквивалентности схем образуют *формальную модель*, которую будем обозначать $K(\tau, L)$. Тождественное отношение эквивалентности на множестве S^* будет обозначено ε, а формальные модели вида $K(\varepsilon, L)$ будут обозначаться $K(L)$.

Пригодность формальной модели $K(\tau, L)$ для анализа функциональной эквивалентности программ с семантикой $\sigma = \langle \Sigma, \Sigma_0, I \rangle$ устанавливается на основании следующей теоремы.

Теорема 1. *При выполнении условий*

$$(1)\quad \forall \xi \in \Sigma_0 \exists \mu \in L\ \forall h \in S^* \mu(h) = (Ip_1(Ih(\xi)), \ldots, Ip_m(Ih(\xi))),$$

$$(2)\quad \forall h_1, h_2 \in S^*\ \forall \xi \in \Sigma_0 h_1 \tau h_2 \Rightarrow Ih_1(\xi) = Ih_2(\xi),$$

где Ih для цепочки $h = s_1 s_2 \ldots s_k$ обозначает композицию $Is_k \circ \ldots \circ Is_2 \circ Is_1$, (τ, L)-эквивалентность схем π_1, π_2 влечет функциональную эквивалентность программ (π_1, σ) и (π_2, σ).

Справедливость теоремы следует из определения процедур выполнения программ в семантике σ и схем программ в формальной модели $K(\tau, L)$.

Формальные модели, удовлетворяющие условиям (1) и (2), в дальнейшем будем называть *пригодными* (для семантики σ).

§ 2. Гладкие формальные модели

На множестве формальных моделей над базисом (S, P) можно ввести отношение квазипорядка. Модель $K(\tau_1, L_1)$ будем считать *более сильной*, чем $K(\tau_2, L_2)$ $(K(\tau_2, L_2) \preccurlyeq K(\tau_1, L_1))$, если для любых схем π_1, π_2 $\pi_1 \simeq_{\tau_2,L_2} \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \simeq_{\tau_1,L_1} \pi_2$. Модели $K(\tau_1, L_1)$ и $K(\tau_2, L_2)$ считаются *равносильными* $(K(\tau_1, L_1) \approx K(\tau_2, L_2))$, если $K(\tau_1, L_1) \preccurlyeq K(\tau_2, L_2)$ и $K(\tau_2, L_2) \preccurlyeq K(\tau_1, L_1)$.

Утверждение 1. *Если $L_1 \subseteq L_2$ и для любых $h', h'' \in S^*$, выполняется $h' \tau_2 h'' \Rightarrow h' \tau_1 h''$, то $K(\tau_2, L_2) \preccurlyeq K(\tau_1, L_1)$.*

Доказательство. Пусть $\pi_1 \simeq_{\tau_2,L_2} \pi_2$. Рассмотрим произвольную функцию разметки $\mu \in L_1$. Поскольку $L_1 \subseteq L_2$, то при $F_{\pi_1}(\mu) = h'$ значение $F_{\pi_2}(\mu) = h''$ также определено и $h' \tau_2 h''$. Значит, $F_{\pi_1}(\mu) \tau_1 F_{\pi_2}(\mu)$. Поменяв местами π_1, π_2 в этом рассуждении, приходим к выводу $\pi_1 \simeq_{\tau_1,L_1} \pi_2$. □

Для произвольной семантики программ $\sigma = \langle \Sigma, \Sigma_0, I \rangle$ определим формальную модель $K(\tau(\sigma), L(\sigma))$ следующим образом:

1) для любых h_1, h_2 из S^* $h_1 \tau(\sigma) h_2$ тогда и только тогда, когда для всякого состояния памяти $\xi \in \Sigma_0$ выполняется $Ih_1(\xi) = Ih_2(\xi)$;

2) $L(\sigma) = \{\mu_\xi : \xi \in \Sigma_0\}$, где μ_ξ — функция разметки, значения которой определяются соотношением $\mu_\xi(h) = (Ip_1(Ih(\xi)), \ldots, Ip_m(Ih(\xi)))$.

Утверждение 2. *Формальные модели $K(\tau(\sigma), L(\sigma))$ и $K(\mathscr{L}(S, P))$ пригодны для семантики σ.*

Справедливость утверждения 2 следует из теоремы 1.

Утверждение 3. *Для любой модели* $K(\tau, L)$, *пригодной для семантики* σ, *выполняется* $K(\mathscr{L}(S, P)) \preccurlyeq K(\tau, L) \preccurlyeq K(\tau(\sigma), L(\sigma))$.

Справедливость утверждения 3 следует из теоремы 1 и утверждения 1.

$K(\tau(\sigma), L(\sigma))$ — максимальная пригодная для σ формальная модель: при ее задании функциональные свойства семантики σ учитываются наиболее полно, в связи с чем анализ ее становится весьма затруднительным. При задании $K(\mathscr{L}(S, P))$, напротив, свойства семантики программы вообще не принимаются в расчет, и $K(\mathscr{L}(S, P))$ пригодна для любой семантики σ. Фактически, $K(\mathscr{L}(S, P))$ — это формализм схем Янова с универсальным распределением сдвигов; для данной модели доказана разрешимость проблемы эквивалентности и построена полная система эквивалентных преобразований [3, 20]. В связи с этим представляется целесообразным выделить классы формальных моделей с разрешимой проблемой эквивалентности, расположенные между $K(\mathscr{L}(S, P))$ и $K(\tau(\sigma), L(\sigma))$, а затем для изучения функциональной эквивалентности программ в семантике σ подбирать пригодную формальную модель из этих выделенных классов. В настоящей работе основное внимание сосредоточено на моделях вида $K(L)$ с тождественным отношением в S^*.

Отметим вначале некоторые общие свойства моделей $K(L)$, $L \subseteq \mathscr{L}(S, P)$.

Простым замыканием L назовем множество $[L] \subseteq \mathscr{L}(S, P)$

$$[L] = \{\mu\colon \forall h = s_1 \ldots s_k \in S^* \exists \mu' \in L \forall i,\ 0 \leqslant i \leqslant k,\ \mu(s_1 \ldots s_i) = \mu'(s_1 \ldots s_k)\},$$

состоящее из всевозможных функций разметки μ, поведение которых на каждой цепочке $h \in S^*$ совпадает с поведением некоторой функции разметки $\mu' \in L$ (выбор μ' определяется цепочкой h). Множество функций разметки L называется *гладким* [13], если $L = [L]$. При анализе семантики программ $\sigma = \langle \Sigma, \Sigma, I \rangle$ целесообразно ввести также замыкание L по операции сдвига [13]. *Замыкание* L *по операции сдвига* на операторную цепочку образуется из всевозможных функций разметки $\mu' \in \mathscr{L}(S, P)$, для каждой из которых найдется цепочка $h' \in S^*$ и функция $\mu \in L$ такие, что при любой цепочке $h \in S^*$ выполняется $\mu'(h) = \mu(h'h)$. Гладкая формальная модель $K(L)$ с замкнутым по операции сдвига на операторную цепочку множеством функций разметки L называется *полугрупповой моделью* [13] (при более общем определении формальной модели $K(\tau, L)$ помимо того требуется, чтобы отношение τ было полугрупповой эквивалентностью в S^* ($h_1\tau h_2 \,\&\, h_3\tau h_4 \Rightarrow h_1h_3\tau h_2h_4$), согласованной с множеством $L(h_1\tau h_2 \Rightarrow \mu(h_1) = \mu(h_2))$).

Утверждение 4. $[[L]] = [L]$.

Утверждение 5. $K(L) \approx K([L])$.

Доказательство. Из $L \subseteq [L]$ следует $K([L]) \preccurlyeq K(L)$. Рассмотрим (ε, L)-эквивалентные схемы π_1, π_2 и произвольную функцию разметки $\mu \in [L]$. Если $F_{\pi_1}(\mu) = s_1 \ldots s_k = h$, то по определению $[L]$ имеется $\mu' \in L$ такая, что для любого i, $0 \leqslant i \leqslant k$, $\mu'(s_1 \ldots s_i) = \mu(s_1 \ldots s_i)$. Выполнение π_1 в этом случае одинаково на функциях μ, μ', т. е. $F_{\pi_1}(\mu') = h$. Поскольку $\pi_1 \simeq_{\varepsilon,L} \pi_2$, то $F_{\pi_2}(\mu') = h$. Схема π_2 одинаково выполняется на μ и μ', что влечет $F_{\pi_2}(\mu) = h$. Поменяв местами в приведенном рассуждении схемы π_1, π_2, приходим к выводу $\pi_1 \simeq_{\varepsilon,L} \pi_2$. Таким образом, $K(L) \preccurlyeq K([L])$. □

Тождественная эквивалентность ε на S^* играет здесь существенную роль; для произвольной модели соотношений $K(\tau, L) \approx K(\tau, [L])$ может, вообще говоря, не выполняться, о чем свидетельствует

Пример 1. Рассмотрим базис (S, P), $S = \{s^1, s^2\}$, $P = \{p_0\}$ и пару схем π_1, π_2, изображенных на рис. 1. Цепочки h', h'' из S^* будем считать

τ-эквивалентными, если h', h'' содержат одинаковое количество о. с. каждого вида (τ-отношение коммутативной эквивалентности [15]). Множество L состоит из двух функций разметки μ_1, μ_2 таких, что $\mu_1(s^1) = \mu_2(s^2) = 1$, $\mu_1(s^2) = \mu_2(s^1) = 0$. Нетрудно убедиться в том, что $F_{\pi_1}(\mu_1) = s^1 s^2$, $F_{\pi_2}(\mu_1) = s^2 s^1$, а значения $F_{\pi_1}(\mu_2)$, $F_{\pi_2}(\mu_2)$ неопределенные. Поскольку $(s^1 s^2)\tau(s^2 s^1)$, схемы π_1, π_2 эквивалентны в модели $K(\tau, L)$. В то же время простое замыкание $[L]$ содержит функцию разметки μ_3, для которой $\mu_3(s^1) = \mu_1(s^1) = 1$ и $\mu_3(s^2) = \mu_2(s^2) = 1$. Ввиду того, что $F_{\pi_1}(\mu_3) = s^1 s^2$, а значение $F_{\pi_2}(\mu_3)$ неопределенное, схемы π_1, π_2 не являются эквивалентными в модели $K(\tau, [L])$. В данном случае $K(\tau, [L]) \preccurlyeq K(\tau, L)$, но $K(\tau, [L]) \not\approx K(\tau, L)$.

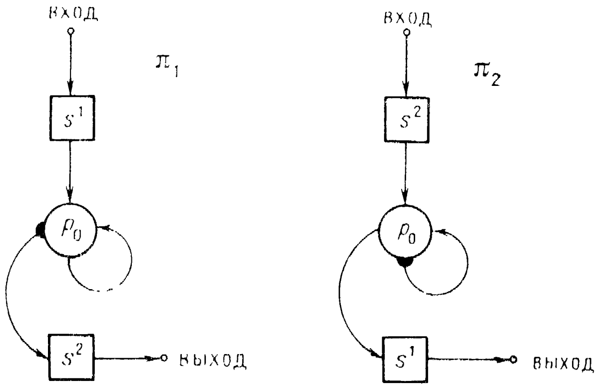

Рис. 1

Утверждение 6. *Если* $K(L_1) \preccurlyeq K(L_2)$, *то* $[L_2] \subseteq [L_1]$.

Доказательство. Предположим, что $\mu_0 \in [L_2]$, но $\mu_0 \notin [L_1]$. Последнее означает, что для некоторой цепочки о. с. $h = s_1 \ldots s_k$ при любой функции разметки $\mu' \in L_1 \mu'(s_1 \ldots s_i) \neq \mu_0(s_1 \ldots s_i)$ хотя бы для одного i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Пусть $\mu_0'(s_1 \ldots s_j) = (\delta_1^j, \ldots, \delta_m^j)$, $0 \leqslant j \leqslant k$. Рассмотрим

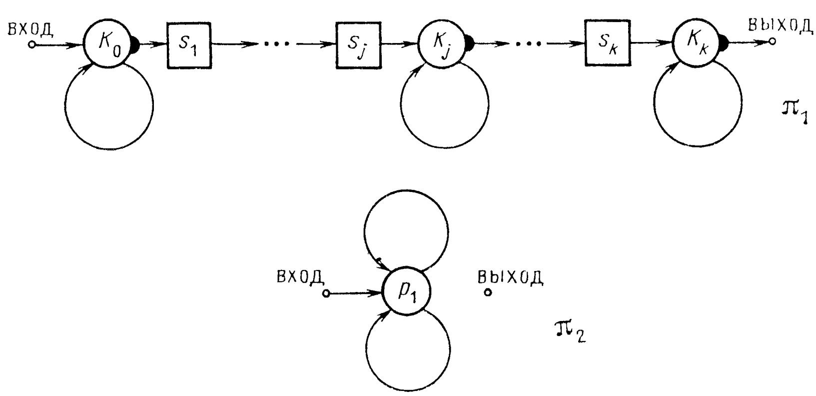

Рис. 2

схемы π_1, π_2, изображенные на рис. 2. Здесь каждая формула K_j представляет собой элементарную конъюнкцию вида $p_1^{\delta_1^j} \& \ldots \& p_m^{\delta_m^j}$. Очевидно, значение $F_{\pi_2}(\mu)$ не определено для любой $\mu \in \mathscr{L}(S, P)$. Согласно выбору цепочки h значение $F_{\pi_1}(\mu')$ также не определено для любой $\mu' \in L_1$. В то же время $F_{\pi_1}(\mu_0) = h$. Таким образом, $\pi_1 \simeq_{\varepsilon, L_1} \pi_2$, но $\pi_1 \not\simeq_{\varepsilon, L_2} \pi_2$, что противоречит $K(L_1) \preccurlyeq K(L_2)$. Противоречие снимается при $[L_2] \subseteq [L_1]$. □

Замечание. Утверждение 6 справедливо также при всяком другом отношении эквивалентности τ на множестве S^*.

Следствие 1. *Если* $K(L_1) \approx K(L_2)$, *то* $[L_1] = [L_2]$.

Утверждения 4—6 свидетельствуют о том, что каждый класс эквивалентности моделей $K(L)$ по отношению $\approx$ содержит единственную гладкую модель. Поэтому целесообразно в дальнейшем ограничиться рассмотрением одних лишь гладких моделей. Модели такого типа удобны еще и тем, что гладкие множества функций разметки можно задавать теоретико-языковыми средствами в виде множества слов в некотором фиксированном алфавите.

Введем в употребление новый о. с. $s_0 \notin S$, которым будем обозначать вход схемы. *Конфигурацией* [15, 20] *в базисе* (S, P) назовем всякую конечную цепочку пар $\mathrm{Conf} = (s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1)\ldots(s_k, \Delta_k)$, у которой $s_i \in S$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\Delta_j \in B_P$, $0 \leqslant j \leqslant k$. *Графиком функции разметки* $\mu \in \mathscr{L}(S, P)$ будем называть множество Γ_μ всевозможных конфигураций $(s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1)\ldots(s_k, \Delta_k)$, удовлетворяющих условию $\mu(s_1\ldots s_i) = \Delta_i$ для всех i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Из определения $[L]$ следует $\mu' \in [L] \Leftrightarrow \Gamma_{\mu'} \subseteq \subseteq \bigcup\limits_{\mu\in L} \Gamma_\mu$, т. е. замыкание множества функций разметки L однозначно задается совокупностью конфигураций $\Gamma_L = \bigcup\limits_{\mu\in L} \Gamma_\mu$. Для множеств L_1, L_2 обозначим через $L_1 \cup L_2$ и $L_1 \cap L_2$ множества функций разметки L', L'' соответственно такие, что $\Gamma_{L'} = \Gamma_{L_1} \bigcup \Gamma_{L_2}$ и $\Gamma_{L''} = \Gamma_{L_1} \bigcap \Gamma_{L_2}$.

Следствие 2. *Множество формальных гладких моделей над базисом* (S, P) *с отношением* $\preccurlyeq$ *образуют частично-упорядоченную решетку.*

Доказательство. Из утверждений 4—6 следует, что $\preccurlyeq$ на множестве гладких моделей является отношением частичного порядка. Нетрудно убедиться в том, что $\sup(K(L_1), K(L_2)) = K(L_1 \cap L_2)$, $\inf(K(L_1), K(L_2)) = K(L_1 \cup L_2)$, $K(\varnothing)$ — наибольший элемент (все схемы программ в $K(\varnothing)$ эквивалентны друг другу), $K(\mathscr{L}(S, P))$ — наименьший элемент решетки. □

Следствие 3. *Множество формальных гладких моделей* $K(L)$, *пригодных для семантики* σ, *образуют решетку по отношению частичного порядка* $\preccurlyeq$, *наибольшим элементом которой является модель* $K(L(\sigma))$.

В дальнейшем ограничимся исследованием только гладких моделей.

Подобно тому, как это было осуществлено для множеств функций разметки L, сопоставим каждой схеме π над базисом (S, P) множество Γ_π конфигураций $(s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1)\ldots(s_k, \Delta_k)$ таких, что для некоторой функции разметки $\mu \in \mathscr{L}(S, P)$ выполняются $F_\pi(\mu) = s_1\ldots s_k$ и $\mu(s_1\ldots \ldots s_i) = \Delta_i$ при любом i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Слова из Γ_π однозначно определяются множеством маршрутов, ведущих в схеме π из входа в выход. Для любой схемы π множество слов Γ_π регулярное. Но помимо регулярности Γ_π обладает еще одним свойством, которое будем называть S-однозначностью. Множество конфигураций Γ над базисом (S, P) является *S-однозначным*, если для всякой пары конфигураций из Γ вида $w(s_i, \Delta_i)w'$ и $w(s_j, \Delta_j)w''$ выполняются два соотношения:

1) $s_i = s_j$;

2) при $\Delta_i = \Delta_j$ равенство $w' = e$ влечет $w'' = e$, где e — пустое слово.

Утверждение 7. Γ *является регулярным S-однозначным множеством конфигураций тогда и только тогда, когда* $\Gamma = \Gamma_\pi$ *для некоторой схемы* π.

Доказательство. Достаточное условие следует из определения Γ_π. Обоснуем необходимое условие. Регулярность Γ позволяет построить конечный автомат, распознающий Γ. Рассмотрим диаграмму Мура D минимального частичного автомата, распознающего Γ. Условие 1) S-однозначности и минимальность D приводят к тому, что из каждой вершины-состояния v допустимы переходы только по элементам (парам) вида (s, Δ) с одним и тем же для каждого v о. с. s. Условие 2) S-однозначности Γ означает, что D имеет единственную заключительную вершину-состояние, из которой не выходит ни одна дуга-переход. Поэтому диаграмму D можно преобразовать в схему π следующим образом: начальную вершину D следует считать входом π, заключительную вершину — выходом π, а каждую внутреннюю вершину v необходимо заменить фрагментом схемы по правилу, указанному на рис. 3, где каждая из формул K_i есть элементарная конъюнкция вида $p_1^{\delta_1} \& \ldots \& p_m^{\delta_m}$, соответствующая набору $\Delta_i = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ значений л. п. Из построения π видно что $\Gamma = \Gamma_\pi$. □

Будем говорить, что схема π представлена в нормальном виде, если каждый ее логический фрагмент имеет вид, изображенный на рис. 3б.

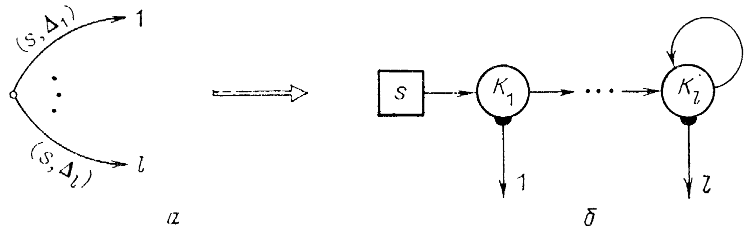

Рис. 3

Из утверждения 7 следует, что в любой модели $K(L)$ всякая схема π имеет эквивалентную ей нормальную схему. Главная особенность нормальной схемы состоит в том, что любой маршрут, ведущий из входа схемы в ее выход, реализуется при выполнении схемы на некоторой функции разметки $\mu \in \mathscr{L}(S, P)$. При этом значения всех л. п. на каждом этапе выполнения однозначно определяются выбранным маршрутом.

В дальнейшем будет широко использоваться представление схем π в виде соответствующего множества конфигураций Γ_π. В частности, определение эквивалентности схем π_1, π_2 в модели $K(L)$ допускает следующую переформулировку: $\pi_1 \simeq_{\varepsilon,L} \pi_2 \Leftrightarrow \Gamma_L \cap \Gamma_{\pi_1} = \Gamma_L \cap \Gamma_{\pi_2}$ [2].

§ 3. Свободные схемы программ

Схема π называется *свободной в модели* $K(L)$, если любой маршрут, ведущий в схеме из входа в выход, реализуется при выполнении π на некоторой функции разметки $\mu \in L$. Модель $K(L)$ удовлетворяет *условию свободной схемы* (УСС) и называется УСС-моделью, если любая схема π имеет эквивалентную ей в модели $K(L)$ свободную схему π. Если при этом существует алгоритм построения свободной схемы π, то $K(L)$ удовлетворяет УСС эффективно. Рассмотрим некоторые свойства свободных схем и УСС-моделей.

Непосредственно из определения следует

Утверждение 8. *Если схема π свободна в модели $K(L)$, то множество цепочек о. с. $F_\pi(L) = \{h : h = F_\pi(\mu),\ \mu \in L\}$ регулярное.*

Следствие. *Для любой схемы π в УСС-модели $K(L)$ множество цепочек $F_\pi(L)$ регулярное.*

Схема π считается *пустой в модели* $K(L)$, если при любой функции разметки $\mu \in L$ значение $F_\pi(\mu)$ не определено. Очевидно, что схема π пуста в модели $K(L)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L = \varnothing$. В моделях $K(L)$, удовлетворяющих УСС эффективно, проблема пустоты схем разрешима. Для заданной схемы π достаточно построить эквивалентную свободную схему π' и убедиться в том, что вход и выход π' не связываются ни одним маршрутом.

Теорема 2. *Проблема эквивалентности схем разрешима в модели $K(L)$ тогда и только тогда, когда в $K(L)$ разрешима проблема пустоты.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна. Докажем, что проблема эквивалентности сводится к проблеме пустоты. Известно, что $\pi_1 \simeq_{\varepsilon,L} \pi_2$ в том и только том случае, когда $\Gamma_{\pi_1} \cap \Gamma_L = \Gamma_{\pi_2} \cap \Gamma_L$. Последнее равенство равносильно $\Gamma_L \cap (\Gamma_{\pi_1} - \Gamma_{\pi_2}) = \Gamma_L \cap$

$\cap\left(\Gamma_{\pi_2}-\Gamma_{\pi_1}\right)=\varnothing$. Легко видеть, что $\Gamma_{\pi_1}-\Gamma_{\pi_2}$ и $\Gamma_{\pi_2}-\Gamma_{\pi_1}$ являются регулярными S-однозначными множествами конфигураций, которым можно поставить в соответствие схемы π_3, π_4. Таким образом, $\pi_1 \simeq_{\varepsilon,L}\pi_2$, если π_3, π_4 пусты в модели $K(L)$. □

Следствие. *В моделях $K(L)$, удовлетворяющих* УСС *эффективно, проблема эквивалентности схем разрешима.*

Необходимо отметить, что класс моделей с разрешимой проблемой эквивалентности не исчерпывается УСС-моделями. Проблема пустоты, а значит, и проблема эквивалентности разрешима, например, в моделях $K(L_{cs})$, где $\Gamma_{L_{cs}}$ — контекстно-свободный язык конфигураций, хотя УСС при этом может не выполняться. Подтверждением тому служит

Пример 2. Рассмотрим множество конфигураций M в базисе $(\{s\},\{p\})$:

$$M=\{(s^0,\ 0)(s,\ 0)^i(s,\ 1)(s,\ 1)^i(s,\ 0)^j : i\geqslant 0, j\geqslant 0\}.$$

Модель $K(L)$ определяется множеством $\Gamma_L=\mathrm{INIT}(M)$, состоящим из всевозможных начальных подцепочек конфигураций множества M. Поскольку M и $\mathrm{INIT}(M)$ — контекстно-свободные множества, то для любой схемы π таковым же будет и множество конфигураций $\Gamma_L\cap\Gamma_\pi$. Таким образом, в модели $K(L)$ разрешима проблема эквивалентности схем. Однако схема π_0, изображенная на рис. 4, не имеет эквивалентной свободной в $K(L)$ схемы.

π_0

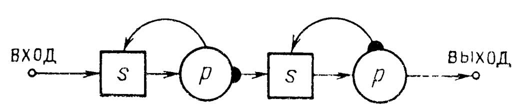

Рис. 4

Действительно, выберем произвольную схему π с N вершинами, эквивалентную π_0. Функция разметки $\mu_N\in L$, $\mu((s)^i)=1$ при $N\leqslant i<2N$, $\mu((s)^i)=0$ при $0\leqslant i<N$ или $2N<i$ задает в схеме π маршрут выполнения, начинающейся во входе схемы, последовательно проходящий через преобразователи $v_1,\ \ldots,\ v_N,\ v_{N+1},\ \ldots,\ v_{2N},\ v_{2N+1}$ и оканчивающийся в выходе π. Поскольку значение μ изменяется лишь дважды на протяжении функционирования, существуют $t>0$ и $r>0$ такие, что $v_{N-r}=v_N$ и $v_{2N+1-t}=v_{2N+1}$. Если бы для всех j, $0\leqslant j\leqslant r$, имело место $v_{N-r+j}=v_{N+j}$, то обход цикла $v_{N-r},\ \ldots,\ v_N$ осуществлялся бы независимо от значений логической переменной, и схема π на функции разметки μ зациклилась, в то время как $F_{\pi_0}(\mu)=(s)^{2N}$. Значит имеется l, $0<l\leqslant r$ такое, что $v_{N-r+j}=v_{N+j}$, $0\leqslant j<l$ и $v_{N-r+l}\neq v_{N+l}$, т. е. в схеме π из преобразователя $v_{N-r+l-1}=v_{N+l-1}$ при $p=0$ осуществляется переход в преобразователь v_{N-r+l}, а при $p=1$ — в преобразователь $v_{N+l}\neq v_{N-r+l}$. Совпадение v_{2N+1} и v_{2N+1-t} означает, что в схеме π из преобразователя $v_{2N+1}=v_{2N+1-t}$ при $p=1$ осуществляется переход в преобразователь v_{2N+2-t}, а при $p=0$ — в выход схемы. В результате можно заметить, что маршрут $v_1,\ldots,v_{N-r}$, $(v_{N-r+1},\ldots,v_N)^3$, $v_{N+1},\ldots,v_{2N}$, v_{N2+1}, ведущий в схеме π из входа в выход, реализуется лишь на таких функциях разметки μ, у которых $\mu((s^{N+r+l-1}))=0$, $\mu((s^{N+2r+l-1}))=1$, $\mu((s^{2N+2r+1}))=0$. Из определения L видно, что подобные функции разметки $\mu\notin L$. Следовательно, схема π не является свободной в модели $K(L)$.

Здесь следует отметить, что для любой схемы π в рассмотренной модели $K(L)$ множество $F_\pi(L)=\{F_\pi(\mu):\mu\in L\}$ регулярное. Таким образом, регулярность $F_\pi(L)$ является необходимым, но не достаточным свойством, характеризующим класс УСС-моделей.

Привлекательность свободных схем программ при изучении проблемы эквивалентности объясняется еще и тем, что свободные схемы обладают синтаксически выраженным свойством безызбыточности. Элемент (вершина или дуга) схемы π называется *несущественным* в модели $K(L)$, если ни один маршрут в π, связанный с результативным выполнением π на функциях разметки $\mu\in L$, не проходит через этот элемент. Несущественный элемент не оказывает влияния на функционирование схемы в рамках рассматриваемой формальной модели, поэтому он допускает достаточно произвольное изменение или удаление. В свободной схеме несущественным является всякий элемент, не лежащий ни на одном маршруте из входа схемы в ее выход. Если УСС-модель $K(L)$ является σ-пригодной, то свободные схемы можно применять для минимизации объема программ путем преобразования несущественных фрагментов.

Анализ УСС-моделей порождает ряд естественных вопросов. Каковы должны быть свойства множества функций разметки L для того, чтобы формальная модель $K(L)$ удовлетворяла УСС? В § 2 было показано, что гладкие модели $K(L)$ образуют решетку по отношению $\lessdot$. Обладают ли подобным свойством гладкие УСС-модели? Ранее было отмечено, что каждую схему π можно представить в нормальной форме. Верно ли, что в УСС-моделях для каждой схемы π существует эквивалентная свободная схема π', представленная в нормальной форме? Исследованию этих вопросов посвящен следующий параграф статьи

§ 4. Вполне-свободные схемы программ

Свободная в модели $K(L)$ схема π, представленная в нормальной форме, называется *вполне-свободной.* Гладкая формальная модель $K(L)$ удовлетворяет *условию вполне-свободной схемы* и называется УВСС-*моделью,* если каждая схема π имеет эквивалентную вполне-свободную в $K(L)$ схему π'. Вполне-свободные схемы, сочетающие в себе свойства свободных и нормальных схем программ, предлагают весьма привлекательную форму представления схем программ с точки зрения алгоритма канонизации. Каждый маршрут из входа схемы в ее выход реализуем на некоторой функции разметки $\mu \in L$, и при этом значения всех л. п. на каждом этапе выполнения однозначно определяется выбранным маршрутом. Влияние логической компоненты L модели $K(L)$ на функционирование вполне-свободной схемы π полностью и однозначно отражается в синтаксической структуре схемы. Если рассматривать гладкие модели более общего вида $K(\tau, L)$ с $\tau \neq \varepsilon$, то после построения для схемы π эквивалентной вполне-свободной в модели $K(L)$ схемы π' все дальнейшее внимание можно сосредоточить на отношении эквивалентности τ цепочек о. с. и анализировать поведение схемы π' в модели $K(\tau, \mathscr{L}(S, P))$, заботясь лишь о том, чтобы в процессе дальнейших преобразований схема оставалась вполне-свободной в модели $K(L)$.

Отметим ряд полезных свойств УВСС-моделей. В силу определения нормальной формы схемы справедливо

Утверждение 9. *Если π — вполне-свободная в модели $K(L)$ схема, то $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L = \Gamma_\pi$.*

Теорема 3. *Схема π имеет эквивалентную вполне-свободную в модели $K(L)$ схему тогда и только тогда, когда множество конфигураций $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L$ регулярное.*

Доказательство. Необходимое условие следует из утверждения 9. Для обоснования достаточного условия рассмотрим множество конфигураций $\Gamma = \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$. Поскольку $\Gamma \subseteq \Gamma_\pi$, то Γ — регулярное S-однозначное множество. Согласно утверждению 7 существует представленная в нормальной форме схема π' такая, что $\Gamma = \Gamma_{\pi'}$. Равенство $\Gamma = \Gamma_L \cap \Gamma_{\pi'}$ влечет $\pi \simeq_{\varepsilon,L} \pi'$. Равенство $\Gamma_{\pi'} = \Gamma_L \cap \Gamma_{\pi'}$ означает, что схема π' свободна в модели $K(L)$. □

Следствие 1. *Модель $K(L)$ удовлетворяет* УВСС *тогда и только тогда, когда для произвольной схемы π множество конфигураций $\Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ регулярное.*

Следствие 2. УВСС-*модели образуют решетку по отношению частичного порядка $\lessdot$.*

Широко известные классы формальных моделей с яновскими сдвигами [3, 15, 20] и монотонными операторами [17] удовлетворяют не только УСС, но и более сильному свойству УВСС. На самом деле справедлива.

Теорема 4. *Если Γ_L — контекстно-свободное множество конфигураций, то модель $K(L)$, удовлетворяющая* УСС, *является* УВСС-*моделью.*

Доказательство. Предположим противное — $K(L)$ не удовлетворяет УВСС. Покажем, что в этом случае существует схема π_0, не имеющая в $K(L)$ эквивалентной свободной схемы. Если Γ_L — контекстно-свободное множество конфигураций, а $K(L)$ не удовлетворяет УВСС, то согласно теореме 3 для некоторой схемы π множество конфигураций $\Gamma = \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ является контекстно-свободным, но не регулярным. Тогда из леммы Огдена [1] следует, что Γ содержит конфигурацию $w = w_1w_2w_3w_4w_5$ такую, что $w_2 \neq e$, $w_4 \neq e$ и для любого $i \geqslant 1$ конфигурация $w(i) = w_1(w_2)^iw_3(w_4)^iw_5 \in \Gamma$, но при этом для бесконечного числа различных $j \geqslant 1$ и бесконечного числа различных $k \geqslant 1$ конфигурации $w(j, k) = w_1(w_2)^jw_3(w_4)^kw_5 \notin \Gamma$. Рассмотрим множество Γ', состоящее из всевозможных конфигураций вида $w(j, k)$, $j \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Γ' — регулярное S-однозначное множество конфигураций. Следовательно, существует схема π' такая, что $\Gamma_{\pi'} = \Gamma'$. Например, для множества конфигураций $\Gamma' = \{(s^0, 0)(s, 0)^j(s, 1)(s, 1)^k(s, 0) : j \geqslant 0, k \geqslant 0\}$ схема π' представлена на рис. 4. Поскольку $\Gamma_L \cap \Gamma_{\pi'}$ — контекстно-свободное нерегулярное множество конфигураций, то, рассуждая далее так же, как при анализе примера 2, можно убедиться в том, что π' не имеет эквивалентной свободной в $K(L)$ схемы вопреки УСС. Противоречие снимается, если $K(L)$ — УВСС-модель. □

Теорема 4 свидетельствует о том, что достаточно широкий класс УСС-моделей удовлетворяет УВСС. Возникает предположение о совпадении классов УСС-моделей и УВСС-моделей. Однако имеет место

Теорема 5. *Существуют* УСС-*модели, не удовлетворяющие* УВСС.

Доказательство. Построим одну из таких моделей в базисе $(\{s\}, \{p\})$. В дальнейшем для удобства обозначений будем считать, что $0! = 0$ и $w^k = e$ для любого слова w при $k = 0$.

Множество функций разметки L определим следующим образом:

1) обозначим через U множество всевозможных цепочек, состоящих из пар $(s, 0)$ и $(s, 1)$, т. е. $U = ((s, 0) + (s, 1))^*$;

2) обозначим через D множество цепочек вида $(s, 1)^{2k+1}(s, 0)$, $k \geqslant 0$;

3) обозначим через w'_1 пару $(s^0, 0)$, через w'_k — цепочку $((s, 0)(s, 1))^{k!}$, $k > 1$, через w''_k — цепочку $((s, 1)(s, 1))^{k!}$, $k \geqslant 1$;

4) обозначим через w_n конфигурацию вида $w'_1w''_1w'_2w''_2 \ldots w'_nw''_n$, $n \geqslant 0$, а через W_n — множество конфигураций $\{w_{n!}w_Dw_U : n \geqslant 0, w_D \in D, w_U \in U\}$.

В качестве Γ_L возьмем множество $\mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} w_n\right)$, состоящее из всевозможных начальных подцепочек конфигураций множеств W_n. Модель $K(L)$ не удовлетворяет УВСС, так как для схемы π, изображенной на рис. 5, $\Gamma_L \cap \Gamma_\pi = \{w_{n!}w_D : n \geqslant 0, w_D \in D\}$ — нерегулярное множество конфигураций.

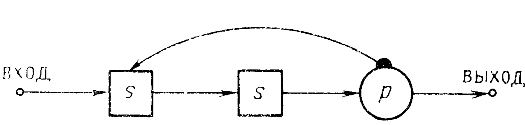

Рис. 5

Отметим, что π при этом является свободной в модели $K(L)$ схемой.

Убедимся теперь в том, что модель $K(L)$ удовлетворяет УСС. Рассмотрим произвольную схему π. Если существует $N \geqslant 0$ такое, что $\Gamma = \Gamma_L \cap \Gamma_\pi = \mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} W_n\right) \cap \Gamma_\pi$, то в силу регулярности каждого из множеств W_n множество конфигураций Γ является регулярным

S-однозначным. Тогда π согласно теореме 3 имеет эквивалентную вполне-свободную в $K(L)$ схему.

Предположим теперь, что для любого $N \geqslant 0$ выполняется соотношение $\mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} W_n\right) \cap \Gamma_\pi \subset \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$. Это означает, что для бесконечно большого количества различных значений k множество $\Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ содержит конфигурацию вида $w = w_{k!} w^D w^U$. Выделим бесконечную последовательность преобразователей u_1', u_1'', u_2', u_2'', $\ldots$ u_n', u_n'', $\ldots$ схемы π, которыми оканчиваются маршруты обхода схемы, соответствующие конфигурациям w_1', w_1, $w_1 w_2'$, w_2, $\ldots$, $w_{n-1} w_n'$, w_n, $\ldots$ Если схема π имеет M различных вершин-преобразователей, то для некоторых n и m, $n \geqslant M$, $0 < m \leqslant M$, выполняется $u_n' = u_{n+m}'$. В маршруте, соответствующем конфигурации $w_n = w_{n-1} w_n' w_n''$, выделим заключительный участок, связывающий вершины u_n' и u_n'' схемы π. Выделенный подмаршрут однозначно определяется вершиной u_n' и цепочкой $w_n'' = ((s,1)(s,1))^{n!}$. Поскольку значение л. п. p на нем неизменно равно 1 и $n \geqslant M$, последовательность преобразователей, через которые проходит данный подмаршрут, начиная с некоторой вершины становится периодической и ее можно представить в виде $v_0, v_1, \ldots, v_r, (v_{r+1}, \ldots, v_{r+t})^k$, где $v_0 = u_n'$, $v_{r+t} = u_n''$, $t < M$, $r + tk = 2n!$. Иными словами рассматриваемый переход из u_n' в u_n'' завершается k-кратным прохождением цикла через преобразователь u_n''. Подобный переход из вершины u_{n+m}' в вершину u_{n+m}'' определяется цепочкой $w_{n+m}'' = ((s,1)(s,1))^{(n+m)!} = \left(w_n''\right)^{(n+1)\ldots(n+m)}$. В силу того, что $u_n' = u_{n+m}'$, значение л. п. p неизменно равно 1 и $2(n+m)! = 2n! + t(j-k)$ для некоторого натурального j (следует учесть $t < M \leqslant n$), последовательность преобразователей, через которые проходит данный подмаршрут, допускает представление в виде $v_0, v_1, \ldots, v_r, (v_{r+1}, \ldots, v_{r+t})^l$. Отсюда следует $u_n'' = u_{n+m}''$. Совершенно аналогично устанавливаются и прочие равенства $u_{n+1}' = u_{n+m+1}'$, $u_{n+1}'' = u_{n+m+1}''$ и т. д. Это означает, что, начиная с некоторого N, конфигурации $w = w_{N!} w_D w_U \in \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ соответствует маршрутам обхода некоторого макроцикла в схеме π, изображенного условно на рис. 6, *а*, и последующего перехода в выход π. Применяя эквивалентные преобразования копирования вершин схемы π, указанный макроцикл можно выделить в отдельный фрагмент Φ с единственным входом, ведущим в вершину $u_{N!}''$, где $N = k!$ для некоторого $k > M$. При таком N можно придать одинаковую длину всем подциклам и линейным участкам, входящим в состав макроцикла Φ.

Исследуем свойства фрагмента Φ в преобразованной схеме применительно к семантике L. Какова бы ни была функция разметки $\mu \in L$, один полный обход макроцикла сопровождается присоединением к строящейся в процессе обхода конфигурации цепочек вида $w_{k!+mi+1}'$, $w_{k!+mi+1}''$, $\ldots$, $w_{k!+mi+m}'$, $w_{k!+mi+m}''$, $i \geqslant 0$. Так как $w_l w_D w_U \in \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ только при $l = n!$ для различных n (иначе бы имел место случай $\mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} W_n\right) \supset \Gamma_L \cap \Gamma_\pi\right)$ и $k > m$, то выйти из макроцикла можно лишь после совершения нескольких полных его обходов. Значит, все существенные выходы из фрагмента Φ сосредоточены в подцикле Ω, содержащем преобразователь $u_{N!}''$ (на рис. 6, *а* подцикл Ω выделен двойной стрелкой). Кроме того, состав цепочек w_j' и w_j'', определяющих обход макроцикла, позволяет выделить несущественные дуги (на рис. 7 они перечеркнуты). Теперь, осуществляя эквивалентные преобразования изменения направления несущественных дуг в подциклах, изображенных на рис. 7, и «склеивания» вершин макроцикла Ф, можно «свернуть» фрагмент Ф и привести его в виду Φ_0, представленному на рис. 6, *б*. Полученную в результате проведенных эквивалентных преобразований схему обозначим π'.

Схема π' не является свободной в $K(L)$, но может быть легко преобразована в свободную схему π''. Для этого в π' выделяются все преобразователи z_i, которыми оканчиваются маршруты обхода схемы, соответствующие конфигурациям $w_{n!}w_D$. Для каждой вершины z_i строится фрагмент схемы Φ_i, $i > 0$, следующим образом:

— из входа схемы единственная дуга направляется в вершину z_i;

— полученная схема преобразуется в эквивалентную вполне-свободную в модели $K(\mathscr{L}(\{s\}, \{p\}))$ схему;

— вход схемы удаляется.

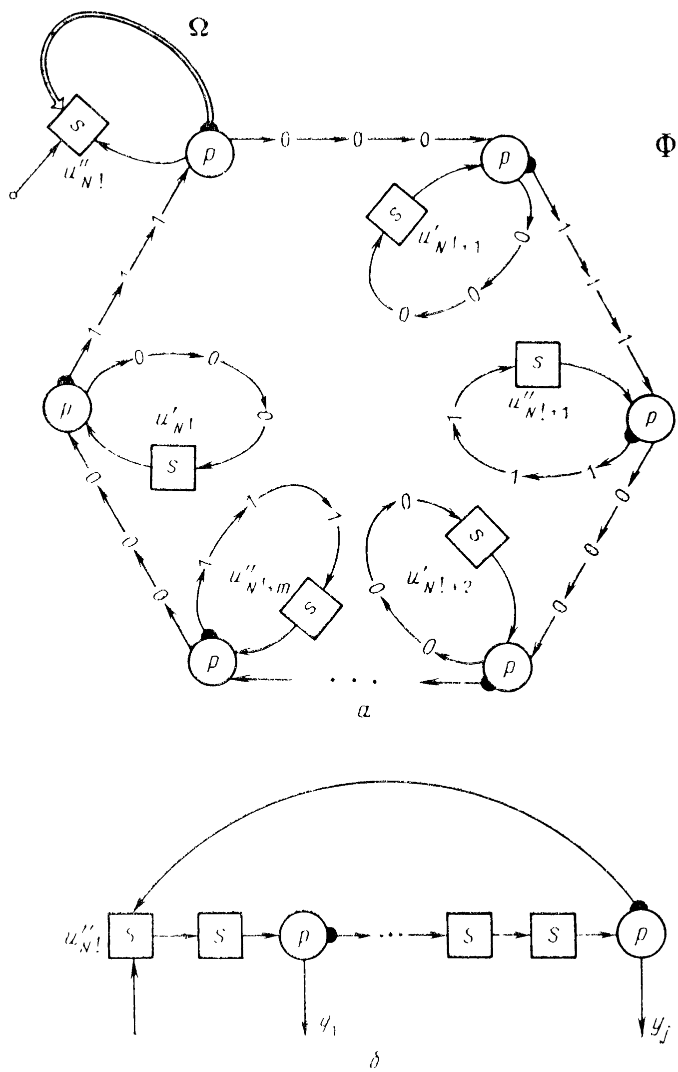

Рис. 6

Фрагмент Φ_i имеет единственную входную вершину. Схема π'' образуется из схемы π', если 0-преемником каждого преобразователя z_i назначить входную вершину фрагмента Φ_i. Поскольку $K(\mathscr{L}(\{s\}, \{p\})) \preccurlyeq K(L)$, то подобное преобразование π' дает в результате эквивалентную в модели $K(L)$ схему π''.

Остается убедиться в том, что π'' — свободная в модели $K(L)$ схема. Рассмотрим произвольный маршрут, ведущий из входа схемы π'' в ее выход. Если данный маршрут не проходит через цикл Φ_0, то соответствующая конфигурация w определяется однозначно вершиной $u''_{n!}$, $n<N$, и одним из фрагментов Φ_i. В этом случае $w=w_{n!}w_Dw_U\in\Gamma_L\cap\Gamma_\pi$. Если же маршрут проходит через цикл Φ_0, то ему может соответствовать, вообще говоря, несколько различных конфигураций, одна из которых имеет вид $w_{N!}w_Dw_U\in\Gamma_L\cap\Gamma_\pi$ (обход цикла Φ_0 здесь осуществляется за счет цепочки w_D). В обоих случаях маршрут обхода схемы реализуется при выполнении π'' на некоторой функции разметки $\mu\in L$.

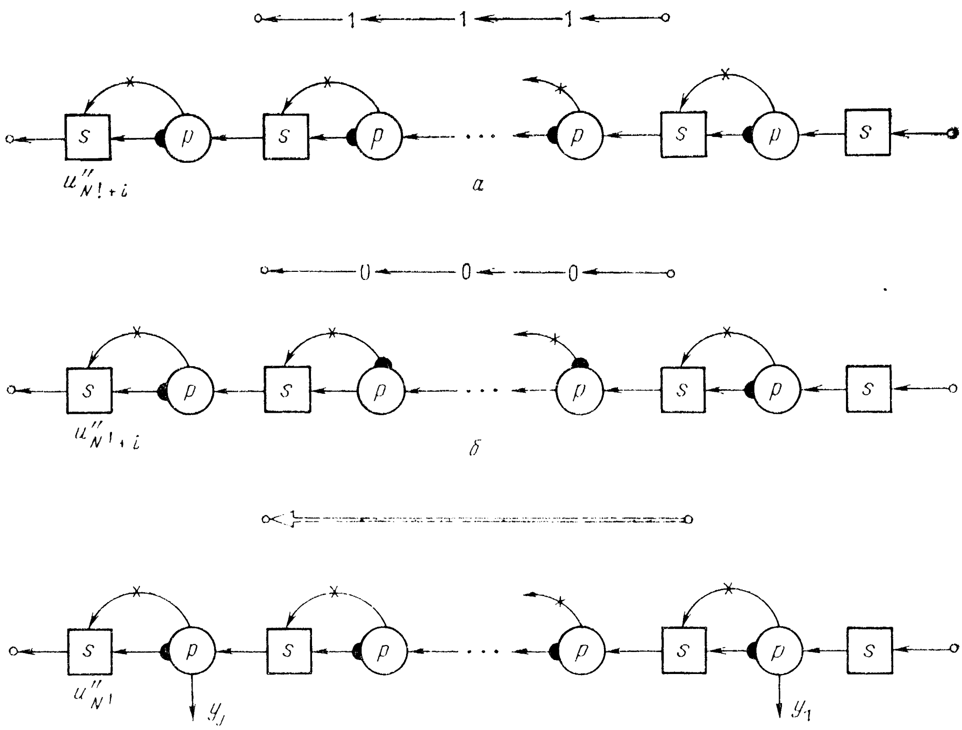

Рис. 7

Таким образом, любая схема π имеет эквивалентную свободную $K(L)$ схему π''. Значит, модель $K(L)$ удовлетворяет УСС. □

Приведенное доказательство допускает обобщение для произвольного базиса (S, P).

Теорема 6. *Существуют гладкие* УСС-*модели, пересечение которых не удовлетворяет* УСС.

Доказательство. В процессе обоснования будут в значительной мере использоваться модель $K(L)$ из теоремы 5 и связанные с ней преобразования схем (рис. 6 и 7).

Рассмотрим две модели $K(L)$ и $K(L')$, одна из которых заимствована из доказательства теоремы 5, а множество функций разметки L' другой задается регулярным множеством конфигураций

$$\Gamma_{L'}=\mathrm{INIT}\,((((s,\ 0)(s,\ 1))^*((s,\ 1)(s,1))^*)^*(s,\ 1)(s,0)^*).$$

Согласно доказательству теоремы 5 $K(L)$ — УСС-модель. Поскольку множество $\Gamma_{L'}$ регулярное, то $K(L')$ удовлетворяет УВСС. Нетрудно убедиться в том, что модель $K(L'')=K(L\cap L')$ задается множеством конфигураций $\Gamma_{L''}=\mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}w_n\right)$, где $W_n=\{w_{n!}(s,\ 1)(s,\ 0)(s,\ 0)^*\}$, а $w_{n!}$ определяется так же, как в доказательстве теоремы 5. Покажем, что всякая схема π, у которой множество значений $F_\pi(L'')$ бесконечно, не является свободной в модели $K(L'')$. К числу таковых относится схема, изображенная на рис. 5.

Если множество $\Gamma_{L''} \cap \Gamma_\pi$ бесконечно большое, то для бесконечного числа различных n в нем содержатся конфигурации вида $w_{n!}(s, 1)(s, 0)^k$. Поэтому, следуя ходу доказательства теоремы 5, в схеме π можно выделить макроцикл Φ (рис. 6, *а*), обход которого неизбежен для каждого маршрута, соответствующего указанным выше конфигурациям, начиная с некоторого n. Однако этим аналогия L, L'' исчерпывается, поскольку единственным существенным в модели $K(L'')$ выходом из фрагмента Φ является первый выход y_1 из подцикла Ω (рис. 6, *б* и 7, *в*), причем значение л. п. p на этом выходе равно 0 и остается неизменным на протяжении дальнейшего функционирования схемы π. Таким образом, какова бы ни была функция разметки $\mu \in L''$, если значение $F_\pi(\mu)$ определено и в процессе выполнения схемы π осуществлялся обход макроцикла Φ, то переход из фрагмента Φ в выход схемы будет происходить по одному и тому же маршруту, соответствующему цепочке вида $(s, 0)^m$. Предположим, что упомянутый маршрут проходит через T преобразователей. Тогда, начиная с некоторого $n = N$, в схеме π на функциях разметки μ из L'' реализуются только маршруты, соответствующие конфигурациям

$w_{n!}(s, 1)(s, 0)^T$ и проходящие через $1 + T + \sum_{i=1}^{n!} 4i!$ преобразователей.

Следовательно, множество цепочек о. с. $F_\pi(L'')$ не является регулярным, а схема π согласно утверждению 8 не является свободной в модели $K(L'')$. □

Следствие. *Класс УСС-моделей не образует решетки по отношению частичного порядка* $\preccurlyeq$.

Незначительная модификация приведенных выше конструкций позволяет доказать теоремы 5 и 6 для полугрупповых моделей программ $K(L)$. Так, при доказательстве теоремы 5 достаточно в качестве U взять множество цепочек пар вида $U = ((s, 0))^*$.

Итак, УВСС-модели образуют собственное подмножество класса УСС-моделей. Условие свободной схемы в общем случае не наследуется при пересечении моделей и не гарантирует возможности представления всякой свободной схемы в нормальной форме. Поэтому с позиции использования свойств свободной схемы в алгоритме канонизации УВСС-модели обладают гораздо большими преимуществами, чем модели, удовлетворяющие простому условию свободной схемы.

§ 5. Расширения формальных моделей

Рассматривая некоторую исходную формальную модель $K(L)$ над базисом (S, P), вполне естественно допустить возможность обогащения базиса новыми элементами — элементарными операторами и логическими условиями. Введение новых элементов базиса влечет за собой расширение программной семантики, а значит, и формальной модели. Данный раздел посвящен изучению вопроса о том, насколько условия свободной и вполне-свободной схемы устойчивы по отношению к некоторым простым расширениям формальных моделей.

Формальная модель $K(L_1)$ над базисом (S_1, P_1) называется *проекцией* модели $K(L_2)$ над базисом (S_2, P_2), если

1. $S_1 \subseteq S_2$; $P_1 \subseteq P_2$;

2. $\mu \in L_1 \Leftrightarrow \exists \mu' \in L_2 \forall h \in S_1^*$ значение $\mu(h)$ есть проекция набора значений логических переменных из P_2 на множество P_1.

Модель $K(L_2)$ называется при этом *расширением* $K(L_1)$.

Очевидно следующее

Утверждение 10. *Если формальная модель удовлетворяет* УСС (УВСС), *то и любая ее проекция обладает тем же свойством.*

Рассмотрим некоторые простейшие типы расширений формальных моделей.

Модель $K(L_2)$ над базисом (S_2, P) называется (операторным) *расщеплением* модели $K(L_1)$ над базисом (S_1, P), если

1) S_1 — гомоморфный образ S_2 при некотором отображении $\Phi: S_2 \to S_1$;

2) $S_1 \subseteq S_2$, и для любого $s \in S_1$ $\Phi(s) = s$;

3) $\mu \in L_2 \Leftrightarrow \exists \mu' \in L_1 \forall h = s_1 \ldots s_k \in S_2^*$ выполняется соотношение $\mu(h) = \mu'(\Phi(s_1)\ldots\Phi(s_k))$.

Если о. с. $s \in S_1$ имеет не более r прообразов из S_2, то $K(L_2)$ будет называться r-расщеплением формальной модели $K(L_1)$.

Содержательное истолкование операторного расщепления формальной модели можно продемонстрировать на следующем примере. Предположим, что о. с. $s \in S_1$ соответствует программный оператор $x := f(y)$. Если возникает необходимость установить промежуточные значения переменной x, то часть операторов $x := f(y)$ можно заменить составным оператором begin $x := f(y)$ output(x)end. В среде формальных моделей программ это приводит к расщеплению о. с. s на два о. с.: s — соответствующий оператору присваивания, и s' — соответствующий новому составному оператору. Поскольку s, s' изменяют значения л. п. одинаковым образом, то в результате образуется операторное расщепление первоначальной модели.

Формальная модель $K(L_2)$ над базисом (S_2, P) называется *неподвижным* (операторным) *расширением* модели $K(L_1)$ над базисом (S_1, P), если

1) $S_1 \subseteq S_2$;

2) функция разметки $\mu \in L_2$ в том и только том случае, когда

а) $\forall h \in S_2^* \forall s \in S_2 - S_1 \mu(h) = \mu(hs)$;

б) $\exists \mu' \in L_1 \forall h \in S_2^* \mu(h) = \mu'(h')$, где h' образована из h удалением всех о. с., не принадлежащих S_1.

При неподвижном расширении к имеющемуся набору программных операторов добавляются новые, не изменяющие в процессе своего выполнения значений элементарных логических условий. Таковыми могут быть, например, операторы вывода или операторы присваивания $x := f(y)$ в том случае, когда логические условия не зависят от значения x.

Формальная модель $K(L_2)$ над базисом (S, P_2) называется *универсальным* (логическим) *расширением* модели $K(L_1)$ над базисом (S, P_1), если

1) $P_1 \subseteq P_2$;

2) $\mu \in L_2 \Leftrightarrow \exists \mu' \in L_1 \forall h \in S^*$ значения $\mu'(h)$ есть проекция набора $\mu(h)$ значений л. п. из P_2 на множество л. п. P_1.

Если при этом $|P_2| - |P_1| = r$, то $K(L_2)$ называется *универсальным r-расширением модели* $K(L_1)$.

При универсальном расширении базис обогащается новыми элементарными логическими условиями, но характер зависимости их значений от хода выполнения программы никак не отражается в семантике множества функций разметки (допустимо произвольное изменение значений новых логических условий).

Представленные далее результаты свидетельствуют о том, что простые расширения формальной модели удовлетворяют УСС в том и только в том случае, когда сама модель удовлетворяет более сильному УВСС. Доказательства этих теорем основываются на одном общем методе — новые элементы базиса используются для кодирования наборов значений л. п. и последующего преобразования свободной схемы во вполне-свободную.

1. Операторное расщепление. Рассмотрим операторное расщепление $K(L_2)$ модели $K(L_1)$, порожденное некоторым гомоморфизмом $\Phi: S_2 \to S_1$. Отображение Φ можно распространить на множество схем программ и конфигураций, заменяя каждый о. с. $s \in s_2$ его образом $\Phi(s)$.

В этом случае справедливы соотношения $\Gamma_{L_1} = \Phi(\Gamma_{L_2})$, $\Gamma_{L_2} = \Phi^-(\Gamma_{L_1})$ и для любой схемы π над базисом (S_2, P) выполняется $\Phi(\Gamma_\pi) = \Gamma_{\Phi(\pi)}$. Нетрудно доказать

Утверждение 11. *Схема π свободна в модели $K(L_2)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\pi)$ свободна в модели $K(L_1)$.*

Теорема 7. *Следующие три утверждения эквивалентны*

1) *модель $K(L_1)$ над базисом (S_1, P) удовлетворяет* УВСС;
2) *любое расщепление модели $K(L_1)$ удовлетворяет* УВСС;
3) *любое 2-расщепление модели $K(L_1)$ удовлетворяет* УСС.

Доказательство. 1) $\to$ 2). Для произвольного расщепления $K(L_2)$ модели $K(L_1)$, порожденного гомоморфизмом Φ, и для всякой схемы π над базисом $(S_2, P) = (\Phi^-(S_1), P)$ выполняется соотношение

$$\Gamma_{L_2} \cap \Gamma_\pi = \Phi^-(\Gamma_{L_1}) \cap \Phi^-(\Gamma_{\Phi(\pi)}) \cap \Gamma_\pi = \Phi^-(\Gamma_{L_1} \cap \Gamma_{\Phi(\pi)}) \cap \Gamma_\pi,$$

поскольку $\Phi^-(\Gamma_{\Phi(\pi)}) \supseteq \Gamma_\pi$ и $\Phi^-(\Gamma_1) \cap \Phi^-(\Gamma_2) = \Phi^-(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. В силу того, что $K(L_1)$ — УВСС-модель, множество конфигураций $\Gamma_{L_1} \cap \Gamma_{\Phi(\pi)}$ является регулярным. Так как обращение гомоморфизма Φ сохраняет регулярность языка, то множество $\Gamma_{L_2} \cap \Gamma_\pi$ также регулярно. Поскольку схема π была выбрана произвольно, то регулярность $\Gamma_{L_2} \cap \Gamma_\pi$ согласно следствию из теоремы 3 влечет выполнимость УВСС для модели $K(L_2)$.

2) $\to$ 3). Следует из определения УВСС.

3) $\to$ 1). Рассмотрим полное 2-расщепление $K(L_2)$ модели $K(L_1)$, порожденное гомоморфизмом Φ и удваивающее количество о. с. базиса. Согласно следствию из теоремы 3 достаточно показать, что в случае выполнимости УСС для модели $K(L_2)$ множество конфигураций $\Gamma_{L_1} \cap \Gamma$ регулярно для произвольной схемы π над базисом (S_1, P). Для каждого набора Δ значений л. п., копируя вершины схемы π, можно построить эквивалентную в модели $K(\mathscr{L}(S_1, P))$ схему π_Δ, обладающую следующим свойством. Преобразователи схемы π_Δ распадаются на два непересекающихся класса C_1 и C_2; класс C_1 составляют всевозможные Δ-преемники преобразователей схемы π_Δ, а класс C_2 — все прочие Δ'-преемники преобразователей π при всевозможных прочих наборах $\Delta' \neq \Delta$. Поскольку $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, то в схеме π_Δ все о. с. $s \in S_1$ в преобразователях класса C_1 можно заменить их прообразами $s' \in S_2 - S_1$. Полученную в результате проведенных преобразований схему над базисом (S_2, P) обозначим π'_Δ. В π'_Δ преобразователи с о. с. из $S_2 - S_1$ выделяют набор Δ, так как в процессе любого обхода схемы эти преобразователи можно достичь лишь с набором Δ значений л. п. Для каждой цепочки о. с. $h = s_1 \dots$ $\dots s_i s_{i+1} \dots s_m \in F_{\pi'_\Delta}(L_2)$ построим всевозможные конфигурации вида

$$w = (s_0, \Delta_0)(\Phi(s_1), \Delta_1) \dots (\Phi(s_i), \Delta_i)(\Phi(s_{i+1}), \Delta_{i+1}) \dots (\Phi(s_m), \Delta_m),$$

где для всякого i, $0 \leqslant i \leqslant m$, либо $\Delta_i = \Delta$ при $s_{i+1} \in S_2 - S_1$, либо Δ_i — произвольный набор из множества $B_P - \{\Delta\}$ при $s_{i+1} \in S_1$. Обозначим через Γ_Δ множество всевозможных конфигураций подобного вида для различных цепочек h из $F_{\pi'}(L_2)$. Из построения π'_Δ и Γ_Δ следует, что $\Gamma_{L_1} \cap \Gamma_\pi \subseteq \Gamma_\Delta$. Поскольку $K(L_2)$ является УСС-моделью, то множество цепочек о. с. $F_{\pi'}(L_2)$ регулярное. Поэтому множество конфигураций Γ_Δ также регулярное. И наконец, для каждой конфигурации w индукцией по длине w можно показать, что $w \in \bigcap_{\Delta \in B_P} \Gamma_\Delta$ влечет $w \in \Gamma_{L_1}$. Таким образом, приходим к выводу о том, что $\Gamma_{L_1} \cap \Gamma_\pi = \bigcap_{\Delta \in B_P} \Gamma_\Delta \cap \Gamma_\pi$. Так как множество наборов B_P конечное, то $\Gamma_{L_1} \cap \Gamma_\pi$ является регулярным множеством конфигураций. □

2. Неподвижное операторное расширение. Операторы модели $K(L)$, не изменяющие значения логических переменных, могут быть использованы для выделения различных выходов из логических фрагментов схем программ. Если при этом окажется, что каждый выход из логического фрагмента достижим на единственном наборе значений л. п., то свободная в модели $K(L)$ схема легко преобразуется во вполне-свободную.

Теорема 8. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *модель* $K(L)$ *над базисом* (S, P) *удовлетворяет* УВСС;

2) *любое неподвижное расширение модели* $K(L)$ *удовлетворяет* УВСС;

3) *некоторое неподвижное расширение модели* $K(L)$ *удовлетворяет* УСС.

Доказательство. 1) $\to$ 2). Ограничимся анализом случая, когда неподвижное операторное расширение $K(L')$ модели $K(L)$ образовано путем добавления к S нового о. с. $s' \notin S$, не изменяющего значений л. п. Положим $S' = S \cup \{s'\}$. Рассмотрим произвольную схему π из модели $K(L')$, содержащую t преобразователей с о. с. s'. Поскольку s' не изменяет значений л. п., то любая конфигурация w из $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L'}$ содержит не более t идущих подряд пар вида (s', Δ) (иначе происходит зацикливание схемы π на соответствующей функции разметки из L'). Обозначим через Γ^t_π, $\Gamma^t_{L'}$ и $\Gamma^t_{\mathscr{L}(S',P)}$ подмножества конфигураций Γ_π, $\Gamma_{L'}$ и $\Gamma_{\mathscr{L}(S',P)}$, в которых пары вида (s', Δ) не встречаются более t раз подряд. Очевидно, $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L'} = \Gamma^t_\pi \cap \Gamma^t_{L'}$.

Рассмотрим $(t+1)$-расщепление $K(L_0)$ модели $K(L)$, порожденное гомоморфизмом φ: $S_0 \to S$, при котором каждый о. с. $s \in S$ имеет $t+1$ прообразов $s, s^1, \ldots, s^t$ в S_0. Используя расщепленный базис (S_0, P), определим мономорфизм ψ: $\Gamma_{\mathscr{L}(S_0,P)} \to \Gamma^t_{\mathscr{L}(S',P)}$ следующими соотношениями:

$$\Psi((s^i, \Delta)) = (s, \Delta)((s', \Delta))^i, \quad 0 \leqslant i \leqslant t.$$

Отметим некоторые свойства взаимно однозначного гомоморфизма ψ. Из определения Ψ, неподвижного расширения $K(L')$ и расщепления $K(L_0)$ следует $\psi(\Gamma_{L_0}) = \Gamma^t_{L'}$. Прообразом $\psi^-(\Gamma^t_\pi)$ регулярного S-однозначного множества конфигураций Γ^t_π является некоторое регулярное множество $R \subseteq \mathscr{L}(S_0, P)$, которое в общем случае не обладает свойством S-однозначности. Однако образ множества R относительно гомоморфизма φ является регулярным S-однозначным множеством конфигураций, и при этом $\varphi(R) \subseteq \mathscr{L}(S, P)$. Согласно утверждению 7 существует схема π_1 над базисом (S, P) такая, что $\Gamma_{\pi_1} = \varphi(R)$. Таким образом, справедливы следующие равенства:

$$\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L'} = \Gamma^t_\pi \cap \Gamma^t_{L'} = \psi\psi^-(\Gamma^t_\pi \cap \Gamma^t_{L'}) = \psi(\psi^-(\Gamma^t_\pi) \cap \psi^-(\Gamma^t_{L'})) =$$
$$= \psi(R \cap \Gamma_{L_0}) = \psi(R \cap \varphi^-(\Gamma_{\pi_1}) \cap \varphi^-(\Gamma_L)) = \psi(R \cap \varphi^-(\Gamma_{\pi_1} \cap \Gamma_L)).$$

Вследствие того, что модель $K(L)$ удовлетворяет УВСС, множество конфигураций $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L$ регулярное. Таковым же является и множество $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L'}$, поскольку гомоморфизмы φ, ψ, а также их обращения сохраняют регулярность языков. Коль скоро схема π была выбрана произвольно, то согласно следствию из теоремы 3 $K(L')$ является УВСС-моделью.

2) $\to$ 3). Справедливо в силу определения УВСС.

3) $\to$ 1). Предположим, что неподвижное операторное расширение $K(L')$ модели $K(L)$ над базисом (S, P) удовлетворяет УСС и имеет о. с. $s' \notin S$, не изменяющий значений л. п.. Занумеруем все наборы зна-

чений л. п. $p_1, \ldots, p_m$ из B_P целыми числами от 1 до 2^m. Набор с номером i будем обозначать Δ_i.

Рассмотрим произвольную схему π, представленную в нормальной форме, над базисом (S, P). Для доказательства исследуемого утверждения достаточно убедиться в том, что $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L$ — регулярное множество конфигураций. В схеме π для каждого распознавателя с элементарной конъюнкцией вида $K(\Delta_i)$ поместим между ним и его 1-преемником цепочку, состоящую из i преобразователей с о. с. s'. Полученную в результате этого преобразования схему обозначим π'. Определим далее отображение $\Phi: S \times B_P \to (S \cup \{s'\})^*$, сопоставляя каждой паре (s, Δ_i) цепочку о. с. $h_{s,i} = s(s')^i$. Нетрудно видеть, что подобное отображение Φ является мономорфизмом и для него выполняется равенство $\Phi(\Gamma_\pi \cap \Gamma_L) = F_{\pi'}(L')$. Поскольку модель $K(L')$ удовлетворяет УСС и справедливо утверждение 8, множество конфигураций $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L = \Phi^{-}(F_{\pi'}(L'))$ регулярное. □

Теоремы 7 и 8 показывают, что УВСС наследуется при операторных расширениях модели, а класс УВСС-моделей в точности совпадает с классом гладких формальных моделей, удовлетворяющих УСС и сохраняющих это свойство при простейших операторных расширениях. Несколько иначе обстоит дело с универсальным логическим расширением формальных моделей программ.

§ 6. Универсальные логические расширения моделей программ

Теорема 9. *Формальная модель $K(L)$ над базисом (S, P), $|S| > 1$, удовлетворяет* УВСС, *если некоторое ее универсальное логическое расширение удовлетворяет* УСС.

Доказательство. Утверждение 10 позволяет ограничиться анализом универсального логического расширения $K(L')$ с единственной новой свободной л. п. $p_0 \notin P$. Покажем, что для произвольной схемы π, представленной в нормальной форме над базисом (S, P), множество конфигураций $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L$ регулярное, если $K(L')$ — УСС-модель.

Занумеруем все наборы значений л. п. из P, сопоставляя каждому $\Delta \in B_P$ его лексикографический порядковый номер $N(\Delta)$. Преобразуем далее π в схему π' над базисом $(S, P \cup \{p_0\})$ следующим образом. В каждом логическом фрагменте схемы π, на входе которого расположен преобразователь с о. с. s' (рис. 8, *а*), заменим распознаватели с элементарными конъюнкциями вида $K(\Delta) = p_1^{\delta_1} \& \ldots \& p_m^{\delta_m}$, $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m) \in B_P$, фрагментами, изображенными на рис. 8, *б*, где $s'' \neq s'$, $s'' \in S$. Тем самым в схеме π' все распознаватели оказались «закодированными» цепочками о. с. из S^*. Для каждой функции разметки $\mu \in L$ и $t \geqslant 0$ обозначим через μ' функцию разметки из L', принимающую на всякой цепочке о. с. $h \in S^*$ значение $\mu'(h) = (1, \delta_1, \ldots, \delta_m)$ в том случае, если $\mu(h) = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$, а через $L'_{\mu,t}$ — множество всевозможных функций μ'' из L', значения которых $\mu''(h) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m)$ на любой цепочке $h \in S^*$ удовлетворяют условиям $\delta_0 = 0$ при $|h| \geqslant t$, $\delta_0 = 1$ при $|h| < t$, $(\delta_1, \ldots, \delta_m) = \mu(h)$ при $|h| \leqslant t$.

Исходя из построения схемы π' видно, что для любой функции разметки $\mu \in L$ конфигурация $w = (s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1) \ldots (s_N, \Delta_N)$ принадлежит множеству $\Gamma_\pi \cap \Gamma_\mu$ тогда и только тогда, когда конфигурация $w' = (s_0, (1, \Delta_0))(s_1, (1, \Delta_1)) \ldots (s_N, (1, \Delta_N))$ содержится в $\Gamma_{\pi'} \cap \Gamma_{\mu'}$. В то же время на основании структуры схемы π' (упомянутого кодирования наборов значений л. п. цепочками преобразователей) можно сделать следующее заключение: $w' \in \Gamma_{\pi'} \cap \Gamma_{\mu'}$ в том и только том случае, когда выполнены условия

1′) $s_0 s_1 \ldots s_N \in F_{\pi'}(L')$;

2′) для любого t, $0 \leqslant t \leqslant N$, найдется $\mu'' \in L'_{\mu,t}$ такая, что $F_{\pi'}(\mu'') = s_0 s_1 \ldots s_t (s')^{N(\Delta_t)}$, где s' — некоторый о. с., отличный от s_t.

Поскольку модель $K(L')$ удовлетворяет УСС, множество $F_{\pi'}(L')$ регулярное. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что последнее условие, связанное с функциями разметки μ'', может быть проверено регулярным образом.

Обратимся к свободной в модели $K(L')$ схеме π'', (ε, L')-эквивалентной схеме π'. Учитывая определение функций разметки из $L'_{\mu,t}$ и специфику структуры схемы π', условие 2′) допускает следующую переформулировку применительно к схеме π'':

2″) для любого t, $0 \leqslant t \leqslant N$, в схеме π'' из преобразователя с о. с. s_t, которым оканчивается маршрут, соответствующий конфигурации $w'_t = (s_0, (1, \Delta_0))(s_1, (1, \Delta_1)) \ldots (s_{t-1}, (1, \Delta_{t-1}))$, можно достичь выхода схемы с неизменным установленным значением л. п. $p_0 = 0$, пройдя через $N(\Delta_t)$ преобразователей с одним и тем же о. с. $s' \neq s_t$.

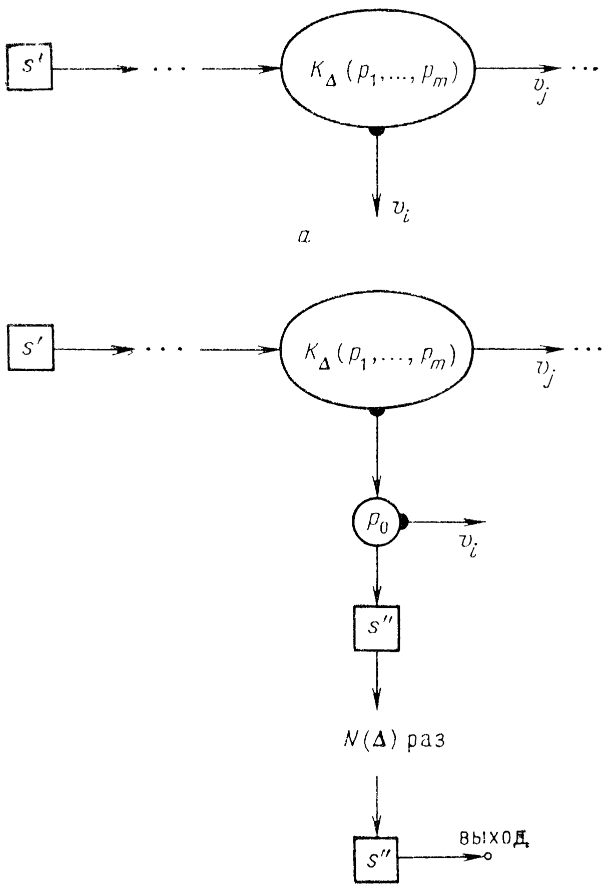

Рис. 8

Ввиду того, что схема π'' имеет конечное число вершин, проверка условия 2″), а значит, и условия $w \in \Gamma_\pi \cap \Gamma_L$, может быть осуществлена конечным автоматом. Тем самым установлена регулярность множества конфигураций $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L$. □

В отличие от теорем 7 и 8 утверждение теоремы 9 не допускает обращения, т. е. выполнимость УВСС для формальной модели $K(L)$, вообще говоря, не влечет за собой выполнимости УСС для 1-универсального логического расширения модели $K(L)$. Об этом свидетельствует

Пример 3. Рассмотрим модель $K(L)$ над базисом (S, P), $S = \{s_1, s_2\}$. $P = \{p_1\}$, множество функций разметки L которой состоит из единственной функции μ. На каждой цепочке о. с. $h \in S^*$ значение $\mu(h) = (0)$ в том и только том случае, когда h представима в одном из следующих двух видов:

$$h = s_1 s_2 (s_1)^2 (s_2)^2 \ldots (s_1)^n (s_2)^n (s_1)^k$$

или

$$h = s_1 s_2 (s_1)^2 (s_2)^2 \ldots (s_1)^n (s_2)^n (s_1)^{n+1} (s_2)^k,$$

где n — произвольное целое число и $0 \leqslant k \leqslant n$.

Подобная функция разметки μ однозначно определяется указанием некоторой сверхцепочки о. с. $h_\omega \in S^\omega$ (в данном случае $h_\omega = s_1 s_2 (s_1)^2 (s_2)^2 \ldots (s_1)^n (s_2)^n \ldots$), на каждом префиксе которой она принимает некоторое выделенное значение.

Для того чтобы лучше представить структуру множества конфигураций Γ_L, введем следующие обозначения.

1. Обозначим через U множество всевозможных цепочек, состоящих из пар $(s_1, 1)$ и $(s_2, 1)$, т. е. $U = ((s_1, 1) + (s_2, 1))^*$.

2. Будем считать, что w_0' и w_0'' равны пустой цепочке e, а w_k' и w_k'' равны цепочкам пар $((s_1, 0))^k$ и $((s_2, 0))_k$ соответственно при $k > 0$.

3. Обозначим через W_n множество, состоящее из всевозможных конфигураций двух видов $w_0'w_0''w_1'w_1'' \ldots w_n'w_n''w_k'(s_2, 1)\,w_U$ и $w_0'w_0''w_1'w_1'' \ldots$ $\ldots w_n'w_n''w_{n+1}'w_k''(s_1, 1)\,w_U$, где $0 \leqslant k \leqslant n$ и $w_U \in U$.

Тогда $\Gamma_L = \mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} W_n\right)$ состоит из всевозможных начальных подцепочек конфигураций множеств W_n. Покажем, что для любой схемы π над базисом (S, P), содержащей не более N различных вершин, справедливо соотношение $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L = \Gamma_\pi \cap \mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} W_n\right)$. Действительно, если в процессе выполнения схемы π на функции разметки μ будет впервые пройдено подряд N преобразователей с одним и тем же о. с. s и значением л. п. $p_1 = 0$, то и следующий в порядке прохождения преобразователь будет иметь тот же о. с. s. После прохождения через этот преобразователь функция μ согласно определению обязательно изменяет значение p_1 на 1. Поскольку μ при наращивании цепочки о. с. в процессе выполнения схемы π изменяет значение л. п. p_1 не более одного раза, дальнейшее выполнение π осуществляется с неизменным значением $p_1 = 1$. Процесс выполнения в этом случае либо продолжается бесконечно долго (схема π зацикливается на функции разметки μ), либо завершается спустя не более N этапов. Это означает, что конфигурации из множеств W_n, $n > N$, при построении $\Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ можно не принимать во внимание. Ввиду того, что $\Gamma_L \cap \mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} W_n\right)$ — конечное множество конфигураций, модель $K(L)$ удовлетворяет УВСС.

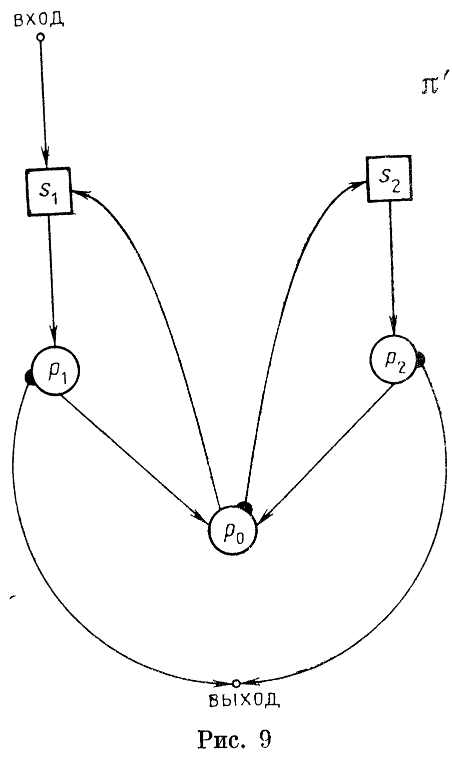

Рис. 9

В то же время, если к базису (S, P) добавить новую л. п. p_0 и образовать за счет нее универсальное логическое расширение $K(L')$ модели $K(L)$, то $K(L')$ не будет удовлетворять даже УСС. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть схему π', изображенную на рис. 9. Исходя из определения множества Γ_L, можно заметить, что множество $F_{\pi'}(L')$ состоит из всевозможных цепочек $h \in S^*$ следующих двух видов:

$$h = s_1 s_2 (s_1)^2 (s_2)^2 \ldots (s_1)^n (s_2)^n (s_1)^{n+1} (s_2)^k s_1,$$

$h_t = s_1 \ldots s_k s_{k+1} \ldots s_{k+m}$, не сохраняет значение л. п.

где n — произвольное целое число и $0 \leqslant k \leqslant n$. Ввиду того, что $F_{\pi'}(L')$ — нерегулярное множество цепочек о. с. и справедливо утверждение 8, в модели $K(L')$ не существует свободной схемы, эквивалентной π'.

На самом деле имеет место более общая

Теорема 10. *Для всякого базиса* (S, P), $|S| = M > 1$, *и произвольного* r, $0 \leqslant r \leqslant \log_2(M)$, *существует формальная модель* $K(L)$, *универсальное логическое* r-*расширение которой является* УВСС-*моделью, а универсальное* $(r+1)$-*расширение не удовлетворяет* УСС.

Доказательство. Ограничимся тем, что установим справедливость теоремы для базиса (S, P), $S = \{s^1, \ldots s^M\}$, $M > 1$, $P = \{p^0\}$. Как будет видно из дальнейших рассуждений, это ограничение множества P не умаляет общности доказательства, основная идея которого почерпнута из примера 3.

Введем ряд вспомогательных понятий, которые будут использованы при доказательстве теоремы. Рассмотрим универсальное логическое r-расширение $K(L^r)$ модели $K(L)$ над базисом (S, P^r), $P^r = \{p_0, p_1, \ldots, p_r\}$, где $p_1, \ldots, p_r$ — свободные л. п. базиса модели $K(L^r)$. Множество V вершин схемы π назовем s-однородным, если оно удовлетворяет одному из трех условий: а) $V = \varnothing$, б) V состоит из единственной вершины — входа схемы π, в) V — некоторое множество преобразователей, которым приписан один и тот же о. с. $s \in S$. Для однородного множества V, о. с. $s' \in S$ и двоичного символа δ' обозначим через $V(s', \delta')$ s'-однородное множество (возможно, пустое), состоящее из преобразователей с о. с. s', являющихся Δ-преемниками вершин множества V при всевозможных наборах Δ значений л. п. вида $\{\delta', \delta_1, \ldots, \delta_r\}$, где δ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$,— произвольные двоичные символы. Определение множества $V(s', \delta')$ может быть расширено для цепочек о. с. $s'_1 \ldots s'_{k-1}s'_k$ и двоичных символов $\delta'_1 \ldots \delta'_{k-1}\delta'_k$ на основании следующего соглашения:

$$V\left(s'_1 \ldots s'_{k-1}s'_k,\ \delta'_1 \ldots \delta'_{k-1}\delta'_k\right) = V\left(s'_1 \ldots s'_{k-1},\ \delta'_1 \ldots \delta'_{k-1}\right)\left(s'_k, \delta'_k\right).$$

Иными словами, $V\left(s'_1 \ldots s'_k,\ \delta'_1 \ldots \delta'_k\right)$ — это множество преобразователей с о. с. s'_k, достижимых из вершин множества V на k-м этапе некоторого вычисления, в процессе которого последовательно проходятся преобразователи с о. с. $s'_1, \ldots, s'_{k-1}$, значения л. п. p_0 выбираются последовательно из цепочки $\delta'_1 \ldots \delta'_k$, а значения свободных л. п. $p_1, \ldots, p_r$ изменяются произвольным образом.

Исследуем сначала случай $r < \log_2(M)$. Так же, как и в приведенном выше примере, множество L будет стоять из единственной функции разметки μ. Функция μ однозначно определяется некоторой сверхцепочкой $h_\omega \in S^\omega$: для каждой цепочки $h \in S^*$ значение $\mu(h)$ равно (0), если $h \in \mathrm{INIT}(h_\omega)$, и равно (1) в противном случае. Для доказательства теоремы достаточно построить сверхцепочку h_ω, удовлетворяющую следующим трем требованиям:

1) h_ω состоит только из о. с. $s^1, \ldots, s^{2^r+1}$;
2) $\mathrm{INIT}(h_\omega)$ — нерегулярное множество цепочек о. с.;
3) какова бы ни была схема π над базисом (S, P^r), $P^r = \{p_0, p_1, \ldots, p_r\}$, существует $N > 0$ такое, что при выполнении π на произвольной функции разметки μ' в рамках универсального логического r-расширения $K(L^r)$ модели $K(L)$ л. п. p_0 спустя N этапов выполнения приобретает значение 1.

Действительно, обозначим для произвольной цепочки (сверхцепочки) о. с. h через $W_n(h)$ множество всевозможных конфигураций вида

$$(s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1) \ldots (s_n, \Delta_n) \ldots (s_m, \Delta_m), \quad 0 \leqslant n \leqslant m,$$

где $h_n = s_1 \ldots s_n \in \mathrm{INIT}(h)$, $s_1 \ldots s_n s_{n+1} \notin \mathrm{INIT}(h)$, $\Delta_i = (0, \delta_1, \ldots, \delta_r)$ при $0 \leqslant i \leqslant n$, $\Delta_j = (1, \delta_1 \ldots, \delta_r)$ при $n < j \leqslant m$. Тогда по определению универсального r-расширения $K(L^r)$ модели $K(L)$ имеем $\Gamma_{L^r} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} W_n(h_\omega)$.

Если h удовлетворяет требованию 3), то для произвольной схемы π при некотором $N > 0$ выполняется соотношение $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L^r} = \Gamma_\pi \cap \bigcup_{n=0}^{N} W_n(h_\omega)$. Поскольку каждое множество конфигураций $W_n(h_\omega)$ регулярное, таковым же будет и множество $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L^r}$. Согласно следствию из теоремы 3 $K(L^r)$ является в этом случае УВСС-моделью.

Невыполнимость УСС для универсального логического $(r+1)$-расширения $K(L^{r+1})$ модели $K(L)$ подтверждает схема π', представленная на рис. 10. π' содержит в точности 2^r+1 преобразователей $v_1, \ldots, v_{2^r+1}$, помеченных о. с. $s^1, \ldots, s^{2^r+1}$. Дуги, исходящие из этих вершин, а также из входа схемы ведут в однотипные логические фрагменты F', представленные на рис. 10, *б*. Через K_i обозначены различные элементарные

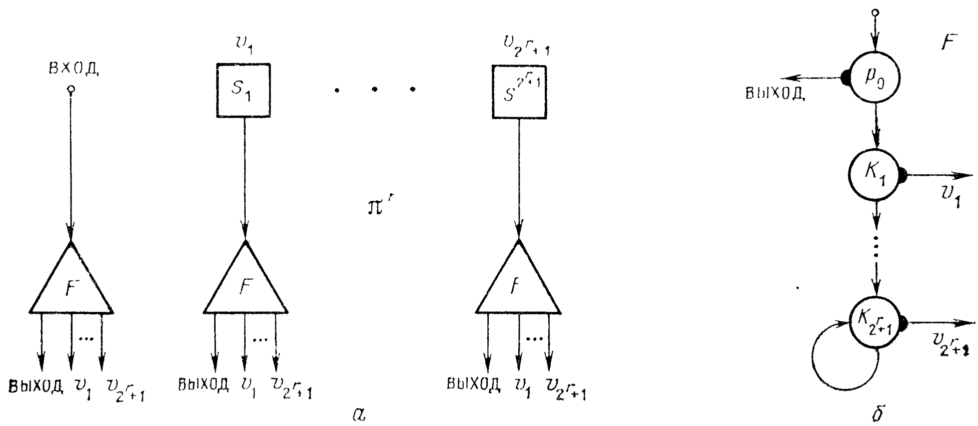

Рис. 10

конъюнкции, зависящие от свободных переменных $p_1, \ldots, p_{r+1}$. Исходя из определения μ и универсального расширения модели $K(L)$ за счет свободных л. п. $p_1, \ldots, p_{r+1}$, легко видеть, что $F_{\pi'}(L^{r+1}) = \{h\colon h = h's,\ h' \in \in \mathrm{INIT}(h_\omega),\ h's \notin \mathrm{INIT}(h_\omega)\}$. Требования 1) и 2), которым должна удовлетворять сверхцепочка о. с. h_ω, приводят к тому, что множество цепочек $F_{\pi'}(L^{r+1})$ становится нерегулярным. Согласно утверждению 8 это означает, что формальная модель $K(L^{r+1})$ не удовлетворяет УСС.

Перейдем к построению сверхцепочки h_ω, согласованной с требованиями 1) — 3). Воспользуемся для этого диагональным методом. Занумеруем все схемы программ над базисом (S, P^r). Выбрав в качестве исходной цепочки h_0 пустую цепочку e, будем последовательно в порядке возрастания номеров t просматривать все схемы программ π_t над указанным базисом, наращивая при этом текущую цепочку о. с. h_t с тем, чтобы обеспечить выполнимость требования 3) для схем π_i, $1 \leqslant i \leqslant t$. Предположим, что по окончании исследования первых $t-1$ схем была построена такая цепочка $h_{t-1} = s_1 \ldots s_k$, состоящая из о. с. $s^1, \ldots, s^{2^r+1}$, что для любой схемы π_i, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, спустя k этапов любого ее выполнения в рамках модели $K(L_k^r)$, где $\Gamma_{L_k^r} = \bigcup_{n=0}^{k} W_n(h_{t-1})$, либо достигается выход схемы, либо л. п. p_0 приобретает значение 1. Обратимся к схеме π_t и, выбрав в качестве V_0 однородное множество, состоящее из входа схемы, рассмотрим другое однородное множество $V_1 = V_0(s_1 \ldots \ldots s_k, 0 \ldots 0)$. Если $V_1 = \varnothing$, то это означает, что в модели $K(L_k^r)$ не допустимо ни одно выполнение схемы π_t, при котором значение л. п. $p_0 = 0$ на протяжении k начальных этапов. Тогда h_t полагается равной h_{t-1} и осуществляется переход к анализу следующей по порядку схемы π_{t+1}. Предположим, что $V_1 = \{v_1, \ldots, v_T\} \neq \varnothing$. Оценим мощность однородных множеств $U_j = V_1(s^j, 0)$ вершин схемы π для различных о. с. $s^j \in S$, $1 \leqslant j \leqslant l = 2^r + 1$. Очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{l} |U_j| = \left|\bigcup\limits_{j=1}^{l} U_j\right| \leqslant T2^r$. Поскольку в данном случае $2^r < l \leqslant M$, то среди множеств вершин U_j найдется s^{j_1}-однородное множество U_{j_1} такое, что $|U_{j_1}| < T = |V_1|$. Добавим к цепочке h_{t-1} о. с. $s_{k+1} = s^{j_1}$ и повторим приведенные выше рассуждения применительно к множеству вершин $V_2 = U_{j_1}$. В результате будет построена последовательность однородных множеств $V_1, V_2, \ldots, V_m$, $0 \leqslant m \leqslant T$, такая, что $|V_1| > |V_2| > \ldots > |V_m| = 0$, и соответствующая им последовательность о. с. $s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_{k+m}$. Равенство $|V_m| = 0$ означает, что ни одно выполнение схемы π_t на функциях разметки из L^r_{k+m}, где $\Gamma_{L^r_{k+m}} = \bigcup\limits_{n=0}^{k+m} W_n(h_t)$, $h_t = s_1 \ldots s_k s_{k+1} \ldots s_{k+m}$, не сохраняет значение л. п. p_0 равным 0 на протяжение $k+m$ или более этапов. Поскольку нумерация π_t охватывает все схемы над базисом (S, P^r), то сверхцепочка h_ω, образующаяся в процессе построения h_t при $t \to \infty$, удовлетворяет требованиям 1) и 3).

Покажем, что $\mathrm{INIT}(h_\omega)$ — нерегулярное множество. Предположим противное. Выберем произвольные два набора $\Delta' = (0, \delta_1, \ldots, \delta_r)$ и $\Delta'' = (1, \delta_1, \ldots, \delta_r)$, отличающиеся только значением первой компоненты p_0. Рассмотрим множество конфигураций $\Gamma = \{(s_0, \Delta')(s_1, \Delta') \ldots (s_{k-1}, \Delta') \times (s_k, \Delta'') : s_1 \ldots s_{k-1} s_k \in \mathrm{INIT}(h_\omega),\ 0 \leqslant k\}$. Нетрудно убедиться в том, что Γ является S-однозначным множеством конфигураций. Ввиду того, что регулярность $\mathrm{INIT}(h_\omega)$ влечет регулярность Γ, к данному множеству конфигураций применимо утверждение 9. Поэтому для некоторой схемы π над базисом (S, P^r) справедливо соотношение $\Gamma_\pi = \Gamma$. Однако структура конфигураций множества Γ свидетельствует о том, что схема π способна сохранять значение л. п. p_0 равным 0 как угодно долго в процессе различных результативных выполнений в модели $K(L^r)$. Таким образом, предположение о регулярности множества цепочек $\mathrm{INIT}(h_\omega)$ вступает в противоречие с требованием 3), которому h_ω удовлетворяет в силу проведенного выше построения.

Итак, при $r < \log_2(M)$ построены модели $K(L)$, подтверждающие справедливость доказываемой теоремы.

Перейдем к изучению случая $r = \log_2(M)$. Множество L вновь будет состоять из единственной функции разметки μ. Однако теперь μ будет однозначно определяться двумя параметрами: сверхцепочкой о. с. $h_\omega = s_1 \ldots s_k$ и бесконечной последовательностью двоичных символов $\delta^0_1, \ldots, \delta^0_k, \delta^0_{k+1}, \ldots$ Для всякой цепочки о. с. $h \in S^*$ значение $\mu(h)$ равно (δ^0_{k+1}), если $h = s_1 \ldots s_k \in \mathrm{INIT}(h_\omega)$, и равно (1), если $h \notin \mathrm{INIT}(h_\omega)$. Упомянутые параметры функции μ должны удовлетворять следующим двум требованиям:

1′) $C = \{h : \mu(h) = 0\}$ — нерегулярное множество цепочек;

2′) какова бы ни была схема π над базисом (S, P^r), $P^r = \{p_0, p_1, \ldots, p_r\}$, существует $N > 0$ такое, что при любом результативном выполнении π на произвольной функции разметки μ' в рамках универсального логического r-расширения $K(L^r)$ модели $K(L)$ на некотором i-м этапе, $1 \leqslant i < N$, либо достигается выход схемы, либо л. п. p_0 приобретает значение, отличное от δ^0_i.

Требование 2′), так же как и аналогичное требование 3) в случае $r < \log_2(M)$, означает, что для произвольной схемы π, начиная с некоторого фиксированного этапа в процессе всякого результативного выполнения π в модели $K(L^r)$, л. п. p_0 принимает только значение 1. Поэтому множество конфигураций $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L^r}$ всегда будет регулярным. Тем самым требование 2') обеспечивает выполнимость УВСС для модели $K(L^r)$.

Схема π'', позволяющая убедиться в том, что универсальное логическое $(r+1)$-расширение $K(L^{r+1})$ модели $K(L)$ не удовлетворяет УСС, имеет структуру, подобную рассмотренной выше схеме π'. Схема π'' содержит в точности M преобразователей $v_1, \ldots, v_M$, помеченных о. с. $s^1, \ldots, s^M$. Дуги, исходящие из этих вершин, а также из входа схемы, ведут в однотипные логические фрагменты F'', представленные на рис. 11. Через K_i обозначены различные элементарные конъюнкции, зависящие от свободных переменных $p_1, \ldots, p_r$. Поскольку значение л. п. p_0 на каждом этапе выполнения схемы π'' определяется функцией разметки μ, $p_1, \ldots, p_r, p_{r+1}$ способны принимать произвольные значения, множество $F_{\pi''}(L^{r+})$ состоит в точности из всех тех цепочек $h \in S^*$, для которых $\mu(h) = (0)$, т. е. $F_{\pi''}(L^{r+1}) = C$. Если при построении функции μ будет соблюдено требование 1'), то модель $K(L^{r+1})$ согласно утверждению 8 не будет удовлетворять УСС.

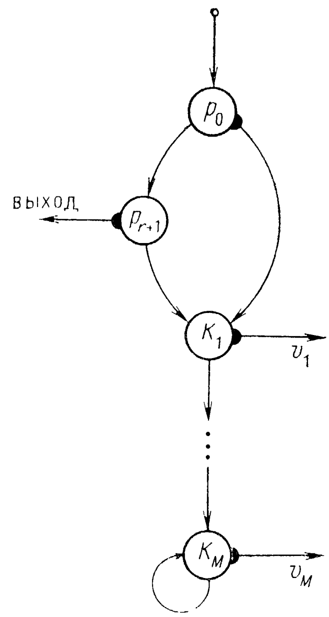

Рис. 11

Построение функции разметки μ осуществляется диагональным методом. Занумеруем все схемы программ, представленные в нормальной форме над базисом (S, P^r). Положим $h_0 = e$ и $\delta_1^0 = 0$. Просматривая последовательно в порядке возрастания номеров t схемы π_t, будем наращивать текущую цепочку о. с. h_t и добавлять новые символы к двоичной последовательности $\{\delta_n^0\}$. Предположим, что после анализа первых $t-1$ схем была построена цепочка $h_{t-1} = s_1 \ldots s_k$ и последовательность двоичных символов $\delta_1^0, \ldots, \delta_k^0, \delta_{k+1}^0$, гарантирующие выполнение требования 2') для схем π_i, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, если полагать $\mu(h) = \delta_{j+1}^0$ при $h = s_1 \ldots s_j \in \mathrm{INIT}(h_{t-1})$ и $\mu(h) = (1)$ при $h \notin \mathrm{INIT}(h_{t-1})$. Обратимся к схеме π_t. Возьмем в качестве V_0 однородное множество, состоящее из входа схемы π_t, и, выбрав произвольный о. с. $s_{k+1} \in S^*$, рассмотрим однородное множество вершин

$$V_1 = V_0'(s_1 \ldots s_k s_{k+1}, \delta_1^0 \ldots \delta_k^0 \delta_{k+1}^0).$$

Если $V_1 = \varnothing$, то это означает, что π_t не допускает ни одного выполнения в рамках модели $K(L^r)$, при котором могут быть последовательно пройдены преобразователи с о. с. $s_1 \ldots s_k s_{k+1}$ и л. п. p_0 будет принимать значения $\delta_1^0 \ldots \delta_k^0 \delta_{k+1}^0$. Требование 2') будет выполнено для схем π'', если положить $h_t = h_{t-1} s_{k+1}$ и $\delta_{k+2}^0 = 0$.

Предположим, что $V_1 = \{v_1, \ldots, v_T\} \neq \varnothing$. Рассмотрим однородные множества вершин $U_{j,\delta} = V_1(s^j, \delta)$, $s^j \in S^*$, $1 \leqslant j \leqslant M$, $\delta \in \{0, 1\}$. Поскольку в нашем распоряжении имеется в точности $2^r = M$ различных наборов значений свободных л. п. и $U_{j_1,\delta} \cap U_{j_2,\delta} = \varnothing$ при $j_1 \neq j_2$ и фиксированном δ, то $\left|\bigcup_{j=1}^{M} U_{j,\delta}\right| = \sum_{j=1}^{M} |U_{j,\delta}| \leqslant TM$. Поэтому либо для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant M$, выполняется $|U_{i,\delta}| < T$, либо $|U_{1,\delta}| = \ldots = |U_{M,\delta}| = |V_1| = T$. В последнем случае выход схемы π'' не является Δ-преемником ни одного преобразователя из множества V_1, если набор Δ имеет вид $(\delta, \delta_1, \ldots, \delta_r)$, где $\delta_1, \ldots, \delta_r$ — произвольные значения л. п. $p_1, \ldots, p_r$. Обнаруженная закономерность позволяет выделить следующие две исчерпывающие возможности расположения преобразователей множества V_1 в схеме π_t.

а) Существует цепочка о. с. $h' = h_1'h_2' \dots h_m'$, $1 \leqslant m \leqslant T$, и последовательность двоичных символов $\delta_1' \dots \delta_{i_1}'\delta_{i_1+1}' \dots \delta_{i_2}' \dots \delta_{i_m}'$ такие, что для однородных множеств $V_l' = V_1(h_1' \dots h_l', \delta_1' \dots \delta_{i_l}')$, $l \leqslant m$, выполняются неравенства $|V_1| > |V_1'| > |V_2'| > \dots > |V_m'| = 0$. Отсюда видно, что требование $2'$) будет соблюдено для схемы π_t, если h_t положить равной $h_{t-1}s_{k+1}h'$, а в качестве соответствующей двоичной последовательности взять $\delta_1^0, \dots, \delta_{k+1}^0, \delta_1', \dots, \delta_{i_1}'\delta_{i_1+1}' \dots \delta_{i_2}' \dots \delta_{i_m}', 0$.

б) Существует цепочка о. с. h' длины m и двоичная последовательность $\delta_1', \dots, \delta_m'$ такие, что для всякой цепочки $h'' \in S^*$ и произвольной последовательности $\delta_1'', \dots, \delta_l''$ подходящей длины выполняется соотношение $|V_1(h', \delta_1' \dots \delta_m')| = |V_1(h'h'', \delta_1' \dots \delta_m'\delta_1'' \dots \delta_l'')| \neq 0$. Это означает, что в π'' не имеется маршрутов, связывающих преобразователи из $V_1(h', \delta_1' \dots \delta_m')$ с выходом схемы, т. е. ни одно выполнение схемы π'', при котором достигаются вершины указанного множества, не может быть результативным. Следовательно, соблюдение требования $2'$) для π'' будет обеспечено, если положить $h_t = h_{t-1}s_{k+1}h'$, а в качестве соответствующей двоичной последовательности взять $\delta_1^0, \dots, \delta_{k+1}^0, \delta_1', \dots, \delta_m', 0$. Поскольку каждая схема программ представима в нормальной форме и нумерация π_t охватывает все схемы над базисом (S, P^r), то сверхцепочка h_ω, образующаяся в процессе построения h_t при $t \to \infty$, удовлетворяет требованию $2'$).

Подобно тому как это было сделано в случае $r < \log_2(M)$, можно показать, что предположение о регулярности множества $C = \{h : \mu(h) = 0\}$ для построенной функции разметки μ вступает в противоречие с требованием $1'$).

Итак, данная теорема доказана для случая $r = \log_2(M)$. □

§ 7. Регулярные модели программ

Формальная модель программ $K(L)$ называется *регулярной*, или *автоматной* [4, 5], если Γ_L — регулярное множество конфигураций. Непосредственно из определения регулярной модели вытекает справедливость следующих высказываний

Утверждение 12. *Каждая регулярная модель удовлетворяет* УВСС.

Утверждение 13. *Множество регулярных моделей над базисом (S, P) с отношением $\leqslant$ образует частично-упорядоченную решетку.*

Утверждение 14. *Любое из рассмотренных ранее расширений регулярной модели (операторное расщепление, неподвижное операторное расширение, универсальное логическое расширение) также является регулярной моделью.*

Всякое замкнутое множество функций разметки L регулярной модели $K(L)$ над базисом (S, P) допускает простой способ задания посредством конечного автомата $\mathfrak{A}(Q, S \cup B_P, q_0, \Phi, \Psi)$. Здесь Q — конечное множество внутренних состояний автомата $\mathfrak{A}$, q_0 — начальное состояние, $S \cup B_P$ — входной алфавит автомата $\mathfrak{A}$, $\Phi : Q \times (S \cup B_P) \to Q$ — функция перехода, ψ: $Q \to 2^{B_P}$ — функция выхода. Обозначим через Φ^* обобщенную функцию перехода вида $Q \times (S \cup B_P)^* \to Q$ такую, что $\Phi^*(q, e) = q$ и $\Phi^*(q, y_1 \dots y_n) = \Phi(\Phi^*(q, y_1 \dots y_{n-1}), y_n)$, $y_1 \dots y_n \in (S \cup B_P)^*$, $n \geqslant 1$, а через Ψ — обобщенную функцию выхода вида $Q \times (S \cup B_P)^* \to 2^{B_P}$ такую, что $\Psi^*(q, y_1 \dots y_m) = \Psi(\Phi^*(q, y_1 \dots y_m))$, $m \geqslant 0$. Функция разметки μ принадлежит множеству L в том и только том случае, когда для каждой цепочки о. с. $h = s_1 \ldots s_n \in S^*$, $n \geqslant 0$, выполняется соотношение

$$\mu(h) \in \Psi^*(q_0,\ \mu(e)s_1\mu(s_1)s_2\mu(s_1s_2)\ldots s_{n-1}\mu(s_1s_2\ldots s_{n-1})s_n).$$

Выполнение схемы π в рамках регулярной модели $K(L)$, заданной конечным автоматом $\mathfrak{A}$, представляет собой обход схемы, на каждом этапе которого схема π для определения очередных значений л. п. обращается к автомату $\mathfrak{A}$. На основании имеющейся истории выполнения π (текущей конфигурации) $\mathfrak{A}$ выдает множество допустимых на данном этапе наборов значений л. п.; π недетерминированным образом выбирает один из предложенных наборов и, установив новые значения л. п., продолжает выполнение. Поскольку схема π может мыслиться как конечный автомат (см. утверждение 7), то выполнение схемы в регулярной модели представляет собой процесс взаимодействия двух замкнутых друг на друга конечных автоматов, подобный функционированию вычислительной модели В. М. Глушкова [2]. В модели Глушкова один из автоматов играет роль программы, а другой — роль вычислительной (информационной) среды, в которую погружена программа. В данном случае автомату $\mathfrak{A}$ придается несколько иная трактовка. Если регулярная формальная модель $K(L)$ пригодна для семантики $\sigma = \langle \Sigma, \Sigma_0, I\rangle$, то автомат $\mathfrak{A}$, задающий множество функций разметки L, содержит некоторую совокупность сведений о семантических характеристиках операторов и элементарных логических условий заданного программного базиса. Эта информация о семантике σ позволяет выделить в каждой схеме π допустимые траектории (маршруты) ее выполнения. Тем самым формальная модель $K(L)$ является конечно-автоматной аппроксимацией программной семантики σ. Конечность автомата $\mathfrak{A}$ позволяет разрешить проблему эквивалентности и построить конечную полную систему локальных правил эквивалентных преобразований схем программ в модели $K(L)$ [5]. Формальные модели схем Янова являются частным случаем автоматных моделей. Если о. с. s соответствует оператору присваивания вида $y := f(x_1, \ldots, x_k)$, то яновский сдвиг о. с. s (множество л. п., способных изменить значение после прохождения через преобразователь с о. с. s) однозначно определяется совокупностью элементарных логических условий, существенно зависящих от предметной переменной y. Нетрудно видеть, что это естественное свойство программной семантики может быть выражено конечным автоматом. Чуть более изощренный способ применения конечных автоматов для аппроксимации заданной семантики программ демонстрирует следующий

Пример 4. Рассмотрим программный базис (S, P), который в числе прочих содержит о. с. s_1, s_2 и л. п. p_1, p_2. Предположим, что s_1 соответствует оператору $u := f(x)$, s_2 — оператору $v := f(y)$, p_1 — логическому условию $x = y$, а p_2 — условию $u = v$. Кроме того, будем считать, что о. с. множества $s'(s'')$ соответствуют операторам, не изменяющим значений переменных x, $y(u, v)$. Тогда в рассматриваемой программной семантике значения л. п. p_1, p_2 будут совпадать после выполнения всякой цепочки операторов вида $h_1s_1h_2s_2h_3$, где h_1, $h_2 \in (S')^*$, $h_3 \in (S'')^*$. Ясно, что данное свойство семантики легко выражается регулярными моделями при подходящем выборе автомата $\mathfrak{A}$. Проанализировав подобные свойства семантики программ σ, можно построить для каждого из них свой автомат $\mathfrak{A}_i$ и модель $K(L_i)$, а затем рассматривать в качестве аппроксимирующей формальной модели σ-пригодную регулярную модель $K(\bigcap L_i)$.

Основное характеристическое свойство регулярных моделей, определяющее их положение в иерархии УСС-моделей, устанавливает

Теорема 11. *Следующие три утверждения эквивалентны*:

1) $K(L)$ — *регулярная модель над базисом* (S, P), $|S| = M \geqslant 2$;

2) *любое универсальное логическое расширение модели* $K(L)$ *удовлетворяет* УВСС;

3) *универсальное логическое r-расширение модели $K(L)$ удовлетворяет* УСС *при некотором* $r \geqslant \log_2(M+1)$.

Доказательство. 1) $\to$ 2). Следует из утверждений 12 и 14.

2) $\to$ 3). Следует из определения УВСС-модели.

3) $\to$ 1). Согласно утверждению 10 достаточно доказать справедливость теоремы при $r =]\log_2(M+1)[$. Предположим, что $S = \{s^1, \ldots, s^M\}$, $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ и логическое r-расширение $K(L^r)$ модели $K(L)$ сопровождается введением свободных л. п. $p_{m+1}, \ldots, p_{m+r}$. Для каждого набора Δ значений л. п. условимся обозначать через $N(\Delta)$ лексикографический порядковый номер этого набора. Рассмотрим схему π, представленную

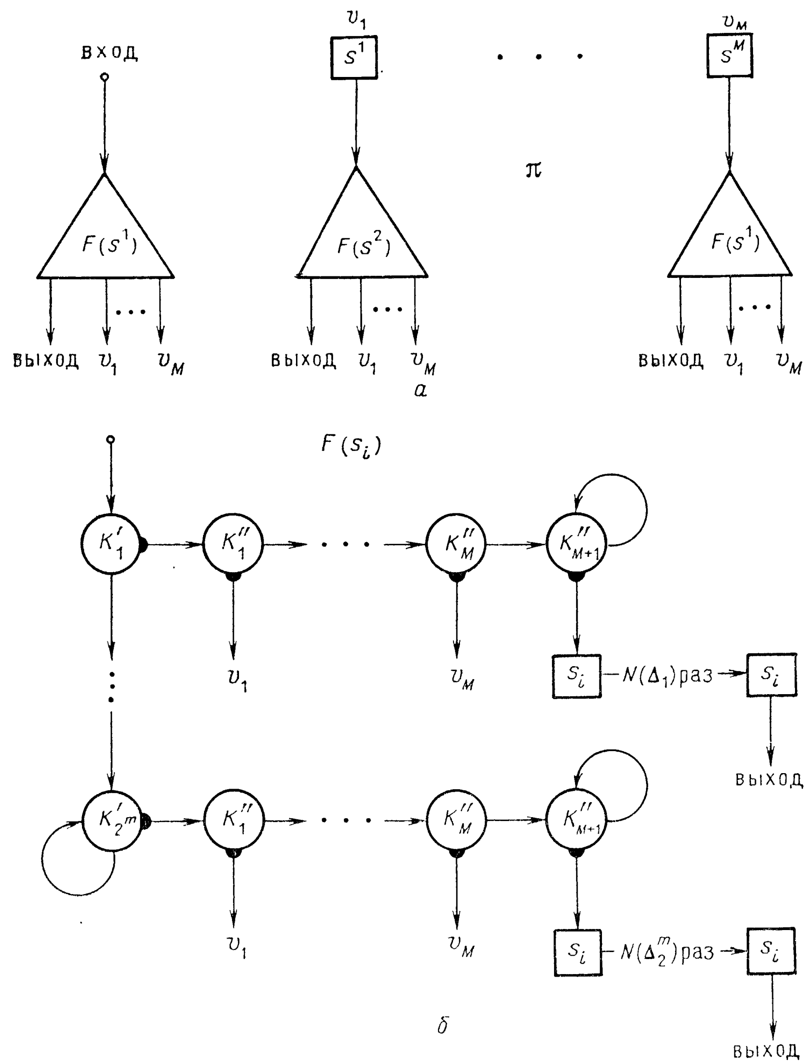

Рис. 12

на рис. 12. В схеме выделены M преобразователей $v_1, \ldots, v_M$, помеченных о. с. $s^1, \ldots, s^M$ соответственно. Дуги, исходящие из входа схемы, а также из вершин $v_1, \ldots, v_M$, ведут в логические фрагменты $F(s_i)$, изображенные на рис. 12, *б* и отличающиеся друг от друга только наименованием используемого в них о. с. s_i. В каждом таком фрагменте через $K_j'(K_j'')$ обозначена элементарная конъюнкция $p_1^{\delta_1'} \& \cdots \& p_m^{\delta_m'}$ (соответственно $p_{m+1}^{\delta_r''} \& \cdots \& p_{m+r}^{\delta_r''}$), сопоставленная j-му в лексикографическом порядке набору $\Delta' = (\delta_1', \ldots, \delta_m')$ $(\Delta'' = (\delta_1'', \ldots, \delta_r''))$ значений л. п. $p_1, \ldots, p_m$ (свободных л. п. $p_{m+1}, \ldots, p_{m+r}$). Фрагменты устроены таким образом, что для каждой пары выделенных преобразователей v_i, v_k и произвольного набора $\Delta' = (\delta_1', \ldots, \delta_m') \in B_P$ вершина v_i является $(\delta_1', \ldots, \delta_m', \delta_1'', \ldots, \delta_r'')$-преемником v_k в том и только том случае, когда набор $\Delta'' = (\delta_1'', \ldots, \delta_r'')$ значений свободных л. п. $p_{m+1}, \ldots, p_{m+r}$ имеет порядковый номер $N(\Delta'') = i$, $1 \leqslant i \leqslant M$. Если же $N(\Delta'') > M$, а значения л. п. $p_1, \ldots, p_m$ образуют набор Δ', то из преобразователя v_k независимо от дальнейших изменений значений л. п. будет достигнут выход схемы после прохождения через $N(\Delta')$ преобразователей с некоторым о. с. $s' \neq s^k$. Тем самым все наборы значений, которые могут быть присвоены «связанным» л. п. $p_1, \ldots, p_m$ в процессе выполнения схемы, оказались «закодированными» цепочками о. с. Исходя из указанных замечаний, индукцией по длине конфигурации можно показать, что $w = (s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1) \ldots (s_n, \Delta_n)$ принадлежит множеству Γ_L тогда и только тогда, когда для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant n$, множество $F_\pi(L^r)$ содержит цепочку $h_t = s_1 \ldots s_t (s_l)^{N(\Delta_t)}$, где $l = 1$ при $t = 0$, $l = 1 + (t \bmod M)$ при $t > 0$. Поскольку модель $K(L^r)$ удовлетворяет УСС, то $F_\pi(L^r)$, а следовательно, и Γ_L являются регулярными множествами. □

§ 8. Заключение

Суммируем основные результаты исследования иерархии УСС-моделей. Для заданного базиса (S, P), $|S| = M > 1$, обозначим через

$\mathcal{M}_f$ — класс УСС-моделей,

$\mathcal{M}_{cf}$ — класс УВСС-моделей,

$\mathcal{M}_f^b$ —класс моделей, операторное расщепление которых удовлетворяет УСС,

$\mathcal{M}_f^{se}$ — класс моделей, неподвижное операторное расширение которых удовлетворяет УСС,

$\mathcal{M}_f^{le}(i)$ — класс моделей, универсальное логическое i-расширение которых удовлетворяет УСС,

$\mathcal{M}_r$ — класс регулярных (автоматных) моделей.

Теорема 12. *Для данных классов моделей справедливы соотношения*

$$\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_f^{le}(\,]\log_2(M+1)[\,) \subset \mathcal{M}_f^{le}([\log_2 M]) \subset \ldots \subset \mathcal{M}_f^{le}(1) = \mathcal{M}_f^{se} = \\ = \mathcal{M}_f^b = \mathcal{M}_{cf} \subset \mathcal{M}_f.$$

Приведенные здесь результаты исследования относятся к формальным моделям программ $K(\varepsilon, L)$ с тождественным отношением эквивалентности ε на множестве S^*. При изучении формальных моделей $K(\tau, L)$ более общего вида с произвольным отношением эквивалентности τ возникают следующие вопросы.

1. Какова должна быть взаимосвязь τ и L для того, чтобы выполнялось соотношение $K(\tau, L) \approx K(\tau, [L])$?

2. При каких условиях свободная в модели $K(\varepsilon, L)$ схема π останется свободной в модели $K(\tau, L')$, где L' — максимальное в L подмножество функций разметки, согласованное с отношением эквивалентности τ?

3. При каких условиях выполнимости УСС (УВСС) для модели $K(\varepsilon, L)$ влечет выполнимость УСС (УВСС) для модели $K(\tau, L)$?

4. При каких τ сохраняется справедливость равенств и включений, приведенных в теореме 12?

В заключение автор выражает признательность Р. И. Подловченко за постановку задачи и стимулирующие дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции.— М.: Мир, 1978.
2. Глушков В. М., Летичевский А. А. Теория дискретных преобразователей // Избранные вопросы алгебры и логики. Сборник, посвященный памяти А. И. Мальцева.— Новосибирск: Наука, 1973.— С. 5—39.
3. Ершов А. П. Об операторных схемах Янова // Проблемы кибернетики. Вып. 20.— М.: Наука, 1967.— С. 181—200.
4. Захаров В. А. Автоматные модели машин Тьюринга // ДАН СССР.— 1986.— Т. 291, № 2.— С. 197—201.
5. Захаров В. А. Автоматные модели программ // ДАН СССР.— 1989.— Т. 309, № 1.— С. 24—27.
6. Иткин В. Э. Логико-термальная эквивалентность схем программ // Кибернетика.— 1972.— № 1.— С. 5—27.
7. Иткин В. Э. Эквивалентность свободных схем программ // Кибернетика.— 1978.— № 1.— С. 1—9.
8. Котов В. Е. Введение в теорию схем программ.— Новосибирск.: Наука, 1978.
9. Ляпунов А. А. О логических схемах программ // Проблемы кибернетики. Вып. 1.— М.: Физматгиз, 1958.— С. 56—74.
10. Патерсон М. С. Проблемы разрешимости в вычислительных моделях // Теория программирования. Т. 1.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972.— С. 119—139.
11. Подловченко Р. И. Модели последовательностных программ, применяемые для изучения функциональной эквивалентности программ // Кибернетика.— 1979.— № 1.— С. 20—28.
12. Подловченко Р. И. Иерархия моделей программ // Программирование.— 1981.— № 2.— С. 3—14.
13. Подловченко Р. И. Полугрупповые модели программ // Программирование.— 1981.— № 4.— С. 3—13.
14. Подловченко Р. И. Модели программ над структурированным базисом // Программирование.— 1982.— № 1.— С. 9—19.
15. Подловченко Р. И. Исследование s-моделей программ с позиции построения для них алгоритма канонизации // Программирование.— 1986.— № 2.— С. 3—13.
16. Подловченко Р. И. О проблеме эквивалентных преобразований программ // Программирование.— 1986.— № 6.— С. 3—13.
17. Подловченко Р. И. Схемы программ с монотонными операторами // Программирование.— 1988.— № 6.— С. 10—21.
18. Сабельфельд В. К. Новый класс схем с разрешимой функциональной эквивалентностью // Информат.-инструм. средства.— Новосибирск, 1988.— С. 108—126.
19. Син Мен Де. Логико-термально эквивалентные преобразования схем программ // Кибернетика.— 1976.— № 5.
20. Янов Ю. И. О логических схемах алгоритмов // Проблемы кибернетики. Вып. 1.— М.: Физматгиз, 1958.— С. 75—127.
21. Янов Ю. И. О вычислениях в одном классе программ // Проблемы кибернетики. Вып. 32.— М.: Наука, 1977.— С. 237—245.
22. Luckham D. C., Park D. M. R., Paterson M. S. On formalized computer programs // Journal of the Computer and System Science.— 1970.— V. 2, № 3. (Русский перевод: Лакхем Д., Парк Д. М., Патерсон М. С. О формализованных машинных программах // Кибернетический сборник (новая серия). Вып. 12.— М.: Мир, 1975.— С. 78—114).
23. Meyer A. R., Ritchie D. M. Computational complexity and programm structure // Res. Paper RC — 1817, IBM T. J., Watson Res. Ctr., Yorktown Heights, N. Y., May 1967.
24. Rice H. G. Classes of recursively enumerable sets and their decision problems. // Trans. Amer. Math. Soc.— 1953.— V. 74, № 2.
25. Tsichritzis D. The equivalence problem of simple programs. // Journal of the Association of Computing Machinery.— 1970.— V. 17, № 4.

Поступило в редакцию 3 VII 1991