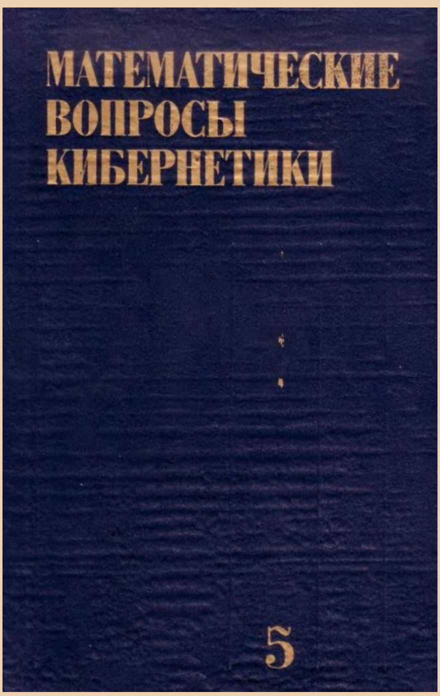


Ю. А. Зуев

# Пороговые функции и пороговые представления булевых функций

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Зуев Ю. А. Пороговые функции и пороговые представления булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. — М.: Наука, 1994. — С. 5–61. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1994-5

# ПОРОГОВЫЕ ФУНКЦИИ И ПОРОГОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

*Ю. А. ЗУЕВ*

(МОСКВА)

СОДЕРЖАНИЕ



## § 1. Введение

Аристотель пришел к логическим функциям, анализируя приемы рассуждений и доказательств. Эти исследования были продолжены Лейбницем, а в середине 19-го века изучение законов мышления привело Буля к созданию алгебры высказываний, ставшей аппаратом математической логики.

В 1943 г. американскими учеными Маккаллоком и Питтсом [81] была предпринята смелая попытка описать с помощью алгебры логики процесс распространения возбуждения по нервным волокнам, промоделировав тем самым функционирование нервной системы живых организмов. При этом элемент, моделирующий отдельную нервную клетку — нейрон, мыслился как логическое устройство, работающее по принципу «все или ничего», т. е. он возбуждался и передавал возбуждение далее по сети в том и только том случае, если суммарный возбуждающий сигнал, поступающий на его вход от других нейронов, превышал некоторое пороговое значение. Хотя частный вид пороговой функции — мажоритарная, реализующая процедуру принятия решения большинством голосов,— издревле был известен человечеству и использовался в государствах с республиканской системой правления, именно эта работа положила начало развитию пороговой логики.

Можно сказать, что в общем случае пороговая функция реализует процедуру взвешенного голосования. Более строго, булева функция $f\colon \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ называется пороговой, если существует линейное неравенство с действительными коэффициентами

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqslant b, \tag{1}$$

выполненное на тех и только тех булевых наборах $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $f(\mathbf{x})=0$. Коэффициенты $a_i$ называются весами, $b$ — порогом.

Как обычно, булев набор длины $n$ можно интерпретировать либо как подмножество $n$-элементного множества (и такая интерпретация совершенно естественна в большинстве прикладных задач), либо считать его вершиной $n$-мерного единичного куба. Пороговая функция задается при этом гиперплоскостью, рассекающей гиперкуб так, что в вершинах по одну сторону гиперплоскости функция равна нулю, по другую — единице (рис. 1). Такой взгляд оказывается весьма полезным в теоретических исследованиях, так как позволяет использовать геометрическую интуицию при решении различных вопросов, связанных с пороговыми функциями. В частности, становится сразу видно, что все булевы функции от одной переменной являются пороговыми, а из 16 функций от двух переменных не являются пороговыми лишь две — сложение по модулю 2 и его отрицание (рис. 2). Однако с ростом $n$ доля пороговых функций начинает быстро падать.

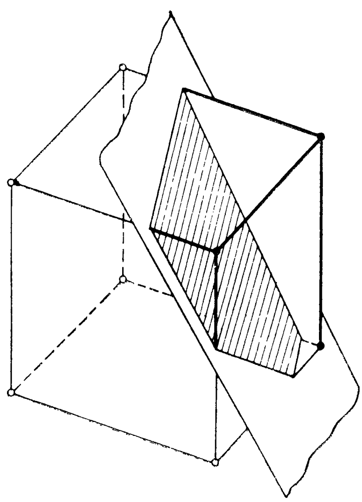

Рис. 1

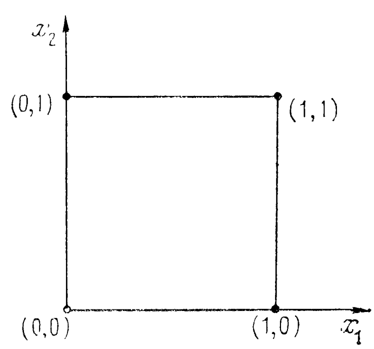


Рис. 2

Небольшим изменением порога или весов для пороговой функции всегда можно добиться строгого отделения гиперплоскостью ее нулей от единиц так, чтобы ни одна из вершин куба не лежала в гиперплоскости. Отметим также, что значения весов и порога всегда могут быть взяты рациональными, а стало быть, при желании и целыми. Подробнее эти вопросы будут рассмотрены в дальнейшем.

В середине пятидесятых годов пороговые функции привлекли внимание исследователей простотой своей технической реализации, сулившей возможность их эффективного использования в логических схемах появившихся в те годы первых серийных ЭВМ. Это привело к бурному росту исследований по пороговой логике. После интенсивного периода скрытого развития во второй половине пятидесятых годов, характеризовавшегося отчетами и частными сообщениями, пороговая логика заявила о себе в начале шестидесятых на симпозиумах и конференциях, а затем и в научной периодике как уже сложившаяся дисциплина. Этот первый этап исследований был подытожен в 1961 г. в специальной публикации Американского института инженеров-электриков S-134, содержавшей основополагающие работы Чоу, Элгота, Уиндера. Годом позже появилась целиком посвященная пороговой логике докторская диссертация Уиндера [116], которая до сих пор является уникальным собранием сведений по пороговым функциям и нередко цитируется в научных работах.

К сожалению, эти самые первые работы по пороговой логике в библиотеки СССР не поступили. Тем не менее, в 1964 г. Нечипоруком была опубликована фундаментальная работа [35] по синтезу схем из пороговых элементов, в которой получен порядок асимптотики сложности таких схем. Эти исследования были завершены в 1973 г. Лупановым [34], показавшим, что минимальное число пороговых элементов, достаточное для синтеза любой булевой функции, асимптотически равно $2\sqrt{2^n/n}$, и такую сложность имеют почти все булевы функции.

В 1965 г. в США вышли сразу две монографии по пороговой логике. В книге американского математика Ху [68], автора известных монографий по топологии, свойства пороговых функций изложены с изяществом, не утратившим своего блеска и поныне. Оригинальный взгляд на пороговую логику развит в переведенной на русский язык книге Дертоузоса [55], в большей степени посвященной техническим вопросам синтеза пороговых функций и схем. И, наконец, в 1971 г. в США вышла книга Муроги [86] с библиографией, содержащей около 400 работ по пороговой логике, которая стала настоящей энциклопедией результатов, полученных за все предыдущие годы. Достаточно полное изложение пороговой логики на русском языке можно найти в книге Бутакова [2].

С дальнейшей миниатюризацией электронных схем и появлением больших интегральных схем интерес к пороговой логике падает. Конъюнкторы, дизъюнкторы и инверторы, плотно упакованные в малом объеме, обеспечили необходимую компактность, надежность и скорость срабатывания логических схем ЭВМ, а также обладали необходимой технологичностью. Потребность в более мощной, но и более сложной пороговой логике отпала, и в начале семидесятых годов работы по пороговой логике становятся редкостью. Однако к середине семидесятых интерес к проблематике вновь оживляется. На этот раз к пороговым функциям пришли из совершенно другой области — от задач целочисленного программирования (см., например, [106]).

В самом деле, одной из наиболее известных $NP$-полных задач линейного булева программирования является задача о ранце:

$$\text{максимизировать } \sum c_i x_i \quad (2)$$
$$\text{при условии } \sum a_i x_i \leqslant b,$$

где переменные $x_i$ булевы, а коэффициенты $c_i$, $a_i$, $b$ — неотрицательные действительные числа. Таким образом, областью допустимых значений здесь является множество нулей монотонной пороговой функции, и изучение его строения может пролить свет на проблему алгоритмической трудности решения подобных задач.

В задачах линейного булева программирования допустимая область может быть задана не одним, а системой неравенств. При этом возникает задача агрегирования неравенств, т. е. замена их меньшим числом без изменения допустимой области. Изучение подобных вопросов привело к возникновению теории пороговых представлений булевых функций — таких представлений с помощью систем линейных неравенств, когда допустимые для системы булевы наборы и только они являются нулями булевой функции. Геометрически пороговое представление булевой функции сводится к отсечению гиперплоскостями всех ее единичных вершин. Минимальное число необходимых для этого линейных неравенств называется пороговым числом булевой функции и наряду с длиной ее кратчайшей дизъюнктивной нормальной формы может считаться мерой ее сложности.

Пороговое представление можно рассматривать и как дизъюнкцию пороговых функций, т. е. подобно дизъюнктивной нормальной форме (д. н. ф.) считать его схемой глубины 2 (рис. 3). При этом аналогия между длиной кратчайшей д. н. ф. и пороговым числом делается особенно отчетливой.

Целесообразность использования в ряде случаев порогового представления вместо д. н. ф. видна уже из того, что мажоритарная функция, задаваемая одним неравенством

$$x_1 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n-1}{2}, \tag{3}$$

требует для своего представления с помощью д. н. ф. $\binom{n}{[n/2]}$ элементарных конъюнкций — огромного числа при больших $n$.

Для пороговых функций имеются, однако, и совершенно иные сферы приложения, где на протяжении уже более 30 лет используются их адаптивные возможности, т. е. способность в результате многократной коррекции весов удовлетворять заданным требованиям. Эти возможности, по-видимому, впервые были осознаны в в 1957 г. Розенблаттом, разработавшим распознающую систему «персептрон» (см. [82, 103]), и в 1959 г. Уидроу, с успехом применившим адаптивный пороговый элемент «адалина» (см. [112]) в ряде технических приложений. Не касаясь детально огромного числа предложенных с тех пор алгоритмов адаптации (см. [113]), поясним лишь сам принцип. Для этого полезно рассмотреть несколько иное представление для пороговой функции.

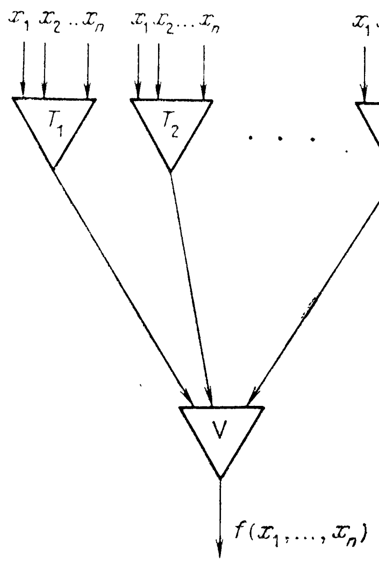


Рис. 3

Булевой функцией будем считать отображение $f$: $\{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$. Тогда пороговую функцию можно представить в виде

$$f(\mathbf{y}) = \operatorname{sgn}(a_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n), \tag{4}$$

полагая $\operatorname{sgn}(0) = -1$. Геометрически это соответствует переходу от куба $\{0, 1\}^n$ к кубу $\{-1, 1\}^n$. Связь между переменными $y_i$ в (4) и $x_i$ в (1) задается соотношением $y_i = 2x_i - 1$. Поэтому коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ в (4) те же, что и в (1), а обобщенный порог или смещение $a_0$ равен $a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i - 2b$.

Однако на (4) можно взглянуть и иначе, рассматривая в качестве значения пороговой функции знак скалярного произведения расширенного вектора весов $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ и расширенного вектора-вершины $(1, y_1, \ldots, y_n)$. Тогда естественным образом возникает следующий алгоритм коррекции: при обходе вершин куба в случае правильного значения функции в вершине не менять значений весов, а в случае ошибки прибавлять к расширенному вектору весов или вычитать из него расширенный вектор-вершину в зависимости от того, какое действие приводит к изменению скалярного произведения в нужном направлении. И действительно, этот алгоритм, называемый персептронным, за конечное число обходов куба приводит к цели, т. е. дает функцию, принимающую в вершинах $\{-1, 1\}^n$ заданные значения, если только такая пороговая функция вообще существует (см. [56, 82, 87]).

Персептронный алгоритм может рассматриваться как метод градиентного спуска для минимизации функционала $\sum |(\mathbf{a}, \mathbf{y})|$, где суммирование производится по тем наборам y, на которых функция принимает неправильные значения, с той, однако, разницей, что вместо градиента суммы поочередно используется градиент каждого из слагаемых. Рассматривая другие функционалы ошибки, например $\sum(\mathbf{a}, \mathbf{y})^2$, а также регулируя шаг градиентного спуска, можно получить новые алгоритмы адаптации (см. [56, 113]). Если же вершины куба предъявляются не в фиксированном порядке, а выбираются случайным образом в соответствии с некоторым вероятностным распределением, что согласуется с постановками многих прикладных задач, то рассмотренные алгоритмы минимизируют математическое ожидание функционала ошибки и становятся методами стохастической аппроксимации типа процедуры Роббинса — Монро. Открытие подобных алгоритмов подстройки весов явилось одной из причин широкого использования пороговых и вообще линейных функций в задачах искусственного интеллекта и распознавания образов.

Заметим, что в (4) $a_0$ входит равноправно с $a_1, \ldots, a_n$. Это позволяет (подобно однородным координатам в проективной геометрии) ввести дополнительную переменную $y_0$ и рассмотреть функцию

$$f^H(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \operatorname{sgn}(a_0y_0 + a_1y_1 + \ldots + a_ny_n), \tag{5}$$

совпадающую с исходной функцией $f$ в подкубе $y_0 = 1$ и называемую по отношению к ней гиперфункцией. Гиперфункция может быть также записана в виде $f^H = y_0 f \vee \bar{y}_0 f^d$, где $f^d = \bar{f}(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ — функция, двойственная к $f$. Сама же гиперфункция является, как сразу видно из (5), самодвойственной функцией $(f^H)^d = f^H$. Схематически гиперфункция представлена на рис. 4, из которого можно заметить, что для дуализации пороговой функции в форме (4) достаточно изменить значение $a_0$ на противоположное. Отметим также, что с помощью (5) устанавливается взаимно однозначное соответствие между пороговыми функциями от $n$ переменных и самодвойственными пороговыми функциями от $n+1$ переменных.

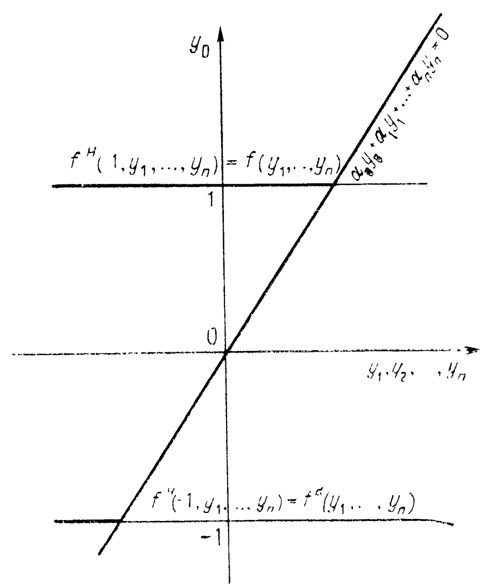


Рис. 4

Сама же первоначальная идея Маккаллока и Питтса — описать функционирование нервной системы логическими сетями — также не была забыта и, значительно обогащенная, получила дальнейшее развитие в современной теории нейронных сетей (см. [91, 97, 111]). Эта бурно развивающаяся в последние годы область, продвигаемая с одной стороны нейробиологами, стремящимися раскрыть тайну функционирования нервной системы и выработки условных рефлексов живыми организмами, а с другой — математиками, физиками и инженерами, конструирующими искусственные нейронные сети, способные решать задачи распознавания и оптимизации, стала в настоящее время одним из основных направлений в исследованиях по искусственному интеллекту.

Прогресс был достигнут, когда от простейших адаптивных сетей типа «персептрона» перешли к многослойным нейронным сетям, каждый слой которых состоит из множества адаптивных элементов, и были разработаны алгоритмы их настройки. В совокупности это привело к качественному росту функциональных возможностей искусственных нейронных сетей. В нейронных вычислениях внимание конструкторов привлекает также распараллеленность процесса обработки информации, обещающая при подходящей аппаратной реализации существенный рост быстродействия по сравнению с компьютерами фон-неймановского типа. Сегодня именно с нейронным компьютером, заимствующим структурно-функциональные принципы мозга, большинство исследователей связывают дальнейший прогресс в обучении машин распознаванию слуховых и зрительных образов, их потенциальную возможность решать другие плохо формализованные задачи, не вызывающие затруднений у «естественного интеллекта» человека и животных, но трудных для современных ЭВМ, требующих алгоритмически точного описания процесса решения.

Заканчивая этот краткий экскурс в историю развития пороговой логики, вернемся к ее истокам. Можно предполагать, что в демократических республиках древней Эллады принятием ответственных решений с помощью голосования стремились избежать ошибки, хотя возможно, что решение по большинству воспринималось просто как справедливое и необходимое для поддержания государственной структуры. Более определенно сформулировал свою точку зрения Лаплас [31], настаивая на количественном увеличении состава суда для уменьшения вероятности судебной ошибки. Однако обоснование использования мажоритарного принципа в обществе с помощью теории вероятности даже в простейшем двухальтернативном случае сталкивается с двумя серьезными трудностями: 1) не всегда возможно корректно определить само понятие правильного решения, чтобы затем приписывать вероятности ошибок отдельным членам коллектива, 2) затруднен обоснованный выбор вероятностной модели коллектива.

Этих трудностей не возникает при использовании мажоритарного принципа в технических системах переработки и передачи информации, в которых для повышения надежности применяются избыточность и дублирование. Простейшая модель статистически независимых ошибок в различных устройствах часто оказывается вполне приемлемой. Приоритет в использовании здесь мажоритарного принципа принадлежит фон Нейману [109], чьи идеи вызвали целый поток исследований по повышению надежности логических схем и автоматов в конце пятидесятых — начале шестидесятых годов (см. [77, 83, 100, 123]).

Примерно в это же время рядом исследователей было замечено, что при статистической независимости ошибок отдельных членов коллектива оптимальное решающее правило является пороговой функцией (см. ссылки в [48, 56, 87]). Дальнейшее исследование качества решений, принимаемых простым большинством и путем взвешенного голосования, проводилось Пирсом [94], сформулировавшим также общие принципы обучения и самообучения порогового элемента, используемого для повышения надежности. Статистические свойства мажоритарной функции рассматривались также автором [17, 18, 19]. В [4] сходные идеи были использованы для повышения точности решения задач распознавания образов. Следующая модель абстрактной информационной системы взята из [20].

Пусть имеется $n$ дублирующих друг друга параллельных информационных каналов, по которым передаются бинарные символы. Такие каналы могут быть моделью технической системы связи, коллектива экспертов или совокупностью различных программно реализованных алгоритмов распознавания. Пусть $p_i$ — вероятность правильной передачи символа $i$-м каналом, $q_i = 1 - p_i$ — вероятность ошибки. Тогда в случае статистической независимости ошибок в каналах оптимальное правило восстановления переданного символа по набору символов, принятых по каналам, задается взвешенным голосованием между каналами с весами, равными $\log(p_i/q_i)$, т. е. пороговой функцией.

На практике редко бывает выполнено условие независимости и известны вероятности ошибок. Однако в ряде случаев оказывается возможным пропустить по многоканальной системе тестовую последовательность битов, а затем найти пороговую функцию, минимизирующую число ошибок на обучающем материале, использовав для этого, например, персептронный алгоритм. Наконец, если пропускание теста неосуществимо, то остается воспользоваться мажоритарным алгоритмом, т. е. восстанавливать переданный бит по большинству принятых по каналам битов. Другая интересная возможность состоит в том, чтобы, начав с мажоритарной пороговой функции, считать бит на ее выходе безошибочным и поощрять или наказывать каналы соответствующим изменением их весов, улучшая таким образом в процессе работы саму решающую процедуру [20а].

В большинстве технических систем связи, однако, повышение достоверности информации достигается не путем распараллеливания, а с помощью помехоустойчивого кодирования. Здесь идея использования мажоритарного принципа в декодерах принадлежит Риду [101], затем она была развита Месси [79]. Общий же результат о возможности порогового декодирования блоковых кодов выражается теоремой Рудольфа (см. [78]).

Интерес к изучению свойств пороговых функций стимулируется, с одной стороны, важностью решаемых с их помощью задач, с другой — богатством и разнообразием используемых методов, связанных с различными разделами математики. Оглядываясь назад, можно сказать, что 1960—1965 гг. были «золотым веком» пороговой логики, когда здесь в течение короткого промежутка времени было выдвинуто много ярких идей и получено большинство результатов. Ряд задач все же не получил тогда удовлетворительного решения. В первую очередь это относится к задаче подсчета числа $N_n$ пороговых функций от $n$ переменных. К 1965 г. удалось получить лишь порядок асимптотики логарифма этого числа

$$2^{n^2(1/2-o(1))} < N_n < 2\sum_{i=0}^{n}\binom{2^n-1}{i} = 2^{n^2(1-o(1))}. \qquad (6)$$

Верхняя оценка здесь выражает максимальное число областей, на которые $(n+1)$-мерное евклидово пространство может разбиваться $2^n$ гиперплоскостями, проходящими через начало координат. Впервые верхняя оценка в (6) появилась согласно авторитетным свидетельствам Уиндера [121] и Муроги [86] в 1959 г. в отчете [93] и примерно в это же время была независимо получена Камероном [46] и Уиндером [115]. Впоследствии, однако, выяснилось, что пальму первенства здесь следует отдать выдающемуся швейцарскому математику девятнадцатого века, одному из создателей многомерной геометрии Людвигу Шлефли, впервые получившему формулу для числа областей около 1850 г. (см. [105, с. 209—212]). Сама же постановка задачи о подсчете числа областей разбиения и ее решение для трехмерного пространства принадлежат знаменитому геометру Якобу Штейнеру [108].

Нижняя оценка в (6) была получена изящным индуктивным методом, основанным на вариации порога, также независимо открытым несколькими авторами, но первая публикация в 1965 г. принадлежит Яджиме и Ибараки [124]. На русский язык переведена также работа Блоха и Моравека [44].

Оценки (6) продержались до 1989 г. и вопрос об асимптотике оставался открытым, пока автором [15] не было показано, что

$$\log_2 N_n \sim n^2, \quad n\to\infty. \qquad (7)$$

Этот результат оказался возможным вследствие общего прогресса, достигнутого в дискретной математике после 1965 г., в частности, появления мощных комбинаторно-вероятностных методов.

В настоящем обзоре предпринята попытка не только изложить основные комбинаторные свойства пороговых функций, но и в целом охватить используемые в исследованиях методы, значение которых подчас выходит за рамки пороговой логики. Рассматриваются только классические двузначные пороговые функции. Алгоритмы адаптации и статистические свойства пороговых функций в задачах повышения достоверности информации в обзоре не рассматриваются. Эти вопросы, не соприкасающиеся непосредственно с комбинаторными свойствами и тесно связанные с прикладными задачами, заслуживают отдельного рассмотрения. Из схем на пороговых элементах рассматриваются лишь порогово-дизъюнктивные схемы, т. е. пороговые представления. Доказательства порою лишь намечены, но в важнейших случаях автор стремился дать ссылки на первоисточники с указанием авторства.

Основным в обзоре является § 2, на него в значительной степени опирается последующее изложение. От читателя предполагается знакомство со стандартным курсом булевых функций и теории д. н. ф., в качестве которого можно рекомендовать книгу Нигматуллина [36]. На протяжении обзора без специального разъяснения используются: 1) известный частичный порядок на множестве $\{0, 1\}^n$: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \preccurlyeq \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; 2) понятие монотонной булевой функции $\varphi$: $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{y})$; 3) понятие нижней единицы и верхнего нуля монотонной функции $\varphi$: $\alpha \in \{0, 1\}^n$ называется нижней единицей функции $\varphi$, если $\varphi(\alpha) = 1$ и $\varphi(\beta) = 0$ для любого $\beta \prec \alpha$; аналогично определяется верхний нуль; конъюнкции, соответствующие нижним единицам, являются простыми импликантами монотонной функции; 4) расстояние Хемминга $r(\alpha, \beta)$ между вершинами $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^n$ — число несовпадающих у них координат; 5) $i$-й слой куба — множество вершин с $i$ единичными координатами; 6) $\log a = \log_2 a$. Будем также говорить, что некоторое свойство выполнено для почти всех булевых функций от $n$ переменных или для типичной булевой функции, если доля функций, для которых оно выполнено, стремится к 1 с ростом $n$. Остальные необходимые понятия и определения вводятся по ходу изложения.

Обзор завершается списком интересных с точки зрения автора открытых проблем, которыми он надеется привлечь внимание специалистов по комбинаторному анализу к задачам пороговой логики. Автор сознает, что при изложении в одном обзоре результатов, по времени разделенных десятилетиями, ему вряд ли удалось избежать неточностей или даже ошибок, и будет признателен всем сообщившим или приславшим ему свои замечания.

## § 2. Общие подходы и методы в исследовании пороговых функций

**1. Разбиение пространства гиперплоскостями.** Пусть некоторая пороговая функция $f$: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ задана в форме (1) набором значений параметров $a_1^0, \ldots, a_n^0, b$, строго отделяющим множество $f^{-1}(0)$ от $f^{-1}(1)$. В этом случае и все точки $(a_1, \ldots, a_n, b)$, лежащие внутри шара достаточно малого радиуса с центром в $(a_1^0, \ldots, a_n^0, b)$ в $(n+1)$-мерном пространстве, будут задавать ту же самую функцию. Возникает вопрос: что представляет собой множество значений параметров, задающих данную пороговую функцию? Для ответа на него удобнее использовать представление (4). Значение функции в каждой вершине $\mathbf{y} \in \{-1, 1\}^n$ накладывает на значения параметров ограничение вида $a_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n \gtrless 0$, т. е. точка $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ должна принадлежать одному из двух полупространств в зависимости от значения $f(\mathbf{y})$. Выпуклый многогранный конус, образованный пересечением $2^n$ таких полупространств, и является множеством значений параметров, реализующих функцию $f$. Если конус не пуст, т. е. пороговая функция с заданными значениями в вершинах $\{-1, 1\}^n$ существует, то он в данном случае обладает и внутренностью, т. е. является телесным. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между открытыми конусами, на которые $(n+1)$-мерное пространство $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ разбивается проходящими через начало координат $2^n$ гиперплоскостями вида

$$a_0 \pm a_1 \pm \ldots \pm a_n = 0 \tag{8}$$

и пороговыми функциями.

Задача подсчета числа конусов, на которые $n$-мерное евклидово пространство $E^n$ разбивается $K$ гиперплоскостями, проходящими через начало координат, впервые была рассмотрена для двух- и трехмерного случаев в 1826 г. Штейнером [108], и около 1850 г. обобщена Шлефли [105, с. 209—212] на $n$-мерный случай. В дальнейшем, на протяжении ста с лишним лет проблематика, связанная с разбиением пространства гиперплоскостями, развивалась многими авторами, хотя и не все из них были, по-видимому, осведомлены о работах своих предшественников. Так продолжалось вплоть до 1971 г., когда появился обстоятельный обзор Грюнбаума [63], содержащий обширную библиографию.

Из всего многообразия полученных здесь результатов коснемся лишь двух, имеющих отношение к проблеме перечисления пороговых функций. Напомним, что расположение гиперплоскостей в $n$-мерном евклидовом пространстве $E^n$ называется *общим* (нецентрированным), если пересечение любых $i$ гиперплоскостей имеет размерность $n-i$, при $i > n$ оно пусто. Расположение гиперплоскостей называется *центрированным общим*, если все они проходят через одну точку (начало координат) и любые $i$, $i \leqslant n$, нормалей линейно независимы.

Теорема 1 [Шлефли]. *Максимальное число $n$-мерных открытых многогранных конусов, возникающих при разбиении $n$-мерного евклидова пространства $K$ гиперплоскостями, проходящими через начало координат, равно $2\sum\limits_{i=0}^{n-1}\binom{K-1}{i}$, и этот максимум достигается в том и только том случае, если гиперплоскости находятся в центрированном общем положении.*

Теорема 2 [45]. *Максимальное число $n$-мерных открытых многогранных областей, возникающих при разбиении $n$-мерного евклидова пространства произвольными $K$ гиперплоскостями, равно $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{K}{i}$, и этот максимум достигается в том и только том случае, если гиперплоскости находятся в общем положении.*

Докажем вторую из этих теорем, первая доказывается аналогично. Доказательство отличается от данного в [45], где использовались эйлерова характеристика, и является примером использования индуктивного метода в геометрии, гносеологическое значение которого подчеркивалось Пойа [96], его использовал и сам Шлефли.

Доказательство. При $K=1$ утверждение теоремы 2 выполнено при любом $n$. Пусть оно выполнено для всех $n$ при $K=m$. Докажем его для $K=m+1$. Пусть в $E^n$ заданы $m+1$ гиперплоскостей $L_1, \ldots, L_m, L_{m+1}$. Число областей, на которые гиперплоскости $L_1, \ldots, L_{m+1}$ разбивают $E^n$, по предположению индукции не превышает $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{m}{i}$. При проведении $L_{m+1}$ число областей увеличивается за счет того, что некоторые из областей рассекаются на две области. В результате каждого такого рассечения в гиперплоскости $L_{m+1}$ вырезается $(n-1)$-мерный кусок, и прирост числа областей в $E^n$ равен числу таких кусков в $L_{m+1}$. Эти куски являются $(n-1)$-мерными областями гиперплоскости $L_{m+1}$, получающимися в результате рассечения $L_{m+1}$ лежащими в ней $(n-2)$-мерными гиперплоскостями, образованными пересечениями $L_{m+1}$ с $L_1, \ldots, L_m$. Таких $(n-2)$-мерных гиперплоскостей не более $m$, и по предположению индукции число кусков гиперплоскости $L_{m+1}$ не превышает $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{m}{i}$. Поэтому полное число областей в $E^n$ не превосходит

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{m}{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{m+1}{i}.$$

Расположение гиперплоскостей $L_1, \ldots, L_{m+1}$ является общим в том и только том случае, когда гиперплоскости $L_1, \ldots, L_m$ находятся в общем положении и $(n-2)$-мерные гиперплоскости-пересечения находятся в общем положении в $L_{m+1}$. Этим устанавливается условие равенства. Теорема доказана.

С задачей разбиения пространства гиперплоскостями тесно связана задача о числе линейных разделений конечного множества точек. Напомним, что точки находятся в общем положении в $E^n$, если никакие $i+2$ из них не лежат в $i$-мерном аффинном подпространстве для $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Следующий результат прекрасно изложен Нильсоном [87] со ссылкой на Ковера [51], его доказательство также представлено в [66].

Теорема 3. *Максимальное число линейно отделимых подмножеств у конечного множества из $K$ точек в $E^n$ равно* $2\sum_{i=1}^{n}\binom{K-1}{i}$, *и этот максимум достигается в том и только том случае, если точки находятся в общем положении.*

Воспользовавшись теоремой 1 или теоремой 3 и положив $K=2^n$, получим верхнюю оценку (6) для числа пороговых функций. Отметим также, что помимо пороговой логики теорема 1 нашла интересное приложение в геометрических вероятностях [52, 110].

Нетривиальную нижнюю оценку для числа областей разбиения пространства гиперплоскостями, зависящую лишь от $n$ и $K$, дать невозможно, так как это число зависит от степени вырожденности системы гиперплоскостей. Семейство гиперплоскостей (8) вырождено, и этим было обусловлено длительное отсутствие прогресса в задаче оценивания числа пороговых функций. Однако полезную нижнюю оценку для числа областей можно получить, если воспользоваться также зависящей от степени вырожденности величиной — полным числом различных аффинных подпространств, порожденных пересечениями гиперплоскостей.

Расположение гиперплоскостей в $E^n$ назовем *квазиобщим*, если пересечение любых $i$ гиперплоскостей имеет размерность $n-i$ или пусто (т. е. допускается параллельность, но через каждое подпространство пересечения размерности $n-i$ проходит ровно $i$ гиперплоскостей).

Теорема 4 [16]. *Число $n$-мерных открытых многогранных областей, на которые пространство $E^n$ разбивается произвольной конечной системой гиперплоскостей, всегда не меньше полного числа всевозможных аффинных подпространств пересечения, считая подпространства всех размерностей от 0 (точки) до $n-1$ (сами гиперплоскости) и $n$ (все пространство $E^n$). Причем равенство имеет место в том и только том случае, когда расположение гиперплоскостей квазиобщее.*

На иллюстрирующем теорему рис. 5 представлены все неизоморфные расположения трех прямых на плоскости. В случаях *а*), *б*), *в*) расположение квазиобщее, и в теореме имеет место равенство. Так, в случае *а*) имеется 7 областей, и полное число аффинных подпространств также равно 7 (3 точки, 3 прямые и плоскость). В случае же *г*) расположение не квазиобщее, здесь 6 областей и только 5 подпространств (точка, 3 прямые и плоскость).

Теорема 4 может быть доказана подобно теореме 2 индукцией по числу гиперплоскостей. При проведении $L_{m+1}$ увеличение числа областей в $E^n$ равно числу $(n-1)$-мерных кусков в $L_{m+1}$, которое по предположению индукции не превосходит числа лежащих в $L_{m+1}$ аффинных подпространств пересечения. Поэтому прирост числа областей разбиения в $E^n$ при проведении $L_{m+1}$ всегда не меньше прироста числа подпространств пересечения. При квазиобщем расположении гиперплоскостей прирост числа подпространств пересечения равен числу подпространств, лежащих в $L_{m+1}$, откуда и следует условие равенства.

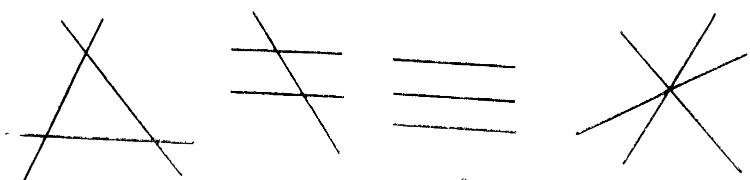


Рис. 5

В § 3, п. 1 с помощью теоремы 4 и свойств случайных $(\pm 1)$-матриц будет доказана асимптотика (7).

Помимо верхних и нижних оценок для числа областей разбиения существуют формулы, позволяющие, в принципе, точно, вычислить это число. Первым таким результатом была теорема Уиндера [118].

Пусть задано произвольное центрированное расположение $K$ гиперплоскостей. Подмножество из $i$ гиперплоскостей, где $0 \leqslant i \leqslant K$, назовем *четным*, если размерность их пересечения имеет одинаковую четность с $n-i$, и *нечетным* — в противном случае.

Теорема 5 [118]. *Число $n$-мерных открытых многогранных конусов, на которые конечное множество гиперплоскостей, проходящих через начало координат, разбивает $E^n$, равно разности между числом четных и нечетных подмножеств множества гиперплоскостей.*

Теорему 5 легко доказать уже рассмотренным индуктивным методом, но ее применение оказалось слишком сложным, чтобы продвинуть вопрос о числе пороговых функций. Более удобной оказалась формула Заславского [125]. Пусть имеется произвольное расположение гиперплоскостей в $E^n$. Множество аффинных подпространств пересечения упорядочим обратно включению, т. е. все пространство будет нулем частично упорядоченного множества, а гиперплоскости — его атомами. Любой интервал полученного таким образом частично упорядоченного множества является геометрической решеткой (см. [43]). Тогда, обращая соотношение Эйлера для числа геометрических элементов различных размерностей, возникающих в результате пересечений гиперплоскостей, можно получить следующий результат.

Теорема 6 [125]. *Число $n$-мерных открытых многогранных областей, на которые произвольная конечная система гиперплоскостей разбивает $E^n$, равно $\sum\limits_s |\mu(0, s)|$, где $\mu(0, s)$ — функция Мебиуса частично упорядоченного множества подпространств пересечения, а суммирование производится по всем его элементам $s$.*

Для вычисления значений функции Мебиуса необходимо точное знание всей решетки подпространств пересечения, что в интересующем нас случае практически невозможно. Однако, геометрическая решетка и ее функция Мебиуса как аксиоматически задаваемые алгебраические объекты рассматривались в основополагающей работе Рота [104], в которой было, в частности, показано, что $\mu(0, s) \neq 0$. Это сразу позволяет заключить, что число областей разбиения не меньше полного числа подпространств пересечения, т. е. получить ослабленный вариант теоремы 5. Это и было впервые использовано в [15] при получении асимптотики (7).

**2. Условия линейной разделимости точек.** Булева функция является пороговой, если множество ее нулей отделимо от множества единиц гиперплоскостью. Одним из старейших результатов по линейной разделимости точек в $E^n$ является теорема Кирхбергера [72]. Доказанная в 1903 г. на 24 страницах журнального текста, она долгое время считалась одной из труднейших, пока в 1950 г. Радемахером и Шенбергом [99] не была подмечена ее выводимость из теоремы Хелли (см. [54]). Хотя теорема Кирхбергера и не нашла прямых приложений в пороговой логике, этот красивый результат заслуживает быть приведенным.

Теорема 7 [72]. *Два конечных множества точек $T_1$ и $T_2$ в $E^n$ строго разделимы гиперплоскостью тогда и только тогда, когда для всех $T \subseteq T_1 \cup T_2$, $|T| = n+2$, множества $T \cap T_1$ и $T \cap T_2$ строго разделимы.*

Доказательство [99]. В $(n+1)$-мерном пространстве $(a_1, \ldots, a_n, b)$ для каждой точки $t = (t_1, \ldots, t_n)$ из $T_1 \cup T_2$ рассмотрим открытое полупространство $a_1t_1 + \ldots + a_nt_n - b < 0$ для $t \in T_1$ и $a_1t_1 + \ldots + a_nt_n - b > 0$ для $t \in T_2$. По условию теоремы пересечение каждых $n+2$ из этих полупространств не пусто. Следовательно, по теореме Хелли, в $E^{n+1} = (a_1, \ldots, a_n, b)$ существует точка, принадлежащая всем полупространствам, которая и задает гиперплоскость, строго отделяющую $T_1$ от $T_2$. Этим завершается доказательство.

Значительно большее значение в пороговой логике приобрели результаты, вытекающие из фундаментальной теоремы выпуклого анализа, согласно которой для линейной разделимости двух конечных множеств в $E^n$ необходимо и достаточно, чтобы их выпуклые оболочки не пересекались. Этот широко известный факт имеет в пороговой логике ряд важных следствий. Следующий результат хорошо известен.

Утверждение 1. *Элементарная конъюнкция является пороговой функцией.*

Доказательство следует из того, что подкуб, соответствующий элементарной конъюнкции, задается фиксацией значений части переменных, и у любой выпуклой линейной комбинации вершин подкуба и только у них эти переменные принимают тот же набор значений. Неравенство, отсекающее произвольный подкуб, легко выписать и в явном виде (см. [10, 42]).

Из того, что вершины куба $\{0, 1\}^n$ имеют целые координаты, следует, что для произвольной булевой функции $f$ выпуклые оболочки множеств $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ пересекаются в том и только том случае, если существуют их совпадающие выпуклые комбинации с рациональными коэффициентами. А это позволяет выразить условие пересечения выпуклых оболочек на языке конечных сумм. Следующее определение общепринято в пороговой логике.

Функция $f$ называется *$k$-суммируемой*, если для некоторого $j$, $2 \leqslant j \leqslant k$, существует $j$ не обязательно различных наборов $\mathbf{x}_1^0, \ldots, \mathbf{x}_j^0$ из $f^{-1}(0)$ и $j$ также не обязательно различных наборов $\mathbf{x}_1^1, \ldots, \mathbf{x}_j^1$ из $f^{-1}(1)$ таких, что $\mathbf{x}_1^0 + \ldots + \mathbf{x}_j^0 = \mathbf{x}_1^1 + \ldots + \mathbf{x}_j^1$, где под суммированием понимается обычное покоординатное сложение векторов. В противном случае $f$ называется *$k$-несуммируемой*. Если $f$ $k$-несуммируема для всех натуральных $k$, то она называется *несуммируемой*.

Из предыдущего замечания вытекает следующий хорошо известный в пороговой логике результат, впервые сформулированный Элготом [57].

Теорема 8 [57]. *Для того чтобы функция была пороговой, необходимо и достаточно, чтобы она была несуммируемой.*

В общем случае условие несуммируемости является труднопроверяемым, что соответствует сложности задачи распознавания пороговости (см. п. 8). Однако в некоторых частных случаях теорема 8 может быть уточнена. Так, если функция является монотонной, то в качестве единичных наборов в условии суммируемости можно брать ее нижние единицы или же в качестве нулевых использовать верхние нули. Если, кроме того, все нижние единицы или все верхние нули лежат в слое 2, то возможны дальнейшие уточнения теоремы 8. Следующее утверждение обобщает результат, впервые полученный при исследовании пороговых графов (см. п. 5).

Утверждение 2. *Если у монотонной функции все нижние единицы лежат в слое* 2 (*функция графическая*) *или в слое* 2 *лежат все ее верхние нули, то для нее несуммируемость и, следовательно, пороговость эквивалентны несуммируемости в слое* 2.

Доказательство. Достаточно показать, что из суммируемости следует суммируемость в слое 2. Пусть сначала все верхние нули функции лежат в слое 2 и функция суммируема. Если среди нулевых наборов $\mathbf{x}_1^0, \ldots, \mathbf{x}_j^0$ в условии суммируемости имеются наборы, не являющиеся верхними нулями, то заменим их большими их наборами, являющимися верхними нулями, увеличив одновременно некоторые из единичных наборов $\mathbf{x}_1^1, \ldots, \mathbf{x}_j^1$ так, чтобы равенство сохранилось. После этого все единичные наборы в условии суммируемости также будут лежать в слое 2, и функция оказывается суммируемой в слое 2. В самом деле, если допустить, что не все единичные наборы лежат в слое 2, то среди них найдется набор, лежащий в слое 1 и меньший некоторого нулевого, что невозможно вследствие монотонности.

Пусть теперь по условию нижние единицы лежат в слое 2 и функция суммируема. Тогда можно считать, что в условии суммируемости все единичные наборы являются нижними единицами. Если при этом некоторый нулевой набор в условии суммируемости лежит в слое 1, то существует больший его единичный набор в слое 2. Удалим оба набора из условия суммируемости, сохранив равенство уменьшением одного из оставшихся нулевых наборов. После такого удаления всех нулевых наборов слоя 1 оставшиеся нулевые наборы обязаны лежать в слое 2, т. е. функция суммируема в слое 2. Утверждение доказано.

Таким образом, в классе рассматриваемых в утверждении 2 функций для отделимости гиперплоскостью нулевых вершин от единичных достаточно их отделимости в слое 2. В п. 5 будет показано, что суммируемость в слое 2 эквивалентна 2-суммируемости. Таким образом, при исследовании пороговости таких функций с помощью теоремы 8 в условии суммируемости достаточно рассматривать лишь пары единичных и пары нулевых наборов, лежащих в слое 2. В общем же случае для любого фиксированного $k$ существуют, как было показано Уиндером [116], $k$-несуммируемые функции, не являющиеся пороговыми. Заметим также, что утверждение 2 перестает быть справедливым, если слой 2 в нем заменить на слой 3 [102].

Другим важнейшим понятием пороговой логики, связанным с теоремой о линейной разделимости, являются параметры Чоу. Пусть $T$ — конечное множество точек в $E^n$. Для каждого подмножества $T_1 \subseteq T$ определим его вектор (параметров) Чоу как $(n+1)$-мерный вектор $S(T_1) = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$, у которого $s_0 = |T_1|$, а $s_i$ при $i \geqslant 1$ есть сумма $i$-х координат точек множества $T_1$, т. е. вектор $(s_1, \ldots, s_n)$ является суммой $n$-мерных векторов-точек множества $T_1$. Следующий результат имеет для пороговой логики большое значение.

Теорема 9. *Пусть $T_1$ — подмножество множества $T$, строго отделимое от $T \setminus T_1$ гиперплоскостью, $S(T_1) = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ — его вектор Чоу,* *Тогда для любого подмножества $T_2 \subseteq T$, не совпадающего с $T_1$, $S(T_2) \neq S(T_1)$.*

Доказательство проведем от противного. Пусть существует $T_2 \neq T_1$ такое, что $S(T_2) = S(T_1)$. Тогда

$$\sum_{\mathbf{t}\in T_1} \mathbf{t} = \sum_{\mathbf{t}\in T_2} \mathbf{t}, \quad \sum_{\mathbf{t}\in T_1\cap T_2} \mathbf{t} + \sum_{\mathbf{t}\in T_1\setminus T_2} \mathbf{t} = \sum_{\mathbf{t}\in T_1\cap T_2} \mathbf{t} + \sum_{\mathbf{t}\in T_2\setminus T_1} \mathbf{t},$$

$$\sum_{\mathbf{t}\in T_1\setminus T_2} \mathbf{t} = \sum_{\mathbf{t}\in T_2\setminus T_1} \mathbf{t}.$$

Так как $|T_1| = |T_2|$, то $|T_1\setminus T_2| = |T_2\setminus T_1|$ и

$$\frac{1}{|T_1\setminus T_2|} \sum_{\mathbf{t}\in T_1\setminus T_2} t = \frac{1}{|T_2\setminus T_1|} \sum_{\mathbf{t}\in T_2\setminus T_1} \mathbf{t},$$

что невозможно, так как множества $T_1\setminus T_2$ и $T_2\setminus T_1$ лежат по разные стороны гиперплоскости и их выпуклые оболочки не могут пересекаться. Теорема доказана.

Возьмем теперь в качестве конечного множества $T$ в $E^n$ множество вершин $n$-мерного единичного куба $\{0, 1\}^n$, а каждой булевой функции $f$: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ сопоставим подмножество ее единичных вершин $f^{-1}(1)$. Тогда для булевой функции $f$ можно определить ее вектор Чоу как $S(f) = S(f^{-1}(1))$. Теперь согласно теореме 9, если $f_1$ — пороговая функция и $S(f_1)$ — ее вектор Чоу, то для любой отличной от нее функции $f_2$, пороговой или непороговой, $S(f_2) \neq S(f_1)$. Именно в такой форме теорема 9 была впервые установлена Чоу [47]. Приведенная здесь более общая формулировка будет использована при изучении пороговых представлений в § 4, п. 4, где в качестве множества $T$ теоремы 9 будет использован средний слой куба.

Векторы Чоу являются удобным средством идентификации пороговых функций и используются для их табулирования. По вектору Чоу произвольной булевой функции можно, в принципе, однозначно установить, является ли она пороговой, а если является, то и выписать задающее ее неравенство (1). Однако эффективных алгоритмов для решения этой задачи неизвестно.

Интересный подход к параметрам Чоу предложен Дертоузосом [55]. Им разрабатывались также приближенные алгоритмы для получения линейного неравенства по вектору Чоу. Уиндером [120] проведено экспериментальное исследование различных подходов к получению таких приближений. Наиболее полное освещение теоретических вопросов, связанных с параметрами Чоу, можно найти в работе Уиндера [122].

В заключение заметим, что для произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ каждая координата ее $(n+1)$-мерного вектора Чоу $S(f)$ может принимать лишь целые значения от 0 до $2^n$. Поэтому всего существует не более $(2^n+1)^{n+1}$ векторов Чоу и, стало быть, не более $(2^n+1)^{n+1}$ пороговых функций [68], что также дает верхнюю оценку $n^2$ для асимптотики логарифма числа пороговых функций.

**3. Метод вариации порога.** Пороговая функция (1) зависит от $n$ весов и порога и является достаточно сложным объектом. Легче проследить ее изменение, варьируя только ее порог $b$, т. е. параллельно перемещая гиперплоскость в пространстве $E^n$. Следующий результат хорошо известен и интуитивно ясен.

Теорема 10. *Пусть $T$ — произвольное конечное множество точек в $E^n$, $L$: $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ — гиперплоскость, не проходящая через точки множества $T$. Тогда либо любой параллельный сдвиг гиперплоскости содержит не более одной точки множества $T$, либо этого можно добиться варьированием значений $a_1, \ldots, a_n$, не меняя разделения гиперплоскостью точек множества $T$.*

Доказательство. В пространстве параметров $(a_1, \ldots, a_n)$ возьмем $n$-мерный шар с центром, задаваемым положением гиперплоскости, столь малого радиуса, чтобы при любом положении гиперплоскости, задаваемой точкой $(a_1, \ldots, a_n)$ внутри шара и прежним значением $b$, в ней не лежали точки множества $T$. Для двух произвольных точек $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T$ множество тех наборов значений параметров $(a_1, \ldots, a_n)$, для которых изменением $b$ обе точки могут быть помещены на гиперплоскость, задается условием

$$(a_1, \ldots, a_n) \perp (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1),$$

т. е. является гиперплоскостью. Утверждение теоремы следует из того, что конечным числом таких гиперплоскостей (размерности $n-1$) нельзя покрыть $n$-мерный шар.

Из теоремы 10 непосредственно вытекает, что из каждой пороговой функции от $n$ переменных изменением только порога можно получить $2^n+1$ различных функций, отсекая от 0 до $2^n$ вершин куба $\{0, 1\}^n$.

Пусть теперь варьируется не порог $b$, а один из весовых коэффициентов, например $a_n$. Разобьем куб $\{0, 1\}^n$ на два подкуба: $x_n = 0$ и $x_n = 1$. В обоих подкубах функция (1) является пороговой. В подкубе $x_n = 0$ она задается неравенством

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqslant b \tag{9}$$

и при варьировании $a_n$ остается неизменной. В подкубе $x_n = 1$ она задается неравенством

$$a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} \leqslant b - a_n,$$

и при варьировании $a_n$ здесь возникает $2^{n-1}+1$ различных функций. Таким образом, из каждой пороговой функции (9) от $n-1$ переменных, придавая различные значения коэффициенту $a_n$, можно получить $2^{n-1}+1$ функций от $n$ переменных, т. е.

$$N_n \geqslant (2^{n-1}+1) N_{n-1} \qquad [44,\ 124]. \tag{10}$$

С помощью (10) получаем

$$N_n > \prod_{i=1}^{n-1} 2^i = 2^{n(n-1)/2},$$

что и дает нижнюю оценку в (6).

На самом деле, в (10) всегда имеет место строгое неравенство, так как небольшим изменением весов в (9), не меняющим функции в подкубе $x_n = 0$, можно добиться, чтобы при вариации $b$ в подкубе $x_n = 1$ возникли некоторые новые функции. Однако улучшить асимптотику логарифма нижней оценки в (6) на этом пути не удалось [124].

В § 3 метод вариации порога будет использован для получения оценок числа пороговых множеств заданной мощности, а также для доказательства существования обширного класса пороговых функций с экспоненциальной сложностью д. н. ф.

**4. Связь с другими классами булевых функций.** Пороговая функция (1) с неотрицательными весами является, очевидно, монотонной. Если же среди весов $a_1, \ldots, a_n$ имеются отрицательные, то заменами $x_i \to 1 - x_i$ из нее можно получить монотонную. Функция, которая заменой некоторых из переменных на их отрицания может быть преобразована в монотонную, называется *однородной*. Пороговые функции являются, таким образом, однородными, а число $N_n^0$ монотонных пороговых функций связано с полным числом пороговых функций соотношением $N_n^0 < N_n < 2^n N_n^0$.

Подобно монотонной, сокращенная д. н. ф. однородной функции является ее единственной тупиковой, кратчайшей и минимальной д. н. ф.. Каждая буква может входить в эту д. н. ф. либо только без отрицания, либо только с отрицанием. Множества $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ однородной функции $f$ являются связными, т. е. каждое из них можно обойти, переходя каждый раз в соседнюю вершину и не покидая пределов множества. Это справедливо и для пороговых функций.

Утверждение 3 [68]. *Множества $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ пороговой функции $f$ являются связными.*

Перейдем теперь к более общему понятию $k$-сравнимой функции. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, $G \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное подмножество множества ее переменных. Пусть $\alpha$ — некоторый набор значений переменных из $G$, обозначим через $(G=\alpha)f$ — функцию от $n-|G|$ переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}\backslash G$, получаемую из $f$ приписыванием переменных множества $G$ фиксированного набора значений $\alpha$. Следующее понятие сыграло важную роль в изучении пороговых функций.

Функция $f$ называется *$k$-сравнимой*, если для любого $G$, $|G|=k$, $2^k$ функций $(G=\alpha_i)f$, $i=1, 2, \ldots, 2^k$, получаемых приписыванием переменным множества $G$ всевозможных значений, линейно упорядочены, т. е. для любых $i$, $j$ выполнено хотя бы одно из соотношений $(G=\alpha_i)f \leqslant \leqslant (G=\alpha_j)f$ или $(G=\alpha_j)f \leqslant (G=\alpha_i)f$. Ясно, что $(k+1)$-сравнимая функция является $k$-сравнимой.

Однородную функцию теперь можно определить как 1-сравнимую, а $n$-сравнимую функцию будем называть *полностью сравнимой*. Нетрудно показать, что из $[n/2]$-сравнимости следует полная сравнимость [116]. Уиндером же был доказан технически намного более трудный результат о том, что при $1 \leqslant k \leqslant [n/2]$ класс $k$-сравнимых функций всегда является собственным подклассом класса $(k-1)$-сравнимых функций.

Пороговые функции являются, очевидно, полностью сравнимыми, так как приписывание некоторому подмножеству переменных различных наборов значений приводит к пороговым функциям, отличающимся лишь значениями порога. В середине пятидесятых годов существовала гипотеза, что условие полной сравнимости является достаточным для пороговости. Она была опровергнута в 1957 г. Э. Ф. Муром, который привел пример функции от 12 переменных, полностью сравнимой, но не пороговой (см. [2, 86]). Позднее с помощью ЭВМ было установлено, что все полностью сравнимые функции до 8 переменных включительно являются пороговыми, а Габелманом [60] был приведен пример полностью сравнимой функции от 9 переменных, не являющейся пороговой. Так как класс пороговых функций совпадает с классом несуммируемых, то следующая теорема, принадлежащая Элготу, совместно с результатами Уиндера о недостаточности для пороговости условия $k$-несуммируемости показывают собственное вложение пороговых функций в класс полностью сравнимых.

Теорема 11 [57]. *Класс полностью сравнимых функций совпадает с классом 2-несуммируемых функций.*

Доказательство. Пусть $f$ не является полностью сравнимой. Тогда существует набор значений $\mathbf{u}$ некоторого подмножества $U$ переменных и два различных набора значений $\mathbf{v}$ и $\mathbf{e}$ дополняющего его подмножества такие, что

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1; \tag{11}$$

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0; \tag{12}$$

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{e}) = 0; \tag{13}$$

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{e}) = 1. \tag{14}$$

Из (11) и (12) следует $(U=\mathbf{u})f \nleqslant (U=\bar{\mathbf{u}})f$, а из (13) и (14) —

$(U=\bar{\mathbf{u}})f \not\leqslant (U=\mathbf{u})f$, что и выражает несравнимость функций $(U=\mathbf{u})f$ и $(U=\bar{\mathbf{u}})f$. Складывая попарно как векторы наборы в (11), (14) и в (12), (13), получаем одинаковые суммы

$$(\mathbf{u},\ \mathbf{v})+(\bar{\mathbf{u}},\ \mathbf{e})=(\bar{\mathbf{u}},\ \mathbf{v})+(\mathbf{u},\ \mathbf{e}),$$

т. е. функция $f$ — 2-суммируема. Таким образом, класс 2-несуммируемых функций принадлежит классу полностью сравнимых.

Пусть, напротив, функция $f$ является 2-суммируемой. Тогда существуют наборы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{h}$ такие, что

$$f(\mathbf{x})=1,$$
$$f(\mathbf{y})=0,$$
$$f(\mathbf{z})=0,$$
$$f(\mathbf{h})=1$$

и

$$\mathbf{x}+\mathbf{h}=\mathbf{y}+\mathbf{z}. \qquad (15)$$

Вследствие условия (15) в наборах $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{h}$ возможны лишь те комбинации значений $i$-х координат, которые выписаны в столбцах табл. 1. Выделим координаты, имеющие комбинации значений как в первом или во втором столбцах таблицы. Поднабор значений этих координат в наборе $\mathbf{x}$ обозначим через $\mathbf{u}$. Тогда в наборе $\mathbf{z}$ этот поднабор будет также равен $u$, а в наборах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ он равен $\bar{\mathbf{u}}$. Обозначив дополняющий его поднабор в наборах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ через $\mathbf{v}$, а в наборах $\mathbf{z}$ и $\mathbf{h}$ через $\mathbf{e}$, получаем равенства (11)—(14), т. е. условия несравнимости. Таким образом, имеет место также обратное включение, и класс полностью сравнимых функций принадлежит классу 2-несуммируемых, а значит, эти классы совпадают. Теорема доказана.

Таблица 1

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $y$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $z$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $h$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Система вложенных классов булевых функций схематически представлена на рис. 6.

Рассмотрим теперь подробнее важный класс 2-сравнимых функций. Пусть сначала $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция. На множестве переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ введем отношение «$\overset{f}{\preccurlyeq}$» следующим образом:

$$x_i \overset{f}{\preccurlyeq} x_j \Leftrightarrow (x_i=1,\ x_j=0)f \leqslant (x_i=0,\ x_j=1)f.$$

Теорема 12 [84, 116]. *Для произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ отношение «$\overset{f}{\preccurlyeq}$» транзитивно на множестве переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Доказательство. Нужно показать, что из $x_i \overset{f}{\preccurlyeq} x_j$, $x_j \overset{f}{\preccurlyeq} x_k$ следует $x_i \overset{f}{\preccurlyeq} x_k$. Не теряя общности, будем считать, что $i=1$, $j=2$, $k=3$, через $\mathbf{x}$ обозначим $(n-3)$-мерный булев набор. Из определения отношения «$\overset{f}{\preccurlyeq}$» имеем

$$x_1 \overset{f}{\preccurlyeq} x_2 \Leftrightarrow f(10\gamma\mathbf{x}) \leqslant f(01\gamma\mathbf{x}), \qquad (16)$$

$$x_2 \overset{f}{\preccurlyeq} x_3 \Leftrightarrow f(\alpha 10\mathbf{x}) \leqslant f(\alpha 01\mathbf{x}). \qquad (17)$$

Нужно показать, что $f(1\beta0\mathbf{x})\leqslant f(0\beta1\mathbf{x})$, т. е. $f(100\mathbf{x})\leqslant f(001\mathbf{x})$ и $f(110\mathbf{x})\leqslant f(011\mathbf{x})$. Применяя (16) и (17), получаем

$$f(100\mathbf{x})\leqslant f(010\mathbf{x})\leqslant f(001\mathbf{x}),$$
$$f(110\mathbf{x})\leqslant f(101\mathbf{x})\leqslant f(011\mathbf{x}).$$

Теорема доказана.

Отношение «$\overset{f}{\preccurlyeq}$» не является антисимметричным, поэтому, строго говоря, его нельзя назвать частичным порядком. Но если ввести отношение эквивалентности

$$x_i \overset{f}{\sim} x_j \Leftrightarrow x_i \overset{f}{\preccurlyeq} x_j \;\&\; x_j \overset{f}{\preccurlyeq} x_i,$$

то на множестве классов эквивалентности возникает частичный порядок. Функция $f$ симметрична по переменным в каждом классе эквивалентности.

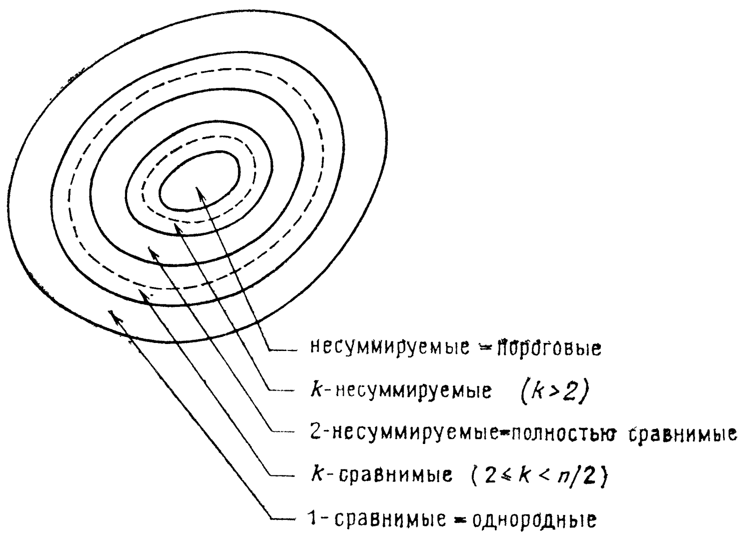


Рис. 6

Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — 2-сравнимая функция, то для каждой пары ее переменных выполнено хотя бы одно из отношений $x_i\overset{f}{\preccurlyeq}x_j$ или $x_j\overset{f}{\preccurlyeq}x_i$. Поэтому перестановкой переменных можно добиться выполнения отношений $x_n\overset{f}{\preccurlyeq}x_{n-1}\overset{f}{\preccurlyeq}\ldots\overset{f}{\preccurlyeq}x_2\overset{f}{\preccurlyeq}x_1$, так чтобы «значимость» единицы была тем выше, чем раньше она встречается.

Монотонная 2-сравнимая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, переменные которой находятся в отношении $x_n\overset{f}{\preccurlyeq}x_{n-1}\overset{f}{\preccurlyeq}\ldots\overset{f}{\preccurlyeq}x_2\overset{f}{\preccurlyeq}x_1$, называется *регулярной*.

Регулярную функцию содержательно можно охарактеризовать тем свойством, что при перемещении единиц в более правые позиции или их удалении значение функции не возрастает. Поэтому ее можно определить и иначе, введя на множестве вершин куба $\{0, 1\}^n$ так называемый канонический частичный порядок.

Будем говорить, что вершины $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in\{0, 1\}^n$ находятся в отношении *канонического порядка* $\mathbf{x}\overset{k}{\preccurlyeq}\mathbf{y}$ в том и только том случае, если выполнены $n$ неравенств

$$\sum_{i=1}^{j} x_i\leqslant\sum_{i=1}^{j} y_i,\quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Заметим, что из $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$ следует $\mathbf{x} \overset{k}{\preccurlyeq} \mathbf{y}$, т. е. отношение «$\overset{k}{\preccurlyeq}$» содержит отношение «$\preccurlyeq$». Теперь регулярную булеву функцию $f$ можно определить как сохраняющую канонический порядок:

$$\mathbf{x} \overset{k}{\preccurlyeq} \mathbf{y} \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{y}).$$

Регулярные функции рассматривались в шестидесятые годы Уиндером [116, 117], Ху [68], а позднее и другими авторами (см. ссылки в [53]). Канонический же порядок на $\{0, 1\}^n$ многократно рассматривался математиками по разным поводам. Частично упорядоченное каноническим порядком множество $\{0, 1\}^n$ является ранжируемым, функция ранга имеет вид

$$r(\mathbf{x}) = nx_1 + (n-1)x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n.$$

Если вершина $\mathbf{y}$ покрывает вершину $\mathbf{x}$, то $r(\mathbf{y}) = r(\mathbf{x}) + 1$, т. е. $\mathbf{x}$ получается из $\mathbf{y}$ сдвигом некоторой единицы на одну позицию вправо или удалением последней единицы. Далее, как следует из [98, 107], это частично упорядоченное множество является шпернеровым, т. е. максимальная мощность его антицепи совпадает с максимальной из мощностей множеств одинакового ранга. Последовательность же ранговых мощностей $A(r)$, $r = 0, 1, \ldots, n(n+1)/2$, совпадающая с коэффициентами многочлена $(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^n)$, симметрична и унимодальна. Ее максимум достигается при $r = [n(n+1)/4]$ и асимптотически равен $(2/3\pi)^{1/2} n^{-3/2} 2^n$ [88]. Отсюда для числа $R_n$ регулярных функций получаем [92] $\log R_n \geqslant (2/3\pi)^{1/2} n^{-3/2} 2^n$.

Отметим также здесь, что для числа $R_n(l)$ регулярных функций с $l$ нижними единицами справедлива следующая доказанная в [13] оценка

$$R_n(l) \leqslant (n+1)^l. \tag{18}$$

**5. Пороговые графы.** В этом разделе рассматриваются только простые неориентированные без кратных ребер и петель графы $G = (V, E)$, где $V$ — множество вершин, $E$ — множество ребер. Для любого $V' \subseteq V$ граф $G' = (V', E')$ называется индуцированным подграфом графа $G$, если две вершины в $G'$ смежны тогда и только тогда, когда они смежны в $G$. Подмножество вершин графа называется независимым, если вершины в нем попарно несмежны, т. е. индуцированный подграф пуст. Через $I(v)$ будем обозначать множество вершин, смежных с $v$, степень вершины $\deg v = |I(v)|$. Вершина $v$ называется доминирующей, если она смежна со всеми остальными, т. е. $\deg v = |V| - 1$. Если при этом в графе нет ребер, не инцидентных доминирующей вершине, то он называется звездой.

Рассмотрим монотонную булеву функцию $\varphi$: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, все простые импликанты которой состоят из двух букв, т. е. нижние единицы функции $\varphi$ лежат в слое 2. Сопоставим ей граф $G(\varphi) = (V, E)$, множество вершин которого $V$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$, а множество ребер — с множеством простых импликантов, т. е. импликанту $x_i x_j$ соответствует ребро $(i, j) \in E$. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между графами и монотонными булевыми функциями, все нижние единицы которых лежат в слое 2. Поэтому такие функции называют *графическими*. Если $\varphi$ — пороговая графическая функция, то для соответствующего ей графа это означает, что существует линейное неравенство (1), отделяющее независимые подмножества вершин от зависимых. Такие графы называются пороговыми. Введенные Хваталом и Хаммером [49], они оказались весьма плодотворным для изучения объектом: с одной стороны, их класс достаточно представителен, с другой — для них находят исчерпывающее решение практически все возникающие в теории графов вопросы. Основательно изучены они были уже в [49]. В последовавшем затем потоке публикаций отметим работы [64, 65], а также монографию [62], трактующую эти вопросы весьма обстоятельно. Изложение их основных свойств можно найти также в [5], а более полную библиографию в [38].

Для пороговых графов известно много характеризаций, восходящих в основном к [49]. Сформулируем в виде теоремы наиболее интересные в контексте настоящего обзора.

Теорема 13. *Следующие условия для графа $G=(V, E)$ эквивалентны*:

1) *существует линейное неравенство, отделяющее характеристические векторы независимых множеств от зависимых*;

2) *среди индуцированных подграфов графа $G$ не содержится $C_4$, $P_4$ и $2K_2$ (рис. 7)*;

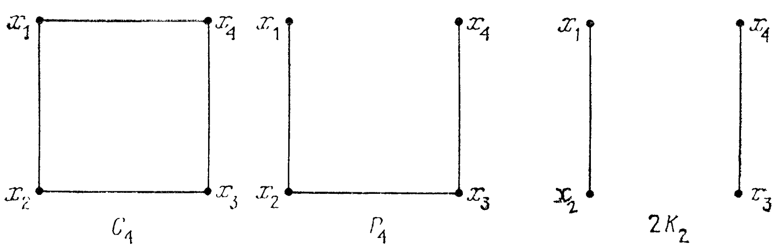


Рис. 7

3) *граф $G$ может быть получен из одновершинного графа последовательным добавлением изолированных или доминирующих вершин*;

4) *для любых вершин $u, v \in V$ выполнено хотя бы одно из отношений*: $I(u)\backslash v \subseteq I(v)$ *либо* $I(v)\backslash u \subseteq I(u)$;

5) *существуют действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и $b$ такие, что* $(i, j) \in E \Leftrightarrow a_i + a_j > b$.

Наметим доказательство, следуя [49], где в основу положены следующие два легко проверяемых утверждения: а) любой индуцированный подграф порогового графа является пороговым и б) граф, получаемый из порогового добавлением изолированной или доминирующей вершины, является пороговым. Из а) следует, что пороговый граф не может содержать в качестве индуцированных подграфов $C_4$, $P_4$ или $2K_2$, так как соответствующие им графические функции 2-суммируемые и, следовательно, не пороговые. Условие 2) поэтому является необходимым для пороговости, а условие 3), в силу б) — достаточным. Нетрудно показать, далее, что произвольный граф либо имеет изолированную или доминирующую вершину, либо у него есть индуцированный подграф, изоморфный $C_4$, $P_4$ или $2K_2$. В самом деле, пусть изолированных и доминирующих вершин нет. Тогда если $x_1$ — вершина с максимальной степенью, $x_3 \notin I(x_1)$, $x_4 \in I(x_3)$, то из условия $\deg x_1 \geqslant \deg x_4$ следует существование вершины $x_2$ такой, что $x_2 \in I(x_1)$ и $x_2 \notin I(x_4)$, а это означает, что подграф, индуцированный вершинами $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, изоморфен одному из представленных на рис. 7 графов. Поэтому, используя рекурсию, в случае выполнения условия 2) получаем требуемое условием 3) упорядочивание вершин и, следовательно, пороговость. Этим доказана эквивалентность условий 1) — 3).

Условие 4) следует из 3), а из 4) вытекает 2). И, наконец, эквивалентность пороговости условия 5) следует из доказанной в утверждении 2 эквивалентности для графической функции условия несуммируемости и несуммируемости в слое 2. Этим завершается доказательство.

Любое из условий 2) — 5) теоремы 13 может быть проверено за полиномиальное время, поэтому и задача распознавания пороговости графа является полиномиально разрешимой. Далее, все подграфы, выделяемые условием 2), соответствуют 2-суммируемым функциям, поэтому 2-несуммируемости достаточно для пороговости графическй функции, из условия же 4) следует, что достаточно даже 2-сравнимости. Наконец, из 3) вытекает, что существует ровно $2^{n-1}$ неизоморфных пороговых графов, помеченных же пороговых графов менее $n!2^{n-1}$, что составляет ничтожную часть от общего числа $2^{n(n-1)/2}$ графов с $n$ помеченными вершинами.

Хотя пороговых графов и немного, однако любой граф $G$ может быть разложен на пороговые так, чтобы каждое из его ребер входило хотя бы в один из графов разложения. Минимальное число пороговых графов в таком разложении называется пороговым числом $t(G)$ графа $G$. Таким образом, пороговые графы — это графы с пороговым числом 1. Задача порогового разложения графа эквивалентна пороговому представлению соответствующей графической функции, их пороговые числа совпадают.

Теорема 14 [49]. *Для порогового числа произвольного n-вершинного графа G справедлива оценка* $t(G) \leqslant n - \alpha(G)$, *где* $\alpha(G)$ — *максимальная мощность независимого множества, причем если в графе G нет треугольников, то в оценке имеет место знак равенства.*

Доказательство. Пусть $G = (V_n, E)$, $k = n - \alpha(G)$. Пусть, далее, $S$ — независимое множество мощности $\alpha(G)$, $V_n \backslash S = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Для каждого $v_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, обозначим через $E_i$ ребра, инцидентные $v_i$. Тогда каждый граф $G_i = (V_n, E_i)$ является звездой и, следовательно, по теореме 13, пороговым графом. Взяв графы $G_i$ в качестве порогового разложения графа $G$, получим требуемую оценку.

Пусть теперь в графе $G$ нет треугольников. Возьмем пороговое разложение $G$ на $t = t(G)$ пороговых графов $G_i = (V_n, E_i)$. Как легко следует из теоремы 13, каждый пороговый граф без треугольников обязан быть звездой, поэтому $G_i$ — звезды. Пусть вершины $\{v_1, \ldots, v_t\}$ — центры этих звезд. Тогда множество инцидентных им ребер совпадает с множеством $E$ всех ребер графа $G$, а множество вершин $V_n \backslash \{v_1, \ldots, v_t\}$ является независимым. Отсюда следует, что $\alpha(G) \geqslant n - t(G)$, чем и устанавливается равенство.

Теорема 14 имеет два важных следствия.

Следствие 1. $\max\limits_{G=(V_n, E)} t(G) \sim n, \ n \to \infty.$

Следствие 2. *Задача определения порогового числа графа является NP-трудной.*

Следствие 1 вытекает из результата Эрдеша [58] о существовании графов $G = (V_n, E)$ без треугольников, для которых $\alpha(G) = o(n)$, $n \to \infty$. Следствие 2 следует из результата Поляка [95] о $NP$-трудности задачи нахождения $\alpha(G)$ в классе графов без треугольников.

Пороговые графы и гиперграфы нашли применение в программировании при управлении параллельным выполнением программ (см. [62, 67, 90]). Пусть требуется организовать эффективное параллельное выполнение $n$ программ, причем имеется ряд ограничений, состоящих в том, что некоторые пары программ не могут выполняться одновременно (вследствие, например, ограничений по памяти). Тогда если граф запретов является пороговым, то управление вычислительным процессом удобно организовать с помощью переменной, называемой «семафором». Ее текущее значение равно порогу минус сумма весов выполняемых в данный момент заданий. При окончании некоторого задания его вес прибавляется к «семафору», при включении нового — вычитается. Управляющая программа следит, чтобы значение «семафора» всегда было неотрицательным.

Если же граф запретов не является пороговым, то можно, взяв его пороговое разложение, использовать несколько «семафоров». Наконец, если запреты заданы не на парах, а на бо́льших по мощности подмножествах, то к этой задаче, описанной в терминах гиперграфа, применима та же процедура [62]. Фактически, здесь имеет место общая задача порогового представления монотонной булевой функции, нижние единицы которой заданы минимальными запрещенными подмножествами программ. Отметим, что для $r$-регулярных гиперграфов при $r \geqslant 3$ условия типа 4) или 5) уже не являются достаточными для пороговости [102].

Помимо графических, существует другой подкласс монотонных булевых функций, которые можно поставить во взаимно однозначное соответствие с графами так, чтобы пороговым функциям соответствовали пороговые графы. Это рассмотренные в утверждении 2 монотонные функции, все верхние нули которых лежат в слое 2. Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — такая функция, то ее граф определим следующим образом. По-прежнему вершины графа соответствуют переменным, а ребро $(i, j)$ принадлежит $E$ в том и только том случае, если булев набор с единицами в $i$-й и $j$-й позициях является верхним нулем функции $\varphi$. Для такой функции, как и для графической, несуммируемость согласно утверждению 2 эквивалентна несуммируемости в слое 2. Поэтому функция $\varphi$ является пороговой в том и только том случае, если пороговым является соответствующий ей граф $G(\varphi)$, и теорема 13 дает, таким образом, характеризации линейно отделимых множеств, лежащих в пределах второго слоя. Такая характеризация будет сформулирована в следующем пункте, а использована в § 3, п. 2.

**6. Некоторые простейшие пороговые множества.** Подмножество вершин куба $\{0, 1\}^n$ будем называть пороговым, если оно отделимо от своего дополнения гиперплоскостью. Таким образом, с каждой пороговой функцией связаны два пороговых множества: пороговое множество нулей и пороговое множество единиц. Наиболее прямой способ изучения пороговых функций состоит в конструктивном комбинаторном описании строения их пороговых множеств. В своей массе, однако, пороговые множества устроены слишком сложно, чтобы для них можно было указать подобные описания. Поэтому приходится ограничиваться описанием их весьма узких подклассов.

Простейшими пороговыми множествами являются подкубы, соответствующие элементарным конъюнкциям, которых $3^n$, что составляет ничтожную часть от числа всех пороговых множеств. Более представительный класс пороговых множеств можно получить, объединяя такие подкубы в небольшом числе некоторым специальным образом. Другим удобно описываемым классом пороговых множеств являются пороговые множества небольшого радиуса. Эти простейшие классы пороговых множеств рассматривались в [10, 12, 13] в связи с пороговыми представлениями булевых функций, а также задачей перечисления всех пороговых множеств заданной мощности.

Пороговое множество $A$ назовем монотонным пороговым множеством нулей, если из $\boldsymbol{\alpha} \in A$ и $\boldsymbol{\beta} \preccurlyeq \boldsymbol{\alpha}$ следует $\beta \in A$, т. е. оно является множеством нулей некоторой монотонной пороговой функции; аналогично определим монотонное пороговое множество единиц. Монотонное пороговое множество всегда может быть задано неравенством (1) с $a_i \geqslant 0$, произвольное же пороговое множество может быть преобразовано в монотонное заменами $x_i \to 1 - x_i$ для $a_i < 0$. Обратно, из монотонного порогового множества, существенно зависящего от всех координат с помощью таких отражений координат может быть получено $2^n$ различных пороговых множеств такой же мощности. Заметим, что пороговое множество нечетной мощности всегда существенно зависит от всех координат.

Для произвольного порогового множества $A$ вершину $\alpha \in A$ назовем его центром, если для любой вершины $\beta \in A$ все $2^{r(\alpha,\beta)}$ вершин $\gamma$ таких, что $r(\alpha, \gamma)+r(\gamma, \beta)=r(\alpha, \beta)$, принадлежат $A$. Эквивалентным образом центр порогового множества может быть определен как вершина, которая при преобразовании порогового множества в монотонное пороговое множество нулей может быть переведена в нулевую вершину. Пороговое множество может иметь несколько центров. Вершина, в которой достигается экстремум линейной формы в левой части (1), всегда является центром порогового множества.

Радиусом порогового множества назовем максимальное из расстояний Хемминга от его вершин до центра. Как легко видеть, радиус не зависит от выбора центра и определен корректно. Это радиус минимального шара Хемминга, в который может быть заключено пороговое множество. Нулевая вершина является центром монотонного порогового множества нулей, а его радиус определяется максимальным из номеров слоев, содержащих его вершины.

Диаметр порогового множества определим как максимальное из расстояний Хемминга, взятых по всем парам вершин множества. Ясно, что диаметр не превышает удвоенного радиуса. Поэтому справедлива следующая оценка, связывающая диаметр порогового множества с его мощностью.

Утверждение 4. *Диаметр порогового множества мощности $M$ не превосходит $2 \log M$.*

Два последующих утверждения для монотонных множеств нулей радиуса 1 и 2 легко могут быть переформулированы для произвольных множеств с использованием вместо нулевой вершины их центров. Одно из них сразу следует из критерия несуммируемости, а другое — из замечания в конце п. 5.

Утверждение 5. *Любое монотонное множество нулей, лежащее в пределах 1-го слоя, является пороговым.*

Утверждение 6. *Для того чтобы монотонное множество нулей, лежащее в пределах 2-го слоя, было пороговым, необходимо и достаточно, чтобы оно было 2-сравнимым.*

Рассмотрим теперь объединение в одном пороговом множестве близких подкубов.

Утверждение 7 [10, 13]. *Если все нижние единицы монотонной функции лежат внутри некоторого шара Хемминга единичного радиуса, то она является пороговой.*

Доказательство. Пусть $B=\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ — нижние единицы, $\alpha$ — центр шара. Тогда имеет место один из следующих трех взаимно исключающих случаев: 1) $\beta_i \geqslant \alpha$, $i=1, 2, \ldots, k$; 2) $B=\{\alpha\}$; 3) $\beta_i \leqslant \alpha$, $i=1, 2, \ldots, k$. Случай 2) — тривиален. В случае 1) рассмотрим подкуб куба $\{0, 1\}^n$, состоящий из вершин $\mathbf{x} \geqslant \alpha$. В этом подкубе нижние единицы лежат в слое 1 и несуммируемость функции становится очевидной. Аналогично рассматривается случай 3).

**7. Структурные свойства множества пороговых функций.** Наряду с рассмотрением отдельных подклассов пороговых функций представляет интерес изучение множества пороговых функций в целом. Если рассматривать множество пороговых функций как отдельно взятых элементов, то единственной возникающей для него задачей является оценка его мощности. Однако между пороговыми функциями существуют некоторые естественные отношения, учет которых значительно обогащает проблематику. В [16] были рассмотрены два таких отношения. Одно из них использует классический алгебраический подход и наделяет множество пороговых функций частичным порядком, другое описывает множество пороговых функций как простой неориентированный граф.

На множестве всех булевых функций естественным образом вводится отношение частичного порядка: $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) \leqslant g(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$. Возникающее при этом частично упорядоченное множество изоморфно множеству всех подмножеств $2^n$-элементного множества, упорядоченных включением, и является булевой алгеброй (определения см. в [43]). Операциями взятия верхней и нижней граней являются соответственно дизъюнкция и конъюнкция. Упорядоченное этим же отношением, множество пороговых функций не обладает столь богатой структурой. Оно градуируется числом единиц пороговых функций, имеет универсальные нижнюю и верхнюю грани, но, как несложно проверить, не является решеткой. Тем не менее, его изучение представляет интерес. В частности, заслуживает внимания задача оценивания числа элементов заданной высоты, т. е. числа пороговых функций с заданным числом единиц. Эта задача будет рассмотрена в § 3, п. 2.

Иное структурное описание можно получить, перейдя от задающего частичный порядок ориентированного графа к неориентированному, т. е. заменив каждую ориентированную дугу неориентированным ребром. При изучении булевых функций, в частности, исследовании полуэффекта Шеннона с помощью вариационного принципа [36], оказывается полезной метрика, в которой расстоянием между двумя функциями служит число тех булевых наборов, на которых они принимают различные значения. Тогда «соседними» естественно считать функции, различающиеся лишь на одном наборе. Если рассмотреть граф, вершины которого соответствуют булевым функциям, а ребра соединяют «соседние» функции, то он изоморфен $2^n$-мерному кубу. Аналогичный граф на множестве пороговых функций назовем графом пороговых функций. Он обладает более сложной структурой, но допускает прозрачную геометрическую интерпретацию.

Конусы (8) в $(n+1)$-мерном пространстве весов $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, соответствующие «соседним» пороговым функциям, смежны. При переходе через разделяющую их гиперплоскость происходит изменение значения функции в одной вершине гиперкуба. Вершины гиперкуба, соответствующие граням конуса пороговой функции, называются ее граничными точками [68, 80]. Множество граничных точек обладает, как легко видеть, следующими свойствами: а) является наибольшим множеством вершин таким, что пороговая функция может быть изменена в любой одной вершине множества без изменения значений на всем остальном гиперкубе; б) является наименьшим множеством вершин, знание значений пороговой функции на котором позволяет восстановить ее на всем гиперкубе.

Число «соседей» у пороговой функции равно числу ее граничных точек, а в графической интерпретации — это степень вершины графа. Эта степень всегда не меньше $n+1$, так как телесный конус с вершиной имеет в $E^{n+1}$ не менее $n+1$ граней. Столько «соседей» у пороговых функций $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ и $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$, а также у любой другой пороговой функции, имеющей один нуль или единицу. Максимальным же числом «соседей», равным $2^n$, обладает любая пороговая функция, существенно зависящая от не более чем одной переменной.

При непрерывном изменении весов пороговой функции (4) соответствующая точка описывает некоторую траекторию. Если эта траектория не выбрана определенным «специальным» образом, а именно не проходит через $\binom{2^n}{2}$ подпространств размерности $n-1$, при пересечении которых функция меняет значения сразу в двух вершинах гиперкуба, то переход от одной пороговой функции к другой осуществляется по ребрам графа пороговых функций. Дискретным аналогом такой непрерывной траектории могут служить изменения весов в процессе адаптации, осуществляемой с достаточно малым шагом. Отметим, что расстояние между пороговыми функциями равно расстоянию между соответствующими вершинами графа, т. е. числу ребер в кратчайшем пути между ними. В самом деле, если $f_0(\mathbf{y}) = \operatorname{sgn}(a_0 + a_1y_1 + \ldots + a_ny_n)$ и $f_1(\mathbf{y}) = \operatorname{sgn}(a_0' + a_1'y_1 + \ldots + a_n'y_n)$ — пороговые функции, различающиеся на наборах, то переход от $f_0$ к $f_1$ по графу также осуществим за $r$ шагов с помощью формулы $f_t(\mathbf{y}) = \operatorname{sgn}(a + t(a' - a))$, изменяя $t$ от 0 до 1. Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 8 [16]. *Диаметр графа пороговых функций равен $2^n$.*

**8. Алгоритмическая сложность синтеза пороговой функции.** Проблема синтеза пороговой функции, т. е. распознавание пороговости и нахождение линейного неравенства (1) для булевой функции, заданной таблицей своих значений или некоторой своей д. н. ф., всегда являлась одной из основных задач пороговой логики (см. [2, 55, 68, 86]). После работ Кука [50] и Карпа [71] появилась возможность строго математического подхода к исследованию этой задачи и ее классификации в соответствии с трудоемкостью решения, т. е. отнесения к одному из стандартных классов, важнейшими из которых являются класс $P$ — класс задач, разрешимых за полиномиальное время, и класс $NP$ — класс универсальных переборных задач, для которых алгоритма полиномиальной трудоемкости предположительно не существует (см. [61]). Такое исследование было выполнено в работе Пильда и Симеоне [92], на которую и опирается настоящее изложение.

Заметим, прежде всего, что если функция $f$ задана с помощью своей совершенной д. н. ф., т. е. таблицей своих значений на всем множестве $2^n$ бинарных наборов, то задача синтеза сводится к решению системы из $2^n$ линейных неравенств. А для этой задачи, как стало ясно после работы Хачияна [40], существует алгоритм, решающий ее за полиномиальное от длины ее записи, т. е. от величины $2^n$, время. Остается ли задача полиномиально разрешимой, если допускать д. н. ф. более общего вида? Ответ на этот вопрос, как было показано в [92], существенно зависит от вида д. н. ф.. Если однородная булева функция задана своей сокращенной д. н. ф., то задача распознавания пороговости и выписывания неравенства (1) является полиномиально разрешимой. В качестве такой булевой функции, не ограничивая общности, всегда можно рассматривать монотонную булеву функцию, заданную своими нижними единицами. Если же на д. н. ф. не накладывать никаких ограничений, то задача распознавания пороговости является $NP$-полной. Отсюда вытекает, в частности, $NP$-трудность задачи получения сокращенной д. н. ф. для однородной функции по ее произвольной д. н. ф. без знания того, какие из переменных должны браться с отрицанием, а какие — без отрицания.

Теорема 15 [92]. *Задача распознавания пороговости по произвольной д. н. ф. является NP-полной.*

Доказательство. Покажем, что известная $NP$-полная задача распознавания тождественного равенства единице произвольной д. н. ф. сводима к задаче распознавания пороговости. Пусть имеется произвольная д. н. ф. $D(\mathbf{x})$. Введя две новых переменные, сконструируем д. н. ф. $D'(\mathbf{x}, y_1, y_2) = D(\mathbf{x})y_2 \vee y_1y_2 \vee \bar{y}_1\bar{y}_2$. Если $D(\mathbf{x}) \equiv 1$, то функция $D'(\mathbf{x}, y_1, y_2) = \bar{y}_1 \vee y_2$ является пороговой. Если же $D(\mathbf{x}^0) = 0$ для некоторого $\mathbf{x}^0$, то $D'(\mathbf{x}^0, 0, 0) = D'(\mathbf{x}^0, 1, 1) = 1$, $D'(\mathbf{x}^0, 0, 1) = D'(\mathbf{x}^0, 1, 0) = 0$ и $(\mathbf{x}^0, 0, 0) + (\mathbf{x}^0, 1, 1) = (\mathbf{x}^0, 0, 1) + (\mathbf{x}^0, 1, 0)$, т. е. функция, задаваемая д. н. ф. $D'(\mathbf{x}, y_1, y_2)$, является 2-суммируемой и, следовательно, не пороговой. Теорема доказана.

Покажем теперь, как для произвольной монотонной булевой функции, заданной своими нижними единицами, эффективно решается вопрос о ее пороговости. Пусть $\{\alpha_i\}$ — множество нижних единиц функции $\varphi$. Если, наряду с ним, известно множество ее верхних нулей $\{\beta_j\}$, то вопрос о ее пороговости сводится к исследованию совместности системы

$$(\mathbf{a},\ \alpha_i) > b,$$
$$(\mathbf{a},\ \beta_j) \leqslant b,$$
$$\mathbf{a},\ b \geqslant 0,$$

т. е. решается эффективно.

Каждый верхний нуль монотонной функции — это покомпонентное отрицание нижней единицы функции, двойственной к исходной, поэтому задачу получения множества верхних нулей по множеству нижних единиц называют задачей дуализации для монотонной булевой функции. Тот факт, что в случае произвольной монотонной функции задача дуализации не является эффективно решаемой, следует уже из того, что с ростом числа переменных число верхних нулей может быть экспоненциально растущей функцией от числа нижних единиц. Чтобы обойти эту трудность, проверим предварительно $\varphi$ на 2-сравнимость. Этот тест эффективно выполним, так как для выполнения условия $(x_i = 1,\ x_j = 0)\varphi \leqslant \leqslant (x_i = 0,\ x_j = 1)\varphi$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой нижней единицы функции $(x_i = 1,\ x_j = 0)\varphi$ существовала меньшая или равная ей нижняя единица функции $(x_i = 0,\ x_j = 1)\varphi$. В случае выполнения условия 2-сравнимости перестановкой переменных сделаем $\varphi$ регулярной. Для регулярной функции задача дуализации, как было впервые показано в [92], эффективно разрешима. Более простое решение этой задачи с лучшей оценкой для числа верхних нулей, основанной на явном описании их строения, дано Крамой [53]. Независимо те же улучшения предложены Липкиным [32]. Следующая лемма основана на их исследованиях.

Лемма 1. *Каждый верхний нуль регулярной функции может быть получен из некоторой ее нижней единицы изменением значения одной из ее единичных координат на нулевое с одновременным приравниванием единице всех координат, правее обнуленной.*

Доказательство. Пусть $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — верхний нуль регулярной функции $\varphi$. Если $\beta_n = 0$, то набор $\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 1)$ является единичным для $\varphi$, а в силу регулярности $\varphi$ никакая из единичных координат $\alpha$ не может быть обнулена с сохранением единичного значения функции. Таким образом, $\alpha$ является нижней единицей, из которой получается верхний нуль $\beta$.

Пусть теперь самый правый нуль в наборе $\beta$ стоит на $i$-м месте, где $i < n$, т. е. $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 0, 1, \ldots, 1)$. Тогда набор $\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 1, \ldots, 1)$ является единичным для $\varphi$. Будем последовательно, двигаясь справа налево, обнулять его единичные координаты, начиная с последней, каждый раз проверяя, чтобы значение функции $\varphi$ оставалось равным единице. Обнулив таким образом $j$-ю координату, где $j > i$, придем к набору $\alpha_1 = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, в котором обнуление $(j-1)$-й координаты изменяет значение функции на нулевое. В силу регулярности $\varphi$ ни одна из единичных координат набора $\alpha_1$ не может быть обнулена без изменения значения $\varphi$, т. е. $\alpha_1$ является нижней единицей, из которой получается $\beta$. Лемма доказана.

Как следует из леммы 1, все верхние нули регулярной функции содержатся в эффективно получаемом множестве, мощность которого не превышает $mn$, где $m$ — число нижних единиц функции. Задача выбора из него верхних нулей не представляет трудности. В целом же предыдущими рассуждениями установлен следующий результат.

Теорема 16 [92]. *Для монотонной булевой функции, заданной своими нижними единицами, задача распознавания пороговости и получения неравенства* (1) *разрешима за полиномиальное время.*

## § 3. Количественные оценки, связанные с пороговыми функциями

**1. Число пороговых функций.** При реализации функций алгебры логики схемами из пороговых элементов число $N_n$ пороговых функций от $n$ переменных служит естественной мерой разнообразия порогового базиса и позволяет оценивать сложность таких реализаций. Это явилось причиной пристального внимания к проблеме подсчета $N_n$ с конца пятидесятых годов. Так как получение точной формулы для $N_n$ не представлялось возможным, то исследования были направлены на получение асимптотических оценок для $N_n$ при $n \to \infty$, а также прямой подсчет значений $N_n$ с помощью ЭВМ для небольших значений $n$.

Методами, освещенными в § 2, пп. 1—3, для $\log N_n$ к 1965 г. были получены асимптотические оценки (6), и встал вопрос об асимптотике логарифма числа пороговых функций, но сколько-нибудь улучшить эти оценки не удавалось вплоть до 1989 г. Параллельно с этим сразу несколькими исследователями в начале шестидесятых годов были подсчитаны точные значения $N_n$ до $n = 6$. Дальнейшее продвижение потребовало уже изощренных методов перебора и мощных ЭВМ. В 1965 г. Уиндер [117] сообщил результаты подсчета $N_7$, а в 1970 Мурогой с коллегами [86] были опубликованы результаты аналогичных вычислений для $N_8$, выполненных на ILLIAC-2. Помимо подсчета $N_n$ в этих работах изучались значения весов в оптимальных реализациях, а также было установлено, что все полностью сравнимые функции вплоть до $n = 8$ являются пороговыми. Основные же результаты этих вычислений тщательным образом анализировались на предмет поведения отношения $(\log N_n)/n^2$ в попытке угадать его асимптотику (см. табл. 2).

Таблица 2

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\log N_n)/n^2$ | 2 | 0,95183 | 0,74449 | 0,67987 | 0,66116 | 0,66225 | 0,67273 | 0,68740 |

Уиндер, чей вклад в развитие пороговой логики следует признать выдающимся, неоднократно выражал, опираясь на эти результаты и свою интуицию, уверенность в том, что $(\log N_n)/n^2 \to 1$ [116, 117, 119], но были и более осторожные мнения [86]. Строгое же доказательство асимптотики (7) наряду с новыми геометрическими результатами по разбиению пространства гиперплоскостями потребовало использования мощных вероятностных методов комбинаторного анализа, которые только зарождались в шестидесятые годы. Результат был анонсирован автором в [15], а его более полное изложение с доказательством теоремы 4 появилось в [16]. Помимо теоремы 4 доказательство асимптотики существенно опирается на работу Одлыжко [89] о случайных $(\pm 1)$-матрицах.

В 1967 г. Комлошом [74] было показано, что детерминант случайной (0, 1)-матрицы почти всегда отличен от нуля. В дальнейшем это доказательство, в основе которого лежит лемма Литтлвуда — Оффорда, было им технически усовершенствовано (см. [75]). Его результат остается справедливым и для случайных $(\pm 1)$-матриц. Это означает, что $n$ случайных $n$-мерных векторов, компоненты которых независимо и равновероятно принимают значения 1 или $-1$, почти всегда образуют базис в $n$-мерном пространстве. Поэтому любой $n$-мерный вектор и, в частности, любой $(\pm 1)$-вектор может быть выражен в виде их линейной комбинации.

Решая задачу, возникшую в теории нейронных сетей [70], Одлыжко [89] получил результат, в определенном смысле дополняющий результат Комлоша. Им было установлено, что если брать не $n$, а $p \leqslant n(1-9{,}9/\ln n)$ случайных $(\pm 1)$-векторов, то натянутое на них линейное подпространство почти всегда не содержит $(\pm 1)$-векторов, отличных от взятых и им противоположных. Более того, он показал, хотя здесь это и не будет использовано, что в вероятность $P(n, p)$ того, что в линейном подпространстве найдется еще хотя бы один $(\pm 1)$-вектор, главный вклад дают ненулевые линейные комбинации троек векторов. Это позволило найти для рассматриваемой вероятности точную асимптотику

$$P(n,p) \sim 4\binom{p}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad p \leqslant n(1-9{,}9/\ln n), \quad n \to \infty.$$

Качественную связь между результатами Комлоша и Одлыжко можно продемонстрировать, перейдя от дискретной модели к непрерывной. Пусть компоненты $n$-мерного вектора независимы и непрерывно распределены в интервале $(-1, 1)$. Тогда, взяв из такого распределения произвольное конечное число $K$ векторов, с вероятностью 1 имеем, что любые $n$ из них линейно независимы, а в линейной оболочке каждых $n-1$ не содержится ни одного из оставшихся $K-n+1$. Таким образом, результаты Комлоша и Одлыжко свидетельствуют фактически о том, что с ростом $n$ свойства случайных $(\pm 1)$-векторов приближаются к свойствам векторов, выбранных из непрерывного распределения.

И. П. Чухрову удалось сделать результат Одлыжко более прозрачным, упростив доказательство, а также устранив имевшиеся в [89] неточности. Его усовершенствования будут использованы в наброске доказательства следующей леммы, представляющей ослабленный вариант теоремы Одлыжко.

Лемма 2. *Вероятность $P(n, p)$ того, что в линейной оболочке $p$ случайных $n$-мерных $(\pm 1)$-векторов содержится еще хотя бы один $(\pm 1)$-вектор, отличный от образующих и им противоположных, с ростом $n$ при $p \leqslant n(1-9{,}9/\ln n)$ стремится к нулю.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что в гиперплоскости $\sum a_i y_i = b$, где все $a_i \neq 0$, не может лежать более $\binom{n}{[n/2]}$ вершин куба $\mathbf{y} \in \{-1, 1\}^n$. Это утверждение, известное под названием леммы Литтлвуда — Оффорда, легко следует из леммы Шпернера о максимальном числе попарно несравнимых вершин в $\{-1, 1\}^n$. Поэтому для произвольных фиксированных значений $a_i \neq 0$ и $b$ и случайных $y_i \in \{-1, 1\}$ вероятность выполнения равенства $\sum a_i y_i = b$ не превосходит $\binom{n}{[n/2]} \Big/ 2^n$.

Обозначим через $P(n, p, m)$ вероятность того, что среди $p$ векторов существуют $m$ векторов, линейная комбинация которых с ненулевыми коэффициентами дает $(\pm 1)$-вектор, и не существует меньшего числа векторов с таким свойством. Эти $m$ векторов необходимо являются линейно независимыми, поэтому существует построенный на них базисный минор порядка $m$. При фиксированном положении базисного минора коэффициенты линейной комбинации, задающей $(\pm 1)$-вектор, однозначно определяются его координатами в столбцах базисного минора, вероятность же совпадения значения линейной комбинации с координатой $(\pm 1)$-вектора в столбце, не входящем в базисный минор, не превышает $\binom{m}{[m/2]} \Big/ 2^m$. Минор порядка $m$ в $(p \times m)$-матрице может быть выбран $\binom{p}{m}\binom{n}{m}$ способами, а различных $(\pm 1)$-векторов имеется $2^n$, поэтому для вероятности $P(n, p, m)$ справедлива оценка

$$P(n,p,m) \leqslant 2^n \binom{p}{m}\binom{n}{m}\left(\binom{m}{[m/2]} \Big/ 2^m\right)^{n-m}.$$

Теперь вероятность $P(n, p)$ может быть оценена так:

$$P(n,p) = \sum_{m=3}^{p} P(n,p,m) \leqslant \sum_{m=3}^{p} \binom{p}{m}\binom{n}{m} 2^n \left(\binom{m}{[m/2]} \Big/ 2^m\right)^{n-m},$$

а эта величина, как можно показать, с ростом $n$ при $p \leqslant n(1-9{,}9/\ln n)$ стремится к нулю. Этим завершим набросок доказательства.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 17 [15, 16]. *Для логарифма числа $N_n$ пороговых функций от $n$ переменных при достаточно больших $n$ справедливо неравенство* $\log N_n > n^2(1-10/\ln n)$.

Доказательство. Как указывалось в § 2, п. 1, подсчет числа пороговых функций можно свести к подсчету числа конусов, на которые $E^{n+1}$ разбивается гиперплоскостями (8). Будем рассматривать лишь пороговые функции (4) с $a_0 = 0$, т. е. самодвойственные. Отметим, что, как несложно заключить непосредственно из (5), их число $N'_n = N_{n-1}$. Самодвойственные функции находятся во взаимно однозначном соответствии с конусами, на которые пространство $E^n = (a_1, \ldots, a_n)$ разбивается $2^{n-1}$ гиперплоскостями вида

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n = 0. \qquad (19)$$

Метод получения нижней оценки для числа этих конусов заключается в том, чтобы с помощью леммы 2 показать, что при пересечении гиперплоскостей (19) возникает более $2^{n^2(1-10/\ln n)}$ линейных подпространств, а затем воспользоваться теоремой 4.

Положим $p = n(1-9{,}9/\ln n)$ и рассмотрим множество $\mathfrak{A}_n$ случайных $(\pm 1)$-матриц $A(p \times n)$, элементы которых независимо и равновероятно принимают значения 1 или $-1$. Множество $\mathfrak{A}_n$ состоит, таким образом, из $2^{pn}$ равновероятных матриц. Считая строки матриц нормальными векторами гиперплоскостей (19), свяжем с каждой матрицей $A \in \mathfrak{A}_n$ линейное подпространство, натянутое на ее строки,— линейную оболочку строк. Тогда пересечение $p$ гиперплоскостей, задаваемых строками матрицы $A$ как нормалями, будет ортогональным дополнением к линейной оболочке ее строк. Это сводит задачу к подсчету числа различных линейных подпространств, порождаемых матрицами из $\mathfrak{A}_n$.

Обозначим через $\mathfrak{A}'_n$ подмножество матриц, не содержащих пар одинаковых или противоположных строк. Ясно, что в $\mathfrak{A}'_n$ входят почти все матрицы, т. е. $|\mathfrak{A}'_n| \sim |\mathfrak{A}_n|$, $n \to \infty$. Множество $\mathfrak{A}'_n$ разобьем на классы эквивалентности следующим образом. В один класс включим матрицы, получаемые друг из друга операциями перестановки строк и замены строк на противоположные. Тогда в каждом классе будет ровно $p!\,2^p$ матриц. Ясно, что все матрицы из одного класса эквивалентности порождают одно и тоже подпространство. А из того, что у почти всех матриц линейная оболочка не содержит $(\pm 1)$-векторов, отличных от строк матрицы и им противоположных, следует, что число различных подпространств асимптотически совпадает с числом классов эквивалентности, т. е. равно $2^{pn}/(p!2^p)$. Отсюда вытекает утверждение теоремы (см. добавление при корректуре).

Принимая во внимание верхнюю оценку в (6), получаем

$$N_n = 2^{n^2(1-o(1))}, \quad n \to \infty.$$

**2. Число пороговых множеств заданной мощности.** Наряду с оцениванием общего числа $N_n$ пороговых функций интерес представляет получение оценок для числа $N_n(M)$ — пороговых функций с заданным числом единиц (нулей) $M$ или, другими словами, для числа пороговых множеств мощности $M$. Отметим, что в случае разделений гиперплоскостью точек общего положения в $E^n$ от подобной задачи приходится отказаться, так как мощность произвольного множества точек общего положения не определяет, как нетрудно проверить, числа линейных отсечений заданной мощности [66]. В пороговой же логике эти оценки являются более детальной характеристикой множества пороговых функций. В терминах рассмотренного в § 2, п. 7 частичного порядка $N_n(M)$ — это число элементов высоты $M$. Особое значение подобные оценки приобретают при изучении пороговых представлений. Здесь роль пороговых множеств заданной мощности аналогична элементарным конъюнкциям заданного ранга в теории д. н. ф.

Впервые задача оценивания $N_n(M)$ была рассмотрена автором и Липкиным [11]. Полученные оценки были затем усилены в [12] и приняли окончательный вид в [16]. Всюду в условиях теоремы буква $c$ обозначает некоторую константу.

Теорема 18. *С ростом $n$ при заданном характере изменения $M(n)$ для $\log N_n(M)$ имеют место следующие асимптотики:*

1) *если $M=o(n)$, то $\log N_n(M)\sim n$;*

2) *если $M=cn(1+o(1))$, то $\log N_n(M)\sim n(c\log(1+1/c)+\log(1+c)+1)$;*

3) *если $M=\alpha(n)n$, $\alpha(n)\to\infty$, $\log\alpha(n)=o(\log n)$, то $\log N_n(M)\sim n\log\alpha(n)$;*

4) *если $M=n^{c+o(1)}$, $c\geqslant 1$, то $\log N_n(M)\sim(c-1)n\log n$;*

5) *если $M=2^{\beta(n)}$, $\beta(n)\to\infty$, $\beta(n)=o(n)$, то $\log N_n(M)\sim\beta(n)n$;*

6) *если $M=2^{cn(1+o(1))}$, $0<c<1$, то $\log N_n(M)\sim cn^2$.*

Доказательство. Каждая из асимптотик 1)—6) теоремы доказывается получением асимптотически совпадающих верхних и нижних оценок для $\log N_n(M)$. Все верхние оценки получаются подсчетом числа различных векторов Чоу. Для получения же нижних оценок в каждом случае используется специальный метод: в 1)—3) — это конструктивное построение самих пороговых множеств; в 4)—5) — построоение множества линейных неравенств, задающих пороговые множества заданной мощности; в 6) — неконструктивный метод, использующий полученную вероятностными рассуждениями асимптотику (7).

Начнем с верхних оценок. В 6) она получается совсем просто. Каждая координата $(n+1)$-мерного вектора Чоу $S(A)$ является целым неотрицательным числом, не превышающим $|A|$. Поэтому в случае 6) существует не более $2^{cn(1+o(1))(n+1)}$ различных векторов Чоу, откуда и вытекает, что $\log N_n(M)\leqslant cn^2$. Не рассматривая в деталях всех случаев 1)—5), остановимся на случае 2) как технически наиболее трудном. Использованных здесь методов достаточно для получения верхних оценок во всех оставшихся случаях.

Пусть монотонное пороговое множество нулей $A$ мощности $cn$ задано неравенством (1) с $a_i\geqslant 0$. Упорядочим коэффициенты $a_i$ по величине $a_{i_1}\leqslant a_{i_2}\leqslant\ldots\leqslant a_{i_n}$. Выберем номер $k$ так, чтобы имело место $a_{i_{k-1}}+a_{i_k}\leqslant b$, $a_{i_k}+a_{i_{k+1}}>b$. Из $\binom{k}{2}\leqslant cn$, следует $k<2\sqrt{cn}$. Пусть $I=\{1, 2, \ldots, n\}$, $I_1=\{i_1, \ldots, i_k\}$, $I_0=\{i_{k+1}, \ldots, i_n\}$. Тогда у принадлежащих $A$ вершин не может быть более одной единичной координаты в $I_0$. Отсюда для вектора Чоу $S(A)=(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ множества $A$ имеем $\sum_{i\in I_0}s_i\leqslant cn$. Не более чем $cn$ одинаковых шаров может быть размещено по $t$ различным ящикам $\binom{t+cn}{t}$ способами (см. [39]). Поэтому различных $I_0$-фрагментов вектора Чоу может быть не более $\binom{n-k+cn}{n-k}\leqslant$ $\leqslant\binom{n+cn}{n}$. Число же различных $I_1$-фрагментов не превосходит

$(cn)^{2\sqrt{cn}}$. А число способов разбиения $I$ на $I_0$ и $I_1$ не превышает

$$\sum_{j=0}^{2\sqrt{cn}} \binom{n}{j} \leqslant 2\sqrt{cn}\, n^{2\sqrt{cn}}.$$

Поэтому для числа $N_n^0(cn)$ монотонных пороговых множеств мощности $cn$ имеем

$$\log N_n^0(cn) \leqslant \log\left(2\sqrt{cn}\, n^{2\sqrt{cn}} \binom{n+cn}{n}\right) \sim \log \binom{n+cn}{n} \sim$$
$$\sim n(c\log(1+1/c)+\log(1+c)).$$

Учитывая, что $N_n(cn) < 2^n N_n^0(cn)$, получаем

$$\log N_n(cn) \leqslant n(c\log(1+1/c)+\log(1+c)+1).$$

Перейдем теперь к нижним оценкам. Случай 1) очевиден. Покажем, как с помощью утверждения 6 § 2, п. 6 для случаев 2) и 3) строится необходимое число монотонных пороговых множеств, лежащих в пределах второго слоя и существенно зависящих от всех координат. Для определенности будем рассматривать случай 2). Включим сначала в пороговое множество $A$ нулевую вершину. Затем на первом шаге выберем из $n$ координат $m_1$ координат и включим в $A$ $m_1$ вершин первого слоя, имеющих единичными выбранные координаты. Остальные вершины первого слоя оставим вне $A$. На втором шаге выберем из $m_1$ координат, взятых на первом шаге, $m_2+1$ координат и отметим одну из них. Включим, далее, в $A$ $m_2$ вершин второго слоя, которые имеют единичными отмеченную и одну из выбранных неотмеченных координат. Продолжая таким образом, на $j$-м шаге из $m_{j-1}$ выбранных и неотмеченных на предыдущем шаге координат выбираем $m_j+1$ координат, отмечаем одну из них и $m_j$ вершин второго слоя, имеющих единичными отмеченную и одну из выбранных неотмеченных координат, включаем в $A$. Сделав $k$ шагов, получим монотонное пороговое множество $A$ мощности $1+\sum_{j=1}^{k} m_j$, которое при $m_1 > m_2+1$ существенно зависит от всех координат. Таким путем может быть получено

$$\binom{n}{m_1}\binom{m_1}{m_2+1}(m_2+1)\ldots\binom{m_{k-1}}{m_k+1}(m_k+1) =$$
$$= \frac{n!}{(n-m_1)!\,(m_1-m_2-1)!\ldots(m_{k-1}-m_k-1)!\,m_k!} \qquad (20)$$

пороговых множеств.

Теперь, чтобы полностью задать процесс построения, положим $m_j = [nq^j]$, где $q = c/(c+1)$, а значение $k$ положим таким, при котором процесс естественным образом обрывается. Тогда

$$|A| = 1+[nq]+[nq^2]+\ldots+[nq^k] \sim cn,$$

а как следует из (20) (подробнее см. в [12]), логарифм числа построенных монотонных пороговых множеств асимптотически равен $n(c\log(1+1/c)+\log(1+c))$, что и доказывает асимптотику в 2).

Нижние оценки в 4) и 5) доказываются конструктивным построением множества линейных неравенств методом вариации порога, которым получена нижняя оценка в (6) (см. § 2, п. 3). Если $M \leqslant 2^n$, то для каждого порогового множества мощности $m$, где $0 \leqslant m \leqslant M$, лежащего в подкубе $x_n = 0$, можно с помощью подходящего выбора величины $a_n$ получить в подкубе $x_n = 1$ пороговое множество мощности $M-m$, так чтобы мощность порогового множества во всем кубе была равна $M$. Поэтому для $M \leqslant 2^{n-1}$ имеем

$$N_n(M) \geqslant \sum_{m=0}^{M} N_{n-1}(m). \tag{21}$$

С помощью (21) для $M \leqslant 2^{n-k}$ можно получить

$$N_n(M) \geqslant \frac{M^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{M} N_{n-k}(m). \tag{22}$$

Полагая $k = n - ]\log M[$ и учитывая, что при этом $N_{n-k}(M) \geqslant 1$, получаем из (22) требуемые нижние асимптотические оценки в случаях 4) и 5).

Обратимся теперь к нижней оценке в случае 6). Пусть $\log M = cn$. Положив $l = [cn]$ и используя (21), имеем

$$N_n(M) \geqslant \sum_{m=0}^{M} N_{n-1}(m) > N_{n-1}(2^l).$$

Взяв теперь $k = n - l - 1$ и воспользовавшись (22), получаем

$$N_{n-1}(2^l) \geqslant \frac{2^{l(n-l-2)}}{(n-l-2)!} \sum_{m=0}^{2^l} N_l(m) > \frac{2^{l(n-l-2)}}{(n-l-2)!} N_l(2^{l-1}).$$

Но число $N_l(2^{l-1})$ совпадает с числом самодвойственных пороговых функций, и по теореме 15 $\log N_l(2^{l-1}) \sim l^2$. Поэтому $\log N_n(M) \gtrsim l(n-l) + l^2 \sim cn^2$. Теорема 18 доказана.

**3. Величина весовых коэффициентов.** Геометрически пороговая функция (1) задается гиперплоскостью, отделяющей подмножество $f^{-1}(0)$ вершин гиперкуба от подмножества $f^{-1}(1)$. Как уже отмечалось, небольшим изменением положения гиперплоскости это разделение всегда можно сделать строгим, когда ни одна из вершин куба не лежит в гиперплоскости. При этом, естественно, возникает вопрос, сколь большого расстояния от гиперплоскости до ближайшей к ней вершины можно добиться. Другими словами, задача состоит в оценке величины

$$\rho(f) = \max_{\mathbf{a},b} \min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n} \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{x}) - b|}{\|\mathbf{a}\|}. \tag{23}$$

Максимум здесь берется по всем положениям гиперплоскости, реализующим заданное разделение вершин гиперкуба. Далее, можно, абстрагируясь от конкретной функции, рассмотреть величину

$$\rho(n) = \min_f \rho(f),$$

где минимум берется по всем пороговым функциям от $n$ переменным.

В случае технической реализации пороговой функции $f$, основанной на каком-либо физическом принципе (см. [2, 86]), вследствие неизбежных флуктуаций физических величин, соответствующих весам и порогу, гиперплоскость будет слегка колебаться, и изменения ее положения не повлияют на реализуемую ею функцию лишь при условии достаточно большого значения $\rho(f)$. Величину же $\rho(n)$ можно рассматривать как характеристику устойчивости пороговой логики в целом.

Традиционно, однако, рассматриваемая задача в пороговой логике ставится несколько иначе. Система $\mathbf{a} = a_1, \ldots, a_n$ и $T$ называется *нормированной реализацией* пороговой функции $f\colon \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, если

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) &\leqslant T - 1, \quad \mathbf{x} \in f^{-1}(0), \\ (\mathbf{a}, \mathbf{x}) &\geqslant T, \qquad \mathbf{x} \in f^{-1}(1). \end{aligned} \tag{24}$$

При нормированной реализации выдерживается, таким образом, единичный «зазор» по линейному функционалу между нулевыми и единичными значениями функции.

Если пороговая функция $f$ задана в форме (4) $f:\{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$, то ее нормированная реализация принимает вид:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a}, \mathbf{y}) \leqslant -1, \quad \mathbf{y} \in f^{-1}(-1), \\ &(\mathbf{a}, \mathbf{y}) \geqslant 1, \quad \mathbf{y} \in f^{-1}(1), \end{aligned} \tag{25}$$

где $\mathbf{y}=(1, y_1, \ldots, y_n)$, $\mathbf{a}=(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, причем значения $a_1, \ldots, a_n$ здесь те же, что и в (24), а $a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i + 1 - 2T$.

Для нормированной реализации в пороговой логике рассматривается задача минимизации весовых коэффициентов. В качестве минимизируемого функционала при реализации (25) берется величина $\sum_{i=0}^{n} |a_i|$, и задача решается методами линейного программирования.

Любая целочисленная реализация пороговой функции является ее нормированной реализацией. В начале шестидесятых годов существовала гипотеза, что для любой пороговой функции существует ее целочисленная минимальная реализация. Это, однако, оказалось не так. Первый пример функции от 9 переменных, единственная минимальная реализация которой содержит дробные веса, был построен Уиллисом [114]. Позже выяснилось, что такие примеры встречаются уже для функций от 8 переменных [85].

Целочисленная реализация, подобно параметрам Чоу, позволяет кодировать пороговые функции. Однако здесь, в отличие от параметров Чоу, трудно однозначно выбрать отображение множества пороговых функций в множество весов, так как различные целочисленные наборы могут быть реализациями, и при том минимальными, одной и той же пороговой функции. Зато кодирование целочисленными весами позволяет легко вычислять значения функции, что не удается достичь с помощью параметров Чоу. Сложность такого кодирования определяется максимальной абсолютной величиной целых чисел, используемых в реализациях.

Пусть

$$M(f) = \min_{\mathbf{a}} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|,$$

где минимум берется по всем реализациям (24) функции $f$. Пусть, далее,

$$M(n) = \max_{f} M(f),$$

где максимум берется по всем пороговым функциям от $n$ переменных. Аналогичные величины для целочисленной реализации обозначим соответственно через $M_{\text{ц}}(f)$ и $M_{\text{ц}}(n)$. Ясно, что $M(f) \leqslant M_{\text{ц}}(f)$ и $M(n) \leqslant M_{\text{ц}}(n)$. Зная $M_{\text{ц}}(n)$ и учитывая, что $|T| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant nM_{\text{ц}}$, все пороговые функции от $n$ переменных можно перебрать, рассмотрев $(2M_{\text{ц}}(n)+1)(2nM_{\text{ц}}(n)+1)$ различных комбинаций весов и порога. Отсюда можно оценить $M_{\text{ц}}(n)$ снизу. Из соотношения

$$(2M_{\text{ц}}(n)+1)^n (2nM_{\text{ц}}(n)+1) \geqslant N_n = 2^{n^2(1-o(1))}$$

следует

$$\begin{aligned} n \log M_{\text{ц}}(n) &\geqslant n^2, \\ \log M_{\text{ц}}(n) &\geqslant n. \end{aligned} \tag{26}$$

Причем для почти всех пороговых функций $f$ выполнено

$$M_{\text{ц}}(f) > 2^{n(1-o(1))}.$$

Проблеме выяснения скорости роста величин $M(n)$ и $M_{ц}(n)$ в пороговой логике придавалось большое значение. В начале шестидесятых годов рядом авторов были конструктивно построены примеры функций от $n$ переменных, для которых $M(f)=M_{ц}(f)\asymp 2^n$. Эти потребовавшие значительной изобретательности конструкции и соответствующие библиографические ссылки можно найти в [2, 86]. Полученная элементарным мощностным методом оценка (26) несколько слабее, но она относится к почти всем функциям, характеризуя, таким образом, поведение $M_{ц}(f)$ в типичном случае. Покажем теперь, как геометрическими рассуждениями, модифицирующими мощностной метод для непрерывного случая, можно доказать справедливость оценки (26) и для $M(f)$.

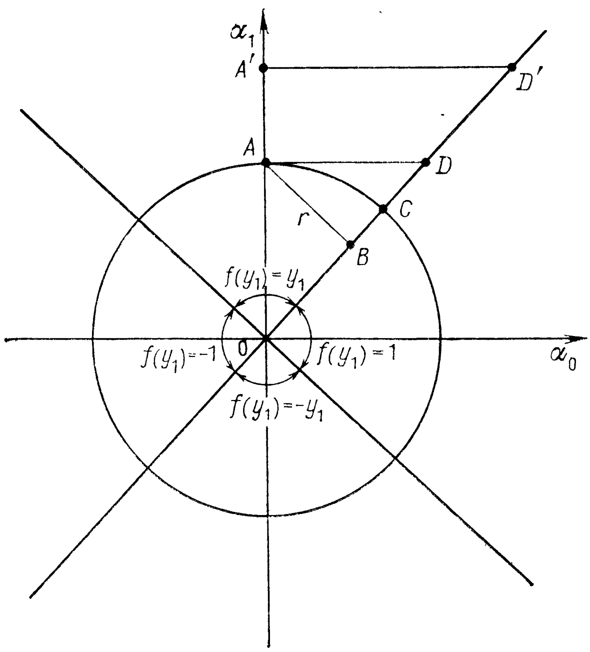


Рис. 8

Теорема 19. *Для $M(n)$ справедлива оценка*

$$\log M(n)\gtrsim n,\quad n\to\infty,$$

*причем столь велики значения $M(f)$ для почти всех пороговых функций $f$.*

Доказательство. В $(n+1)$-мерном пространстве весов $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ пороговым функциям $f(\mathbf{y})=\operatorname{sgn}(a_0+a_1y_1+\ldots+a_ny_n)$ соответствуют конусы, образованные гиперплоскостями (8). (См. рис. 8, где представлен случай $n=1$.) Нормируем весовые векторы на единичную длину, т. е. для каждой пороговой функции будем рассматривать лишь ее реализации, лежащие на сфере единичного радиуса $R=\sqrt{a_0^2+a_1^2+\ldots+a_n^2}$. Для каждой функции $f$ найдем на ее куске сферы точку $A(f)=\left(a_0^f, a_1^f, \ldots, a_n^f\right)$ с наибольшим расстоянием до ближайшей гиперплоскости. Опустим из $A$ перпендикуляр $AB$ на эту гиперплоскость, $|AB|=r(f)$. Нормали к гиперплоскостям (8) имеют вид $(1, \pm1, \pm1, \ldots, \pm1)/\sqrt{n+1}$, и для расстояния $r$ от $A$ до ближайшей гиперплоскости справедливо $r\leqslant \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|/\sqrt{n+1}\leqslant 1/\sqrt{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Поэтому, если $C$ — точка пересечения луча $OB$ с единичной сферой, то дуга $AC$ асимптотически сливается с $AB$ при $n\to\infty$.

Для типичной пороговой функции $f$ объем соответствующего ей куска единичной сферы асимптотически не превосходит

$$\frac{S^n_{сф}(R)}{N_n}=\frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{R^n}{N_n}=\frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{1}{N_n}.$$

Этот объем асимптотически не меньше объема $n$-мерного шара радиуса $r$. Поэтому

$$V^n_{ш}(r)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}r^n\lesssim\frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{1}{N_n}.$$

Отсюда, учитывая, что $\log N_n \sim n^2$, получаем

$$\log r \leqslant -n.$$

Проведем из $A$ прямую, параллельную оси $a_0$, т. е. в направлении $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$, до пересечения с ближайшей гиперплоскостью в точке $D$. Абсолютная величина косинуса угла между $AB$ и $AD$ равна $1/\sqrt{n+1}$, $|AD| = r/\sqrt{n+1}$. Нормированная реализация (25) функции $f$ с минимальным модулем весового вектора задается точкой $A'$, получаемой из $A$ гомотетией с коэффициентом $1/|AD|$, т. е. умножением вектора $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ единичной длины на $\sqrt{n+1}/r$, при этом $|A'D'| = 1$. Таким образом, минимум модуля весового вектора при нормированных реализациях $f$ равен $\sqrt{n+1}/r$. Отсюда $M(f) > 2^{n(1-o(1))}$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к верхним оценкам для $M_ц(n)$. Они являются верхними оценками и для $M(n)$. Единственный известный здесь подход, предложенный 30 лет назад Мурогой с соавторами [84], состоит в использовании принципа граничных решений, правила Крамера для решений систем линейных уравнений и оценки Адамара для величины детерминантов.

Теорема 20 [84]. *Для величины $M_ц(n)$ справедлива оценка*

$$M_ц(n) \leqslant 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{(n+1)/2}.$$

Доказательство. Система из $2^n$ линейных неравенств (24), которым должна удовлетворять нормированная реализация $(a_1, \ldots, a_n, T)$ пороговой функции $f: \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, имеет допустимое базисное решение, когда $n+1$ неравенств обращаются в равенства и ранг соответствующей линейной системы равен $n+1$:

$$\begin{aligned} &a_1 x_1^{(1)} + \ldots + a_n x_n^{(1)} - T = 0, \qquad && \mathbf{x}^{(1)} \in f^{-1}(1),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\ &a_1 x_1^{(n+1)} + \ldots + a_n x_n^{(n+1)} - T = -1, && \mathbf{x}^{(n+1)} \in f^{-1}(0). \end{aligned}$$

Решая ее по правилу Крамера, получаем

$$\begin{aligned} &a_i = \Delta_i/\Delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\\ &T = \Delta_{n+1}/\Delta. \end{aligned} \tag{27}$$

Оценим по абсолютной величине определитель $\Delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Для этого умножим его последний столбец на $1/2$ и прибавим его ко всем остальным столбцам, за исключением $i$-го, а от $i$-го вычтем. В результате получим определитель, целиком состоящий из $\pm 1/2$. Оценив его по Адамару, получаем

$$\frac{|\Delta_i|}{2} \leqslant \left(\frac{n+1}{4}\right)^{(n+1)/2}.$$

Умножив в (27) все $a_i$ и $T$ на $|\Delta|$, получим целочисленную реализацию для $f$, в которой все веса не превосходят по абсолютной величине $2\left(\frac{n+1}{4}\right)^{(n+1)/2}$, что и требовалось доказать.

Отметим огромный разрыв между нижними оценками (26) и теоремы 19, с одной стороны, и верхней оценкой теоремы 20, с другой. До настоящего времени не известно подхода к понижению оценки в теореме 20, даже если отбросить требование целочисленности.

Вернемся теперь к величине $\rho(f)$ в (23). Если $\min\limits_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n} |(\mathbf{a}, \mathbf{x}) - b| = p$, то, положив $a_i' = a_i/2p$ и выбрав подходящим образом $T$, можно получить нормированную реализацию (24) для $f$. Поэтому $\max\limits_{1<i<n} \frac{|a_i|}{2p} \geqslant M(f)$, и

$$2pM(f) \leqslant \|\mathbf{a}\| \leqslant \sqrt{n}2pM(f).$$

Из того, что $\rho(f) = p/\|\mathbf{a}\|$, следует, что

$$\frac{1}{2\sqrt{n}M(f)} \leqslant \rho(f) \leqslant \frac{1}{2M(f)}.$$

Отсюда, используя теоремы 19 и 20, получаем

$$-\frac{1}{2}n\log n \lesssim \log\rho(n) \sim -\log M(n) \lesssim -n.$$

**4. Сложность дизъюнктивной нормальной формы.** Пороговая функция является однородной, поэтому ее сокращенная д. н. ф. является ее единственной тупиковой, кратчайшей и минимальной. Здесь будет рассматриваться только эта д. н. ф. Заменами $x_i \to 1 - x_i$ любая пороговая функция может быть преобразована в монотонную с сохранением сложности д. н. ф., поэтому ограничимся рассмотрением монотонных функций, простые импликанты которых соответствуют нижним единицам.

Оценка сложности представления пороговых функций с помощью д. н. ф. представляет интерес в силу двух причин. Во-первых, значительная длина д. н. ф. пороговых функций является аргументом в пользу использования в ряде случаев для задания булевых функций вместо д. н. ф. пороговых представлений. И, во-вторых, эти исследования соприкасаются с проблемой алгоритмической сложности решения NP-полных задач, которая в течение уже двух десятилетий привлекает к себе пристальное внимание математиков. В самом деле, задача о ранце (2) может быть решена путем просмотра всех максимальных допустимых решений — верхних нулей соответствующей монотонной функции, и такой просмотр осуществим за время $O(n^2K)$, где $K$ — число верхних нулей [76]. Таким образом, если бы для всех пороговых функций длина д. н. ф. была ограничена полиномом, то отсюда немедленно следовало бы, что P = NP.

То, что пороговые функции могут иметь экспоненциальную сложность д. н. ф., показывает уже пример мажоритарной функции, д. н. ф. которой состоит из $\binom{n}{[n/2]}$ конъюнкций, и этот факт, разумеется, никак не влияет на состояние проблемы $\mathrm{P} \overset{?}{=} \mathrm{NP}$. Могут ли пороговые функции обладать большей длиной д. н. ф.? Нет, так как нижние единицы монотонной функции несравнимы, а максимальная мощность множества попарно несравнимых наборов в силу леммы Шпернера равна $\binom{n}{[n/2]}$. Справедлив, таким образом, следующий результат.

Теорема 21. *Число простых импликантов у пороговой функции не превышает* $\binom{n}{[n/2]}$.

Тот факт, что на мажоритарной функции достигается максимум длины д. н. ф. в классе пороговых функций, отмечен уже у Муроги [86]. Возникает, однако, вопрос, насколько часто среди пороговых функций встречается экспоненциальная длина д. н. ф.? Опыт решения подобных задач, накопленный за несколько десятилетий развития дискретной математики, подсказывает, что типичный случай не должен существенно отличаться от экстремального и экспоненциальной сложностью д. н. ф. должны обладать почти все пороговые функции. Для доказательства этого напрашивается использование мощностного метода Шеннона. Однако его применение «в лоб» не дает желаемого результата. Существуют $2^n$ элементарных конъюнкций без отрицания переменных, и с помощью не более чем $k$ конъюнкций можно получить не более $\sum_{i=0}^{k}\binom{2^n}{i}<2^{nk}$ функций. А так как всего пороговых функций $2^{n^2(1-o(1))}$, то почти все они имеют длину д. н. ф., асимптотически не меньшую $n$. Чтобы улучшить эту оценку, нужно учесть, что берутся не произвольные подмножества конъюнкций, а лишь те, дизъюнкция которых является пороговой функцией, а это сделать нелегко.

Несколько более сильный результат можно получить, если воспользоваться оценкой (18) для числа $R_n(l)$ регулярных функций с $l$ нижними единицами. Любая монотонная пороговая функция может быть сделана регулярной перестановкой переменных, поэтому число монотонных пороговых функций с не более чем $k$ нижними единицами не превышает

$$n!\sum_{l=0}^{k}R_n(l)\leqslant n!\sum_{l=0}^{k}(n+1)^l.$$

Отсюда получаем, что у почти всех пороговых функций длина д. н. ф. асимптотически не меньше $n^2/\log n$ [14].

Автору неизвестен метод получения более сильных нижних оценок для сложности д. н. ф. типичной пороговой функции, однако в [13] им совместно с Липкиным доказано существование обширного класса пороговых функций с экспоненциальной сложностью д. н. ф.

Пусть $D_n(l)$ — число монотонных пороговых функций от $n$ переменных с $l$ нижними единицами. Тогда, как следует из леммы Шпернера, $D_n\binom{n}{[n/2]}=1$ при $n$ четном, $D_n\binom{n}{[n/2]}=2$ при $n$ нечетном и $D_n(l)=0$ при $l>\binom{n}{[n/2]}$.

Теорема 22 [13]. *Пусть* $l(n)=2^{cn(1+o(1))}$, $0<c<1$, $n\to\infty$. *Тогда для числа* $D_n(l)$ *монотонных пороговых функций с* $l$ *нижними единицами справедлива следующая асимптотическая оценка*

$$\log D_n(l)\geqslant c(1-c)n^2/2.$$

Доказательство использует метод вариации порога и в идейном отношении близко к доказательству нижних оценок для числа пороговых множеств заданной мощности. В основе его лежит следующее соображение. Пусть в неравенстве (1), задающем монотонную пороговую функцию с $l$ нижними единицами, порог $b$ постепенно увеличивается, так что гиперплоскость параллельно перемещается. Ввиду теоремы 10 можно считать, что гиперплоскость последовательно пересекает по одной все вершины куба. Каждая пересекаемая вершина, являясь нижней единицей в момент, непосредственно предшествующий ее пересечению гиперплоскостью, становится нулевой вершиной в момент пересечения. При пересечении очередной вершины число нижних единиц может увеличиться за счет того, что вершины с единичными значениями функции, большие пересеченной, стали нижними единицами. Уменьшиться же оно может только на единицу. При достаточно большом значении порога функция станет тождественно равной единице и не будет иметь нижних единиц, поэтому для любого целого $l_1$, $0\leqslant l_1\leqslant l$, существует такое значение порога $b_1$, что неравенство $a_1x_1+\ldots+a_nx_n\leqslant$ $\leqslant b_1$ задает функцию с $l_1$ нижними единицами.

Данное замечание позволяет заключить, что для любых $n$, $l\geqslant 3$ справедливо соотношение

$$D_n(l)\geqslant\sum_{l_1=[l/2]}^{l}D_{n-2}(l_1). \tag{28}$$

В самом деле, для каждого $l_1$, $[l/2] \leqslant l_1 \leqslant l$, по определению существует $D_{n-2}(l_1)$ монотонных пороговых функций от $n-2$ переменных с $l_1$ нижними единицами. Если неравенство $\sum_{i=1}^{n-2} a_i x_i \leqslant b_1$ задает такую функцию, то, выбрав $b_2$ так, чтобы функция $\sum_{i=1}^{n-2} a_i x_i \leqslant b_2$ имела $l_2 = l - l_1 - 1$ нижних единиц, построим функцию от $n$ переменных с помощью неравенства

$$\sum_{i=1}^{n-2} a_i x_i + (b - b_1)\, x_{n-1} + (b - b_2)\, x_n \leqslant b, \tag{29}$$

где $b = \infty$ (достаточно велико). Функция (29) имеет $l_1$ нижних единиц в подкубе $x_{n-1} = 1$, $x_n = 0$ и $l_2$ нижних единиц в подкубе $x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$, а также нижнюю единицу $(0, \ldots, 0, 1, 1)$, всего $l_1 + l_2 + 1 = l$ нижних единиц. С помощью (28) нетрудно получить, что при $k \leqslant (n-3)/2$

$$D_n(l) \geqslant \sum_{l_1=[l/2]}^{l} \frac{(l - l_1 + 1)^k}{k!} D_{n-2k-2}(l_1). \tag{30}$$

Подставляя в (30) $k = [(n - \log l)/2 - \log n]$ и учитывая, что при этом $\binom{n-2k-2}{[n/2]-k-1} > l$ и, следовательно, $D_{n-2k-2}(l) \geqslant 1$, получаем утверждение теоремы.

## § 4. Пороговые представления

**1. Постановка задачи.** Пороговые функции, т. е. те, которые представимы одним линейным неравенством (1), составляют исчезающе малую часть от всех булевых функций. Однако любая булева функция может быть задана системой линейных неравенств

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{array} \tag{31}$$

так, чтобы нулевые для функции наборы и только они удовлетворяли системе. Такое задание булевой функции системой линейных неравенств называется ее *пороговым представлением*, а наименьшее число $m$ необходимых для этого неравенств — *пороговым числом* $t(f)$ булевой функции $f$. Геометрически пороговое представление функции $f$ сводится к отсечению гиперплоскостями всех ее единичных вершин. Поэтому в дальнейшем пороговое множество, состоящее из единичных для функции $f$ вершин, будем называть *допустимым* для $f$. Пороговое число $t(f)$ есть, таким образом, минимальное число допустимых для $f$ пороговых множеств, покрывающих $f^{-1}(1)$.

Пороговое представление (31) булевой функции $f$ можно рассматривать и как дизъюнкцию пороговых функций, т. е. подобно д. н. ф. считать его схемой глубины 2 (рис. 3). Любая элементарная конъюнкция является пороговой функцией, поэтому пороговые представления по своим возможностям не уступают д. н. ф. Прямым следствием этого замечания является следующий результат.

Утверждение 9. *Пороговое число $t(f)$ булевой функции $f$ всегда не превышает длины ее кратчайшей д. н. ф..*

Пороговое число может совпадать с длиной кратчайшей д. н. ф., но может быть и значительно меньшим, как показывает пример мажоритарной функции. Таким образом, пороговые представления в ряде важных случаев являются более экономными.

Задача определения по д. н. ф. пороговой функции ее порогового числа является согласно следствию 2 теоремы 14 NP-трудной уже в классе графических функций. Поэтому важное значение при изучении пороговых представлений приобретают вопросы, связанные с распределением значений пороговых чисел. По постановкам задач и используемым методам эти исследования близки соответствующей проблематике в теории д. н. ф., где оценкам длин кратчайших д. н. ф. посвящено значительное число работ (см. [3]). В обоих случаях решается задача о покрытии множества $f^{-1}(1)$, но в д. н. ф. это покрытие осуществляется подкубами, соответствующими допустимым элементарным конъюнкциям [6], а в пороговых представлениях $f^{-1}(1)$ покрывается допустимыми пороговыми множествами. Как и в теории д. н. ф., в пороговых представлениях изучаются экстремальные и типичные значения пороговых чисел, а наряду с классом всех булевых функций важнейшим рассматриваемым подклассом являются монотонные функции.

Отметим, что с точки зрения теории нейронных сетей пороговое представление может считаться адаптивной двухслойной нейронной сетью простейшей конфигурации, в которой настраиваемыми являются элементы первого слоя, а во втором используется фиксированный логический блок — дизъюнкция. Подобные сети под названием «мадалины» и алгоритмы их настройки рассматривались в литературе (см. [113]).

В качестве порогово-дизъюнктивных схем пороговые представления изучались в шестидесятые годы (см. [55]), однако не вызвали значительного интереса, так как при их физической реализации трудно добиться устойчивой работы схемы из-за большого числа входов, подаваемых на каждый пороговый элемент. С теоретической точки зрения такие схемы также примитивны и неэкономичны. Гораздо привлекательней во всех отношениях выглядели каскадные схемы (см. [2, 34, 55]).

Положение изменилось, когда стали изучаться задачи линейного булева программирования, в частности, многомерная задача о ранце:

$$\text{максимизировать } c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$
$$\text{при условии} \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m. \end{cases} \tag{32}$$

Все коэффициенты в (32) неотрицательны, поэтому областью допустимых решений здесь является множество нулей монотонной булевой функции, заданной с помощью порогового представления. С этой точки зрения пороговые представления, по-видимому, впервые рассматривались Коробковым [23].

Особую роль в развитии теории пороговых представлений сыграла проблема агрегирования линейных неравенств в задачах типа (32), т. е. замена их меньшим числом неравенств без изменения допустимой области. При этом пороговое число как раз и выражает максимально возможную степень такого агрегирования. Именно задача агрегирования была исходным пунктом в исследованиях [10, 49, 64, 69]. Забегая вперед, отметим, что, как показали первые же результаты этих исследований, возможности точного агрегирования в общем случае весьма ограничены. Выяснилось существование булевых функций с пороговым числом, равным $2^{n-1}$, и монотонных булевых функций с пороговым числом, равным $\binom{n}{[n/2]}\Big| n$. Это не исключает, однако, эффективного агрегирования в более узких подклассах булевых функций, например, в классе графических функций, где пороговое число согласно теореме 14 всегда меньше $n$. Фактически, значительная часть результатов в этой области получена именно для графических функций и сформулированы на языке пороговых разложений графов.

Сегодня, оглядываясь назад, можно сказать, что изучение пороговых представлений под новым по сравнению со схемами углом зрения, когда работы шестидесятых годов по пороговой логике были уже основательно забыты, хотя и привело к неизбежному на первых порах переоткрытию известных результатов, однако обеспечило устойчивый интерес к проблематике на протяжении уже длительного времени. Причина состоит, по-видимому, в том, что возникающие здесь задачи лежат в русле развития современной дискретной математики и связаны со многими ее разделами.

**2. Теоремы о пороговых числах.** Согласно утверждению 9 пороговое число булевой функции не превосходит длины ее кратчайшей д. н. ф., а она, в свою очередь, как хорошо известно (см. [3]), не превышает $2^{n-1}$ и достигает этого значения на счетчике четности $f(\mathbf{x})=x_1+\ldots+x_n \pmod 2$. Единичные вершины счетчика четности перемежаются нулевыми, поэтому, как следует из утверждения 3 § 2, п. 4, все его допустимые пороговые множества одноэлементны, и его пороговое число равно числу его единичных вершин, т. е. также $2^{n-1}$. Более тщательный, хотя и несложный анализ показывает, что существуют всего две функции, на которых пороговое число принимает это максимальное значение: счетчик четности и его отрицание. Таким образом, справедлив следующий результат.

Теорема 23. *Пороговые числа булевых функций от $n$ переменных не превосходят $2^{n-1}$, причем для каждого натурального $k$, $1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}$, множество функций с пороговым числом $t(f)=k$ не пусто. Максимальное значение порогового числа, равное $2^{n-1}$, достигается на двух функциях: счетчике четности и его отрицании.*

То, что максимальное значение порогового числа равно $2^{n-1}$ и достигается на счетчике четности, было, по-видимому, хорошо известно специалистам по пороговой логике в шестидесятые годы (см. [2, с. 165]), но доказательство этого, возможно, впервые опубликовано Джерослоу, хотя им и не было отмечено, что максимум достигается на двух функциях.

Ясно, что пороговое число булевой функции не превышает числа ее единичных вершин. Липкиным [33] был открыт намного менее очевидный факт, что оно не превосходит и числа ее нулевых вершин.

Теорема 24 [33]. *Для порогового числа произвольной булевой функции $f$ справедливо неравенство*

$$t(f)\leqslant \min\{|f^{-1}(1)|,\ |f^{-1}(0)|\}.$$

Доказательство. Соотношение $t(f)\leqslant|f^{-1}(1)|$ очевидно. Докажем соотношение $t(f)\leqslant|f^{-1}(0)|$ индукцией по числу нулевых вершин. При $|f^{-1}(0)|=1$ оно верно. Пусть оно верно для всех булевых функций с числом нулей, не превышающем $k-1$, и пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет $k$ нулей. Тогда существует переменная $x_j$ такая, что в каждом из подкубов $x_j=0$ и $x_j=1$ имеются нулевые вершины функции. Не теряя общности, будем считать, что $j=n$. Пусть в подкубе $x_n=1$ лежит $m$ нулей функции, а в подкубе $x_n=0$ $k-m$ нулей, где $m\leqslant k-1$ и $k-m\leqslant k-1$. Тогда по предположению индукции существует система из $m$ неравенств

$$a_{11}x_1+\ldots+a_{1n-1}x_{n-1}\leqslant b_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn-1}x_{n-1}\leqslant b_m,$$

задающая функцию $(x_n=1)f$, и система из $k-m$ неравенств

$$a_{m+1 1}x_1+\ldots+a_{m+1 n-1}x_{n-1}\leqslant b_{m+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{k1}x_1+\ldots+a_{k\,n-1}x_{n-1}\leqslant b_k,$$

задающая функцию $(x_n=0)f$. Тогда система

$$a_{11}x_1+\ldots+a_{1n-1}x_{n-1}+Mx_n\leqslant b_1+M,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn-1}x_{n-1}+Mx_n\leqslant b_m+M,$$
$$a_{m+1 1}x_1+\ldots+a_{m+1\, n-1}x_{n-1}-Mx_n\leqslant b_{m+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{k1}x_1+\ldots+a_{k\,n-1}x_{n-1}-Mx_n\leqslant b_k,$$

где $M$ достаточно велико, задает функцию $f$. Теорема доказана.

Из теоремы 24 сразу вытекает, что пороговое число не может превышать $2^{n-1}$. Заметим, что теорема 24 не имеет аналога в теории д. н. ф. (см. [7]). Отметим также, что по ходу доказательства было установлено, что для произвольной пороговой функции, заданной на некотором подкубе единичного куба, существует пороговая функция, заданная на всем кубе, совпадающая с исходной в выделенном подкубе и равная нулю вне его.

Оценим теперь число булевых функций с заданным значением порогового числа. Обозначим через $\Phi_n$ множество пороговых функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $\varphi(1, 1, \ldots, 1)=1$, $\varphi(0, 0, \ldots, 0)=0$, а через $\Phi'_n$ — множество их отрицаний. Каждая монотонная пороговая функция, не равная тождественно нулю или единице, принадлежит $\Phi_n$, поэтому $|\Phi_n|=|\Phi'_n|=N_2^0-2$.

Теорема 25 [13]. *При $1\leqslant t\leqslant 2^{n-1}$ для числа $B_n(t)$ булевых функций от $n$ переменных с пороговым числом $t$ справедливы оценки*

$$\left(N^0_{n-]\log t[}-2\right)^t\leqslant B_n(t)\leqslant\binom{N_n}{t}.$$

Доказательство. Верхняя оценка теоремы сразу получается из мощностных соображений. Для доказательства нижней оценки выделим в $n$-мерном кубе $t$ подкубов фиксацией различных значений первых $]\log t[$ координат. Множество выделенных $(n-]\log t[)$-мерных подкубов разобьем на два подмножества: четных и нечетных подкубов, в зависимости от четности суммы $\sum\limits_{i=1}^{]\log t[}x_i$. Рассмотрим множество $F_n$ булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, получаемых следующим образом. В вершинах, не принадлежащих выделенным подкубам (при $]\log t[>\log t$), $f$ полагается равной нулю. В каждом из четных подкубов $f$ совпадает с произвольно выбранной функцией из $\Phi_{n-]\log t[}$, в каждом из нечетных — с функцией из $\Phi'_{n-]\log t[}$. Тогда $|F_n|\geqslant(N_{n-]\log t[}-2)^t$.

Покажем, что пороговое число функции $f\in F_n$ равно $t$. Оно не может превышать $t$, так как в каждом из $t$ подкубов функция $f$ является пороговой. Покажем, что оно не может быть и меньше $t$. Для этого выберем в каждом из $t$ подкубов по одной единичной для $f$ вершине и докажем, что никакие две из этих $t$ вершин нельзя отсечь одним неравенством. В четных подкубах в качестве таких вершин возьмем вершины с $x_i=1$, $i=]\log t[+1, \ldots, n$, в нечетных — с $x_i=0$, $i=]\log t[+$ $+1, \ldots, n$.

Пусть сначала две выбранные вершины $\alpha$ и $\beta$ принадлежат подкубом одинаковой четности, например четным, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$. Тогда существуют вершины $\gamma=(\gamma_1, \ldots \ldots, \gamma_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$ и $\delta=(\delta_1, \ldots, \delta_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$, принадлежащие нечетным подкубам и, следовательно, нулевые для $f$ такие, что $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, и любая гиперплоскость, отсекающая $\alpha$ и $\beta$, должна отсекать хотя бы одну из вершин $\gamma$ или $\delta$. Если же две выбранные вершины $\alpha$ и $\beta$ принадлежат подкубам различной четности $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_{]\log t[}, \ldots, 0, \ldots, 0)$, то хотя бы одна из нулевых для функции $f$ вершин $\gamma=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{]\log t[}, 0, \ldots, 0)$, $\delta=(\beta_1, \ldots, \beta_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$ должна отсекаться тем же неравенством. Теорема доказана.

В качестве следствия получаем, что при $n\to\infty$, $\log t=o(n)$

$$\log B_n(t)\sim tn^2.$$

**3. Статистические методы в пороговых представлениях.** Наряду с изучением экстремальных значений числовых характеристик комбинаторных объектов интерес представляет исследование их типичных значений, т. е. тех, которые принимаются на основной массе объектов. Важную роль здесь приобретают вероятностные методы исследования, применение которых основано на том, что на множестве комбинаторных объектов задается равномерное распределение вероятностей и изучается вероятностное распределение исследуемых числовых характеристик, которые при таком подходе становятся случайными величинами, и к ним применимы теоремы теории вероятностей.

Существенно, что во многих случаях имеется простая вероятностная модель порождения множества комбинаторных объектов, в которой каждый объект возникает с одинаковой вероятностью. Так, для графов с помеченными вершинами равномерное на множестве всех графов распределение возникает при независимом появлении каждого ребра с вероятностью 1/2. В случае же булевых функций равномерное на множестве всех функций распределение можно получить, задавая независимо в каждой вершине куба с вероятностью 1/2 значение нуль или единица. Подобные модели порождения объектов оказываются весьма удобными в вероятностных методах.

В ряде случаев экстремальное значение некоторой числовой характеристики булевых функций асимптотически совпадает с ее значением в типичном случае. Это имеет место, например, для сложности реализации булевых функций схемами. В этом случае говорят, что имеет место эффект Шеннона. В других случаях, например для длины кратчайшей д. н. ф., экстремальное значение оказывается существенно большим, но почти все булевы функции имеют асимптотически совпадающие значения числовой характеристики, т. е. асимптотика типичного значения существует, но не совпадает с экстремальным значением. Тогда говорят о полуэффекте Шеннона. В определенной мере его можно сопоставить с законом больших чисел в теории вероятностей, утверждающим сходимость частоты к вероятности для почти всех реализаций случайной последовательности.

В 1967 г. Нигматуллиным был предложен метод, названный им вариационным принципом (см. [36]), позволяющий во многих случаях доказывать существование полуэффекта Шеннона. В основе метода лежит хорошо известный факт, что в слоях $n$-мерного куба с номерами от $[n/2-\sqrt{n}\log n]$ до $[n/2+\sqrt{n}\log n]$ находятся почти все его вершины, а также доказанное Нигматуллиным утверждение, что если $P\subseteq\{0, 1\}^n$ и $Q\subseteq\{0, 1\}^n$ — два подмножества вершин $n$-мерного куба и $|P|\geqslant \geqslant\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{n}{i}$, $|Q|\geqslant\sum\limits_{i=l}^{n}\binom{n}{i}$, то расстояние Хемминга между $P$ и $Q$ не превышает $l-k$.

Суть метода заключается в следующем. Каждая булева функция $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ рассматривается как упорядоченный набор $2^n$ своих значений, т. е. считается вершиной $2^n$-мерного куба. В качестве расстояний $r(f_1, f_2)$ между функциями $f_1$ и $f_2$ берется число вершин $n$-мерного куба, на которых их значения различаются, т. е. расстояние Хемминга между соответствующими им вершинами $2^n$-мерного куба.

Пусть для исследуемой числовой характеристики булевых функций $h(f)$ удается показать, что из $r(f_1, f_2) = 1$ следует $|h(f_1) - h(f_2)| \leqslant R(n)$. Тогда если $r(f_1, f_2) = r$, то $|h(f_1) - h(f_2)| \leqslant rR(n)$. Если, кроме того, удается показать, что для почти всех булевых функций $h(f) \geqslant H(n)$, то рецепт Нигматуллина для доказательства асимптотики состоит в следующем. Выпишем булевы функции, для которых $h(f) \geqslant H(n)$, в ряд в порядке неубывания значений $h(f)$. Выделим начальный отрезок ряда длины $\sum\limits_{i=0}^{2^{n-1} - n2^{n/2}} \binom{2^n}{i}$ и конечный его отрезок такой же длины. Тогда в средней части ряда в промежутке между выделенными отрезками находятся почти все булевы функции, а расстояние на $2^n$-мерном кубе между множествами, соответствующими выделенным начальному и конечному отрезкам, не превышает $2n2^{n/2}$. Поэтому разброс значений $h(f)$ в средней части ряда не превышает $2n2^{n/2}R(n)$. Если теперь имеет место $2n2^{n/2}R(n) = o(H(n))$, то это означает, что почти все булевы функции $f$ имеют асимптотически одинаковые значения $h(f)$.

Сам Нигматуллин использовал этот метод для доказательства существования асимптотики длины кратчайшей д. н. ф., но он без труда переносится и на пороговые числа. При случайном независимом и равновероятном задании значений булевой функции в вершинах единичного $n$-мерного куба вероятность того, что некоторое фиксированное пороговое множество мощности $cn$ будет целиком заполнено единицами, равна $2^{-cn}$. Поэтому математическое ожидание числа допустимых пороговых множеств мощности $cn$ равно

$$2^{-cn} N_n(cn) = 2^{n(c \log(1+1/c) + \log(1+c) + 1 - c + o(1))}.$$

Функция $c \log(1 + 1/c) + \log(1 + c) + 1 - c$ монотонно убывает при $c > 1$ $((c \log(1 + 1/c) + \log(1 + c) - c)' = \log(1 + 1/c) - 1)$. Отсюда, используя неравенство Чебышева, получаем, что почти все булевы функции не имеют допустимых пороговых множеств мощности $cn$ при $c > c_0$, где $c_0 \approx$ $\approx 4{,}87$ — корень уравнения

$$c \log(1 + 1/c) + \log(1 + c) - c + 1 = 0.$$

Опираясь на это замечание, оценим разность $|t(f_1) - t(f_2)|$ при условии $r(f_1, f_2) = 1$. Пусть $f_1(\alpha) = 0$, $f_2(\alpha) = 1$. Тогда пороговое представление для $f_2$ может быть получено из порогового представления для $f_1$ добавлением одного неравенства, отсекающего $\alpha$, следовательно, $t(f_2) \leqslant$ $\leqslant t(f_1) + 1$. Обратно, представление для $f_1$ можно получить из представления для $f_2$, удалив все неравенства, отсекающие $\alpha$, и выписав для каждой вершины, за исключением $\alpha$, отсекавшейся хотя бы одним из удаленных неравенств, отдельное неравенство. Линейное неравенство, отсекающее не более $cn$ вершин, включая $\alpha$, согласно утверждению 4 § 2, п. 6 не может отсекать вершины на расстоянии, большем $2 \log(cn)$ от $\alpha$. Поэтому число выписанных неравенств не превышает

$$\sum_{i=0}^{[2 \log(cn)]} \binom{n}{i} \leqslant 2 \log(cn)\, n^{2 \log(cn)},$$

и эта величина является верхней оценкой для разности $|t(f_1) - t(f_2)|$ при $r(f_1, f_2) = 1$.

Почти все булевы функции имеют асимптотически $2^{n-1}$ единичных вершин, поэтому для них $t(f) \geqslant 2^{n-1}/c_0 n$. Разность же значений пороговых чисел в средней части ряда этих функций, выписанных в порядке неубывания пороговых чисел, не превышает

$$2n 2^{n/2} 2 \log(cn) n^{2\log(cn)} = o(2^{n-1}/c_0 n),$$

что и доказывает существование асимптотики.

В теории д. н. ф. Коршуновым [25], а несколько позже Андреевым [1] установлен порядок асимптотики длины кратчайшей д. н. ф. $l(f)$ для почти всех булевых функций $f$:

$$l(f) \asymp \frac{2^n}{\log n \log\log n}.$$

В пороговых представлениях пока удалось достигнуть меньшего.

Теорема 26 [13]. *Существует функция $t(n)$ такая, что при $n \to \infty$ для почти всех булевых функций $f$ от $n$ переменных $t(f) \sim t(n)$. Для асимптотики $t(n)$ справедливы оценки*

$$2^n/(c_1+1)n \leqslant t(n) \leqslant \log n\, 2^{n-1}/n,$$

*где $c_1 \approx 3{,}41$ — корень уравнения*

$$c\log(1+1/c) + \log(1+c) - c = 0.$$

Доказательство. Существование асимптотики $t(n)$ уже установлено предыдущим рассуждением, в котором также показано, что $t(n) \geqslant 2^{n-1}/c_0 n > 2^n/9{,}74n$. Мощностной метод Шеннона позволяет сразу вдвое увеличить эту нижнюю оценку. Так как почти все функции не имеют допустимых пороговых множеств мощности $(c_0+\varepsilon)n$, где $\varepsilon$ — сколь угодно малое положительное число, а число всех пороговых множеств мощности $(c_0+o(1))n$ равно

$$2^{n(c_0\log(1+1/c_0)+\log(1+c_0)+1+o(1))} = 2^{n(c_0+o(1))},$$

то $m$ неравенствами можно задать не более $2^{mn(c_0+o(1))}$ функций. Поэтому для задания почти всех $2^{2^n}$ булевых функций требуется асимптотически не менее $2^n/c_0 n > 2^n/4{,}87n$ линейных неравенств.

Для дальнейшего усиления нижней оценки воспользуемся модификацией мощностного метода, впервые предложенной Кузнецовым [30] для д. н. ф. Идея состоит в том, чтобы учесть, что для некоторого $c_1 < c_0$ число допустимых пороговых множеств мощности $cn$, $c_1 < c \leqslant c_0$, для почти всех функций мало. Поэтому при оценке числа функций, которые можно задать $m$ неравенствами, следует принять во внимание, что пороговых множеств такой мощности можно брать лишь небольшое, не зависящее от $m$ число. Пороговых же множеств мощности, не превышающей $c_1 n$, можно брать $m$, но этот выбор делается из числа $N_n(c_1 n) < N_n(c_0 n)$ пороговых множеств.

Пусть $c_1 \approx 3{,}41$ — корень уравнения

$$c\log(1+1/c) + \log(1+c) - c = 0.$$

Левая часть уравнения монотонно убывает при $c > 1$, поэтому для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ математическое ожидание числа допустимых пороговых множеств мощности, большей $(c_1+\varepsilon)n$, для случайной булевой функции равно

$$2^{n(c_1\log(1+1/c_1)+\log(1+c_1)-c_1+1-\delta_1(\varepsilon)+o(1))} = 2^{n(1-\delta_1(\varepsilon)+o(1))},$$

где $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда с помощью неравенства Чебышева получаем, что для почти всех булевых функций число допустимых пороговых множеств мощности, большей $(c_1+\varepsilon)n$, не превосходит $2^{n(1-\delta_2)}$ для любого $\delta_2<\delta_1$ и столько пороговых множеств берется из числа, заведомо не превышающего $2^{n^2}$. Пороговых же множеств мощности не более $(c_1+\varepsilon)n$ имеется

$$2^{n(c_1\log(1+1/c_1)+\log(1+c_1)+1+\delta_3(\varepsilon)+o(1))}=2^{n(1+c_1+\delta_3(\varepsilon)+o(1))},$$

где $\delta_3(\varepsilon)>0$, $\delta_3(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Поэтому $m$ неравенствами можно задать не более

$$2^{n^2 2^{n(1-\delta_2)}}\times 2^{mn(c_1+1+\delta_3+o(1))}$$

булевых функций. Отсюда, учитывая, что $n^2 2^{n(1-\delta_2)}=o(2^n)$, получаем, устремляя $\varepsilon$ к нулю, что для задания почти всех $2^{2^n}$ булевых функций требуется асимптотически не менее $2^n/(c_1+1)n$ неравенств.

Перейдем к доказательству верхней оценки теоремы, которое использует утверждение 5 § 2, п. 6 и результаты теории кодирования о покрытии вершин $n$-мерного куба единичными шарами Хемминга. Согласно утверждению 5, если у функции $f$ можно выделить $k$ ее единичных вершин так, чтобы все ее единичные вершины находились внутри шаров радиуса 1 с центрами в выделенных вершинах, то $t(f)\leqslant k$. Для простоты рассмотрим сначала случай, когда $n=2^r-1$ и существует совершенный код Хемминга (см. [78]), т. е. множество из $2^n/(n+1)$ вершин таких, что шары единичного радиуса с центрами в них не пересекаются и покрывают весь куб. Множество, получаемое из кода изменением значений $i$-х координат всех его вершин на противоположные, называется $i$-м смежным классом кода, $1\leqslant i\leqslant n$, а сам код считается нулевым классом. Любая вершина куба попадает, таким образом, в один из $n+1$ смежных классов, и если рассмотреть произвольную вершину $i$-го класса, то среди $n$ ее соседей будут представители всех классов, исключая $i$-й.

Выберем теперь из $n+1$ смежных классов произвольные $[\log n]$ классов, зафиксируем их, и для случайной булевой функции в качестве центров шаров будем брать ее единичные вершины, попавшие в выбранные классы. Математическое ожидание их числа равно $[\log n]\,2^{n-1}/(n+1)$, и по закону больших чисел асимптотически столько их почти всегда и будет. Каждая единичная вершина функции, не принадлежащая выбранным смежным классам, окружена $[\log n]$ вершинами из выбранных смежных классов, поэтому математическое ожидание числа единичных вершин, не покрытых шарами, равно

$$\frac{1}{2}\left(2^n-2^n[\log n]/(n+1)\right)2^{-[\log n]}\sim o\left([\log n]\,2^{n-1}/(n+1)\right),$$

и для каждой непокрытой вершины можно выписать отдельное неравенство, асимптотически не увеличив числа неравенств.

В общем случае, когда $n\neq 2^r-1$ и совершенного кода не существует, можно воспользоваться результатом Кабатянского и Панченко [21, 22], которыми было показано, что для любого $n\to\infty$ существует покрытие $n$-мерного куба, состоящее асимптотически из $2^n/n$ шаров. Теперь смежные классы не обладают столь правильной структурой и могут перекрываться, поэтому доказательство необходимых соотношений для математических ожиданий легче всего провести с помощью случайного выбора $[\log n]$ классов. Этим завершается доказательство теоремы.

**4. Представление монотонных функций.** Во многих задачах линейного булева программирования, как и в (32), коэффициенты $a_{ij}$ линейных неравенств неотрицательны. Поэтому задаваемая ими булева функция является монотонной. Этим объясняется повышенный интерес к пороговым представлениям монотонных функций. Переходя к их изучению, заметим, прежде всего, что произвольное максимально допустимое для монотонной функции пороговое множество всегда может быть задано неравенством с неотрицательными коэффициентами. В самом деле, если допустимое пороговое множество задано неравенством, в котором имеются отрицательные весовые коэффициенты, то заменив их нулями, получим также допустимое пороговое множество, содержащее исходное.

Изучение возможностей агрегирования неравенств в задачах, подобных (32), стимулировало получение оценок для значений пороговых чисел в классе монотонных функций. Из того, что число нижних единиц у монотонных функций не превышает $\binom{n}{[n/2]}$, и из утверждения 1 сразу следует, что в классе монотонных функций значения пороговых чисел не превосходят $\binom{n}{[n/2]}$. Более того, функции, имеющие $\binom{n}{[n/2]}$ нижних единиц, являются пороговыми, поэтому значения пороговых чисел не достигают этой величины. Далее, Хаммером, Ибараки и Пильдом [64] был построен пример монотонной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с пороговым числом $t(\varphi) \geqslant \binom{n}{[n/2]}\Big/n$. Позднее этот же пример был построен автором и Тришиным [8], не знакомыми в то время с работой [64]. Его конструкция состоит в следующем.

На среднем слое $n$-мерного куба берется множество вершин с минимальным расстоянием между вершинами, равным 4 (равновесный код), и принимается за множество нижних единиц функции $\varphi$. Нетрудно показать, что никакие две нижние единицы функции $\varphi$ не могут быть отсечены одним неравенством без отсечения нулевых вершин функции (аналог утверждения 3 § 2, п. 4 для слоя). Поэтому $t(\varphi)$ совпадает с мощностью кода. Существование же равновесного кода мощности $\binom{n}{[n/2]}\Big|n$ с минимальным расстоянием 4 легко показать с помощью следующего известного из теории кодирования рассуждения. Для любого $j$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, множество вершин среднего слоя, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \equiv j \pmod{n},$$

является таким кодом. В объединении эти $n$ кодов дают средний слой. Поэтому среди них существует код мощности $\binom{n}{[n/2]}\Big/n$.

Приведенные соображения позволили дать следующие оценки для максимального значения порогового числа в классе монотонных функций

$$\binom{n}{[n/2]}\Big/n \leqslant \max_{\varphi} t(\varphi) \leqslant \binom{n}{[n/2]} \quad [64]. \tag{33}$$

Позднее в [10, 13] автором было показано, что

$$\max_{\varphi} t(\varphi) \leqslant \chi_n/n, \tag{34}$$

где $\chi_n$ — максимальная мощность множества вершин $n$-мерного куба, которое может быть покрыто единичными шарами Хемминга с попарно несравнимыми центрами. Использование даже тривиальной нижней оценки $\chi_n \leqslant 2^n$ позволяло существенно снизить верхнюю оценку в (33). Автор рассчитывал на дальнейшее ее снижение с помощью более аккуратного оценивания $\chi_n$, не исключая при этом возможности $\chi_n = O\left(\binom{n}{[n/2]}\right)$, позволявшей сразу установить порядок асимптотики для $\max t(\varphi)$. Задача оценки $\chi_n$ в качестве самостоятельной комбинаторной проблемы неоднократно ставилась им в 1983—1985 г. на семинарах и конференциях в СССР и в качестве открытой проблемы сформулирована в [10]. Она также была темой его выступления на семинаре профессора Г. Буроша в университете г. Ростока в апреле 1985 г.

Гипотеза $\chi_n = O\left(\binom{n}{[n/2]}\right)$ вскоре была опровергнута Коспановым [26], сконструировавшим красивый пример, из которого следовало, что $\chi_n \gtrsim n^{-1/6}2^n$. Казалось, что эта оценка правильно отражает порядок роста величины $\chi_n$, однако в начале 1988 г. в СССР в форме предварительного препринта была получена работа Фюреди, Кана и Клейтмена [59], в которой было показано, что $\chi_n > 0{,}1 \cdot 2^n$. Этот удивительный результат, полученный с использованием техники, развитой ранее Косточкой [27], явился еще одной убедительной демонстрацией мощи вероятностных методов в комбинаторном анализе и стимулировал новые усилия. Вскоре Чухровым [41] нижняя оценка была доведена до $0{,}2 \cdot 2^n$, а Косточке [28, 29] удалось получить первую асимптотически отличную от $2^n$ верхнюю оценку $\chi_n < 0{,}9987 \cdot 2^n$ и доказать тем самым гипотезу Фюреди, Кана и Клейтмена о том, что $\chi_n$ асимптотически не совпадает с $2^n$.

Наряду с экстремальными значениями пороговых чисел изучались их типичные значения. Автором и Тришиным [9] было показано, что для пороговых чисел почти всех монотонных функций $\varphi$ справедлива оценка $t(\varphi) > 2^n/n^2$, а в совместной работе автора с Липкиным [11] она была существенно усилена. Используя открытое Коршуновым [24] строение почти всех монотонных функций и более тонкие методы исследования, в [11] было установлено, что для почти всех монотонных функций

$$t(\varphi) \asymp \binom{n}{[n/2]}\Big/ n. \tag{35}$$

Таким образом, оказалось, что построенный в [8, 64] пример является скорее правилом, чем исключением. Вопрос же о порядке максимального значения порогового числа в классе монотонных функций остается открытым. По-прежнему не доказана и не опровергнута гипотеза автора [10]:

$$\max_{\varphi} t(\varphi) \asymp \binom{n}{[n/2]}\Big/ n.$$

Перейдем к доказательству оценок (34) и (35). Они будут опираться на утверждение 7, уже использованный в § 4, п. 3 результат Кабатянского и Панченко о возможности покрытия куба $(1 + o(1))2^n/n$ единичными шарами, а также на следующую лемму, возникшую в результате обсуждения проблемы автором с Г. А. Кабатянским, которому и принадлежит ее точная формулировка. Впервые с соответствующей ссылкой она была опубликована в [13].

Лемма 3. *Пусть $Q \subseteq \{0, 1\}^n$ — произвольное подмножество вершин $n$-мерного куба, $H$ — множество покрывающих куб единичных шаров. Тогда существует покрытие куба единичными шарами такое, что в множестве $Q$ лежит не более $|H| \cdot |Q|/2^n$ центров шаров.*

Доказательство. Рассмотрим $2^n$ покрытий $\{H + \alpha\}$, получаемых из $H$ сдвигами $(\mathrm{mod}\, 2)$ на всевозможные векторы $\alpha \in \{0, 1\}^n$. Считая эти сдвиги случайными и равновероятными и вычисляя математическое ожидание числа центров, попадающих в $Q$, получаем, что оно равно $|Q| \cdot |H|/2^n$. Лемма доказана.

Докажем теперь оценку (34).

Теорема 27 [10, 13]. *Максимальное значение порогового числа в классе монотонных функций асимптотически не превосходит $\chi_n/n$, где $\chi_n$ — максимальная мощность объединения единичных шаров Хемминга с попарно несравнимыми центрами.*

Доказательство. Пусть $\varphi$ — произвольная монотонная функция, $H$ — множество покрывающих куб единичных шаров, $|H| = (1+o(1))2^n/2$. Возьмем в качестве множества $Q$ объединение единичных шаров с центрами в нижних единицах функции $\varphi$. По лемме 3 существует покрытие куба единичными шарами, имеющее в множестве $Q$ не более $|H| \cdot |Q|/2^n \leqslant \chi_n/n$ центров. Шары с этими центрами покрывают все нижние единицы $\varphi$, а согласно утверждению 7 для нижних единиц в каждом шаре достаточно одного линейного неравенства. Теорема доказана.

Перейдем теперь к доказательству оценки (36) для типичных значений пороговых чисел монотонных функций. Согласно Коршунову [24] почти все монотонные функции от $n$ переменных имеют нижние единицы лишь в трех средних слоях $m$, $m-1$ и $m+1$, где $m = n/2$ при $n$ четном и $m = [n/2]$ или $m = ]n/2[$ при $n$ нечетном. При этом в слое $m$ лежит асимптотически $\binom{n}{[n/2]}\Big/2$ нижних единиц, а суммарное число нижних единиц в слоях $m-1$ и $m+1$ не превышает $2^{n/2}$, т. е. составляет ничтожную часть от числа нижних в слое $m$.

При изучении типичного значения порогового числа в классе монотонных функций будет использована следующая вероятностная модель порождения множества почти всех монотонных функций, почерпнутая автором из обсуждений с А. А. Сапоженко. Она может быть обоснована с помощью теоремы 1 из работы [37].

Первоначально все вершины куба считаются нулевыми. Затем части вершин в трех средних слоях присваиваются единичные значения по следующему правилу. Сначала вершинам слоя $m$ независимо с вероятностью 1/2 присваивается значение 1. Затем в слое $m+1$ выбираются вершины, не покрывающие единичных вершин в слое $m$, и с вероятностью 1/2 им присваивается значение 1. И, наконец, в слое $m-1$ выбираются вершины, у которых все покрывающие их вершины в слое $m$ единичные, и с вероятностью 1/2 им присваивается значение 1. На этом процесс случайного порождения завершается и далее функция определяется по монотонности, т. е. во всех вершинах, больших вершин, которым были присвоены единичные значения, она полагается равной единице.

Вершины слоев $m+1$ и $m-1$, которым в процессе случайного порождения было присвоено значение 1, необходимо являются нижними единицами функции. Математическое ожидание числа нижних единиц в слое $m+1$ равно $\frac{1}{2}\binom{n}{m+1}2^{-m-1} = o(2^{n/2})$, поэтому их почти всегда меньше $2^{n/2}$. Это справедливо и для слоя $m-1$.

Данная вероятностная модель порождения почти всех монотонных функций позволяет методами, аналогичными использованным в § 4, п. 3, оценить асимптотику типичных значений пороговых чисел в классе монотонных функций. Роль, которая в доказательстве теоремы 26 принадлежала всему кубу, теперь переходит к его среднему слою. Поэтому наряду с пороговыми множествами здесь будут рассматриваться пороговые множества слоя, подразумевая под этим такие его подмножества, которые могут быть отсеченны от своих дополнений в слое гиперплоскостью.

Понятия центра, радиуса и диаметра, введенные в § 2, п.6 для пороговых множеств, переносятся на пороговые множества слоя с учетом того, что расстояние между вершинами множества теперь принимает лишь четные значения. Если $A$ — пороговое множество слоя, $\alpha$ — его центр, $\beta \in A$ и $r(\alpha, \beta) = 2k$, то все $\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}^2 = \binom{2k}{k}$ вершин слоя $\gamma$ таких, что $r(\alpha, \gamma) + r(\gamma, \beta) = 2k$, принадлежат $A$. Отсюда можно получить оценку на диаметр, аналогичную содержащейся в утверждении 3.

Оценим теперь сверху число пороговых множеств слоя $[n/2]$, мощность которых не превышает $cn$.

Лемма 4 [13]. *Число пороговых множеств среднего слоя $n$-мерного куба, имеющих мощность не более $cn$, при $n \to \infty$ не превосходит*

$$2^{2n(1+(c+1/2)\log(c+1/2)-c\log c+o(1))}.$$

Доказательство. Возьмем в качестве множества $T$ в теореме 9 слой $m$, где $m = [n/2]$, и оценим сверху число различных параметров Чоу у пороговых множеств слоя, мощность которых не превышает $cn$. Пусть $A$ — пороговое множество слоя, заданное как множество единиц неравенством $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b$. Упорядочим коэффициенты $a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_n}$. Положим $k = [2\sqrt{cn}]$ и разобьем множество координат на 3 группы: $I_{\text{нач}} = \{i_1, \ldots, i_{m-k}\}$, $I_{\text{ср}} = \{i_{m-k+1}, \ldots, i_{m+k}\}$, $I_{\text{кон}} = \{i_{m+k+1}, \ldots, i_n\}$. Число таких разбиений равно $\binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{2k} = 2^{n(1+o(1))}$. Заметим, что вершина слоя, имеющая единичными координаты $i_{n-m+1}, \ldots, i_n$, является центром $A$, и никакая вершина из $A$ не может иметь в $I_{\text{нач}}$ более одной единицы, так как в противном случае было бы $|A| > cn$. В самом деле, в $I_{\text{ср}} \cup I_{\text{кон}}$ у вершин слоя имеется более $k$ нулей, и замена любых двух из них на единицы с одновременной заменой двух фиксированных единиц в $I_{\text{нач}}$ на нули даст вершину из $A$, а таких замен $\binom{k}{2} > cn$. Для вектора Чоу $S(A) = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ имеем, следовательно, $\sum_{i \in I_{\text{нач}}} s_i \leqslant cn$, и число различных $I_{\text{нач}}$-фрагментов векторов Чоу не превосходит $\binom{[cn] + |I_{\text{нач}}|}{[cn]}$. Аналогично, в $I_{\text{кон}}$ не может быть более одного нуля, и число $I_{\text{кон}}$-фрагментов не превосходит $\binom{[cn] + |I_{\text{кон}}|}{[cn]}$. Число же $I_{\text{ср}}$-фрагментов не превосходит $(cn+1)^{2k}$. И, наконец, $s_0$ может принимать не более $cn+1$ значений. Таким образом, число различных векторов Чоу не превосходит

$$2^{n(1-o(1))}(cn+1)\binom{[cn] + |I_{\text{нач}}|}{[cn]}(cn+1)^{2k}\binom{[cn] + |I_{\text{кон}}|}{[cn]} =$$

$$= 2^{n(1+o(1))}\binom{[cn] + [n/2]}{[cn]}^2 = 2^{2n(1+(c+1/2)\log(c+1/2)-c\log c+o(1))}.$$

Лемма доказана. Ее роль для монотонных функций аналогична роли случая 2 теоремы 18 при изучении всех булевых функций.

Сформулируем теперь основной результат относительно типичных значений пороговых чисел монотонных функций.

Теорема 28 [13]. *Существует функция $\tau(n)$ такая, что при $n \to \infty$ для почти всех монотонных булевых функций $\varphi$ от $n$ переменных $t(\varphi) \sim \tau(n)$. Для асимптотики $\tau(n)$ справедливы оценки*

$$\frac{1}{c_2+1}\binom{n}{[n/2]}\Big/ n \leqslant \tau(n) \leqslant \frac{5}{2}\binom{n}{[n/2]}\Big/ n,$$

*где $c_2 \approx 4{,}76$ — корень уравнения*

$$1/2 + (c+1/2)\log(c+1/2) - c\log c - c/2 = 0.$$

Доказательство. Нижняя оценка теоремы получается методом, аналогичным использованному в доказательстве теоремы 26. При случайном порождении монотонных функций математическое ожидание числа допустимых пороговых множеств слоя мощности $cn$, как следует из леммы 4, не превышает

$$2^{2n(1+(c+1/2)\log(c+1/2)-c\log c-c/2+o(1))}.$$

Поэтому почти все функции не имеют в слое $m$ допустимых пороговых множеств мощности $cn$ при $c > c_3$, где $c_3 \approx 6{,}11$ — корень уравнения

$$1+(c+1/2)\log(c+1/2)-c\log c-c/2=0.$$

Для таких функций $t(\varphi) \geqslant \binom{n}{[n/2]} \Big/ 2c_3 n$, и две функции, имеющие одинаковые множества единиц в слое $m$ и отличающиеся лишь нижними единицами в слоях $m-1$ и $m+1$, число которых не превосходит $2^{n/2}$, имеют асимптотически одинаковые пороговые числа. Поэтому доказательство существования асимптотики легко можно получить с помощью вариационного принципа, закодировав монотонные функции вершинами $\binom{n}{[n/2]}$-мерного куба.

Далее, число допустимых пороговых множеств мощности $cn$ при $c > c_2$ почти всегда не превосходит

$$2^{2n(1+(c+1/2)\log(c+1/2)-c\log c-c/2+o(1))} < 2^{n(1-\delta)},$$

где $\delta > 0$, и столько пороговых множеств слоя выбирается из числа, заведомо не превышающего $2^{n^2}$. Учитывая, что число пороговых множеств слоя мощности не более $c_2 n$ не превосходит

$$2^{2n(1+(c_2+1/2)\log(c_2+1/2)-c_2\log c_2+o(1))} = 2^{n(c_2+1+o(1))},$$

получаем, что с помощью $m$ неравенств можно задать не более

$$2^{n^2 2^{n(1-\delta)}} \times 2^{mn(c_2+1+o(1))}$$

монотонных функций. Поэтому для задания почти всех $2^{\binom{n}{[n/2]}(1+o(1))}$ монотонных функций требуется асимптотически не менее $\binom{n}{[n/2]} \Big/ (c_2+1)\,n$ линейных неравенств.

Для доказательства верхней оценки теоремы возьмем покрытие куба $(1+o(1))2^n/n$ единичными шарами и воспользуемся леммой 3, взяв в качестве множества $Q$ объединение слоев $m-1$ и $m+1$ с нижними единицами в слое $m$. Тогда все нижние единицы слоя $m$ окажутся внутри $\frac{5}{2}(1+o(1))\binom{n}{[n/2]}\Big/n$ шаров, и верхняя оценка следует из утверждения 7.

## § 5. Открытые проблемы

Одной из целей настоящего обзора являлось освещение исторического пути развития пороговой логики и описание ее приложений, другая состояла в демонстрации связи пороговой логики с различными разделами математики. Вследствие общего прогресса дискретной математики в пороговой логике удалось продвинуться в решении ряда задач, в частности, получить новые результаты в старой проблеме оценки числа пороговых функций. При этом пороговая логика, по-прежнему, способна предоставить широкий спектр проблем специалистам по различным разделам комбинаторного анализа. Сформулируем некоторые из них, в той или иной мере уже затрагивавшихся в контексте настоящего обзора, отбирая при этом достаточно разнообразные задачи, способные заинтересовать возможно более широкий круг исследователей.

1. После того как найдена асимптотика логарифма числа пороговых функций, встает вопрос об асимптотике самого этого числа. Можно ли здесь рассчитывать на успех на нынешнем этапе развития дискретной математики? Повторится ли история монотонных функций, где после установления Клейтменом [73] асимптотики логарифма через сравнительно короткий промежуток времени Коршуновым [24] была найдена асимптотика самого числа монотонных функций. Не пытаясь угадать будущее, отметим все же, что задача нахождения асимптотики числа пороговых функций представляется достаточно трудной. Это не исключает, однако, различных усилений и уточнений теоремы 17.

2. Другая задача связана с числом пороговых множеств различной мощности. Рассматривая множество значений $N_n(M)$, $M = 0, 1, \ldots, 2^n$, как дискретное распределение, симметричное относительно $2^{n-1}$, можно заметить, что все оценки теоремы 18 относятся к «хвостам» этого распределения. Естественно тогда поставить вопрос об исследовании центральной его части, где сосредоточена основная масса пороговых множеств. Подобная постановка подсказывается известными предельными теоремами теории вероятностей. Что можно сказать об асимптотическом поведении этого распределения в центральной его части? Будет ли оно подобно числу выпадений герба при бросании правильной монеты описываться нормальным законом? Это интересный качественный вопрос, заслуживающий изучения.

3. В § 3, п. 3 отмечен огромный разрыв между нижними и верхними оценками для абсолютных величин весов $M(n)$ и $M_ц(n)$. Естественно попытаться сократить этот разрыв, оценив величины $M(n)$ и $M_ц(n)$ хотя бы с точностью до порядка асимптотики логарифма. Можно предполагать, что мощностные оценки являются более точными и $\log M(n) \asymp \asymp \log M_ц(n) \asymp n$, но какого-либо подхода к доказательству этого пока не видно.

4. В теореме 22 § 3, п. 4 доказано существование обширного класса пороговых функций с экспоненциальной сложностью д. н. ф. Представляется правдоподобным, что почти все пороговые функции имеют экспоненциальную сложность д. н. ф., однако это предстоит еще доказать.

5. В теореме 26 § 4, п.3 верхняя и нижняя оценки для асимптотики типичного значения порогового числа различаются в $\asymp \log n$ раз. Автор предполагает, что нижняя, мощностная оценка правильно отражает порядок асимптотики и $t(f) \asymp 2^n/n$, однако его попытки доказать этот факт, покрыв единичные вершины случайной булевой функции $\asymp 2^n/n$ шарами Хемминга радиуса 1 с центрами в единичных вершинах, успехом не увенчались. А. Д. Коршунов в 1986 г. сообщил, что для такого покрытия почти всегда требуется $\asymp \log n 2^n/n$ шаров, что и было анонсировано автором в [13]. Позднее, однако, А. Д. Коршунов отказался от сделанного заявления. Таким образом, вопрос о порядке числа единичных шаров в оптимальном покрытии для типичной булевой функции остается открытым. Данная задача, безусловно, представляет самостоятельный интерес и должна заинтересовать специалистов по вероятностным методам комбинаторного анализа. Затратив значительные усилия на поиски такого покрытия мощности $\asymp 2^n/n$ и потерпев неудачу, автор склонен считать, что это сделать невозможно. Если это будет доказано, то возможным путем к понижению верхней оценки в теореме 26 могло бы стать рассмотрение шаров радиуса 2 с центрами в единичных вершинах и использование утверждения 6 § 2, п. 6.

6. В § 4, п.4 уже была, фактически, сформулирована задача оценки максимального значения порогового числа в классе монотонных булевых функций, для которого в настоящее время существуют оценки

$$\binom{n}{[n/2]}\Big/n \leqslant \max_{\varphi} t(\varphi) \leqslant 2^n/n.$$

В пороговых представлениях эта задача, безусловно, является одной из ключевых.

7. В § 2, п.7 определен граф пороговых функций, впервые введенный автором в [16]. Он является примером некоторого естественно возникающего графа, и исследование его свойств может представить интерес для всех интересующихся теорией графов и многомерной геометрией. Граф пороговых функций устроен достаточно сложно, и для него трудно заранее прогнозировать возможность успешного продвижения в исследовании тех или иных свойств. Поэтому получение любых результатов представляет интерес. К настоящему времени здесь определен лишь диапазон изменения степеней вершин и найден диаметр графа. Возможными направлениями дальнейших исследований являются изучение связности, гамильтоновости и т. д.

8. В § 2, п. 2 рассматривались параметры Чоу булевых функций, которые являются удобным средством кодирования пороговых функций. Круг связанных с ними задач достаточно широк. Коснемся лишь одной из них, алгоритмической. Как следует из теоремы 9, по параметрам Чоу булевой функции можно, в принципе, определить, является ли она пороговой, а если является, то и однозначно ее идентифицировать. Возникает, однако, вопрос, касающийся вычислительной трудности этих процедур. Является ли задача распознавания пороговости по параметрам Чоу разрешимой за полиномиальное время или нет? Параметры Чоу интенсивно изучались в шестидесятые годы и эффективных процедур для решения этой задачи найдено не было. Установление ее NP-сложности положило бы конец дальнейшим попыткам найти подобную процедуру.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Андреев А. Е. Об одной модификации градиентного алгоритма // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.— 1985.— № 3.— С. 29—35.
2. Бутаков Е. А. Методы синтеза линейных устройств из пороговых элементов.— М.: Энергия, 1970.
3. Васильев Ю. Л., Глаголев В. В. Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1./Под ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова.— М.: Наука, 1974.— С. 99—148.
4. Вешторт А. М., Зуев Ю. А., Краснопрошин В. В. Двухуровневая схема распознавания с логическим корректором // Распознавание, классификация, прогноз: Математические методы и их применение. Вып. 2.— М.: Наука,— 1989.— С. 73—98.
5. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов.— М.: Наука, 1990.
6. Журавлев Ю. И. Алгоритмы построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1./Под ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова.— М.: Наука, 1974.— С. 67—98.
7. Журавлев Ю. И., Коган А. Ю. Реализация булевых функций с малым числом нулей дизъюнктивными нормальными формами и смежные задачи // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 285, № 4.— С. 795—799.
8. Зуев Ю. А., Тришин В. Н. Нижняя оценка числа неравенств, представляющих монотонную булеву функцию от $n$ переменных // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1983.— Т. 23, № 3.— С. 754—756.
9. Зуев Ю. А., Тришин В. Н. О связи линейных неравенств с монотонными булевыми функциями // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1984.— Т. 24, № 5.— С. 780—781.

10. Зуев Ю. А. О представлении булевых функций системами линейных неравенств // Кибернетика.— 1985.— № 5.— С. 7—9, 40.
11. Зуев Ю. А., Липкин Л. И. О числе линейно-отделимых булевых множеств заданной мощности // Методы дискретного анализа в теории графов и логических функций. Вып. 43.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.— С. 29—39.
12. Зуев Ю. А., Липкин Л. И. Линейные отсечения заданной мощности в единичном гиперкубе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1988.— № 3.— С. 79—85.
13. Зуев Ю. А., Липкин Л. И. К оценке эффективности пороговых представлений булевых функций // Кибернетика.— 1988.— № 6.— С. 29—37.
14. Зуев Ю. А., Липкин Л. И. Регулярные булевы функции с заданной сложностью дизъюнктивных нормальных форм // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. Вып. 48.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.— С. 17—22.
15. Зуев Ю. А. Асимптотика логарифма числа пороговых функций алгебры логики // Докл. АН СССР.— 1989.— Т. 306, № 3— С. 528—530.
16. Зуев Ю. А. Комбинаторно-вероятностные и геометрические методы в пороговой логике // Дискретная математика.— 1991.— Т. 3, вып. 2.— С. 47—57.
17. Зуев Ю. А. О статистических свойствах принятия решения большинством голосов в задачах классификации // Докл. АН СССР.— 1986.— Т. 288, № 2.— С. 320—322.
18. Зуев Ю. А. Вероятностная модель комитета классификаторов // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1986.— Т. 26, № 2.— С. 276—292.
19. Зуев Ю. А. Наихудший случай для принятия решения большинством голосов // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1989.— Т. 29, № 8.— С. 1256—1257.
20. Зуев Ю. А., Иванов С. К. Повышение эффективности комплексной обработки информации в динамических системах с использованием принципов распознавания // Вопросы кибернетики. Проблемы комплексирования кибернетических динамических систем/Под ред. Е. А. Федосова.— М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1992.— С. 86—106.
20а. Зуев Ю. А., Иванов С. К. «Ускоренный» перцептрон и самообучение процедуры взвешенного голосования // Докл. РАН.— 1993.— Т. 328, № 2.— С. 160—163.
21. Кабатянский Г. А., Панченко В. И. Упаковки и покрытия хэммингова пространства единичными шарами // Докл. АН СССР.— 1988.— Т. 303, № 3.— С. 550—552.
22. Кабатянский Г. А., Панченко В. И. Упаковки и покрытия пространства Хэмминга шарами единичного радиуса // Проблемы передачи информации.— 1988.— Т. 24, вып. 3.— С. 3—16.
23. Коробков В. К. О некоторых целочисленных задачах линейного программирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14.— М.: Наука, 1965.— С. 297—299.
24. Коршунов А. Д. О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 38.— М.: Наука, 1981.— С. 5—108.
25. Коршунов А. Д. О сложности кратчайших дизъюнктивных нормальных форм случайных булевых функций // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. Вып. 40.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983.— С. 25—53.
26. Коспанов Э. Ш. О покрытии шарами единичного радиуса, центры которых несравнимы // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. Вып. 44.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.— С. 54—57.
27. Косточка А. В. О максимальной мощности границы фильтра в $n$-мерном кубе // Методы дискретного анализа в изучении реализаций логических функций. Вып. 41.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984.— С. 49—61.
28. Косточка А. В. О максимальной границе шперперова семейства // Докл. АН СССР.— 1990.— Т. 310, № 3.— С. 536—538.
29. Косточка А. В. Верхняя оценка мощности границы антицепи в $n$-мерном кубе // Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 3.— С. 53—61.
30. Кузнецов С. Е. О нижней границе длины кратчайшей д. н. ф. почти всех булевых функций // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 19.— Казань: Казанский гос. университет, 1983.— С. 44—47.
31. Лаплас П. Опыт философии теории вероятностей: Пер. с фр.— М., 1908.
32. Липкин Л. И. К оценке вычислительной сложности комбинаторно-логических алгоритмов распознавания // Тез. докл. 5-й Московской городской конференции молодых ученых и специалистов по проблемам кибернетики и вычислительной техники — М.: 1986.— С. 31.
33. Липкин Л. И. О представлении булевых функций с заданным числом нулей системами линейных неравенств // Журн. вычисл. матем. и матем. физики.— 1987.— Т. 27, № 6.— С. 949—951.
34. Лупанов О. Б. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 26.— М.: Наука, 1973.— С. 109—140.

35. Нечипорук Э. И. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 11.— М.: Наука, 1964.— С. 49—62.
36. Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций.— М.: Наука, 1991.
37. Сапоженко А. А. О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах // Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 2.— С. 110—128.
38. Тышкевич Р. И., Черняк А. А. Пороговые разложения булевых функций и графов // Комбинаторно-алгебраические и вероятностные методы дискретного анализа.— Горький: Горьковский гос. университет, 1989.— С. 111—129.
39. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1.— М.: Мир, 1984.
40. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Докл. АН СССР.— 1979.— Т. 244, № 5.— С. 1093—1096.
41. Чухров И. П. О максимальной мощности тени антицепи // Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 4.— С. 78—85.
42. Balas E., Jeroslow R. G. Canonical cuts on the unit hypercube.— SIAM J. Appl. Math.— 1972.— V. 23, № 1.— P. 61—69.
43. Birkhoff G. Lattice Theory. 3rd Edition.— Providence: Amer. Math. Society, 1967. [Рус. пер.: Биркгоф Г. Теория решеток.— М.: Наука, 1984.]
44. Bloch M., Moravek Ja. Bounds of the number of threshold functions // Information Processing Machines.— 1967.— № 13.— P. 67—73. [Рус. пер.: Блох М., Моравек Я. Оценка числа пороговых функций // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 6.— М.: Мир, 1969.— С. 82—88.]
45. Buck R. C. Partition of Space // Amer. Math. Monthly.— 1943.— V. 50, № 9.— P. 541—544.
46. Cameron S. H. An estimate of the complexity requisite in a universal decision network // Tech. Rept. 60—600. Proceedings of the Bionics Symposium. Wright Air Development Division, Dayton, Ohio, December 1960.— P. 197—212.
47. Chow C. K. On the characterization of threshold functions // Minimization of Boolean Fuctions and Logic Design. Switching Circuit Theory and Logical Design/ AIEE Special Publication S — 134, Sept. 1961.— P. 34—38.
48. Chow C. K. Statistical independence and threshold functions // IEEE Trans. on Electronic Comput.— 1965.— V. EC-14, № 1.— P. 66—68.
49. Chvátal V., Hammer P. L. Aggregation of inequalities in integer programming // Annals of Discrete Mathematics — 1977.— № 1.— P. 145—162.
50. Cook S. A. The complexity of theorem-proving procedure // Proc. 3rd Annual ACM Symposium on the Theory of Computing.— N. Y.: Association for Computing Machinery, 1971.— P. 151—158. [Рус. пер.: Кук С. А. Сложность процедур вывода теорем // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 12.— М.: Мир, 1975.— С. 5—15.]
51. Cover T. M. Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition // IEEE Trans on Electronic Comp.— 1965. V. EC — 14, № 3.— P. 326—334.
52. Cover T. M., Efron B. Geometrical probability and random points on a hypersphere // The Annals of Mathematical Statistics.— 1967.— V. 38, № 1.— P. 213—220.
53. Crama Y. Dualization of regular boolean functions // Discrete Applied Mathematics.— 1987.— № 16.— P. 79—85.
54. Danzer L., Grünbaum B., Klee V. Helly's theorem and its relatives.— Providence: Amer. Math. Society, 1963. [Рус. пер.: Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения.— М.: Мир, 1968.]
55. Dertouzos M. L. Threshold logic: A synthesis approach.— Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1965. [Рус. пер.: Дертоузос М. Пороговая логика.— М.: Мир. 1967.]
56. Duda R. O., Hart P. E. Pattern classification and scene analysis.— N. Y.: Wiley, 1973. [Рус. пер.: Дуда Р., Харт П. Распознавание образцов и анализ сцен.— М.: Мир. 1976.]
57. Elgot C. C. Truth functions realizable by single treshold organs // Minimization of Boolean Functions and Threshold Logic Design. Switching circuit theory and logical design/AIEE Special Publication S — 134, Sept. 1961.— P. 225—245.
58. Erdös P. Graph theory and probability, II // Canad. J. Math.— 1961.— V. 13.— P. 346—352.
59. Füredi Z., Kahn J., Kleitman D. J. Sphere coverings of the hypercube with incomparable centers // Discrete Mathematics.— 1990.— V. 83, № 1.— P. 129—134.
60. Gabelman I. J. The functional behavior of majority (threshold) elements.— Ph. D. Dissertation. Dep. of Elec. Eng., Syracuse University, N. Y.— June 1961.
61. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness.— San Francisco: Freeman, 1979. [Рус. пер.: Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М.: Мир, 1982.]

62. Golumbic M. C. Algorithmic graph theory and perfect graphs.— N. Y.: Academic Press, 1980.
63. Grünbaum B. Arrangements of hyperplanes // Proc. Second Louisiana Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing (R. C. Mullin et. al., eds.).— 1971.— P. 41—74.
64. Hammer P. L., Ibaraki T., Peled U. N. Threshold numbers and threshold completions // Annals of Discrete Mathematics.— 1981.— № 11.— P. 125—145.
65. Hammer P. L., Ibaraki T., Simeone B. Threshold sequences // SIAM J. Algebraic Discrete Methods.— 1981.— V. 2, № 1.— P. 39—49.
66. Harding E. F. The number of partitions of a set of $N$ points in $K$ dimensions induced by hyperplanes // Proc. Edinburgh Math. Society.— 1967.— V. 15 (Series II), № 4.— P. 285—289.
67. Henderson P. B., Zalcstein Y. A graph-theoretic characterization of the $PV$ chunk class of synchronizing primitives // SIAM J. Comput.— 1977.— V. 6.— P. 88—108.
68. Hu S.-T. Threshold logic.— Berkeley: University of California Press, 1965.
69. Jeroslow R. G. On defining sets of vertices of hypercube by linear inequalities // Discrete Mathematics.— 1975.— V. 11, № 2.— P. 119—124.
70. Kanter I., Sompolinsky H. Associative recall of memory without errors // Physical Review A.— 1987.— V. 35, № 1.— P. 380—392.
71. Karp R. M. Reducibility among combinatorial problems // Miller R. E., Thatcher J. W. (eds.) Complexity of Computer Computations.— N. Y.: Plenum Press, 1972.— P. 85—103. [Рус. пер.: Карп Р. М. Сводимость комбинаторных проблем // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 12.— М.: Мир, 1975.— С. 16—38.]
72. Kirchberger P. Über Tschebyschefsche Annäherugsmethoden // Math. Ann.— 1903.— V. 57.— S. 509—540.
73. Kleitman D. On Dedekind's problem: the number of monotone Boolean functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— V. 21, № 3.— P. 677—682. [Рус. пер.: Клейтмен Д. О проблеме Дедекинда: число монотонных булевых функций // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 7.— М.: Мир, 1970.— С. 43—52.]
74. Komlós J. On the determination of (0, 1) matrices // Studia Sci. Math. Hungar.— 1967.— V. 2.— P. 7—21.
75. Komlós J., manuscipt (1977). In Bollobás B. Random Graphs.— New York and London: Academic Press, 1985.— P. 347—350.
76. Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G. Generating all maximal independent sets: NP-hardness and polynomial-time algorithms // SIAM J. Comput.— 1980.— V. 9, № 3.— P. 558—565.
77. Lowenschuss O. Restoring organs in redundant automata // Information and control.— 1959.— V. 2, № 2.— P. 113—136. [Рус. пер.: Лоуэншусс О. Восстанавливающие органы в избыточных автоматах // Кибернетический сборник, Вып. 2.— М.: ИЛ, 1961.— С. 206—228.]
78. MacWilliams F. J., Sloane N. J. A. The theory of error-correcting codes.— Amsterdam: North-Holland publishing company, 1977. [Рус. пер.: Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки.— М.: Связь, 1979.]
79. Massey J. L. Threshold Decoding.— Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1963. [Рус. пер.: Месси Дж. Пороговое декодирование.— М.: Мир, 1966.]
80. Mays C. H. The Boundary Matrix of Threshold Functions // IEEE Trans. on Electronic Comput.— 1965.— V. EC-14, № 1.— P. 65—66.
81. McCulloch W. S., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bulletin of Math. Biophysics.— 1943.— V. 5.— P. 115—133. [Рус. пер.: Маккаллок У. С., Питтс У. Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности // Автоматы.— М.: ИЛ, 1956.— С. 362—384.]
82. Minsky M., Papert S. Perceptrons.— Massachusetts: The MIT Press, 1969. [Рус. пер.: Минский М., Пейперт С. Персептроны.— М.: Мир, 1971.]
83. Moore E. F., Shannon C. E. Reliable circuits using less reliable relays // J. Franklin Inst.— 1956.— V. 262. № 3.— P. 191—208; № 4.— P. 281—297. [Рус. пер.: Мур Э. Ф., Шеннон К. Е. Надежные схемы из ненадежных реле // Кибернетический сборник. Вып. 1.— М.: ИЛ, 1960.— С. 109—148.]
84. Muroga M., Toda I., Takasu S. Theory of majority decision elements // J. Franklin Inst.— 1961.— V. 271, № 5.— P. 376—418.
85. Muroga S., Tsuboi T., Baugh C. H. Enumeration of threshold functions of eight variables // IEEE Trans. on Comp.— 1970.— V. C-19, № 9.— P. 818—825.
86. Muroga S. Threshold logic and its applications.— N. Y.: Wiley, 1971.
87. Nilsson N. J. Learning machines.— N. Y.: McGraw-Hill, 1965. [Рус. пер.: Нильсон Н. Обучающиеся машины.— М.: Мир, 1967.]
88. Odlyzko A. M., Richmond L. B. On the unimodality of some partition polinomials // Europ. J. Combinatorics.— 1982.— V. 3.— P. 69—84.
89. Odlyzko A. M. On subspaces spanned by random selections of $\pm 1$ vectors // J. Combin. Theory, A.— 1988.— V. 47, № 1.— P. 124—133.

90. Ordman E. T. Minimal threshold separators and memory requirements for synchronization // SIAM J. Comput.— 1989.— V. 18, № 1.— P. 152—165.
91. Parallel distributed processing: exploration in the microstructure of cognition/Eds. D. E. Rumelhart and J. L. McClelland.— Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1986.
92. Peled U. N., Simeone B. Polynomial-time algorithms for regular set-covering and threshold synthesis // Discrete Applied Mathematics.— 1985.— № 12.— P. 57—69.
93. Perkins D. T., Willis D. G., Whitmore E. A. Division of space by concurrent hyperplanes // Internal Rept./Lockheed Aircraft Corp. Missiles and Space Division. Sunnyvale, Calif., 1959.
94. Pierce W. H. Failure-Tolerant computer dezign.— New York and London: Academic Press, 1965. [Рус. пер.: Пирс У. Построение надежных вычислительных машин.— М.: Мир, 1968.]
95. Poljak S. A note on stable sets colorings of graphs // Comm. Math. Univ. Carolinae.— 1974.— V. 15.— P. 307—309.
96. Polya G. Mathematics and plausible reasoning. V. 1. Induction and analogy in mathematics.— Princeton: Princeton University Press, 1954. [Рус. пер.: Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Т. 1. Индукция и аналогия в математике.— М.: ИЛ, 1957.]
97. Proceedings of the IEEE.— 1990.— V. 78, № 9, № 10.
98. Proctor R. A. Solution of two combinatorial problems with linear algebra // Amer. Math. Monthly.— 1982.— V. 89.— P. 721—734.
99. Rademacher H., Schoenberg I. J. Helly's theorem on convex domains and Tchebycheff's approximation problem // Canad. J. Math.— 1950.— V. 2.— P. 245—256.
100. Redundancy techniques for computing systems (R. H. Wilcox and W. C. Mann, eds.) — Washington, D. C.: Spartan Books, 1962. [Рус. пер.: Методы введения избыточности для вычислительных систем/Пер. с англ. под ред. В. С. Пугачева.— М.: Сов. радио, 1966.]
101. Reed I. S. A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme // Trans. IRE.— 1954.— PGIT—4.— P. 38—49. [Рус. пер.: Рид И. С. Класс кодов с исправлением нескольких ошибок и схема декодирования // Кибернетический сборник. Вып. 1.— М.: ИЛ, 1960.— С. 189—205.]
102. Reiterman J., Rödl V., Šinajova E., Tuma M. Threshold hypergraphs // Discrete Mathematics.— 1985.— V. 54.— P. 193—200.
103. Rosenblatt F. Principles of neurodynamics: perceptron and the theory of brain mechanisms.— Washington: Spartan Books, 1962. [Рус. пер.: Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики (персептрон и теория механизмов мозга).— М.: Мир, 1965.]
104. Rota G.-C. On the foundations of combinatorial theory I. The Möbius functions // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1964.— Bd. 2, № 4.— S. 340—368.
105. Schläfli L. Gesammelte mathematisce Abhandlugen. Band 1.— Basel: Verlag Birkhäuzer, 1950.
106. Schrijver A. Theory of linear and integer programming.— Chichester: Wiley, 1986. [Рус. пер.: Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования.— М.: Мир, 1991.]
107. Stanley R. P. Weyl Groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property // SIAM J. Algebraic Discrete Methods.— 1980.— V. 1.— P. 168—184.
108. Steiner J. Einige Gezetze uber die Theilung der Ebene und des Raumes // J. reine angew. Math.— 1826.— № 1.— S. 349—364.
109. Von N'eumann J. Probabilistic logic and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata Studies (C. E. Shannon and J. McCarthy, eds.).— Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1956. [Рус. пер.: Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы.— М.: ИЛ, 1956.— С. 68—139.]
110. Wendel J. G. A problem in geometric probability // Mathematica Scandinavica.— 1962.— V. 11.— P. 109—111.
111. Wasserman P. D. Neural computation. Theory and practice.— N. Y.: Van Nostrand Reinhold, 1989. [Рус. пер.: Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника. Теория и практика.— М.: Мир, 1992.]
112. Widrow B., Stearns S. D. Adaptive signal processing.— Englewood-Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1985. [Рус. пер.: Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов.— М.: Радио и связь, 1989.]
113. Widrow B., Lehr M. A. 30 Years of adaptive neural networks: perceptron, madaline, and backpropagation // Proceedings of the IEEE.— 1990.— V. 78, № 9.— P. 1415—1442.
114. Willis D. G. Minimum weights for threshold switches // Switching Theory in Space Technology.— Stanford University Press, 1963.— C. 91—108.

115. Winder R. O. Single stage threshold logic // Minimization of Boolean Functions and Logic Design. Switching Circuit Theory and Logical Design/AIEE Special Publication S—134, Sept. 1961.— P. 321—332.
116. Winder R. O. Threshold logic. Ph. D. Dissertation, Dept. Math., Princeton University, 1962. Published by University Microfilms, Xerox Co. (Ann Arbor, MI, 1973).
117. Winder R. O. Enumeration of seven-argument threshold functions // IEEE Trans. on Electronic Comput.— 1965.— V. EC-14, № 3.— P. 315—325.
118. Winder R. O. Partitions of N-space by hyperplanes // SIAM J. Appl. Math.— 1966.— V. 14, № 4.— P. 811—818.
119. Winder R. O. The status of threshold logic // RCA Review. — 1969.— V. 30, № 1.— P. 62—84.
120. Winder R. O. Threshold gate approximations based on Chow parameters // IEEE Trans. on Comput.— 1969.— V. C-18, № 4.— P. 372—375.
121. Winder R. O. Threshold logic asimptotes // IEEE Trans. on Comput.— 1970.— V. C-19, № 4.— P. 349—353.
122. Winder R. O. Chow parameters in threshold logic // J. of Association for Computing Machinery.— 1971.— V. 18, № 2.— P. 265—289.
123. Winograd S., Cowan J. D. Reliable computation in the presence of noise.— Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1963. [Рус. пер.: Виноград С., Коуэн Дж. Д. Надежные вычисления при наличии шумов.— М.: Наука, 1968.]
124. Yajima S., Ibaraki T. A lower bound of the number of threshold functions // IEEE Trans. on Electronic Comput.— 1965.— V. EC-14, № 6.— P. 926—929. [Рус. пер.: Яджима С., Ибараки Т. Нижняя оценка числа пороговых функций // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 6.— М.: Мир, 1969.— С. 72—81.]
125. Zaslavsky T. Facing up to arrangement: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes // Memoirs of the Amer. Math. Society.— 1975. — V. 1, № 154.— P. 1—102.

Поступило в редакцию 15 XII 1990

## ДОБАВЛЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Недавно А. А. Ирматовым (Ирматов А. А. О числе пороговых функций // Дискретная математика.— 1993.— Т. 5, вып. 3.— С. 40—43) был предложен другой подход к получению асимптотики (7), также основанный на результате Одлыжко [89], но использующий анализ в пространстве $(y_1, \ldots, y_n)$, а не в пространстве весов, что сближает его с методом Нечипорука [35]. Если $p$-мерное подпространство, порожденное матрицей $A \in \mathfrak{A}_n$, содержит $2p$ $(\pm 1)$-векторов — образующих и им противоположных — и не содержит других $(\pm 1)$-векторов, то его можно расширить до $(n-1)$-мерного подпространства, также не содержащего новых $(\pm 1)$-векторов. Пусть $a_1y_1 + \ldots + a_ny_n = 0$ — такое подпространство в пространстве $(y_1, \ldots, y_n)$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon$ в полосе $-\varepsilon < a_1y_1 + \ldots + a_ny_n < \varepsilon$ лежат только данные $2p$ вершин гиперкуба $\{-1, 1\}^n$. Это замечание сразу позволяет получить асимптотически $2^{pn}/p!2^n$ различных самодвойственных функций от $n+1$ переменных вида

$$f(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) = \operatorname{sgn}(a_1y_1 + \ldots + a_ny_n + \varepsilon y_{n+1}).$$