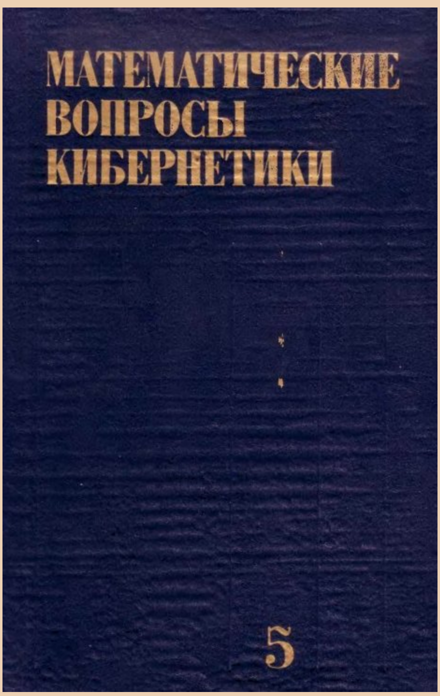

В. П. Тарасова

Оптимальное восстановление характеристических функций, заданных в узлах целочисленной решетки

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Тарасова В. П. Оптимальное восстановление характеристических функций, заданных в узлах целочисленной решетки // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. — М.: Наука, 1994. — С. 239–261. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1994-239

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ В УЗЛАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКИ

В. П. ТАРАСОВА

(МОСКВА)

В настоящей работе решается задача оптимального восстановления функций (формализация варианта игры «морской бой»). Исследуемые функции являются характеристическими, определены в узлах целочисленной решетки, и каждая из них принимает единичные значения на некотором дискретном отрезке. Восстановление функции из указанного класса осуществляется путем отыскания соответствующего ей единичного отрезка. Таким образом, данная задача является задачей оптимального поиска [1—3, 10, 15]. Здесь мы под задачей оптимального поиска будем понимать задачу построения (нахождения) оптимальной стратегии первого игрока в многоходовой (позиционной) игре.

Для решения задачи применяется метод СП моделирования стратегии противника, который на протяжении ряда лет применялся автором для решения задач поиска и впервые в явном виде был опубликован в [14]. Метод позволяет регулярным способом конструировать эффективные стратегии поиска и одновременно доказывать их оптимальность. Последнее, как правило, представляет значительную трудность.

В первых трех параграфах на языке антагонистических детерминированных игр излагается теория, используемая затем в § 4 для описания и обоснования метода СП. В пятом параграфе решается задача восстановления характеристических функций.

В работе используются следующие обозначения:

$\#$ — конец доказательства,

$\rightleftharpoons$ — равно по определению,

$\varnothing$ — пустое множество,

$|M|$ — мощность множества M,

$M/_{\equiv}$ — фактор-множество множества M по эквивалентности $\equiv$,

т. н. г. $\mathfrak{M}$ — точная нижняя грань множества $\mathfrak{M}$,

т. в. г. $\mathfrak{M}$ — точная верхняя грань множества $\mathfrak{M}$,

МП — модель противника,

СП — синкретическая стратегия второго игрока (синкретический противник),

$|H|$ — длина интервала H,

$$\left.\begin{array}{l}\langle\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{M};\delta,\leqslant\rangle\\ \langle\mathfrak{A},\mathfrak{B},\delta\rangle\\ I\langle\mathfrak{B},\delta\rangle\\ I\langle\mathfrak{B}\rangle\end{array}\right\}$$ — антагонистическая игра в нормальной форме и ее краткие обозначения,

$\mathfrak{A}$ — множество стратегий первого игрока,

$\mathfrak{B}$ — множество стратегий второго игрока (противника),

$A_1, A_2, A', A'', \bar{A}, \tilde{A}, A$ — стратегии из $\mathfrak{A}$,
B_1, B_2, B', B'', B — стратегии из $\mathfrak{B}$,
$\langle\mathfrak{M}, \leqslant\rangle$ — линейно упорядоченное множество,
δ, δ' — функции выигрыша,
$\delta(A, \mathfrak{B})$ — гарантированный выигрыш A,
(A, B) — ситуация,
$\left.\begin{array}{l}\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; X, Y; \delta, \leqslant\rangle \\ \quad\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \delta\rangle \\ \quad I\langle\mathfrak{B}, \delta\rangle \\ \quad I\langle\mathfrak{B}\rangle\end{array}\right\}$ — многоходовая антагонистическая игра и ее краткие обозначения,
X — множество ходов первого игрока,
Y — множество ходов второго игрока (противника),
$(A, B)=(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ — n-ходовая партия (ситуация),
$(A_iB_i)=(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$ — позиция после i-го хода в партии (A, B),
$\operatorname{rang}(A, B)=r(A, B)$ — число ходов в партии (A, B),
$I\langle\mathfrak{B}\rangle \mapsto I\langle\mathfrak{B}'\rangle$ —игра $I\langle\mathfrak{B}'\rangle$ ассоциирована с $I\langle\mathfrak{B}\rangle$,
$\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}'$ — множество стратегии $\mathfrak{B}'$ ассоциировано с $\mathfrak{B}$,
$B \equiv B'$ — стратегия B эквивалентна B',
$\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, X, Y, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant\rangle$ — многоходовая антагонистическая игра.
Пунктами в § 5 будут шаги метода СП.

§ 1. Антагонистические игры в нормальной форме

Как правило, конкретные задачи поиска представимы в виде позиционных (многоходовых) игр. Однако многие используемые идеи справедливы для антагонистических игр в нормальной форме. А так как нормальная форма более удобна для формулировки понятий и получения общих результатов, то начнем с рассмотрения такого вида игр.

1. Определение основных понятий антагонистических игр. Предварительно дадим нужные для дальнейшего сведения из теории упорядоченных множеств.

Пусть $\mathfrak{M}'$ — подмножество линейно упорядоченного множества $\mathfrak{M}$. Тогда элемент m из $\mathfrak{M}$ называется нижней гранью для $\mathfrak{M}'$, если он меньше или равен любому элементу m' из $\mathfrak{M}$. Элемент m из $\mathfrak{M}$ называется верхней гранью для $\mathfrak{M}'$, если он больше или равен любому элементу m' из $\mathfrak{M}'$. Если среди нижних граней в множестве $\mathfrak{M}$ есть наибольшая, то она называется точной нижней гранью $\mathfrak{M}'$ и обозначается т. н. г. $\mathfrak{M}'$ или $\inf\mathfrak{M}'$. Если среди верхних граней в множестве $\mathfrak{M}$ есть наименьшая, то она называется точной верхней гранью $\mathfrak{M}'$ и обозначается т. в. г. $\mathfrak{M}'$ или $\sup\mathfrak{M}'$. Если $\inf\mathfrak{M}'$ существует и содержится в $\mathfrak{M}'$, то он обозначается через $\min\mathfrak{M}'$. Если $\sup\mathfrak{M}'$ существует и содержится в $\mathfrak{M}'$, то он обозначается $\max\mathfrak{M}'$.

Теорема 1. *Пусть имеются: множества $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, линейно упорядоченное множество $\mathfrak{M}$, функция δ, $\delta: \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\to\mathfrak{M}$, и существуют*

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}\inf_{B\in\mathfrak{B}}\delta(A, B), \quad \inf_{B\in\mathfrak{B}}\sup_{A\in\mathfrak{A}}\delta(A, B).$$

Тогда выполняется неравенство

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}\inf_{B\in\mathfrak{B}}\delta(A, B)\leqslant\inf_{B\in\mathfrak{B}}\sup_{A\in\mathfrak{A}}\delta(A, B).$$

Доказательство. Из определения т. н. г., т. в. г. и функции δ для любых A из $\mathfrak{A}$, B из $\mathfrak{B}$ имеем $\inf\limits_{B\in\mathfrak{B}}\delta(A, B)\leqslant\delta(A, B)\leqslant\sup\limits_{A\in\mathfrak{A}}\delta(A, B)$ и, значит, $\inf\limits_{B\in\mathfrak{B}}\delta(A, B)\leqslant\sup\limits_{A\in\mathfrak{A}}\delta(A, B)$. Из последнего неравенства получаем

$\inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \delta(A, B) \leqslant \inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \sup\limits_{A\in\mathfrak{A}} \delta(A, B)$ — на основании того, что величина $\inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \delta(A,B)$ не зависит от B. И, наконец, $\sup\limits_{A\in\mathfrak{A}} \inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \delta(A, B) \leqslant \inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \sup\limits_{A\in\mathfrak{A}} \delta(A, B)$ на основании того, что величина $\inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \sup\limits_{A\in\mathfrak{A}} \delta(A, B)$ не зависит от A. #

Система $\langle\mathfrak{M}, +, \leqslant\rangle$ называется линейно упорядоченной группой, если $\mathfrak{M}$ является группой относительно двуместной операции $+$, линейно упорядоченно относительно $\leqslant$, и дополнительно выполняется следующая аксиома монотонности для a, b, c из $\mathfrak{M}$: из $a \leqslant b$ следует $a+c \leqslant b+c$ и $c+a \leqslant c+b$. Аддитивная группа вещественных чисел с их естественным порядком будет линейно упорядоченной группой. Любая подгруппа этой группы будет также линейно упорядоченной группой.

Более подробно об упорядоченных множествах, группах и полях см. в [7].

Антагонистической игрой в нормальной форме будем называть систему $I = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant\rangle$, состоящую из некоторых множеств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$, функции δ: $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B} \to \mathfrak{M}$ и отношения $\leqslant$ линейной упорядоченности на $\mathfrak{M}$. При этом множество $\mathfrak{A}$ называется множеством стратегий первого игрока; множество $\mathfrak{B}$ — множеством стратегий второго игрока (противника), $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ — множеством ситуаций (A, B) при $A\in\mathfrak{A}$, $B\in\mathfrak{B}$, δ — платежная функция, или функция выигрыша первого игрока. Заметим, что если $\mathfrak{M}$ есть линейно упорядоченная группа, то приведенное определение превращается в традиционное определение антагонистической игры как парной игры с нулевой суммой, в которой функция выигрыша второго игрока δ' задается равенством $\delta'(A, B) = -\delta(A, B)$ для $A\in\mathfrak{A}$ $B\in\mathfrak{B}$ [4].

Линейная упорядоченность на $\mathfrak{M}$ позволяет определить гарантированный выигрыш и оптимальные (максминные, минимаксные) стратегии. Если первый игрок стремится максимировать свой выигрыш, то гарантированный выигрыш (результат) стратегии A из $\mathfrak{A}$ обозначается через $\delta(A, \mathfrak{B})$ и определяется равенством $\delta(A, \mathfrak{B}) = \inf\{\delta(A, B) \mid B\in\mathfrak{B}\}$ при условии, что соответствующий inf в множестве $\mathfrak{M}$ существует. Если же задачей первого игрока является минимизация выигрыша, то гарантированный выигрыш стратегии A из $\mathfrak{A}$ определяется равенством $\delta(A, \mathfrak{B}) = \sup\{\delta(A, B) \mid B\in\mathfrak{B}\}$, при условии, что соответствующий sup в $\mathfrak{M}$ существует. Заметим, что этот случай сводится к первому с помощью замены порядка на $\mathfrak{M}$ на противоположный. Для $E\in\mathfrak{M}$ стратегии A_0 из $\mathfrak{A}$ называется *E-оптимальной*, если $\delta(A_0, \mathfrak{B}) \leqslant E$. Стратегия A_0 из $\mathfrak{A}$ называется оптимальной, если выполняется $\delta(A_0, \mathfrak{B}) = \sup\{\delta(A, \mathfrak{B}) \mid A\in\mathfrak{A}\}$, т. е. стратегия A_0 имеет наибольший гарантированный выигрыш. Определяемые так оптимальные стратегии обычно называются *максминными*.

Выигрыш первого игрока $\delta(A_0, B)$, применяющего стратегию A_0, будем называть также проигрышем второго игрока (противника), применяющего стратегию B, а $\delta(\mathfrak{A}, B) \rightleftharpoons \sup\{\delta(A, B) \mid A\in\mathfrak{A}\}$ — гарантированным проигрышем второго игрока, применяющего стратегию B. Стратегия B_0 из $\mathfrak{B}$, имеющая наименьший гарантированный проигрыш, называется *оптимальной* (минимаксной) стратегией второго игрока, т. е. $\delta(\mathfrak{A}, B_0) = \inf\{\delta(\mathfrak{A}, B) \mid B\in\mathfrak{B}\}$. В случае если $\mathfrak{M}$ — упорядоченная группа, можно определить выигрыш $\delta'(A, B)$ второго игрока равенством $\delta'(A, B) = -\delta(A, B)$, а гарантированный выигрыш второго игрока $\delta'(\mathfrak{A}, B) = \sup\{-\delta(A, B) \mid A\in\mathfrak{A}\}$.

Величина $\alpha = \sup\{(\inf\{\delta(A, B) \mid B\in\mathfrak{B}\}) \mid A\in\mathfrak{A}\}$ называется *нижней ценой игры*. Величина $\beta = \inf\{(\sup\{\delta(A, B) \mid A\in\mathfrak{A}\}) \mid B\in\mathfrak{B}\}$ называется *верхней ценой игры*.

На основании теоремы 1 имеет место неравенство $\alpha \leqslant \beta$. Если $\alpha = \beta = \nu$, то ν называется значением или ценой игры. Пара (A_0, B_0) оптимальных стратегий соответственно первого и второго игрока называется седловой точкой, если $\delta(A_0, B_0) = \nu$.

Введем отношение доминирования $\succ$ на множестве $\mathfrak{A}$ стратегий первого игрока. Считаем, A_1 *доминирует над* A_2, если для любого B из $\mathfrak{B}$ выполняется $\delta(A_1, B) \geqslant \delta(A_2, B)$, т. е. $A_1 \succ A_2 \rightleftharpoons \forall B \in \mathfrak{B} (\delta(A_1, B) \geqslant \delta(A_2, B))$. Очевидно, что отношение доминирования будет отношением частичного порядка. Аналогично вводится отношение доминирования для стратегий второго игрока.

Стратегия $\bar{A}_0$ из $\mathfrak{A}$ называется *абсолютно оптимальной*, если она доминирует над любой стратегией из $\mathfrak{A}$. Стратегия $\tilde{A}_0$ из $\mathfrak{A}$ называется наилучшей, если она доминирует над любой стратегией из множества $\mathfrak{O}$ оптимальных стратегий первого игрока. Проиллюстрируем введенные понятия.

В игре I, у которой $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, δ задано табл. 1, имеем: $\mathfrak{O} = \{A_1, A_2\}$ — множество оптимальных стратегий, A_2 — наилучшая стратегия, но не абсолютно оптимальная, B_4 — абсолютно оптимальная стратегия второго игрока. Если игра I' такова, что $\mathfrak{A}$ — то же, что и в игре I, а $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = \{B_1, B_2, B_3\}$, то в ней нет наилучшей, а значит, и абсолютно оптимальной стратегии второго игрока.

Таблица 1

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	6	5	5
A_2	8	6	5	5
A_3	9	3	4	3
A_4	7	6	4	4

Игра $I = \langle \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{M}'; \delta', \leqslant' \rangle$ называется *подыгрой игры* $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$, если $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, δ' — ограничение δ на $\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}'$, $\leqslant'$ — ограничение $\leqslant$ на $\mathfrak{M}$.

2. Игровое представление задачи поиска корня функции. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество непрерывных вещественных возрастающих функций, заданных на отрезке вещественных чисел $[a, b]$ и принимающих на концах отрезка значения разных знаков. Поиск корня для произвольной функции f из $\mathfrak{B}$ осуществляются вычислителем путем последовательного выбора n точек x_i (ходов вычислителя) из отрезка $[a, b]$ и вычисления значений $f(x_i)$ в этих точках, т. е. выборы и вычисления производятся в следующем порядке: $x_1, f(x_1), \ldots, x_n, f(x_n)$. Предполагается также, что значения функции могут быть вычислены точно. Результатом поиска будет наименьший интервал из $[a, b]$, содержащий корень f, называемый интервалом локализации корня и получаемый на основании следующих индуктивно сформулированных свойств функций из $\mathfrak{B}$. Пусть x_{i+1} — $(i+1)$-й выбор (ход) вычислителя, H_{i+1} — интервал локализации, полученный после $(i+1)$-го хода вычислителя, $x' < x_{i+1} < x''$, $f(x') < 0$, $f(x'') > 0$. Тогда если $f(x_{i+1}) < 0$, то $H_{i+1} = (x_{i+1}, x'')$; если $f(x_{i+1}) > 0$, то $H_{i+1} = (x', x_{i+1})$. Эффективность поиска полностью определяется выбором точек из $[a, b]$ и оценивается для каждого набора $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ из $[a, b]$ длиной $\delta(X_n, f) = |H_n|$ определенного этим набором интервала H_n локализации корня f. Гарантированным результатом произвольного набора X_n в классе будет такой интервал локализации, длина которого равна $\sup \delta(X_n, f)$, где sup берется по всем f из $\mathfrak{B}$.

Требуется указать такой набор X_n^0, который гарантировал бы наименьший в классе $\mathfrak{B}$ интервал локализации корня, т. е.

$$\sup_{f \in \mathfrak{B}} \delta(X_n^0, f) = \inf_{X_n \in 2^{\{X_n\}}} \sup_{f \in \mathfrak{B}} \delta(X_n, f).$$

Приведенная задача имеет игровое представление в виде антагонистической игры в нормальной форме $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$, где $\mathfrak{A} = 2^{\{X_n\}}$,

$\mathfrak{B}$ — класс $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M} = R^+$ (множество положительных вещественных чисел) $\delta(X_n, f)$ — длина интервала локализации корня, $\leqslant$ — обычный порядок на R^+. Решением сформулированной задачи поиска будет минимаксная стратегия первого игрока (вычислителя).

§ 2. Многоходовые (позиционные) антагонистические игры

В этом разделе будут введены не вполне традиционно [8] многоходовые (позиционные) антагонистические игры с оценкой позиций в виде, достаточном для наших целей. Особенности следующие. Во-первых, значения платежной функции принадлежат некоторому линейно упорядоченному множеству, а не подмножеству вещественных чисел, как обычно. Во-вторых, рассматриваются только детерминированные (чистые) стратегии. В-третьих, кроме платежной функции, оценивающей партию, вводится функция оценки каждой позиции, определяющая целесообразность такого продолжения игры, для которого эта позиция является начальной.

1. Многоходовые антагонистические игры. Система $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, X, Y, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$ называется многоходовой или позиционной антагонистической игрой, если $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$ — антагонистическая игра в нормальной форме, X, Y — некоторые множества и, кроме того, имеет место еще следующее. Каждая A из $\mathfrak{A}$ есть функция, определенная на конечных последовательностях вида $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$, $a_i \in X$, $b_i \in Y$ со значениями в X, A: $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i) \to a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. При этом $a_1 = A(\varnothing)$, т. е. описание задания первого хода a_1 первого игрока, которым начинается игра, входит в определение стратегии (функции) A. Каждая B из $\mathfrak{B}$ есть функция, определенная на конечных последовательностях вида $(a_1, b_1, \ldots \ldots, a_i, b_i, a_{i+1})$ со значениями в Y, B: $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i, a_{i+1}) \to b_{i+1}$, $i+1, \ldots, n-1$. После первого хода первого игрока свой первый ход b_1 в игре делает второй игрок $b_1 = B(a_1)$. Затем делается второй ход первого игрока и второй ответный ход второго и т. д., чередуясь.

Последовательности $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$, $(a_1, b_1, \ldots, a_i)$ называются позициями первого и второго игроков соответственно, а X, Y — множествами ходов первого и второго игрока. Таким образом, функция A «выбирает» следующий ход в позициях, принадлежащих первому игроку, а функция B «выбирает» ответные ходы в позициях, принадлежащих второму игроку.

Последовательность ходов $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$, определяемую в ходе n-ходовой игры ситуацией (A, B) из $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ так, что ход a_1 сделан по стратегии A, b_1 — ответный ход, сделанный по стратегии B, и т. д., назовем партией. Пару (i, i), i-ходов игроков назовем i-м ходом, а позицию $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$, являющуюся отрезком партии $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$,— позицией после i-го хода. Позицию $(a_1, b_1, \ldots, a_i)$ будем считать получившейся после хода $(i, i-1)$. Позицию после i-го хода обозначим через (A_i, B_i). Равенство ситуаций $(A, B) = (C, D)$ в n-ходовых играх понимается как равенство соответствующих им партий, т. е. из $(A, B) = (C, D)$, $(A, B) = (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$, $(C, D) = (c_1, d_1, \ldots, c_n, d_n)$ следует $a_1 = c_1$, $b_1 = d_1$, $\ldots$, $a_n = c_n$, $b_n = d_n$, и обратно. Позиция $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$, $a_k \in X$, $b_k \in Y$, $k = 1, \ldots, i$ называется допустимой, если существуют такие стратегии A из $\mathfrak{A}$, B из $\mathfrak{B}$, что $(A_i, B_i) = (a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

В дальнейшем рассматриваются только игры, в которых все партии конечны, т. е. конечно число ходов каждой партии. Это ограничение соответствует взгляду на алгоритм как на конечную процедуру, что удобно при использовании ЭВМ. Правило остановки игры определяется некоторым числом, заданным для каждого конкретного случая.

Число ходов в партии (A, B) будем называть ее *рангом* и обозначать через $\operatorname{rang}(A, B)$ или $r(A, B)$.

Функция выигрыша δ в многоходовой игре ставит в соответствие каждой окончательной позиции $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$, определяемой ситуацией (A, B), где $n = \operatorname{rang}(A, B)$, элемент из $\mathfrak{M}$.

Для широкого класса многоходовых игр стратегии игроков представляют собой вычислимые функции, т. е. являются алгоритмами.

Информационные состояния игроков в исследуемых играх могут быть различны. А именно, первый игрок всегда обладает к моменту выбора хода полной информацией о всей предыстории игры. Второй же игрок может не иметь такой информации, а знать только о ходе первого игрока, сделанном непосредственно перед его ходом. В дальнейшем, с целью сокращения записи, множества X, Y в обозначении многоходовой игры I будем опускать.

2. Оценка позиции. Пусть $\mathfrak{C}_i$ — множество всех допустимых позиций (A_i, B_i), $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, $i = 1, \ldots, n$ в многоходовой игре $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$. Тогда оценкой позиции (A_i, B_i) назовем функцию δ_i, удовлетворяющую следующим двум условиям: 1) δ_i: $\mathfrak{C}_i \to \mathfrak{M}$; $i = 0, 1, \ldots$, 2) если $\operatorname{rang}(A, B) = n$, $\operatorname{rang}(C, D) = k$ и $\delta_n(A, B) > \delta_k(C, D)$, то $\forall n, k$ $\delta(A, B) > \delta(C, D)$. Игру $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$ с оценкой позиций δ_i обозначим $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$.

Функцию δ_i будем также называть *выигрышем первого игрока после i-го хода*. Дословно определяется функция оценки позиции после хода $(i, i-1)$.

Примером n-ходовой игры будет игровое представление задачи из § 1 п. 2. Оптимальной стратегией первого игрока в этой задаче, как нетрудно видеть, является дихотомия — стратегия, по которой первый ход вычислитель делает в середину отрезка $[a, b] = H_0$, а каждый $(i+1)$-й ход — в середину интервала H_i локализации корня, получившегося после i ходов в силу свойств функций класса $\mathfrak{B}$. Заметим также, что приведенная игра не имеет седловой точки. Действительно, для каждой функции из $\mathfrak{B}$ существует такая стратегия первого игрока (вычислителя), по которой на n-м ходе выбирается искомый корень функции из класса $\mathfrak{B}$. Отсюда следует, что гарантированный проигрыш игрока при любой его стратегии один и тот же и равен 0, в то время как гарантированный выигрыш оптимальной стратегии первого игрока равен $|a, b|/2^n$.

Введем ряд необходимых понятий для доказываемых далее принципиально важных теорем 2, 3 о существовании наилучшей, в некотором определенном смысле, функции оценки позиций.

Дадим вначале определение оптимальной, для позиции (A_i, B_i), стратегии A, т. е., нестрого говоря, такой оптимальной стратегии, для которой позиция (A_i, B_i) будет начальной. Будем называть *пучком, определяемым позицией* (A_i, B_i), следующее множество пар: $P(A_i, B_i) = \{(A', B') \mid A' \in \mathfrak{A}, B' \in \mathfrak{B}, (A'_i, B'_i) = (A_i, B_i)\}$.

Лемма 1. *Для любого пучка $P(A_i, B_i)$ существуют такие множества $\mathfrak{A}'$ из $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$ из $\mathfrak{B}$, которые удовлетворяют условию $P(A_i, B_i) = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}'$.*

Доказательство следует непосредственно из определения пучка. #

Рассмотрим подыгру $I' = \langle \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{M}'; \delta, \leqslant \rangle$ игры $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$ такую, что $\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}' = P(A_i, B_i)$. Теперь *оптимальной для позиции (A_i, B_i) стратегией* назовем оптимальную в игре I' стратегию из $\mathfrak{A}'$.

Стратегию A назовем *позиционно-оптимальной*, если она является оптимальной для любой допустимой позиции (A_i, B_i) при любой B из $\mathfrak{B}$. Нетрудно видеть, что понятие позиционно-оптимальной стратегии и наилучшей стратегии из § 1 совпадают. Однако для многоходовых игр будем пользоваться термином «позиционно-оптимальной». В литературе [5] позиционно-оптимальные стратегии известны как последовательно-оптимальные. А. Г. Сухаревым [10, 11] неоднократно отмечалось преимущество последовательно-оптимальных стратегий, их существенное отличие от оптимальных минимаксных стратегий.

Лемма 2 *Любая оптимальная стратегия первого игрока в игре с единственной стратегией второго игрока позиционно-оптимальна.*

Стратегию A из $\mathfrak{A}$ назовем *походово-оптимальной*, если для любого i она оптимальна для позиции (A_i, B_i) на один ход с функцией выигрыша первого игрока δ_{i+1}, т. е. оптимальна в одноходовой игре вида $I' = \langle\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{M}'; \delta_{i+1}, \leqslant\rangle$, где $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ такие, что $\mathfrak{A}'\times\mathfrak{B}' = P(A_i, B_i)$, $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$.

Теорема 2 (Цермело). *Пусть в игре $I = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant\rangle$ для любой допустимой позиции существует оптимальная стратегия первого игрока. Тогда существует такая оценка позиции γ_i в игре $I' = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \gamma_i, \leqslant\rangle$, что походово-оптимальная в игре I' стратегия первого игрока является позиционно-оптимальной* (*в игре* $I = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant\rangle$).

Доказательство. Пусть (A_i, B_i) — позиция в игре I после хода (i, i). Тогда для игры I' положим по определению $\gamma_i(A_i, B_i) = m$, m — гарантированный выигрыш некоторой оптимальной для позиции (A_i, B_i) стратегии в игре I. Теперь из определения γ_i следует справедливость теоремы. Аналогично утверждение теоремы доказывается для позиции после хода $(i, i-1)$. #

Оценку позиции γ_i, построенную в доказательстве теоремы 2, назовем *цермеловской оценкой позиции* [16].

Следствие. *В игре с цермеловской оценкой позиции стратегия первого (второго) игрока оптимальна тогда и только тогда, когда она походово-оптимальна.*

Доказательство непосредственно следует из определения цермеловской оценки и походовой оптимальности. #

Определение оптимальной стратегии в многоходовой игре, заданной в нормальной форме, имеет существенный недостаток. А именно, не учитывается такой важный фактор, как число ходов в партии. Для этой цели вместе с игрой $I = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant\rangle$ рассмотрим производную от нее игру $I' = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}\times\{0, 1, \ldots\}, (\delta, r), \leqslant\rangle$, в которой $(\delta, r)(A, B) \rightleftharpoons (\delta(A, B), r(A, B))$, и при этом порядок $\leqslant$ на $\mathfrak{M}\times\{0, 1, \ldots\}$ определяется так:

$$(\delta(A, B), r(A, B)) \leqslant (\delta(A', B'), r(A', B')) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \delta(A, B) < \delta(A', B') \text{ или } \delta(A, B) = \delta(A', B'),\ r(A, B) \geqslant r(A', B').$$

Нетрудно видеть, что оптимальная стратегия в игре I' будет оптимальной и в игре I, но, вообще говоря, не наоборот. Построение производной игры I'' по производной от I игре I'' дополнительной градации на множестве оптимальных стратегий не дает. Это вытекает из следующих утверждений.

Лемма 3. *Для производных игр имеет место*

1) $\delta(A, B) \leqslant \delta(A', B') \Rightarrow (\delta, r)(A, B) \leqslant (\delta, r)(A', B')$,

2) $(\delta, r)(A, B) \leqslant (\delta, r)(A', B') \Leftrightarrow ((\delta, r), r)(A, B) \leqslant ((\delta, r), r)\times$ $\times(A', B')$.

Доказательство. 2) Действительно, из правого неравенства получаем $((\delta(A, B), r(A, B)), r(A, B)) \leqslant ((\delta(A', B'), r(A', B')), r(A', B'))$, откуда $(\delta(A, B), r(A, B)) \leqslant (\delta(A', B'), r(A', B'))$, т. е. получаем левое неравенство. Аналогично из левого неравенства получаем правое. #

Для учета числа ходов введем одну оценку позиции β_i, которую назовем *тонкой оценкой позиции*. Положим по определению $\beta_i(A_i, B_i) = (m, j)$, где m — цермеловская оценка позиции (A_i, B_i), $j = \max\{l \mid l = k - i,\ k = r(A, B)\}$, где A пробегает множество всех оптимальных для позиции (A_i, B_i) стратегий, B — любое из $\mathfrak{B}$. На множестве значений тонкой оценки позиций $\mathfrak{M}' = \{(m, j)\} = \mathfrak{M} \times \{0, 1, \ldots\}$ введем линейный порядок следующим образом: $(m, j) \leqslant (m', j')$, если $m < m'$, а при $m = m'$, если $j \geqslant j'$.

Теорема 3 (Кокорин, Тарасова). *Пусть в игре $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$ число ходов в любой партии не превышает некоторого фиксированного N и для любой допустимой позиции существует оптимальная стратегия первого игрока. Тогда для тонкой оценки позиции β_i в игре $I' = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \beta_i, \leqslant \rangle$ походово-оптимальная в игре I' стратегия первого игрока является позиционно-оптимальной.*

Доказательство непосредственно следует из определений понятий, входящих в формулировку теоремы. #

Следствие. *В игре с тонкой оценкой позиции стратегия первого (второго) игрока оптимальна тогда и только тогда, когда она походово-оптимальна.*

Доказательство непосредственно следует из определения тонкой оценки позиции и походовой оптимальности. #

Замечание. Пусть в игре $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$ число ходов в любой партии не превышает некоторого фиксированного N и для любой допустимой позиции существует оптимальная стратегия первого игрока. Тогда для тонкой оценки позиции β_i в производной игре $I' = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M} \times \{0, 1, \ldots\}, (\delta, r), \beta_i, \leqslant \rangle$ походово-оптимальная в игре стратегия первого игрока будет позиционно-оптимальной стратегией в игре I.

Доказательство следует непосредственно из определения входящих в теорему понятий. #

§ 3. Ассоциированные игры. Модели противника

В этом разделе для позиционных антагонистических игр вводятся важнейшие для метода СП понятия: ассоциированные игры, модели противника (коротко МП) и синкретическая стратегия или синкретический противник, коротко СП.

1. Ассоциированные игры. Игру $I' = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}', \delta' \rangle$ назовем *ассоциированной с игрой* $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \delta \rangle$, если имеет место следующее:

1) из $B' \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}'$ следует $\delta'(A, B') = \delta(A, B')$;

2) для любых A из $\mathfrak{A}$ и B' из $\mathfrak{B}'$ существует B из $\mathfrak{B}$ такая, что $(A, B) \equiv (A, B')$.

Очевидно, из условия 2) вытекает следующее свойство: множество ходов стратегий из $\mathfrak{B}'$ содержится в множестве Y, т. е. в том множестве, которому принадлежат ходы стратегий из $\mathfrak{B}$.

Введем обозначения: $I \mapsto I'$ — игра I' ассоциирована с игрой I, игру I', ассоциированную с игрой I, обозначим через $I\langle \mathfrak{B}' \rangle$, в частности $I = I\langle \mathfrak{B} \rangle$, так как $I \mapsto I$. Без боязни ошибиться функцию δ' из $I\langle \mathfrak{B}' \rangle$ будем обозначать δ. Если $I\langle \mathfrak{B} \rangle \mapsto I\langle \mathfrak{B}' \rangle$, то будем говорить, что $\mathfrak{B}'$ ассоциировано с $\mathfrak{B}$ и обозначать $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}'$. Стратегию B' назовем ассоциированной с $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{B} \mapsto \{B'\}$. Следующие утверждения непосредственно вытекают из определений.

Лемма 5. $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}' \Rightarrow \forall A \in \mathfrak{A} \forall B' \in \mathfrak{B}' \exists B \in \mathfrak{B} (\delta(A, B') = \delta(A, B))$. #

Лемма 6. *Если $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}'$, то $\delta(A, \mathfrak{B}') \geqslant \delta(A, \mathfrak{B})$.* #

Лемма 7. *Если для любого ω из Ω имеет место $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_\omega$, то $\mathfrak{B} \mapsto \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathfrak{B}_\omega$.* #

Лемма 8. *Если для любого ω из Ω имеет место $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}_\omega$ и $\bigcap_{\omega \in \Omega} \mathfrak{B}_\omega \neq \varnothing$, то $\mathfrak{B} \mapsto \bigcap_{\omega \in \Omega} \mathfrak{B}_\omega$.* #

Пусть $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}', \mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}''$, $B' \in \mathfrak{B}'$, $B'' \in \mathfrak{B}''$. Тогда введем отношение $\equiv$ следующим образом: $B' \equiv B'' \rightleftharpoons \forall A ((A, B') = (A, B''))$. Очевидно, что $\equiv$ есть отношение эквивалентности.

Проиллюстрируем введенные понятия на примере игр, задаваемых с помощью табл. 2.

Возьмем $\mathfrak{A}=\{A_1, A_2\}$, $\mathfrak{B}=\{B_1, B_2\}$, $\mathfrak{M}=\{1, 2, 3, 4\}$. Тогда, например, множества $\mathfrak{B}_1'=\{B_3\}, \mathfrak{B}_2'=\{B_3, B_4\}, \mathfrak{B}_3'=\{B_3, B_1, B_5\}$ будут ассоциированы с $\mathfrak{B}$, $B_1\equiv B_5$. Если же положить $\mathfrak{A}=\{A_1, A_2\}$, $\mathfrak{B}=\{B_1, B_3\}$, $\mathfrak{B}'=\{B_4\}$, то $\mathfrak{B}'$ неассоциировано с $\mathfrak{B}$, так как $\delta(A_1, B_4)\notin\{\delta(A_1, B_1), \delta(A_1, B_3)\}$.

Таблица 2

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	1	2	1	2
A_2	4	5	5	4	4

Замечание 1. На множестве игр, ассоциированных с игрой $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, отношение $\mapsto$ будет рефлексивно и транзитивно. Однако оно не будет антисимметричным. Действительно, пусть и $\mathfrak{B}\mapsto\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}\neq\mathfrak{B}'$, тогда $\mathfrak{B}'\mapsto\mathfrak{B}$.

Пусть, далее, $\mathfrak{B}\mapsto\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}'/_{\equiv}$ — фактор-множество множества $\mathfrak{B}$ по эквивалентности. Тогда если элементы $B_1, B_2\in\mathfrak{B}'$, то из $B_1\equiv B_2$ следует $B_1/_{\equiv}=B_2/_{\equiv}$. Кроме того, $\mathfrak{B}\mapsto\mathfrak{B}'/_{\equiv}$. Нетрудно показать для мощности любого фактор-множества справедливость следующего утверждения.

Лемма 9. *Если* $\mathfrak{B}\mapsto\mathfrak{B}'/_{\equiv}$, *то* $|\mathfrak{B}'/_{\equiv}|\leqslant|\mathfrak{B}/_{\equiv}|^{|\mathfrak{A}|}$.

Из лемм 7 и 8 следует существование наибольшего по включению элемента $\overline{\mathfrak{B}}$ в множестве всех факторизованных множеств, ассоциированных с множеством $\mathfrak{B}$. Назовем множество $\overline{\mathfrak{B}}$ замыканием $\mathfrak{B}$.

Лемма 10. *Любое непустое подмножество из замыкания* $\overline{\mathfrak{B}}$ *ассоциировано с* $\mathfrak{B}$.

Замечание 2. Замыкание $\overline{\mathfrak{B}}$ можно определить как множество всех различных ассоциированных с $\mathfrak{B}$ стратегий.

Примером замыкания для игры, определяемой табл. 2 при $\mathfrak{A}=\{A_1, A_2\}$, $\mathfrak{B}=\{B_1, B_2\}$, будет множество $\overline{\mathfrak{B}}=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$.

2. Модели противника. Множество стратегий $\widetilde{\mathfrak{B}}$, ассоциированное с $\mathfrak{B}$, называется моделью противника (коротко МП) для игры $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, если оно удовлетворяет следующему условию: существует оптимальная в игре $I\langle\widetilde{\mathfrak{B}}\rangle$ стратегия $A_0\in\mathfrak{A}$, для которой $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}})=\delta(A_0, \mathfrak{B})$. Например, моделями противника для игры, заданной табл. 2 при $\mathfrak{A}=\{A_1, A_2\}$, $\mathfrak{B}=\{B_1, B_2\}$, являются множества $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1=\{B_3, B_4\}$, $\mathfrak{B}_2=\{B_4\}$, $\mathfrak{B}_3=\{B_5\}$, $\mathfrak{B}_4=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Простейшие примеры МП для $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ можно получать с помощью следующего утверждения.

Теорема 4. *Моделями противника для* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ *являются*:

а) *любое подмножество* $\mathfrak{B}'$ *из замыкания* $\overline{\mathfrak{B}}$, *содержащее* $\mathfrak{B}/_{\equiv}$;

б) *оптимальная стратегия второго игрока в игре с седловой точкой*;

в) *любое подмножество* $\widetilde{\mathfrak{B}}$ *из* $\mathfrak{B}$, *для которого имеет место равенство* $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}})=\delta(A_0, \mathfrak{B})$, *где* A_0 — *некоторая оптимальная стратегия первого игрока.*

Доказательство. а) если A_0 из $\mathfrak{A}$ оптимальна в игре $I\langle\mathfrak{B}'\rangle$, где $\mathfrak{B}'\subset\mathfrak{B}\subset\overline{\mathfrak{B}}$, то из леммы 10, леммы 6 и из условия $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}'$ следует $\delta(A_0, \mathfrak{B}')\leqslant\delta(A_0, \mathfrak{B})$. Поэтому $\delta(A_0, \mathfrak{B}')=\delta(A_0, \mathfrak{B})$, и, значит, $\mathfrak{B}'$ — МП по определению; в) из $\widetilde{\mathfrak{B}}\subset\mathfrak{B}$ следует $\mathfrak{B}\mapsto\widetilde{\mathfrak{B}}$. Это, а также условие $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}})=\delta(A_0, \mathfrak{B})$ определяет $\widetilde{\mathfrak{B}}$ как модель противника. Утверждение б) следует из определения седловой точки. #

Модель противника, состоящая из одной стратегии, называется *синкретической стратегией или синкретическим противником*, коротко СП.

Стратегией СП в игре, задаваемой табл. 2 при $\mathfrak{B}=\{B_1, B_2\}$, будут стратегия B_1 (оптимальная стратегия второго игрока) и B_4, B_5.

Теорема 5. *Пусть* $I\langle\mathfrak{B}\rangle \rightarrow I\langle\widetilde{\mathfrak{B}}\rangle$. *Тогда если стратегия* A_0 *из* $\mathfrak{A}$ *оптимальна* (*соответственно* E-*оптимальна*) *в игре* $I\langle\widetilde{\mathfrak{B}}\rangle$ *и* $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}}) = \delta(A_0, \mathfrak{B})$, *то* A_0 *оптимальна* (E-*оптимальна*) *в* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, *а множество* $\widetilde{\mathfrak{B}}$ *будет моделью противника для игры* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$.

Доказательство. Пусть A — любая стратегия из $\mathfrak{A}$. Покажем, что $\delta(A_0, \mathfrak{B}) \geqslant \delta(A, \mathfrak{B})$. Имеем неравенства: 1) $\delta(A, \widetilde{\mathfrak{B}}) \geqslant \delta(A, \mathfrak{B})$ — лемма 6; 2) $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}}) \geqslant \delta(A, \widetilde{\mathfrak{B}})$ — из условия теоремы (оптимальность A_0); 3) $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}}) \geqslant \delta(A, \mathfrak{B})$ — из 1), 2). Из последнего и равенства $\delta(A_0, \mathfrak{B}) = \delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}})$ следует $\delta(A_0, \mathfrak{B}) \geqslant \delta(A, \mathfrak{B})$.

Справедливость теоремы, когда A_0 E-оптимальна в $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, следует непосредственно из определения E-оптимальности и равенства $\delta(A_0, \mathfrak{B}) = \delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}})$. #

Предложение 1. *Если* S *является* СП *для игры* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, *то любая оптимальная в* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ *стратегия* A_0 *из* $\mathfrak{A}$ *будет оптимальна также в* $I\langle S\rangle$.

Доказательство. По определению S существует такая оптимальная против S стратегия A' из $\mathfrak{A}$, что имеет место равенство $\delta(A', S) = \delta(A', \mathfrak{B})$. Отсюда по теореме 5 следует, что стратегия A' оптимальна в $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, и, значит, $\delta(A', \mathfrak{B}) = \delta(A_0, \mathfrak{B})$. Сравнивая два последних равенства, имеем $\delta(A_0, \mathfrak{B}) = \delta(A', S)$, отсюда, очевидного неравенства $\delta(A_0, \mathfrak{B}) \leqslant \delta(A_0, S)$ и оптимальности A' против S имеем $\delta(A_0, S) = \delta(A', S)$. Значит, A_0 оптимальна в $I\langle S\rangle$. #

Предложение 2. *Любая* СП *для игры* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ *является оптимальной стратегией второго игрока в игре* $I\langle\overline{\mathfrak{B}}\rangle$, *и наоборот, любая оптимальная стратегия второго игрока в игре* $I\langle\overline{\mathfrak{B}}\rangle$ *будет* СП *для игры* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$.

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из определения оптимальной стратегии второго игрока, стратегии СП и игры $I\langle\overline{\mathfrak{B}}\rangle$.

Таблица 3

	B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
A_1	10	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8
A_2	7	6	5	5	5	6	6	6	7	7	7
A_3	4	2	3	2	4	2	3	4	2	3	4

Предложение 3. *Пусть* m — *мощность множества всех* СП *из* $\overline{\mathfrak{B}}$ *для игры* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, $\mathfrak{O}$ — *множество всех оптимальных стратегий из* $\mathfrak{A}$. *Тогда* $m \leqslant |\mathfrak{B}/_\equiv|^{|\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{O}|}$.

Приведем пример, показывающий, что верхняя граница в неравенстве из предложения 3 достижима. Рассмотрим игру $I = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant\rangle$, в которой $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$, $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$, δ задается табл. 3. Здесь $\mathfrak{O} = \{A_1\}$, множеством всех СП будет $\{B_3, X_1, \ldots, X_8\}$, $m = 9$, $|\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{O}| = 2$, $|\mathfrak{B}| = 3$, и, значит, $m = |\mathfrak{B}|^{|\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{O}|}$. Кроме того, в этом же примере стратегия X_1 будет абсолютно оптимальной, а над стратегией X_8 доминируют все остальные стратегии СП. «Промежуточные» стратегии СП находятся между X_1 и X_8.

Пусть элемент B_1 ассоциирован с $\mathfrak{B}$, $A \in \mathfrak{A}$, тогда *A-ипостасью элемента* B_1 называем элемент B такой, что $(A, B') = (A, B)$.

Предложение 4. *Множество всех* A-*ипостасей, синкретической стратегии является* МП.

§ 4. Метод синкретического противника

Настоящий раздел посвящен подробному описанию метода синкретического противника (коротко СП). Основная идея (общая характеристика) метода СП заключается в следующем. Задачу оптимального поиска сводим к нахождению оптимальной стратегии первого игрока в многоходовой игре $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$. Существенным является рассмотрение системы трех игр $\{I\langle \mathfrak{B} \rangle, I\langle \bar{\bar{\mathfrak{B}}} \rangle, I\langle S \rangle\}$, где S — синкретическая стратегия в $I\langle \mathfrak{B} \rangle$. Результатом этого рассмотрения будет сведение задачи поиска к задаче нахождения позиционно-оптимальной стратегии первого игрока в игре $I\langle S \rangle$, т. е., можно сказать, к решению задачи динамического программирования.

Предлагаемый метод можно применять, по-видимому, в таких взаимопроникающих разделах математики, как кибернетика, вычислительная математика, исследование операций, теория игр, оптимальное управление.

Описание метода дается в виде методических инструкций разной степени конструктивности и обоснования. Для понимания и овладения этим методом недостаточно прочтения настоящего раздела. Нужно также рассмотреть его применение на следующем конкретном примере (см. § 5) — задаче восстановления характеристических функций. Заметим, что аналогично обстоит дело с динамическим программированием. Цель конструктивного описания метода недостижима. Это следует из работы [6], в которой показано, что элементарная теория класса систем $\{I\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle\}$ неразрешима, а класса систем $\{I\langle \mathfrak{A}, \{S\}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle\}$ — разрешима. Заметим также следующее. Широкий класс задач поиска представим в виде многоходовых игр, в которых первый игрок — вычислитель, а второй — некоторый класс функций. Такие игры являются играми с неполной информацией и не имеют седловой точки. В ходе применения метода СП осуществляется переход от исходной игры $I\langle \mathfrak{B} \rangle$ к игре $I\langle \mathfrak{B} \cup S \rangle$ с полной информацией, имеющей, следовательно, седловую точку [8].

1. Описание метода. Вначале кратко перечислим 7 шагов, из которых состоит метод. В зависимости от ситуации шаги могут делаться последовательно, взаимосвязанно или циклично. Об этом будет говориться специально в описании метода.

Шаги метода:

I. Теоретико-игровое представление задачи.

II. Разбиение задачи на этапы.

III. Решение задачи на последнем этапе.

IV. Уточнение задачи начального этапа.

V. Построение предполагаемой синкретической стратегии $\tilde{S}$.

VI. Построение оптимальной $\tilde{S}$ стратегии первого игрока.

VII. Доопределение оптимальной против $\tilde{S}$ стратегии до позиционно-оптимальной или оптимальной стратегии первого игрока в игре $I\langle \mathfrak{B} \rangle$.

Переходим к подробному описанию шагов.

I. Теоретико-игровое представление задачи. Задачу оптимального поиска сводим к задаче нахождения оптимальной стратегии первого игрока в антагонистической многоходовой игре $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$. При этом принципиально вводятся в рассмотрение дополнительно к игре $I\langle \mathfrak{B} \rangle$ две игры — $I\langle \bar{\mathfrak{B}} \rangle$ и $I\langle \{S\} \rangle$ с синкретической стратегией S. Чрезвычайно важным в этом шаге для дальнейшего успешного применения метода является удачный выбор игрового представления, так как оно, очевидно, не единственное. Существование такого «удачного» выбора строго и детально обосновывается в п. 2 § 2. Ценность игрового представления прежде всего определяется выбором функций оценки позиции $\mathfrak{C}$, а именно «близостью» δ к цермеловской оценке позиции.

Первоначально выбранная оценка позиции, а значит, и игровое представление, может меняться (корректироваться) в ходе решения задачи. Окончательное определение функции выигрыша дается после последнего применения четвертого шага.

Значение первого шага иллюстрируется, например, чрезвычайной важностью оценки обстановки в военном деле, оценкой позиции в шахматах, правильностью диагноза в медицине. Нетрудно видеть, что все виды жизнедеятельности, из которых взяты примеры, представимы в виде антагонистической игры.

II. Разбиение задачи на этапы. Разбиение на этапы определяется существом задачи или проделывается искусственно.

Примерами разбиения на этапы может служить: в шахматах разбиение игры на дебют, миттельшпиль, эндшпиль; в авиации — подъем, полет и посадка самолета. В военном деле этапы сражения для наступающих и обороняющихся определяются с учетом рубежей обороны. Разбиению задачи на этапы соответствует разбиение целей игроков на подцели, которые, в свою очередь, определяют игровое представление для каждого этапа. Таким образом, происходит соответственно разбиению расчленение стратегий игроков и оценки позиции, т. е. фактически происходит расчленение игрового представления исходной задачи.

Необходимым условием разбиения на этапы будет выполнение следующих двух свойств.

Пусть α_k — условие, определяющее цель k-го этапа. Тогда имеется возможность проверять выполнение этого условия после каждого хода в игре, т. е. для любой позиции.

Пусть S — синкретическая стратегия в игре I и A — произвольная стратегия первого игрока. Тогда в партии (A, S) для любого k стратегия A может достигнуть цели k-го этапа лишь после того, как ею была достигнута цель $(k-1)$-го этапа. Свойством этапа, существенно облегчающим решение задачи на этом этапе, является следующее. Оптимальные стратегии игроков в игровом представлении этапа походово-оптимальны. Обоснованием этого служат теорема 2 и теорема 3.

Особо значимым является выполнение последнего этапа. Задача на последнем этапе формулируется так, чтобы результат ее решения совпадал с результатом решения исходной задачи. Последний этап выделяется всегда, так как всегда приходится рассматривать общую ситуацию, хотя бы перед последним ходом. Вообще, аргументы в пользу важности выделения последнего этапа те же, что и в динамическом программировании.

В принципе, для применения последующих шагов метода можно считать, что разбиение содержит один либо два этапа: последний и начальный. В этом случае поступаем индуктивно по отношению к начальному этапу, разбивая его снова на два этапа [12, 13].

III. Решение задачи на последнем этапе проделывается с помощью шагов V—VII. Обоснование решения в начале задачи на последнем этапе заключается в том, что только после этого появляется возможность определить «предпочтительные» начальные позиции последнего этапа, т. е. цели начального этапа, а значит, и игровое представление начального этапа. Например, в шахматах последнему этапу соответствует эндшпиль, а начальному — дебют и миттельшпиль. В миттельшпиле игрок старается сыграть так, чтобы достичь выигрышных эндшпилей, которые он должен знать заранее.

Сформулируем строго отношение «предпочтительности» на начальных позициях последнего этапа, которые одновременно являются конечными позициями начального этапа. Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех начальных позиций последнего этапа. Введем далее функцию оценки $\overline{\delta}$

начальных позиций последнего этапа $\bar{\delta}$: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{M}$ следующим образом. Пусть $(A_i, B_i) \in \mathfrak{R}$, тогда $\bar{\delta}(A_i, B_i) = m$, где m — гарантированный выигрыш оптимальной для позиции (A_i, B_i) стратегии первого игрока.

IV. Уточнение задачи начального этапа и ее решение. После определения на третьем шаге предпочтительных начальных позиций последнего этапа задача начального этапа заключается в том, чтобы «наилучшим» образом достигнуть этих позиций. Другими словами, нужно описываемым методом решить задачу начального этапа при условии, что множество стратегий первого игрока $\mathfrak{A}'$ является подмножеством таких стратегий из $\mathfrak{A}$, которые достигают предпочтительных начальных позиций последнего этапа.

V. Построение предполагаемой синкретической стратегии $\tilde{S}$. Во-первых, предполагаемая синкретическая стратегия всегда ищется в ассоциированном замыкании. Далее, если $S_п$ — синкретическая стратегия на последнем этапе, $\tilde{S}_н$ — предполагаемая синкретическая стратегия на начальном этапе, то $\tilde{S}$ ищется в виде $\tilde{S} = S_п * \tilde{S}_н$, где $*$ — операция последовательного применения сначала $\tilde{S}_н$ до выполнения условия $\alpha_н$ — условия окончания начального этапа, а затем стратегии $S_п$.

Лемма 11. *Пусть $S_п$ — синкретическая стратегия на последнем этапе, $S_н$ — синкретическая стратегия на начальном этапе. Тогда стратегия S, равная композиции $S_п * S_н$, является синкретической стратегией для игры $I\langle\mathfrak{B}\rangle$.*

Доказательство следует из определения $S_н$ и $S_п$, полученных на третьем и четвертом шаге, а также определения функции оценки начальных позиций последнего этапа (см. шаг III). #

Рассмотрим теперь случай, когда разбиение содержит один этап, т. е. не видна возможность дальнейшего разбиения, что говорит в пользу однородности действий противника. В этом случае рекомендуется строить синкретическую стратегию S как походово-оптимальную стратегию. Тогда если оценка позиций в игре является цермеловской, то на основании следствия из п. 2 § 2 стратегия S будет синкретической. Цермеловская же оценка по теореме 2 существует, когда у первого игрока есть позиционно-оптимальная стратегия. В качестве примера для этого случая можно привести игровое представление задачи оптимального поиска корня монотонно-возрастающей (убывающей) функции.

VI. Построение оптимальной против стратегии $\tilde{S}$ стратегии O. Пусть игра разбита на два этапа и, значит, $\tilde{S} = S_п * S_п$. Тогда оптимальную против $\tilde{S}$ стратегию O из $\mathfrak{A}$ строим в виде $O = O_п * O_н$, где $O_п$ — оптимальная против $S_п$ стратегия из $\mathfrak{A}$, $O_н$ — оптимальная против $\tilde{S}_п$ стратегия первого игрока, найденная после уточнения задачи начального этапа на шаге IV, т. е. оптимальная из множества $\mathfrak{A}'$. Здесь под $O_п * O_н$ понимается результат последовательного применения сначала стратегии $O_н$ до выполнения условия $\alpha_н$, а затем стратегии $O_п$.

Лемма 12. *Стратегия O оптимальна против стратегии $\tilde{S}$ в игре $I\langle\tilde{S}\rangle$.*

Доказательство. На основании аксиомы (свойства из шага II) для синкретической стратегии любая оптимальная против S стратегия первого игрока имеет все этапы разбиения. В силу этого и определения $O_п$, $O_н$ любая оптимальная в игре $I\langle\tilde{S}\rangle$ стратегия из $\mathfrak{A}$ не доминирует над стратегией O. #

Рассмотрим теперь случай, когда разбиение содержит один этап. Если $\tilde{S}$ — походово-оптимальная в игре $I\langle\tilde{S}\rangle$, тогда стратегию O строим как походово-оптимальную против $\tilde{S}$ (см. теорему 3).

В общем случае, при любой $\tilde{S}$ при построении оптимальной против $\tilde{S}$ стратегии O всегда можно пользоваться методом динамического программирования.

VII. Доопределение оптимальной против $\tilde{S}$ стратегии O до позиционно-оптимальной или оптимальной стратегии в игре. Доопределение стратегии O приходится делать против всех стратегий из $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \backslash \mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ — множество ипостасей стратегии $\tilde{S}$.

Важность и особенность этого шага заключается в том, что на нем решается задача построения позиционно-оптимальной стратегии в игре $I\langle\mathfrak{B}\rangle$. На основании того, что стратегия O будет в игре $I\langle\tilde{S}\rangle$ позиционно-оптимальной (лемма 2), остается доопределить ее наилучшим образом против стратегий из $\mathfrak{B}'$.

Перейдем к обоснованию этого шага. Пусть в игре $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ позиции (A_i, B_i) соответствует пучок $P(A_i, B_i)$, который определяет подыгру I' игры I (см. лемму 1). Считаем, что, определив понятие синкретической стратегии, гарантированного выигрыша и ассоциированного множества для подыгры I' так же, как для игры I, мы тем самым определим эти понятия для позиции (A_i, B_i). Тогда, очевидно, справедлива

Теорема 6. *Пусть $I' = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}; \delta, \leqslant\rangle$ — подыгра игры $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, определяемая пучком $P(A_i, B_i)$. Тогда если стратегия A из $\mathfrak{A}$ оптимальна в игре $I'\langle\tilde{\mathfrak{B}}'\rangle$, где $\tilde{\mathfrak{B}}'$ — множество, ассоциированное множеству $\mathfrak{B}'$ для позиции (A_i, B_i), и гарантированный на множестве $\tilde{\mathfrak{B}}'$ выигрыш A равен ее гарантированному для позиции (A_i, B_i) выигрышу, т. е. $\delta(A, \tilde{\mathfrak{B}}') = \delta(A, \mathfrak{B}')$, то стратегия A будет оптимальной для позиции (A_i, B_i) стратегией первого игрока.*

Таким образом, применением метода СП к каждой возникающей в игре позиции можно получать позиционно-оптимальные стратегии первого игрока. Облегчающим обстоятельством при доопределении является то, что при построении стратегии $\tilde{S}$ на шаге V делалось рассмотрение общих возможных позиций в игре $I\langle\mathfrak{B}\rangle$.

Если не удается наилучшим образом доопределить стратегию O, то доопределим ее только лишь до оптимальной в игре $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ стратегии. Для этого достаточно не снизить гарантированный выигрыш доопределенной стратегии O^* из $\mathfrak{A}$, т. е. должно выполняться условие $\delta(O, \tilde{S}) = \delta(O^*, \mathfrak{B})$. Из выполнимости этого условия и оптимальности стратегии в игре $I\langle\tilde{S}\rangle$ следует выполнимость условий теоремы 5, из которой вытекает оптимальность O^* в игре $I\langle\mathfrak{B}\rangle$.

2. Особенности метода СП. В этом пункте приведем важнейшие особенности, характеризующие метод СП.

1. Теория, изложенная в первых трех параграфах, на языке которой формулируется и обосновывается метод СП, безусловно, по своему характеру относится к дискретной математике в широком смысле, так как рассматриваемые игры являются многоосновными алгебраическими системами [17].

2. Использование языка антагонистических позиционных игр. В настоящее время теоретико-игровой язык широко используется в различных разделах математики: математической кибернетике, вычислительной математике, математической логике. Использование теории игр в кибернетике и математической логике восходит к первой работе по позиционным играм, опубликованной Цермело в 1912 г.

Использование теории игр в вычислительной математике восходит к работе Бореля, относящейся к 1921 году. Вообще, использование игр как моделей жизнедеятельности человека восходит к глубочайшей древности, к возникновению игр.

3. Использование принципа минимакса или наибольшего гарантированного результата. Этот принцип применяется во многих разделах современной математики и восходит

к работам Чебышева. Принципу минимакса в общечеловеческом смысле соответствует перестраховочный подход. Такой подход применяется, например, на производстве, когда качество работы оценивается по количеству выданного брака.

4. Использование оценки позиции. Различные оценки часто встречаются в математике: оценка погрешностей, остаточный член и т. п. Правильные оценки в жизнедеятельности человека часто имеют решающее значение. Например, в военном деле оценка обстановки, в шахматах — оценка позиции, в медицине — диагноз, в политике — оценка международной обстановки, в любой борьбе — оценка своих возможностей и возможностей противной стороны.

5. Разбиение на этапы и решение с конца. Эта особенность характерна также для динамического программирования. Вообще, разбиение на этапы используется при решении различных математических задач. То же можно сказать и о задачах и целях в жизни человека.

6. Использование понятий ассоциированная игра, модели противника, синкретическая стратегия, ипостась. Метод СП состоит в сведении решения задачи в исходном игровом представлении к такой же задаче в ассоциированной игре, в которой противник имеет одну стратегию. При этом отметим, что первоначальная игра не имеет седловой точки, а вторая, очевидно, имеет. На модели противника и синкретическую стратегию можно смотреть как на формализацию иктуитивного понятия «наихудшего поведения функции» в вычислительной математике, а также «природы» в так называемых играх с природой. Ипостась формализует «худшую» функцию. Синкретическую стратегию можно рассматривать как своеобразный синтез алгоритмов, если стратегии в игре являются алгоритмами. В мифологии синкретизм человека и коня создает кентавра, синкретичными будут также сфинкс, конек-горбунок и т. д. В религии христианский бог ассоциирован со своими ипостасями. Идея синкретической стратегии, по-видимому, восходит к следующей общечеловеческой мудрости: умей поставить себя на место другого.

Замечание 3. Приведенные особенности говорят в пользу возможности разнообразного применения метода в кибернетике.

§ 5. Оптимальное восстановление характеристических функций, заданных в узлах целочисленной решетки

1. Постановка задачи. Задачу оптимального восстановления характеристической функции, заданной в узлах целочисленной решетки, можно рассматривать как математическую модель известной игры «морской бой» с одним «крейсером».

Пусть $N_r = \{1, 2, \ldots, r\}$, множество Ω представляет собой совокупность узлов целочисленной решетки $\Omega = N_r \times N_r$. Отрезком длины p назовем набор таких p точек множества Ω, у которых одна из координат фиксирована, а другая принимает p последовательных значений. Таким образом, Ω образует на плоскости дискретный квадрат, ограниченный отрезками длины r. Каждое подмножество из Ω можно определить заданием характеристической функции, принимающей единичные значения в точках этого подмножества и нулевые значения во всех других точках множества Ω.

Рассмотрим множество Q всех характеристических функций, определенных на Ω. Выделим из множества Q класс $\mathfrak{B}$ таких функций, каждая из которых определяет в Ω отрезок Δ фиксированной длины δ. При этом пусть для простоты выполняется следующее равенство $k\delta = r$, где k — натуральное число.

Требуется восстановить любую функцию B из $\mathfrak{B}$ путем последовательного вычисления ее значений в точках Ω. Предполагается, что значения функции могут быть вычислены точно. Очевидно, что характеристическая функция оказывается восстановленной сразу, как только указаны все точки ее характеристического отрезка.

Характеристический отрезок произвольной функции B из $\mathfrak{B}$ ищется с помощью множества $\mathfrak{A}$ последовательных многоходовых стратегий, определяющих выбор точек из Ω так, что выбор a_{i+1} из Ω, сделанный по стратегии A из $\mathfrak{A}$ на $(i+1)$-м ходе, зависит от всей предыдущей информации, т. е.

$$a_{i+1} = A(a_1, B(a_1), \ldots, a_i, B(a_i)).$$

Таким образом, каждая A из $\mathfrak{A}$ есть функция, определенная на конечных последовательностях вида $(a_1, B(a_1), \ldots, a_i, B(a_i))$, $i = 1, \ldots$ со значениями в Ω, т. е. A: $(a_1, B(a_1), \ldots, a_i, (B(a_i)) \to a_{i+1}$.

Результат (выигрыш) $\tau(A, B)$ от применения стратегии A из $\mathfrak{A}$ к функции B из $\mathfrak{B}$ определим равным минимальному числу ходов (выборов точек из Ω), позволяющих найти все точки единичного отрезка функции B. Эффективность стратегии для класса $\mathfrak{B}$ оценивается ее гарантированным в классе $\mathfrak{B}$ результатом, т. е. величиной, равной $\max\limits_{B \in \mathfrak{B}} \tau(A, B)$. Оптимальной стратегией восстановления функций из $\mathfrak{B}$ будет такая стратегия A_0 из $\mathfrak{A}$, гарантированный выигрыш которой равен

$$\tau(A_0, \mathfrak{B}) = \min_{A \in \mathfrak{A}} \max_{B \in \mathfrak{B}} \tau(A, B).$$

Задача настоящей работы состоит в построении оптимальной стратегии восстановления функций класса $\mathfrak{B}$. Для решения задачи будет использован метод СП.

2. Решение задачи методом СП.

I. Теоретико-игровое представление задачи. Сформулированная задача оптимального восстановления функций класса $\mathfrak{B}$ представима как задача нахождения оптимальной стратегии первого игрока в антагонистической многоходовой игре вида $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \tau, d_i, \leqslant \rangle$, где $\mathfrak{A}$ — множество стратегий первого игрока (вычислителя), каждая из которых определяет выбор точек (ходов) $a_1, \ldots, a_n$ из Ω, $\mathfrak{B}$ — множество всех характеристических функций класса $\mathfrak{B}$ (стратегий второго игрока), каждая B из которых определяет соответствующие значения (ответные ходы) $B(a_1), \ldots, B(a_n)$ из $\{0, 1\}$, $\mathfrak{M} = N$, где N — множество натуральных чисел, $\tau(A, B)$ — выигрыш стратегии A из $\mathfrak{A}$ при восстановлении ею функции B из $\mathfrak{B}$, равной по определению минимальному числу ходов стратегии A, за которые она полностью восстанавливает функцию B, τ: $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to N$, $\leqslant$ — естественный порядок на натуральных числах, d_i — число возможных расположений отрезка Δ после i-го хода.

II. Разбиение задачи на этапы. Задача разбивается на два этапа: начальный и последний.

Задача начального этапа состоит в отыскании хотя бы одной точки из отрезка Δ (первое попадание).

Задача последнего этапа — нахождение концов отрезка Δ (полное уничтожение «крейсера»).

Более точные формулировки этих задач будут даны на шагах IV и III метода.

III. Решение задачи на последнем этапе. Введем следующее вспомогательное понятие. Пусть первый игрок пользуется некоторой стратегией A из $\mathfrak{A}$. Тогда центром поиска (игры) или просто центром назовем такой ход стратегии A (точку из Ω), для которого ответным ходом второго игрока (значением восстанавливаемой функции) впервые с начала игры будет 1, т. е. a_{i+1} — центр игры $I\langle B\rangle = \langle A, B, \mathfrak{M}; \tau, d_i\rangle$, если $B(a_1) = B(a_2) = \ldots = B(a_i) = 0$, $B(a_{i+1}) = 1$, где $a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}$ — ходы первого игрока, $B(a_1), B(a_2), \ldots, B(a_i), B(a_{i+1})$ — соответствующие ответные ходы второго игрока. Пользуясь терминологией «морского боя», можно определить центр игры как точку первого попадания в «крейсер».

Позицию, возникающую в игре после нахождения центра, назовем центральной позицией. Центральная позиция является, таким образом, конечной позицией начального этапа и одновременно начальной позицией последнего этапа.

Задача последнего этапа состоит в построении оптимальной для центральной позиции стратегии первого игрока в игре $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \tau, d_i\rangle$. Будем решать эту задачу также методом СП, помечая номер шага метода одним штрихом и опуская название шагов.

1′. Пусть G множество всех возможных в игре центральных позиций (очевидно, что $|G| = |\Omega|$). Тогда для любой g из G игровое представление задачи последнего этапа имеет вид $I' = \langle\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{M}; \tau, d_i\rangle$, где $\mathfrak{A}'$ из $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$ из $\mathfrak{B}$ таковы, что $\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}' = P(g)$, $P(g)$ — пучок, определяемый позицией g (см. § 2, п. 2), $\mathfrak{M}$, τ — те же, что в исходном игровом представлении, d_i — функция оценки позиции, возникающей после i-го хода на последнем этапе, равная числу возможных расположений отрезка Δ в этой позиции. При этом если выигрыш $\tau(A, B)$ стратегии A из $\mathfrak{A}$ в игре $I\langle B\rangle$ равен n, то из определения τ и d_i имеем $d_n(A, B) = 1$.

Второй, третий и четвертый шаги метода (II′, III′, IV′) для задачи последнего этапа (III) вырождены, поэтому переходим к пятому шагу.

V′. Введем необходимые понятия. Обозначим через Δ_0, Δ_i множества точек из Ω, которые могут принадлежать отрезку Δ в центральной позиции и в позиции, возникающей после i-го хода в игре $I' = \langle\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{M}; \tau, d_i\rangle$ на втором этапе соответственно. Очевидно, что множество Δ_0 (Δ_0-окрестность) представляет собой «крест», состоящий из сходящихся в центре нижней и верхней вертикальных частей и левой и правой горизонтальных частей. В зависимости от расположения возможных центров относительно границ (сторон) квадрата Ω Δ_0-окрестности могут быть полными или усеченными. «Крест» полных Δ_0-окрестностей составляют отрезки длины δ. «Крест» неполных Δ_0-окрестностей усечен либо по одной горизонтальной или одной вертикальной части, либо по горизонтальной и вертикальной частям одновременно. При этом заметим, что Δ_0-окрестность имеет обязательно по одной горизонтальной или одной вертикальной части, длины которых не меньше δ. Теперь установим соответствие между мощностью $|\Delta_0|$ Δ_0-окрестности, равной числу входящих в нее точек, и числом d возможных расположений отрезка Δ («крейсера») в этой окрестности. Нетрудно видеть, что для полных Δ_0-окрестностей $d = 2\delta$, а для неполных — d равно сумме длин усеченных частей «креста». Так, для Δ_0-окрестности на рис. 1 $\delta = 9$, $d = 18$, а на рис. 2 $\delta = 9$, $d = 14$. Из определения Δ_0-окрестности ясно, что она является областью неопределенности и ее мощность уменьшается по мере получения информации первым игроком.

Стратегию S_n будем определять, руководствуясь следующим принципом. Информация, выдаваемая в каждом ответном ходе S_n, должна быть такой, чтобы сокращение области неопределенности после этого хода (при переходе от одной позиции к другой) было бы минимальным. Стратегию S_n определим индуктивно.

Пусть a_i — i-й ход первого игрока на последнем этапе, $s_n(a_i)$ — ответный i-й ход S_n, $i = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $d(a_i, 0)$, $d(a_i, 1)$ число возможных расположений «крейсера» в Δ_i-окрестности, полученной после i-го хода в игре (i-й ход первого игрока и ответный i-й ход второго) при ответном ходе, равном 0 или 1, соответственно. Тогда стратегия S_n

такова, что

$$s_n(a_i)=0, \quad \text{если} \quad d(a_i,\ 0)>d(a_i,\ 1),$$
$$s_n(a_i)=1, \quad \text{если} \quad d(a_i,\ 1)>d(a_i,\ 0).$$

VI. Нетрудно видеть, что при любом ходе первого игрока a_i, сделанном в Δ_{i-1}-окрестность имеет место равенство $d(a_i,\ 0)+d(a_i,\ 1)=d_{i-1}$, где d_{i-1} — число возможных расположений «крейсера» в Δ_{i-1}. Отсюда и из определения S_n очевидно, что оптимальной против S_n будет такая

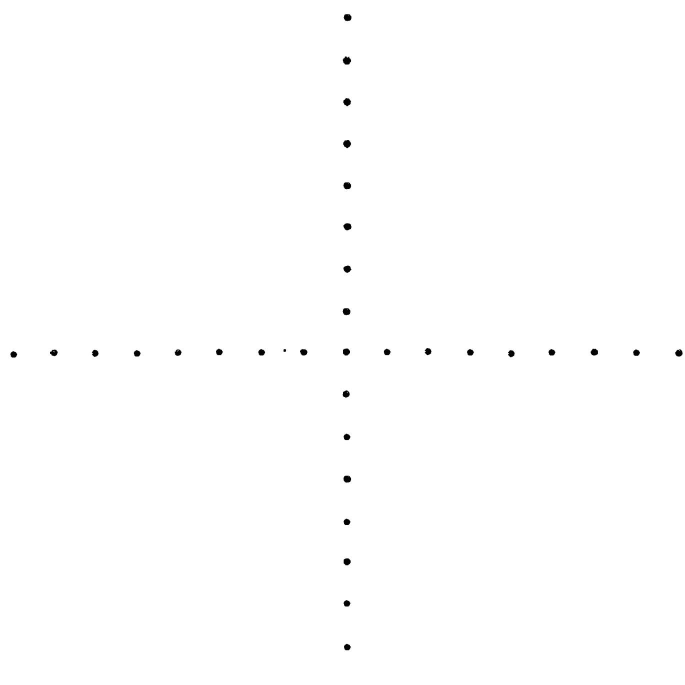

Рис. 1

стратегия первого игрока, при которой после каждого ее i-го хода разность $|d(a_i,\ 0)-d(a_i,\ 1)|$ была бы минимальной. Выигрыш оптимальной в игре $\langle\mathfrak{A}',\ S_n,\ \tau,\ d_i\rangle$ стратегии равен, таким образом, $]\log_2 d_0[$, где $]a[$ — наименьшее целое, большее или равное a, d_0 — число возможных расположений «крейсера» в Δ_0 [1].

VI. Перейдем теперь непосредственно к построению оптимальной стратегии O_n первого игрока в игре $\langle\mathfrak{A}',\ S_n,\ \tau\rangle$. Построим сначала оптимальную стратегию первого игрока для некоторой центральной позиции в следующей наиболее общей ситуации (рис. 3). Здесь $|A,\ 0|=|0,\ B|=\delta$, $|0,\ C|=p$, $|0,\ D|=l$, $l<p$. Очевидно, что первый ход a стратегии O_n не может быть выбран из отрезка $[A,\ 0]$, так как в этом случае после ответного нуля стратегии S_n получим, что $d(a,\ 0)>p$. Пусть a выбирается на отрезке $[0,\ B]$, причем так, чтобы $|a,\ B|<p$ и чтобы выполнялся принцип построения оптимальной стратегии первого игрока. Нетрудно подсчитать, что $|a, B|=\left[\frac{p+l}{2}\right]<p$.

Рассмотрим конкретный пример (см. рис. 3), когда $|A,\ 0|=|0,\ B|=$ $=9$, $|0,\ C|=6$, $|0,\ D|=3$, т. е. здесь Δ_0-окрестность усечена по нижней вертикали и правой горизонтали «креста». Очевидно, что первый ход оптимальной для этой позиции стратегии первого игрока должен быть сделан в вертикаль «креста», так как число содержащихся в ней возможных расположений отрезка Δ, равне 6,— больше чем число этих расположений по горизонтали равное 3. Общее число возможных расположений Δ равно 9. Выбираем a так, чтобы $|a, B| = 4$. Тогда имеем $d(a, 1) = 4$, $d(a, 0) = 5$.

Аналогичными подсчетами определяются последующие ходы оптимальной в приведенном примере стратегии первого игрока, а также ходы оптимальных для всех других центральных позиций в игре $\langle \mathfrak{A}, S_n, \tau \rangle$ стратегий первого игрока и их выигрыши (см. теорему 5).

VII′. Лемма 13. *Стратегия A_0 оптимальна в игре $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau, d_i \rangle$ на последнем этапе.*

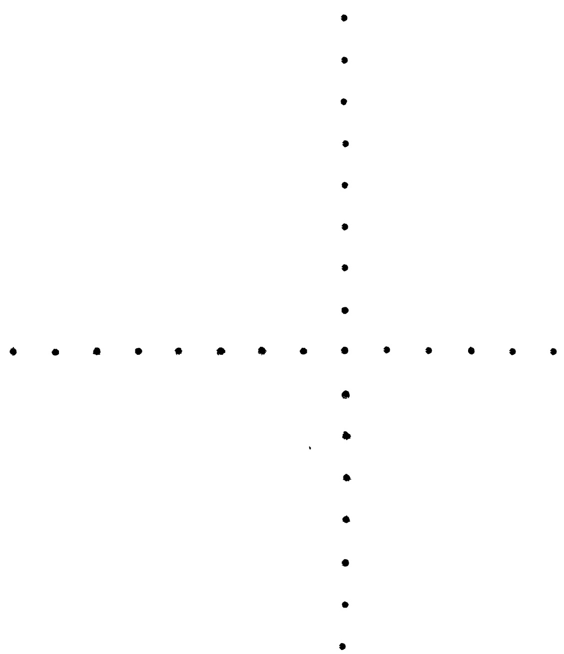

Рис. 2

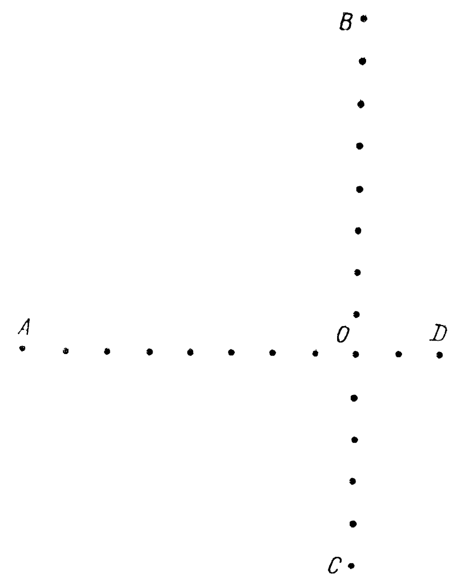

Рис. 3

Действительно, нетрудно видеть, что для любой центральной позиции и оптимальной для нее стратегии A_0 из $\mathfrak{A}$ имеет место равенство $\tau(A_0, \mathfrak{B}) = \tau(A_0, S_n)$ и, значит, эта стратегия является оптимальной стратегией первого игрока на последнем этапе в игре $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau, d_i \rangle$. #

IV. Уточнение задачи начального этапа и ее решение. Уточненная задача начального этапа формулируется следующим образом. Построить такую стратегию первого игрока, которая реализует попадание в наиболее перспективную центральную позицию. При этом будем говорить, что центральная позиция G_1 перспективнее центральной позиции G_2, если выигрыш (число ходов) оптимальной для позиции G_1 стратегии первого игрока меньше, чем выигрыш оптимальной для G_2 стратегии первого же игрока.

Для решения сформулированной задачи воспользуемся также методом СП, помечая номера шагов метода двумя штрихами.

I″. Игровое представление задачи имеет вид $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}', \tau', \leqslant \rangle$, где $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$ — те же, что в игровом представлении исходной (основной) задачи, а $\tau'(A, B)$ равно числу ходов, за которые стратегия A реализует попадание в центральную позицию при условии, что второй игрок применяет стратегию B.

Шаги II″—IV″ метода для задачи начального этапа вырождены.

V″. Предполагаемая синкретическая стратегия $\tilde{S}_н$ на начальном этапе определяется следующим образом. Во всех точках (ходах), выбранных по любой стратегии A из $\mathfrak{A}$, стратегия $\tilde{S}_н$ выдает нулевые значения до тех пор, пока в Ω имеется хотя бы один отрезок длины δ, точки которого еще не выбирались по стратегии A.

VI″. Для определения оптимальной в игре $\langle\mathfrak{A}, \tilde{S}_{н}, \tau'\rangle$ стратегии первого игрока необходимо упорядочить центральные позиции по перспективности, что нетрудно сделать, используя результаты третьего шага основной задачи. Очевидно, что наименее перспективными будут позиции, имеющие полные Δ_0-окрестности, содержащие по 2δ возможных расположений отрезка Δ, затем те позиции, Δ_0-окрестности которых содержат $2\delta-1$ расположений и т. д. Наиболее перспективными будут, таким образом, центральные позиции с центрами в углах квадрата Ω.

Определим теперь некоторое множество $\mathfrak{C}$ стратегий первого игрока такое, что любая стратегия C из $\mathfrak{C}$ будет оптимальной в игре $\langle\mathfrak{A}, \tilde{S}_{н}, \tau'\rangle$. Для определения множества $\mathfrak{C}$ разобьем квадрат Ω, длина стороны которого равна $k\delta$, на прямую сумму целочисленных квадратов, каждый из которых имеет сторону длины δ. Затем в каждом полученном квадрате выделим все точки решетки Ω, лежащие на диагонали этого квадрата, соединяющей левую нижнюю вершину с правой верхней. Обозначим все множество таких точек в Ω через V. Легко подсчитать, что $|V|=k^2\delta$. Множеством $\mathfrak{C}$ будет множество таких стратегий из $\mathfrak{A}$, каждая из которых на первом этапе (до получения точки из Δ) выбирает на каждом ходе точку из V в соответствии с заданным для этой стратегии порядком.

Лемма 14. *Любая стратегия C из $\mathfrak{C}$ является оптимальной стратегией первого игрока в игре* $\langle\mathfrak{A}, \tilde{S}_{н}, \tau'\rangle$.

Доказательство. Покажем вначале, что любая C из $\mathfrak{C}$ решает задачу, т. е. реализует попадание в центральную позицию (конечную в игре $\langle\mathfrak{A}, \tilde{S}_{н}, \tau'\rangle$). Действительно, из определения множества V видно, что в Ω не найдется ни одного отрезка длины δ, у которого хотя бы одна из точек не совпадала бы с точкой из V и, значит, стратегия C из $\mathfrak{C}$ реализует попадание в центральную позицию. При этом из определения стратегии $\tilde{S}_{н}$ следует, что число ходов, затраченное стратегией C для решения задачи начального этапа, равно $|V|-1=k^2\delta-1$.

Далее нетрудно подсчитать, что максимальное число непересекающихся отрезков длины δ во всем квадрате Ω равно $(k\delta)^2/\delta=k^2\delta$, например число всех горизонтальных (вертикальных) непересекающихся отрезков длины δ в Ω. Следовательно, число «выстрелов» (ходов первого игрока), необходимых для нахождения точки из отрезка Δ, когда второй игрок применяет стратегию $\tilde{S}_{н}$, должно быть не меньше, чем $k^2\delta-1$. Таким образом, все стратегии C из $\mathfrak{C}$ оптимальны в игре $\langle\mathfrak{A}, \tilde{S}_{н}, \tau'\rangle$. #

VII′. Выделим из множества $\mathfrak{C}$ некоторое подмножество $\mathfrak{C}_0$ стратегий, определив любую стратегию C_0 из $\mathfrak{C}_0$ следующим образом.

Сначала стратегия C_0 из $\mathfrak{C}_0$ выбирает точки из V, имеющие полные Δ_0-окрестности в произвольном, выбранном для нее порядке. Затем C_0 также в произвольном порядке выбирает точки, Δ-окрестности которых содержат $(2\delta-1)$ возможных расположений отрезка Δ и т. д., до тех пор пока стратегия C_0 не реализует попадание в центральную позицию и тем самым не закончится начальный этап.

Лемма 15. *Любая C_0 из $\mathfrak{C}_0$ является оптимальной стратегией первого игрока на начальном этапе.*

Легко видеть, что выигрыш любой стратегии C_0 из $\mathfrak{C}_0$ против стратегии $\tilde{S}_{н}$ равен ее гарантированному на начальном этапе выигрышу, а так как C_0 оптимальна против $\tilde{S}_{н}$ по определению множества $\mathfrak{C}_0$, то она является оптимальной стратегией первого игрока на начальном этапе. #

V. Стратегия $\tilde{S}$ в игре $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau, d_i\rangle$ определяется как композиция $\tilde{S}=S_{п} * \tilde{S}_{н}$, где $\tilde{S}_{н}$ — стратегия синкретического противника на начальном этапе, $S_{п}$ — на последнем. Стратегия $\tilde{S}_{н}$ определяется на четвертом шаге метода, $S_{п}$ — на третьем шаге.

VI. Лемма 16. *Стратегия $O=O_{п} * O_{н}$, где $O_{н}$ — оптимальная стратегия первого игрока на начальном этапе, определяемая на шаге* IV *ме-*

тода, $O_{\text{п}}$ — оптимальная стратегия первого игрока на последнем этапе, определяемая на шаге III, *будет оптимальной стратегией первого игрока в игре* $\langle \mathfrak{A}, \tilde{S}, \tau, d_i \rangle$.

Справедливость леммы следует из определения O и оптимальности $O_{\text{н}}$ и $O_{\text{п}}$.

VII. Теорема 7. *Стратегия O является позиционно-оптимальной стратегией первого игрока в игре* $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau, d_i \rangle$.

Для доказательства позиционной оптимальности стратегии O необходимо показать, что ее выигрыш в игре $\langle \mathfrak{A}, \tilde{S}, \tau, d_i \rangle$ равен ее гарантированному выигрышу в игре $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau, d_i \rangle$. Перейдем к доказательству этого факта.

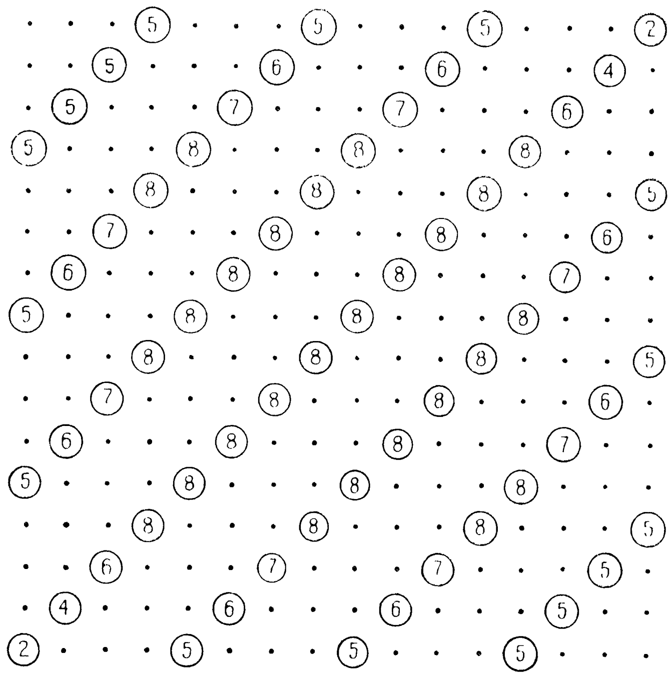

Рис. 4

Оценим каждую точку v множества V числом d возможных расположений отрезка Δ при условии, что точка v является центром в игре $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau \rangle$ (см. шаг V′ последнего этапа и пример на рис. 4). Далее разобьем все множество V на множество $\{K_d\}$ таких классов, каждый из которых содержит точки с одной и той же оценкой d. Упорядочим эти классы в порядке возрастания d. В результате получим ряд вида

$$K_2,\ K_4,\ \ldots,\ K_{\delta-1},\ K_{\delta+1},\ \ldots,\ K_{2\delta} \quad \text{при нечетном } \delta,$$

$$K_2,\ K_4,\ \ldots,\ K_{\delta-2},\ K_\delta,\ K_{\delta+1},\ \ldots,\ K_{2\delta} \quad \text{при четном } \delta.$$

Дальнейшие рассуждения для простоты изложения проделаем только для нечетного δ. При четном δ эти рассуждения аналогичны.

Для каждого класса K_d определим его мощность $|K_d|$. Имеем: $|K_d| = 2$, при любом $2 \leqslant d \leqslant \delta - 1$, т. е. в K_d, $2 \leqslant d \leqslant \delta - 1$, входит по одной точке из нижнего левого и правого верхнего квадрата. Для $d = (\delta + 1)$ имеем $|K_{\delta+1}| = 2\delta + 4(k-2) + 2$ — т. е. все точки из V, находящиеся в левом верхнем и правом нижнем квадратах, по точке из квадратов, имеющих с Ω по одной общей стороне, и по точке из левого нижнего и правого верхнего квадратов. Далее, при любом p, $2 \leqslant p \leqslant \delta - 1$, имеем

$$|K_{\delta+p}| = \begin{cases} 4(k-2) & \text{при } p\text{-четном}, \\ 4(k-2) + 2 & \text{при } p\text{-нечетном}, \end{cases}$$

И, наконец, имеем $|K_{2\delta}| = 2 + 4(k-2) + \delta(k-2)^2$. Число членов ряда $|K_2|$, $|K_4|$, ..., $|K_{\delta-1}|$, $|K_{\delta+1}|$, ..., $|K_{2\delta}|$ равно $(\delta-1)/2+\delta$. Переобозначим мощности $|K_2|$, $|K_4|$, ..., $|K_{\delta-1}|$, $|K_{\delta+1}|$, ..., $|K_{2\delta}|$ через D_1, D_2, ..., $D_{(\delta-1)/2}$, $D_{(\delta-1)/2+1}$, ..., $D_{(\delta-1)/2+\delta}$ соответственно.

Пусть теперь B_d из $\mathfrak{B}$ такова, что центр поиска в игре $\langle \mathfrak{A}, B_d, \tau \rangle$ совпадает с некоторой точкой v из класса K_d $|K_d| = D_l$, $2 \leqslant l \leqslant (\delta-1)/$ $/2+\delta$. Тогда выигрыш стратегии O в игре $\langle \mathfrak{A}, B_d, \tau \rangle$ равен $\tau(O, B_d) =$ $= T +]\log_2 d[$, где T — число ходов, сделанных стратегией O на начальном этапе. Выигрыш же стратегии O в игре $\langle O, \tilde{S}, \tau \rangle$ можно оценить через T следующим образом:

$$\tau(O, \tilde{S}) \geqslant T + \sum_{j=1}^{l-1} D_j, \text{ где } l = \begin{cases} d/2 & \text{при } 2 \leqslant d \leqslant \delta - 1, \\ (\delta-1)/2 + i & \text{при } d = \delta + i,\ 1 \leqslant i \leqslant \delta. \end{cases}$$

Знак равенства имеет место, когда рассматриваемый центр совпадает с последней выбираемой по стратегии O точкой из $\{K_d\}$. Следовательно, для проверки теоремы-метода достаточно показать, что для любой B_d из $\mathfrak{B}$ имеет место неравенство вида

$$\sum_{j=1}^{l-1} D_j \geqslant]\log_2 d[, \quad l = \begin{cases} d/2,\ d \in \{4, 6, \ldots, \delta-1\}, \\ (\delta-1)/2 + i,\ d = \delta + i,\ 1 \leqslant i \leqslant \delta. \end{cases} \tag{1}$$

При $d = 2$, $l = 1$ равенство $\tau(O, \tilde{S}) = \tau(O, B_2)$ очевидно. Рассмотрим случай, когда $d \in \{4, 6, \ldots, \delta-1\}$. Здесь имеем

$$\sum_{j=1}^{l-1} D_j = 2(l-1) = d - 2.$$

Таким образом, требуется доказать, что $(d-2) \geqslant]\log_2 d[$ при $d \geqslant 4$. После преобразований получаем эквивалентное неравенство вида

$$2^d \geqslant 4d, \quad d \geqslant 4.$$

Последнее неравенство легко доказывается методом математической индукции.

1. При $d = 4$ неравенство превращается в равенство.
2. Пусть при $d = k$ выполняется $2^k \geqslant 4k$, $k \geqslant 4$.

Докажем, что тогда выполняется неравенство вида

$$2^{k+1} \geqslant 4(k+1).$$

Имеем $2^k \cdot 2 - 4k - 4 = 2^k \cdot 2 - 8k + 4k - 4 = 2(2^k - 4k) + 4(k-1) \geqslant 0$, так как $2^k - 4k \geqslant 0$ по предположению индукции, и $4(k-1) \geqslant 0$, так как $k \geqslant 4$.

Покажем теперь справедливость неравенства (1) и для $d > \delta - 1$. Для $d = \delta + 1$ имеем

$$\sum_{j=1}^{l-1} D_j = 2(l-1) = 2[(\delta-1)/2 + 1 - 1] = \delta - 1.$$

Нетрудно видеть, что при нечетном δ функция $f(\delta) = \delta - 1$, начиная с $\delta = 5$ растет быстрее, чем функция $\varphi(\delta) = \log_2(\delta+1)$, а при $\delta = 3$ получаем $\delta - 1 = \log_2(\delta+1)$.

Легко подсчитать, что для любого $d = \delta + i$, $1 \leqslant i \leqslant \delta$, и $k \geqslant 3$ сумма $\sum_{j=1}^{l-1} D_j$ больше, чем $(\delta+i)$, и, значит, имеем $\sum_{j=1}^{l-1} D_j \geqslant]\log_2(\delta+i)[$.

Например, для $d = \delta + 2$ имеем $\sum_{j=1}^{l-1} D_j = (\delta-1) + |k_{\delta+2}| = (\delta-1) + 4(k-$ $-2) \geqslant \delta + 3 \geqslant]\log_2(\delta+2)[$. #

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альсведе Р., Вагнер И. Задачи поиска.— М.: Мир, 1982.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы.— М.: Наука, 1964.
3. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1980.
4. Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры.— М.: Наука, 1984.
5. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций.— М.: Наука, 1971.
6. Кокорин А. И. Связь вопросов разрешимости и оценки метода СПФ построения оптимальных стратегий // Тр. VIII Всесоюзной конф. «Проблемы теоретической кибернетики».— Иркутск, 1985.
7. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре.— М.: Физматгиз, 1962.
8. Мак Кинси Дж. Введение в теорию игр.— М.: Физматгиз, 1960.
9. Мальцев А. И. Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.
10. Сухарев А. Г. Оптимальный поиск экстремума.— М.: Изд-во МГУ, 1975.
11. Сухарев А. Г., Федоров В. В. Минимаксные задачи и минимаксные алгоритмы.— М.: Изд-во МГУ, 1979.
12. Тарасова В. П. Оптимальные алгоритмы поиска отрезка наибольших значений для некоторого класса функций // ЖВМ и МФ, 1981, Т. 21, № 5.— С. 1108—1115.
13. Тарасова В. Н. Оптимальный поиск экстремума для класса локально-унимодальных функций // Кибернетика.— 1984.— № 1.
14. Тарасова В. П. Метод СМП построения оптимальных стратегий. ДАН СССР.— 1985.— Т. 283, № 3.— С. 569—572.
15. Уайльд Д. Методы поиска экстремума.— М.: Наука, 1967.
16. Цермело Э. О применении теории множеств к теории шахматной игры // Матричные игры.— М.: Физматгиз, 1961.

Поступило в редакцию 15 X 1990