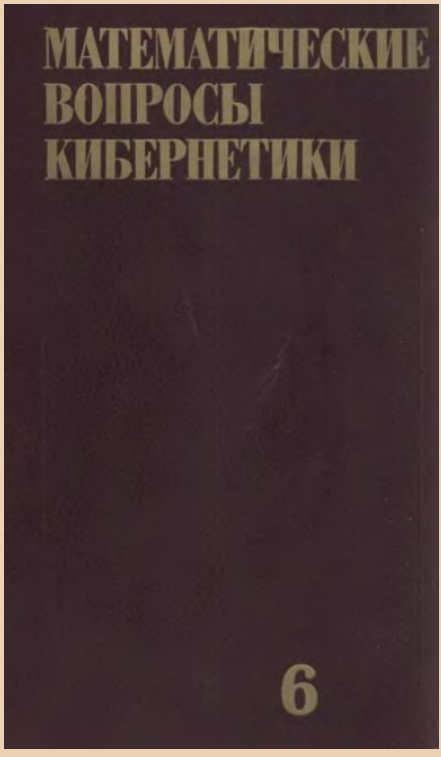
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 6



В. Н. Козлов

Математическое моделирование зрительного восприятия

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Козлов В. Н. Математическое моделирование зрительного восприятия // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука, 1996. — С. 321–338. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1996-321

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗРИТЕЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ

В. Н. КОЗЛОВ

(МОСКВА)

Внешний мир зрительно воспринимается через посредство проекций на сетчатки глаз. Изображение на сетчатке непрерывно смещается, поворачивается, изменяется в размерах, сжимается, растягивается за счет движений объекта перед глазом и самого глаза, постоянных микроизменений позы и из-за тремора. Аналогичные моменты присутствуют и в проблемах, связанных с машинным зрением и робототехникой. В целом это приводит к задаче такого описания изображения, которое было бы инвариантно к аффинным преобразованиям его на плоскости. Такое описание представлено в § 1.

В работах [2, 3] предполагалось, что основу для распознавания и организации целенаправленного поведения составляет существование своего рода «внутренней» модели внешнего мира. Это приводит к задаче описания совокупности тел и одного тела. В § 2 представлено описание тела, инвариантное к аффинным преобразованиям его в пространстве.

«Внутренняя» модель среды может возникать только через посредство проекций среды на сетчатку глаз. Отсюда появляется задача восстановления трехмерного изображения по его плоским проекциям. Главной здесь является проблема установления соответствия между точками изображений на разных проекциях [4, 5]. В § 3 описан механизм восстановления тела по проекциям, в рамках которого решается и проблема поточечного соответствия между проекциями.

§ 1. О кодировании и распознавании плоских изображений

Назовем *двумерным изображением* конечное множество точек на плоскости. Перенумеруем некоторым образом точки изображения A так, чтобы номера были попарно различны; обозначим M_A множество этих номеров. Пусть S_{mnu} и S_{ksp} — площади треугольников с вершинами в тройках точек с номерами m, n, u и k, s, p, и пусть $\rho_{mnu,ksp} = S_{mnu}/S_{ksp}$. Полагаем, что порядок номеров в тройках неважен, сами тройки различны и при $S_{ksp} = 0$ значение $\rho_{mnu,ksp}$ не определено. Множество индексированных чисел $\rho_{mnu,ksp}$ для всех таких пар троек обозначим T_A. *Код изображения* A — пара $\langle M_A, T_A\rangle$. Изображения, все точки которых расположены на одной прямой, не рассматриваем, так как код для них не определен. Изображения A и B с кодами $\langle M_A, T_A\rangle$ и $\langle M_B, T_B\rangle$ назовем *эквивалентными*, если существует такая биекция ψ: $M_A \to M_B$, что $\rho_{mnu,ksp} = \rho_{\psi(m)\psi(n)\psi(u),\psi(k)\psi(s)\psi(p)}$ для любых m, n, u, k, s, p из M_A; содержательно эквивалентность изображений означает одинаковость их кодов с точностью до перенумерации точек. Назовем два изображения *аффинно эк-*

© В. Н. Козлов, 1996

вивалентными (*а-эквивалентными*), если они переводимы друг в друга аффинными преобразованиями.

Лемма 1. *Если два изображения а-эквивалентны, то они эквивалентны.*

Доказательство. В сущности нужно показать, что при аффинных преобразованиях численные значения элементов из множества T кода изображения не меняются. Каждый элемент в T определяется отношением площадей некоторых треугольников. При преобразованиях сдвига, поворота и симметрии эти площади не меняются, а значит, не меняется и их отношение. Пусть теперь происходит сжатие (или растяжение) изображения по осям x и y с коэффициентами k_x и k_y. Известно [1], что в этом случае площадь S' фигуры (или любой ее части) будет после преобразования равна Sk_xk_y (здесь S — площадь фигуры до преобразования). Отсюда следует, что если $\rho'_{muv,lpq}$ — соответствующий $\rho_{muv,lpq}$ элемент множества T после преобразования, то $\rho'_{muv,lpq} = S'_{muv}/S'_{lpq} = S_{muv}k_xk_y/S_{lpq}k_xk_y = S_{muv}/S_{lpq} = \rho_{muv,lpq}$. Лемма доказана.

Пусть изображение B состоит из точек, являющихся подмножеством точек изображения A с кодом $\langle M_A, T_A\rangle$. Обозначим через M_B множество номеров тех и только тех точек из A, которые входят в изображение B. Соответственно через T_B обозначим множество всех тех элементов $\rho_{muv,lpq}$ из T_A, для которых $(m, u, v, l, p, q) \subseteq M_B$. Изображение B с кодом $\langle M_B, T_B\rangle$ назовем *частью изображения* A. Любое изображение B', эквивалентное изображению B, назовем *подызображением изображения* A.

Будем называть изображение из четырех точек *четырехточечником*. Пусть в четырехточечнике A из точек a, b, c, d точки a, b, c расположены на одной прямой. Тогда $S_{abc} = 0$ и те элементы из T_A, для которых в соответствующем отношении S_{abc} входит в знаменатель, не определены, а те, для которых S_{abc} входит в числитель (при не равном нулю знаменателе), равны нулю. Очевидно, можно утверждать и обратное: если код $\langle M_A, T_A\rangle$ обладает указанными свойствами, то в четырехточечнике A точки a, b, c расположены на одной прямой. В изображении A общего вида точки a, b, c, входящие в изображение, расположены на одной прямой в том и только том случае, если для любой части изображения A, являющейся четырехточечником и включающей точки a, b, c, выполняется указанное свойство, определяющее расположенность точек a, b, c на одной прямой. В изображении A точки $a_1, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 3$) расположены на одной прямой в том и только том случае, когда любые три из них расположены на одной прямой.

Далее будем основываться на (стандартной) процедуре построения по коду четырехточечника четвертой точки при известных положениях остальных трех. Обозначим точки с известным положением через a, b, c. Полагаем, что точки эти разные, не лежат на одной прямой, в остальном же их положение можно задавать произвольным. Точку, положение которой определяется, обозначим x. Поскольку площадь треугольника abc известна, то, используя $\rho_{abx,abc}$, $\rho_{acx,abc}$, $\rho_{bcx,abc}$, находим площади S_{abx}, S_{acx}, S_{bcx}. Для треугольника abc длины его сторон известны, поэтому можно определить длины высот h_{ab}, h_{ac}, h_{bc}, опущенных из точки на стороны соответственно ab, ac и bc. (Одна из этих высот может оказаться нулевой по длине, две быть нулевыми, очевидно, не могут.) Итак, задача сводится к тому, чтобы по заданному треугольнику abc построить такую точку x, что высоты из этой точки на стороны ab, ac и bc треугольника есть соответственно h_{ab}, h_{ac} и h_{bc}. Проводим две прямые, параллельные стороне ab, по разные ее стороны и отстоящие от нее на величину h_{ab}, и две прямые, параллельные стороне ac, по разные ее стороны и отстоящие от нее на величину h_{ac}. Возникает параллелограмм, вершины которого на рис. 1 обозначены Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. По построению точка x может располагаться только на вершинах этого параллелограмма. Для окончательного определения положения точки x нужно провести две

прямые, параллельные оставшейся стороне треугольника abc (стороне bc на рис. 1) и отстоящие от нее на величину h_{bc}. Пересечение этих прямых с вершинами параллелограмма даст возможные положения точки x. Хотя бы одно такое пересечение, очевидно, существует. Вопрос в том, однозначно ли будет восстановлено положение точки.

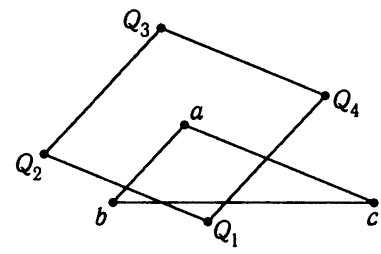


Рис. 1

Изображение назовем *плоским*, если все его точки не лежат на одной или двух параллельных прямых.

Лемма 2. *Если по коду плоского изображения выбраны какие-либо три его точки, не лежащие на одной прямой, и задано произвольное (но не на одной прямой) положение этих точек на плоскости, то положение остальных точек определяется по коду однозначно.*

Доказательство. Пусть задано положение точек a, b, c и существует отличная от них точка x плоского изображения A, для которой возможны два разных положения, x' и x''. Используя стандартную процедуру и обозначения рис. 1, строим параллелограмм, вершинами которого являются возможные положения точки x.

1. Предположим, что x' и x'' совпадают с точками Q_1 и Q_2, которые поэтому должны быть равноудалены от стороны bc. Следовательно, отрезок bc должен делить отрезок Q_1Q_2 пополам, т. е. точка b должна лежать на отрезке Q_1Q_2. В этом случае a, b, c, x (безотносительно к тому, совпадает x с x' или x'') расположены на двух параллельных отрезках: отрезке ac и отрезке Q_1Q_2. Так как A — плоское изображение, то должна существовать точка — обозначим ее через d — вне этих отрезков и их продолжений. Но тогда точки x' и x'' не равноудалены по крайней мере от одного из отрезков da и dc; пришли к противоречию.

2. Аналогично приходим к противоречию в предположении, что x' и x'' совпадают с Q_1 и Q_4.

Если x' и x'' совпадают с Q_1 и Q_3, то отрезок Q_1Q_3 должен делиться стороной bc пополам. Однако серединой диагонали Q_1Q_3 параллелограмма является по построению точка a.

Если x' и x'' совпадают с Q_2 и Q_3, то отрезок Q_2Q_3 должен быть либо параллелен отрезку bc, либо делиться этим отрезком или его продолжением пополам. И то, и другое невозможно по построению. Аналогичная ситуация имеет место и при совпадении x' и x'' с Q_3 и Q_4.

3. Пусть, наконец, x' и x'' совпадают с Q_2 и Q_4. Тогда диагональ Q_2Q_4 должна быть параллельной стороне bc. Далее рассуждения повторяют начало п. 1 настоящего доказательства; роли отрезков Q_1Q_2, ab, ac и bc играют соответственно Q_1Q_4, ac, bc и ab.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Два плоских изображения эквивалентны тогда и только тогда, когда они a-эквивалентны.*

Доказательство. В одну сторону теорема 1 следует из леммы 1. Покажем теперь, что если плоские изображения A и B эквивалентны, то они a-эквивалентны. Выберем на A точки a, b, c, не лежащие на одной прямой. Пусть следующей из определения эквивалентности биекцией этим точкам сопоставляются точки соответственно a', b', c' изображения B. Аффинным преобразованием изображения B совместим a', b', c' соответственно с точками a, b, c изображения A. Согласно лемме 2 при заданных точках a', b', c' положение остальных точек изображения B определяется однозначно, поэтому они совпадут с точками изображения A. Теорема доказана.

Эквивалентные неплоские изображения могут быть не a-эквивалентными. Как пример рассмотрим изображение U_1, состоящее из точек a_1, a_2, a_3

и a_4, a_5, a_6, расположенных на двух параллельных прямых (рис. 2, *а*). Положим $r(a_2, a_3) = 2r(a_1, a_2)$, $r(a_5, a_6) = 3r(a_4, a_5)$ (здесь $r(a_i, a_j)$ — расстояние между соответствующими точками). Пусть изображение U_2 (рис. 2, *б*) отличается от U_1 только тем, что точки a_4, a_5, a_6 на нижней прямой «перевернуты» и идут в обратном порядке. Изображения U_1 и U_2 эквивалентны, причем точкам из U_1 ставятся в соответствие точки с теми же номерами из U_2. Однако их нельзя перевести друг в друга аффинными преобразованиями. На U_1 отрезки прямых, соединяющих a_1 с a_6 и a_3 с a_4, имеют точку пересечения в промежутке между параллельными прямыми, а на U_2 такой точки нет, и аффинными преобразованиями это различие не устранить.

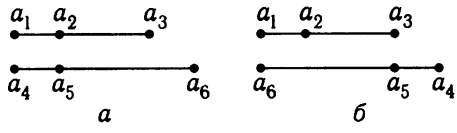


Рис. 2

Пусть плоские изображения A и B заданы своими кодами $\langle M_A, T_A\rangle$ и $\langle M_B, T_B\rangle$. Тривиальный способ проверки их на эквивалентность состоит в том, чтобы всевозможными способами однозначно сопоставлять элементы множеств M_A и M_B и проверять при этом в соответствии с определением эквивалентности равенство соответствующих элементов из множеств T_A и T_B. Если каждое из изображений состоит из n точек, то проверять придется $n!$ вариантов сопоставления.

Процедура проверки может быть упрощена. Построим изображение A по его коду. Выберем на A три точки a, b, c, не лежащие на одной прямой. Затем будем поочередно брать всевозможные тройки точек a', b', c' на B (не лежащие на одной прямой) и считать их совмещенными с точками a, b, c. Если A и B эквивалентны, ψ — биекция из определения эквивалентности и $a' = \psi(a)$, $b' = \psi(b)$, $c' = \psi(c)$, то при построении по коду все остальные точки изображения B также совместятся с соответствующими точками изображения A. Это и определит полностью биекцию ψ. Число вариантов для проверки при такой процедуре, очевидно, не превышает $3!C_n^3$.

Можно еще упростить процедуру проверки. Назовем точку x изображения A *внутренней*, если найдутся такие точки a, b, c из A, отличные от x, что образованный ими треугольник содержит x. Пусть V_A — множество всех внутренних точек из A. Очевидно, что по коду изображения A для каждой его точки x можно проверить включение $x \in V_A$. Точки из $A \setminus V_A$ назовем *внешними* или *контурными*, а часть изображения A, образованную этими точками, — *контуром*. Ясно, что биекция ψ: $M_A \to M_B$ должна порождать взаимно однозначное соответствие точек контуров изображений A и B. Затем на изображении, образованном точками из V_A, можно выделить его контур и т. д. В результате изображение однозначно «расслоится» на контуры: первый, второй и т. д. Далее для изображений A и B нужно сопоставлять друг другу только точки из контуров с одинаковыми номерами.

Пусть $i_1, \ldots, i_k$ — номера k ($k \geqslant 3$) точек изображения A. Рассмотрим выпуклый многоугольник, включающий все эти точки, часть из которых образует его множество вершин. Ясно, что такой многоугольник определяется однозначно. Пусть $S_{i_1 \ldots i_k}$ — площадь этого многоугольника, которую объявляем площадью k-точечника. Если точки $i_1, \ldots, i_k$ расположены на одной прямой, то называем k-точечник *коллинеарным* и полагаем $S_{i_1 \ldots i_k} = 0$. Пусть $j_1, \ldots, j_k$ — другой k-точечник из A. Полагаем $\rho_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_k} = S_{i_1 \ldots i_k} / S_{j_1 \ldots j_k}$. При этом, если $S_{j_1 \ldots j_k} = 0$, то $\rho_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_k}$ считаем неопределенным. Множество всех таких индексированных отношений $\rho_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_k}$ обозначаем через T_A. *Кодом изображения* A называем пару $\langle M_A, T_A\rangle$. Изображения A и B с кодами $\langle M_A, T_A\rangle$ и $\langle M_B, T_B\rangle$ называем *k-эквивалентными*, если существует такая биекция ψ: $M_A \to M_B$, что для любых $i_1, \ldots, i_k$, $j_1, \ldots, j_k$ из M_A выполнено $\rho_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_k} = \rho_{\psi(i_1) \ldots \psi(i_k), \psi(j_1) \ldots \psi(j_k)}$.

Покажем на примере (рис. 3), что продолжить теорему 1 на случай $k \geqslant 4$ для k-эквивалентных изображений нельзя. Четырехугольник $abcd$

выпуклый, с попарно неравными друг другу по площади треугольниками abd, bcd и abc. Площади треугольников abc и adc могут оказаться равными. На прямой, являющейся продолжением диагонали bd, симметрично относительно этой прямой откладываем точки x и x' так, чтобы отрезок $x'x''$ был параллелен диагонали ac и треугольники $ax'c$ и $ax''c$ содержали бы вершину d как внутреннюю точку. Рассмотрим изображение A_1 из точек a, b, c, d, x' и изображение A_2 — из точек a, b, c, d, x''. Эти изображения 4-эквивалентны, если площади соответствующих четырехточечников на них равны. Действительно, $abcd$ у A_1 и A_2 — общий, а четырехточечники $abdx'$ и $abdx''$ (с внутренней точкой d) имеют одинаковую площадь по построению. Далее, имеем $S_{bcdx'} = S_{bcx'x''} - S_{cx'x''}$, $S_{bcdx''} = S_{bcx'x''} - S_{btx'} - S_{dtx''}$. Отсюда для равенства $S_{bcdx'} = S_{bcdx''}$ нужно, чтобы имело место $S_{cx'x''} = S_{btx'} + S_{dtx''}$. У треугольника $cx'x''$ основание $x'x''$ в два раза больше оснований $x't$ и $x''t$ треугольников btx' и dtx''. Высота же, опущенная на это основание, у треугольника $cx'x''$ больше, чем у треугольника dtx'', и меньше, чем у треугольника btx'. Поэтому можно, сохраняя положение прямой, проходящей через точки b, o, d, t, и меняя на ней положение точки b, подобрать такое ее положение, при котором $S_{btx'} = S_{cx'x''} - S_{dtx''}$. При этом положении точки b четырехточечник $abcd$ останется выпуклым, и, как нетрудно проверить, будет иметь место $S_{abdx'} = S_{abdx''}$. Итак, A_1 и A_2 4-эквивалентны, но, очевидно, не переводятся друг в друга аффинными преобразованиями. Продолжение этого примера на случай изображений A_1 и A_2 из любого числа n ($n \geqslant 5$) точек, и, соответственно, их k-эквивалентности для $k = n - 1$ достигается добавлением нужного числа точек (т. е. $n - 5$ точек) на произвольные места на отрезке od на рис. 3.

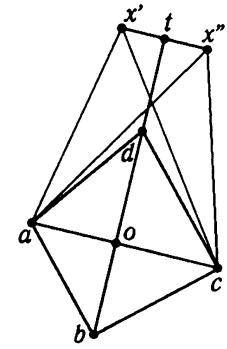


Рис. 3

Можно продолжить определение k-эквивалентности на случай $k = 2$, понимая под $S_{i_1 i_2}$ расстояние между точками с номерами i_1 и i_2. В [2] показано, что изображения A и B 2-эквивалентны тогда и только тогда, когда они переводятся одно в другое ортогональными преобразованиями. Суммируя все сказанное, приходим к следующему.

Теорема 2. *Для двух плоских изображений условие совпадения их k-эквивалентности ($k \geqslant 2$) и аффинной эквивалентности справедливо только при $k = 3$.*

§ 2. О кодировании и распознавании объемных изображений

Назовем *трехмерным изображением* A или *телом* конечное множество точек в трехмерном евклидовом пространстве. Занумеруем попарно различными номерами точки изображения A. Пусть $\overline{M}_A$ — множество этих номеров, V_{mnuv} и V_{kspq} — объемы тетраэдров с вершинами в четверках точек с номерами m, n, u, v и k, s, p, q, и пусть $\rho_{mnuv,kspq} = V_{mnuv}/V_{kspq}$. Полагаем, что порядок номеров в четверках не важен, сами четверки различны и для случая, когда $V_{kspq} = 0$, $\rho_{mnuv,kspq}$ не определено. Множество индексированных чисел $\rho_{mnuv,kspq}$ для всех таких пар четверок обозначим $\overline{T}_A$. *Кодом тела* A назовем пару $\langle \overline{M}_A, \overline{T}_A \rangle$. Тела A и B с кодами $\langle \overline{M}_A, \overline{T}_A \rangle$ и $\langle \overline{M}_B, \overline{T}_B \rangle$ назовем *эквивалентными*, если существует такая биекция ψ: $\overline{M}_A \to \overline{M}_B$, что для любых m, n, u, v, k, s, p, q из $\overline{M}_A$ выполнено $\rho_{mnuv,kspq} = \rho_{\psi(m)\psi(n)\psi(u)\psi(v),\psi(k)\psi(s)\psi(p)\psi(q)}$. Тела, все точки которых расположены в одной плоскости, назовем *двумерными*; для них рассматриваемый код не определен. Тела назовем *аффинно эквивалентными* (*а-эквивалентными*), если они переводятся друг в друга аффинными преобразованиями.

Лемма 3. *Если два тела а-эквивалентны, то они эквивалентны.*

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 1 и практически его повторяет.

Введенные ранее определения части изображения и подызображения, очевидно, могут быть распространены и на трехмерный случай.

Изображение, состоящее из пяти точек, не лежащих в одной плоскости, назовем *пятиточечником*. Пусть в пятиточечнике A, состоящем из точек a, b, c, d, e, точки a, b, c, e расположены в одной плоскости, а точка d — вне ее. Тогда $V_{abce} = 0$, и те отношения из $\overline{T}_A$, у которых V_{abce} входит в знаменатель, не определены, а те, у которых V_{abce} входит в числитель (при ненулевом знаменателе), равны нулю. Очевидно, верно и обратное: если код $\langle \overline{M}_A, \overline{T}_A \rangle$ обладает такими свойствами, то в пятиточечнике A точки a, b, c, e расположены в одной плоскости. Точки a, b, c, e, входящие в изображение A общего вида, расположены в одной плоскости в том и только том случае, если для любой части изображения A, являющейся пятиточечником и включающей точки a, b, c, e, выполняется указанное свойство, определяющее принадлежность этих точек одной плоскости. В изображении A точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 4)$ расположены в одной плоскости, если любые четыре из них расположены в одной плоскости, и только тогда. Аналогичным и очевидным образом можно указать необходимые и достаточные свойства кода изображения, при которых не менее трех точек лежат на одной прямой.

Далее будем основываться на следующей процедуре (стандартной) построения по коду пятиточечника положения пятой точки при известных положениях остальных четырех. Пусть a, b, c, e — эти четыре точки; пусть они не лежат в одной плоскости (т. е. тетраэдр $abce$ имеет ненулевой объем), в остальном же их положение в пространстве можно задавать произвольно. Точку, положение которой определяется, обозначим x. Поскольку объем тетраэдра $abce$ известен, из отношений V_{abcx}/V_{abce}, V_{abex}/V_{abce}, V_{acex}/V_{abce}, V_{bcex}/V_{abce} (все это элементы множества $\overline{T}_A$) находим объемы V_{abcx}, V_{abex}, V_{acex}, V_{bcex}. Площади граней тетраэдра $abce$ известны, поэтому можно определить значения длин высот h_{abc}, h_{abe}, h_{ace}, h_{bce} из точки x на грани соответственно abc, abe, ace, bce (две из этих длин могут оказаться нулевыми; три быть нулевыми, очевидно, не могут). Итак, задача сводится к тому, чтобы при заданном тетраэдре построить такую точку x, что высоты из этой точки на соответствующие грани тетраэдра суть h_{abc}, h_{abe}, h_{ace}, h_{bce}. При этом известно, что одно решение у этой задачи заведомо существует. Вопрос в том, когда такая точка единственна.

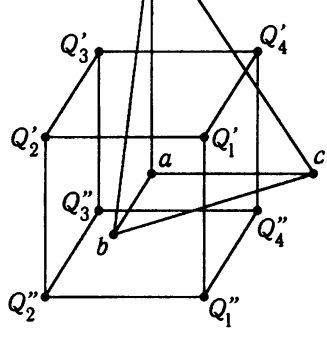


Рис. 4

Для построения возможных положений точки x проведем для каждой из граней abe, ace, abc по две плоскости, параллельные грани по разные ее стороны и отстоящие от граней на величину высоты из точки x на нее. Возникает параллелепипед Q, вершины которого обозначены на рис. 4 как Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4, Q''_1, Q''_2, Q''_3, Q''_4. По построению точка x может располагаться только на вершинах параллелепипеда Q. Для окончательного определения положения точки x нужно провести две плоскости, параллельные оставшейся грани тетраэдра (грани bce на рис. 4), по разные ее стороны и отстоящие от нее на величину h_{bce}. Пересечение этих плоскостей с вершинами параллелепипеда и даст возможные положения точки x.

Трехмерное изображение назовем *объемным*, если все его точки не лежат в одной плоскости или в двух параллельных плоскостях.

Лемма 4. *Если по коду объемного изображения выбраны какие-либо четыре его точки, не лежащие в одной плоскости, и задано*

произвольное (но не в одной плоскости) положение этих точек в трехмерном пространстве, то положение остальных точек изображения определяется по коду однозначно.

Доказательство. Пусть задано положение точек a, b, c, e объемного изображения A. Пусть для некоторой точки x, отличной от a, b, c, e, возможны два разных положения, x' и x''. Используя стандартную процедуру и обозначения рис. 4, построим параллелепипед Q, вершины которого являются возможными положениями точки x.

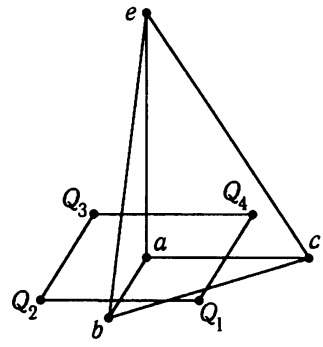


Рис. 5

1. Предположим, что точка x лежит в плоскости одной из граней тетраэдра $abce$. Пусть для определенности это будет грань abc. Параллелепипед Q в этом случае превращается в параллелограмм $Q_1Q_2Q_3Q_4$ (рис. 5).

1а. Положим, что точки x' и x'' совпадают с вершинами Q_1 и Q_2. Поскольку x' и x'' должны быть равноудалены от грани bce, то отрезок bc должен делить отрезок Q_1Q_2 пополам и, значит, точка b должна лежать на отрезке Q_1Q_2.

Изображение A — объемное, следовательно, должны существовать точки вне плоскости грани abc, отличные от точки e. Если такая точка d лежит вне плоскости грани ace и вне прямой be, то точки x' и x'' не равноудалены хотя бы от одной из плоскостей граней aed и ced — пришли к противоречию.

Пусть теперь все точки изображения A, расположенные вне плоскости грани abc и отличные от e, лежат либо на прямой bc, либо в плоскости грани ace. В первом случае все точки изображения A можно представить расположенными в плоскости грани bex и параллельной ей плоскости, проходящей через отрезок ac. Во втором — в плоскости грани ace и параллельной ей плоскости, проходящей через отрезок bx. Значит, одновременно существуют хотя бы одна точка на прямой be и хотя бы одна точка в плоскости грани ace (вне прямой ac); обозначим эти точки d_1 и d_2. Но тогда x' и x'' не равноудалены от плоскости по крайней мере одной из граней d_1d_2c и d_1d_2a.

1б. Аналогичным образом приходим к противоречию, предположив, что точки x' и x'' совпадают с вершинами Q_1 и Q_4.

На каждой из пар вершин Q_2 и Q_3, Q_4 и Q_3, Q_1 и Q_3 точки x' и x'' не могут располагаться, поскольку они не равноудалены от грани bce.

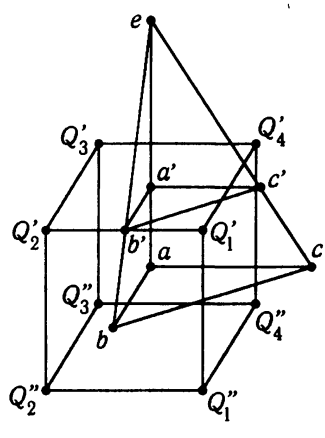


Рис. 6

Наконец, если предположить, что x' и x'' совпадают с вершинами Q_2 и Q_4, то диагональ Q_2Q_4 параллелограмма должна быть параллельна прямой bc (только тогда точки x' и x'' равноудалены от грани bce). Далее очевидным образом можно повторить рассуждения п. 1а. При этом роль отрезков Q_1Q_2 и ac играют отрезки соответственно Q_2Q_4 и bc, роль граней ace, abe и bce — соответственно грани bce, ace и abe.

Итак, точка x не может находиться в плоскости грани abc тетраэдра. Далее в доказательстве леммы везде предполагается, что x находится вне плоскостей граней тетраэдра.

2. Предположим, что сечение тетраэдра $abce$ или продолжений его ребер верхней гранью параллелепипеда Q есть треугольник, т. е. вершина e тетраэдра не лежит на верхней грани.

2а. Пусть точки x' и x'' совпадают с вершинами Q'_1 и Q'_2 (рис. 6). Поскольку x' и x'' должны быть равноудалены от грани bce, отрезок $b'c'$ должен делить отрезок $Q'_1Q'_2$ пополам, т. е. точка b' должна лежать на отрезке $Q'_1Q'_2$. Поэтому отрезок ac параллелен грани bex (независимо от того, занимает точка x положение x'

или x''). Следовательно, точки a, b, c, e, x расположены в двух параллельных плоскостях: первая из них — плоскость грани bex, вторая — ей параллельная и проходящая через отрезок ac; обозначим эти плоскости P_1 и P_2.

Поскольку A — объемное изображение, должны существовать точки вне плоскостей P_1 и P_2. Здесь возможны два случая. В первом из них существует точка (обозначим ее d), лежащая вне плоскости грани ace и вне прямой be. Тогда точки x' и x'' не равноудалены от плоскости хотя бы одной из граней bed и ced; пришли к противоречию.

Во втором случае все остающиеся точки изображения, отличные от a, b, c, e, x, лежат на прямой be и в плоскости грани ace. Если остающиеся точки расположены только на прямой be, то это значит, что они расположены в плоскости P_1. Значит, должна существовать точка (обозначим ее через d), лежащая в плоскости грани ace. Если при этом d лежит на прямой ac, то она лежит в плоскости P_2. Если же d лежит вне прямой ac, то точки x' и x'' не равноудалены от плоскости грани abd (если d не лежит на прямой ae) и от плоскости грани bcd (если d не лежит на прямой ce).

2б. Аналогично получаем противоречие, предположив, что точки x' и x'' совпадают с Q_1' и Q_4'. С каждой из пар вершин Q_2' и Q_3', Q_4' и Q_3', Q_1' и Q_3' точки x' и x'' не могут совпадать в силу того очевидного обстоятельства, что они не равноудалены от грани bce.

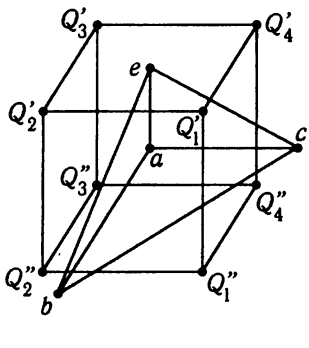


Рис. 7

Наконец, если предположить, что x' и x'' совпадают с вершинами Q_2' и Q_4', то диагональ $Q_2'Q_4'$ должна быть параллельна отрезку bc (только тогда точки x' и x'' равноудалены от грани bce). Далее очевидным образом могут быть повторены рассуждения п. 2а. При этом роль отрезков $Q_1'Q_2'$ и ac играют соответственно отрезки $Q_2'Q_4'$, bc, роль граней ace, abe, bce — соответственно грани bce, ace и abe.

3. Предположим теперь, что вершина e тетраэдра $abce$ лежит на верхней грани параллелепипеда Q (рис. 7). При этом из вершин параллелограмма верхней грани параллелепипеда Q для размещения на них точек x' и x'' годятся, очевидно, только концы диагоналей параллелограмма, т. е. пары Q_1' и Q_3', Q_2' и Q_4': при совпадении с ними точек x' и x'' они равноудалены от всех граней тетраэдра $abce$. Поскольку A — объемное изображение, должна существовать точка (обозначим ее d) вне плоскостей грани abc и верхней грани параллелепипеда Q. Однако в этом случае точки в парах Q_1' и Q_3', Q_2' и Q_4' не равноудалены от плоскостей по крайней мере одной из граней abd, acd и bcd; пришли к противоречию.

4. Аналогично сделанному в пп. 2 и 3, можно рассмотреть все параллелограммы поверхности параллелепипеда Q и показать невозможность совпадения точек x' и x'' с парами их вершин.

Остается рассмотреть случай, когда x' и x'' совпадают с концами диагоналей параллелепипеда Q. При этом сразу можно исключить из рассмотрения диагонали $Q_1''Q_3'$ и $Q_1'Q_3''$, поскольку их концы не равноудалены от грани bce. Если же x' и x'' совпадают с Q_2'' и Q_4' или с Q_2' и Q_4'', то соответствующая диагональ должна быть параллельной грани bce тетраэдра. Далее рассуждения очевидным образом сводятся к п. 3, причем роль грани abc тетраэдра играет здесь грань bce, роль вершины e — вершина a.

Итак, показано, что для всех возможных случаев предположение о том, что для точки x возможны два разных положения, приводит к противоречию. Лемма доказана.

Теорема 3. *Два объемных изображения эквивалентны тогда и только тогда, когда они аффинно эквивалентны.*

Доказательство основывается на леммах 3 и 4 и повторяет доказательство теоремы 1.

Покажем, что существуют эквивалентные не объемные изображения, не являющиеся аффинно эквивалентными. Отметим сначала два свойства изображений, у которых точки располагаются на скрещивающихся прямых.

Пусть точки a и b изображения расположены в плоскости P_1 на прямой L_1, а точки c и d — на прямой L_2 в плоскости P_2, параллельной P_1. Прямые L_1 и L_2 скрещивающиеся; следовательно, тетраэдр с вершинами a, b, c, e имеет ненулевой объем. Если поменять местами точки a и b, то объем тетраэдра $abce$, очевидно, сохранится. Нетрудно показать, что если сместить отрезок ab по прямой L_1 (сохраняя длину отрезка ab), то объем тетраэдра $abce$ не изменится.

Второе свойство связано с возможностью смещать отрезок ab в плоскости P_1 с сохранением его параллельным самому себе, без изменения объема тетраэдра $abce$. Действительно, пусть, как и ранее, ребро ab тетраэдра $abce$ лежит в плоскости P_1, а ребро ce — в плоскости P_2, параллельной плоскости P_1. Рассмотрим отрезок $a'b'$ в плоскости P_1, параллельный отрезку ab и равный ему по длине (рис. 8). Покажем, что $V_{abce} = V_{a'b'ce}$. Построим в плоскости P_2 такие точки x и y, что отрезок ax параллелен bc, отрезок $b'y$ параллелен $a'e$. Ясно, что отрезок xc параллелен и равен отрезку ey; следовательно, $xcey$ — параллелограмм, а ce — его диагональ. Отрезок ax параллелен грани bce, поэтому $V_{abce} = V_{xbce}$; отрезок $b'y$ параллелен грани $a'ce$, поэтому $V_{b'a'ce} = V_{ya'ce}$. Но в силу равенства площадей S_{xce} и S_{yce} и расположения точек b и a' в плоскости P_1, параллельной P_2, имеем $V_{xbce} = V_{ya'ce}$. Отсюда $V_{abce} = V_{b'a'ce}$.

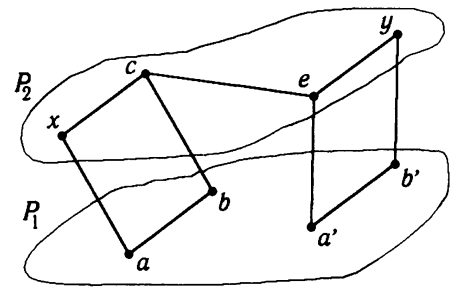


Рис. 8

Пусть теперь задано изображение A, все точки которого располагаются в параллельных плоскостях P_1 и P_2. Его часть, расположенную в плоскости P_1 (P_2), обозначим через A_1 (A_2). Тетраэдры с вершинами в точках изображения A можно разбить на две группы. В первой каждый тетраэдр имеет три точки (назовем их основанием) среди точек одной части (A_1 или A_2) и одну точку (назовем ее вершиной тетраэдра) среди точек другой части. Объем такого тетраэдра определяется произведением площади основания на высоту, опущенную из вершины на это основание; эта высота одинакова для всех тетраэдров первой группы. Во второй группе — тетраэдры, две точки которых принадлежат одной части изображения A, и две — другой. Такие изображения, как A, могут быть эквивалентными, но не переводимыми одно в другое посредством аффинных преобразований. Для доказательства рассмотрим изображение A', полученное из A преобразованием части A_1 в A_1'. Это преобразование есть преобразование симметрии точек изображения A_1 относительно какой-либо точки, выбранной в плоскости P_1. При этом преобразовании тетраэдры первой группы сохраняют объемы, так как площади оснований и соответствующие высоты сохраняются. Тетраэдры второй группы тоже сохраняют свои объемы в силу рассмотренных выше двух свойств. Поэтому, очевидно, изображения A и A' эквивалентны. Вместе с тем их в общем случае нельзя перевести друг в друга аффинными преобразованиями. Для наглядности можно представить, что A содержит как часть изображение U_1 из примера для плоского случая, а изображение A' — изображение U_2 (рис. 2), причем точки a_1, a_2, a_3 расположены в плоскости P_2, точки a_4, a_5, a_6 — в плоскости P_1.

Как и в двумерном случае, тривиальный способ проверки эквивалентности тел A и B, состоящих из n точек каждое, приводит к $n!$ вариантам

сопоставлений точек изображений. Аналогично плоскому случаю можно, основываясь на лемме 4, снизить число вариантов для проверки до $4!C_n^4$. Можно и далее понижать эту оценку: ввести понятия внутренних и контурных точек, контура, «расслоить» тело на контуры и сопоставлять только точки соответствующих друг другу контуров тел A и B.

§ 3. О восстановлении трехмерного изображения по плоским проекциям

Восстановление трехмерного изображения по плоским проекциям служит, с одной стороны, предположительной основой механизмов стереоскопического зрения в живых организмах [6], с другой — является важной задачей в рамках машинного зрения для робототехники [4, 5]. В описанных схемах такого восстановления точка проецируется на две плоские сетчатки (рис. 9), проекции ее есть точки соответственно m_1 и m_2. Если известно положение этих точек на сетчатках, известно расстояние между сетчатками, то, используя геометрические соображения и построения, можно восстановить положение точки m. Если тело T состоит из конечного множества точек, то, восстанавливая положение каждой точки, можно восстановить поточечно все тело. Проекции S_1 и S_2 тела на две сетчатки несколько разные за счет того, что каждый глаз «видит» тело под своим углом зрения, в своем ракурсе. Именно этой разностью и обеспечивается возникновение стереоскопического эффекта.

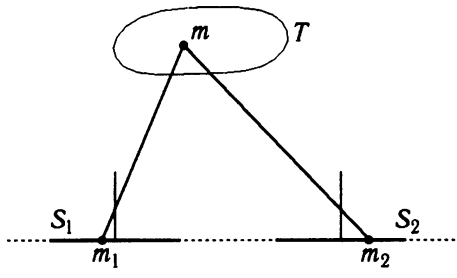


Рис. 9

Главная проблема в рамках машинного стереозрения — это проблема идентификации соответствующих друг другу точек на двух проекциях. На рис. 9 изображены по одной точке на каждой сетчатке. Когда таких точек много, то не ясно, какую из них на одной проекции сопоставлять данной точке на другой. Это нельзя сделать, например, простым наложением изображений на сетчатках, поскольку эти изображения разные за счет разных ракурсов. Предполагать, что уже «распознано», какие части изображений соответствуют друг другу, и на этой основе сопоставлять точки проекций тоже нельзя, так как задача распознавания предполагается решаемой на более поздних этапах, и ее решение отчасти должно основываться на результатах восстановления трехмерного изображения.

Дополнительные трудности возникают при попытках объяснить этой схемой механизмы стереоскопического зрения в живых организмах. Действительно, для того, чтобы знать расстояния между соответствующими друг другу точками на двух проекциях, нужно, как минимум, иметь известным расстояние между сетчатками. Однако не ясно, на основании чего его можно считать априори известным. Внутри одного вида расстояния между глазами у разных особей, очевидно, несколько разнятся, не говоря уже об особях разных видов. На протяжении жизни (вследствие изменений в размерах тела) это расстояние тоже меняется. Трудно поэтому считать его жестко генетически обусловленным и потому известным. Если же предполагать, что это расстояние становится известным из индивидуального опыта, то надо каким-то образом объяснить механизм получения такого рода информации. Кроме того, сетчатки на рис. 9 изображены расположенными в одной плоскости. Однако они могут быть «повернуты на объект», т. е. развернуты каждая перпендикулярно лучу от точки m. Изображения на сетчатках при этом по сравнению с рис. 9 подвергнутся сжатию. Если рассматриваемый

объект расположен сбоку и глаза повернуты в его сторону, то одна сетчатка расположена несколько дальше от объекта, чем другая, что приводит к некоторой разнице в размерах проекций. В целом рассмотрения такого рода приводят к необходимости восстанавливать трехмерное изображение не только по данной паре S_1 и S_2 его плоских проекций, но и по любой паре $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, полученной соответственно из S_1 и S_2 аффинными преобразованиями.

Отметим, что такие построения могут представлять интерес и в связи с проблемами томографии, поскольку в этом случае тоже происходит восстановление трехмерного тела по проекциям.

Рассмотрим тело T и прямую, называемую *направлением проекции*. Направления проекции назовем *разными*, если они не параллельны. Проведем через каждую точку тела T прямые, параллельные направлению проекции α и называемые *лучами*. Полагаем α таким, что на каждом луче находится только одна точка тела. Таких направлений проекции бесконечное множество, прочих — только конечное. Назовем плоскость, пересекающую лучи, *плоскостью проекции*, изображение, образованное точками пересечения лучей с плоскостью проекции, — *проекцией тела* (на данную плоскость и по данному направлению). Рассматриваем проекции тела T по разным направлениям и на разные плоскости. Оговорим, что если T — двумерное изображение, то α полагаем непараллельным плоскости этого изображения. Взаимно однозначное соответствие между точками двух изображений назовем их *разметкой*. Соответствующие друг другу точки будем обозначать одной буквой (с разными индексами). Ясно, что таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками тела T и точками проекций S_i ($i = 1, 2, \ldots$). Если a — точка тела T, то точку проекции S_i, лежащую с ней на одном луче, обозначим через a_i и будем называть *проекцией точки* a. Это устанавливает и взаимно однозначное соответствие между точками проекций S_i и S_j: соответствующие друг другу точки являются проекциями одной и той же точки тела T. Размеченные изображения A и B назовем *a'-эквивалентными*, если можно перевести их одно в другое аффинными преобразованиями так, что совместятся соответствующие друг другу точки (обозначение: $A \approx B$). В противном случае A и B назовем *a'-разными* (обозначение: $A \not\approx B$). Часть изображения A, состоящую из его точек $a, b, \ldots, v$, будем обозначать как $A(a, b, \ldots, v)$. Три точки тела, не лежащие на одной прямой, назовем *гранью*, определяемую этими точками плоскость — *плоскостью грани*. Три точки проекции S_i, не лежащие на одной прямой, назовем *треугольником*.

Оговорим обозначения для специального случая. Изображение A, состоящее из точек $a_i, b_i, c_i, \ldots, u_i$ и прямой L_i, будем обозначать также через $A(a_i, b_i, c_i, \ldots, u_i, L_i)$. Аналогично изображение B, состоящее из точек $a_j, b_j, c_j, \ldots, u_j$ и прямой L_j, будем обозначать также через $B(a_j, b_j, c_j, \ldots$ $\ldots, u_j, L_j)$. Назовем A и B *a'-эквивалентными*, если их можно перевести одно в другое аффинными преобразованиями, причем так, что точки $a_i, b_i, c_i, \ldots, u_i$ совместятся соответственно с точками $a_j, b_j, c_j, \ldots, u_j$ и прямая L_i совместится с прямой L_j.

Имея тело T, заданное направление проекции α и меняя плоскости проекции, можно получить некоторое множество $\{S\}$ проекций. Все проекции из $\{S\}$ будут попарно a'-эквивалентными. С другой стороны, тело T — не единственное, проецированием которого можно получить множество $\{S\}$ проекций. Таким будет, например, тело T', полученное заменой каждой точки x тела T, находящейся на луче α_x проецирования, на какую-либо другую точку x' на том же луче. В частном вырожденном случае все точки тела T' могут находиться и в одной плоскости. Итак, при заданном направлении α проекции получить данное множество $\{S\}$ проекций можно проецированием некоторого множества $\{T\}$ тел. Из этого следует, что, имея одну или несколько проекций из множества $\{S\}$, нельзя восстановить тело T.

Мало того, нельзя даже распознать, не имеем ли мы дело с вырожденным случаем, когда T — двумерное изображение. Проекции из $\{S\}$ можно интерпретировать как изображения тела в одном ракурсе. Следовательно, для того, чтобы восстановить тело, или даже только определить, не двумерное ли оно, нужно иметь более одной проекции, причем в разных ракурсах (т. е. при разных направлениях проекции).

Лемма 5. *Если S_1 и S_2 — проекции тела T по двум разным направлениям α_1 и α_2, $\overline{S}_1 \approx S_1$, $\overline{S}_2 \approx S_2$, то $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ являются a'-разными тогда и только тогда, когда T — не двумерное тело.*

Доказательство. Пусть T — не двумерное тело. Покажем, что $\overline{S}_1 \not\approx \overline{S}_2$. Рассмотрим в T точки a, b, c, d, не лежащие в одной плоскости. Достаточно, очевидно, показать, что $S_1(a_1, b_1, c_1, d_1) \not\approx S_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$. Пусть плоскость грани abc не параллельна ни одному из направлений проекции α_1 и α_2 (если это не так, то возьмем вместо abc какую-либо другую грань в тетраэдре $abcd$). Возьмем в качестве плоскости проекции плоскость грани abc (рис. 10). Тогда по направлению α_1 проекция точек a, b, c, d будет состоять из точек a, b, c, d', а по направлению α_2 — из точек a, b, c, d''. Поскольку d' и d'' не совпадают, $S_1(a_1, b_1, c_1, d_1) \not\approx \not\approx S_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$.

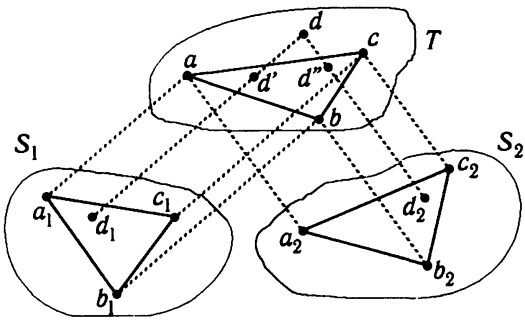


Рис. 10

Пусть теперь $\overline{S}_1 \not\approx \overline{S}_2$. Если предположить, что T — двумерное изображение, то $T \approx \overline{S}_1$ и $T \approx \overline{S}_2$ и, значит, $\overline{S}_1 \approx \overline{S}_2$; пришли к противоречию. Лемма доказана.

Следствие. *Тело двумерно тогда и только тогда, когда любые два изображения, a'-эквивалентные его проекциям по разным направлениям, a'-эквивалентны.*

Лемма 5 и следствие из нее применимы, очевидно, и в отношении части тела и соответствующих частей на проекциях. Если, однако, часть тела двумерна, то должна выполняться сделанная выше оговорка — направления проекции не должны быть параллельными плоскости этой части.

Пусть S_1 и S_2 — a'-разные проекции тела T, $\overline{S}_1 \approx S_1$, $\overline{S}_2 \approx S_2$, $a_1b_1c_1$ на $\overline{S}_1$ и $a_2b_2c_2$ на $\overline{S}_2$ — треугольники. Будем говорить, что точка d_1 на $\overline{S}_1$ *лежит в плоскости треугольника* $a_1b_1c_1$, если $\overline{S}_1(a_1, b_1, c_1, d_1) \approx \approx \overline{S}_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$. В этом случае и d_2 лежит в плоскости треугольника $a_2b_2c_2$. В противном случае говорим, что d_1 лежит *вне плоскости треугольника* $a_1b_1c_1$ (d_2 лежит вне плоскости треугольника $a_2b_2c_2$).

Рассмотрим на $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ четверку w троек точек

$$w = \langle (a_1b_1c_1)(a_2b_2c_2)(c_1d_1e_1)(c_2d_2e_2) \rangle$$

такую, что $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ — треугольники, точки d_1 и e_1 лежат вне плоскости треугольника $a_1b_1c_1$ (соответственно точки d_2 и e_2 лежат вне плоскости треугольника $a_2b_2c_2$) и из троек $c_1d_1e_1$ и $c_2d_2e_2$ хотя бы одна — треугольник. Такую четверку назовем *правильной*. Ее точки на S_1 и S_2 являются проекциями точек a, b, c, d, e тела T, причем abc и cde — грани, и плоскости этих граней разные. Обозначим через L линию пересечения этих плоскостей, через L_1 и L_2 — проекцию этой линии на S_1 и S_2. Через $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$ обозначим соответственно образы L_1 и L_2 на $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Очевидно, что $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$ проходят соответственно через c_1 и c_2. Тем самым для определения положения прямых $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$ достаточно определить на них еще по одной точке.

Лемма 6. *Если S_1 и S_2 — a'-разные проекции тела T, $\overline{S}_1 \approx S_1$, $\overline{S}_2 \approx S_2$ и w — правильная четверка на $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, то по $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ можно определить положение на них прямых $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$.*

Доказательство. 1. Положим, что только одна из троек $c_1d_1e_1$ и $c_2d_2e_2$ — треугольник, и пусть для определенности это тройка $c_2d_2e_2$. Следовательно, точки c_1, d_1, e_1 лежат на одной прямой и, значит, направление проекции α_1 параллельно плоскости грани cde. В этом случае точки c_1, d_1, e_1 лежат на прямой $\overline{L}_1$, что и определяет ее положение.

Прямая L в теле T лежит в плоскости треугольника abc. Следовательно, $\overline{S}_1(a_1, b_1, c_1, \overline{L}_1) \approx \overline{S}_2(a_2, b_2, c_2, \overline{L}_2)$. Совместим аффинными преобразованиями изображения $\overline{S}_1$ точки a_1, b_1, c_1 соответственно с точками a_2, b_2, c_2 на $\overline{S}_2$. Прямая $\overline{L}_1$ тогда совместится с $\overline{L}_2$; это определяет положение $\overline{L}_2$ на $\overline{S}_2$.

2. Положим теперь, что тройки $c_1d_1e_1$ и $c_2d_2e_2$ — треугольники.

Если какая-либо из точек a_1 и b_1 лежит в плоскости треугольника $c_1d_1e_1$, то прямая $\overline{L}_1$ проходит через эту точку и точку c_1. Положение $\overline{L}_2$ тоже определено тем, что она проходит через соответствующие точки на $\overline{S}_2$.

Пусть теперь точки a_1 и b_1 лежат вне плоскости треугольника $c_1d_1e_1$.

Если в теле T отрезок de параллелен плоскости грани abc и отрезок ab параллелен плоскости грани cde, то отрезки de и ab должны быть параллельны прямой L и, следовательно, параллельны между собой. В этом случае отрезки d_1e_1 и a_1b_1 на $\overline{S}_1$ и d_2e_2 и a_2b_2 на $\overline{S}_2$ параллельны между собой. Их направлениями и определяются прямые $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$.

Положим теперь, что либо отрезок de не параллелен грани abc, либо отрезок ab не параллелен грани cde. Пусть для определенности $de \nparallel abc$. Обозначим через x точку пересечения прямых de и L, через x_1 и x_2 — соответствующие точки на $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Точки a, b, c, x лежат в теле T в одной плоскости, следовательно, $\overline{S}_1(a_1, b_1, c_1, x_1) \approx \overline{S}_2(a_2, b_2, c_2, x_2)$. Точки c, d, e, x в теле T тоже лежат в одной плоскости, и, значит, $\overline{S}_1(c_1, d_1, e_1, x_1) \approx \overline{S}_2(c_2, d_2, e_2, x_2)$. Совместим аффинными преобразованиями изображения $\overline{S}_2$ его точки a_2, b_2, c_2 соответственно с точками a_1, b_1, c_1 на $\overline{S}_1$. При этом x_2 совместится с x_1, а d_2 и e_2 займут положения, которые обозначим через d_2' и e_2' (рис. 11). Точка x_1 лежит на прямой e_1d_1, точка x_2 — на e_2d_2. После совмещения x_1 с x_2 точка x_1 должна, тем самым, быть пересечением прямых e_1d_1 и $e_2'd_2'$. Это и определяет положение прямой $\overline{L}_1$ на $\overline{S}_1$, а значит, и $\overline{L}_2$ на $\overline{S}_2$. Лемма доказана.

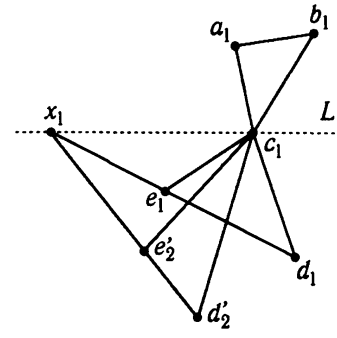


Рис. 11

Опишем процедуру $\mathrm{Alg}\,T'$ построения некоторого тела T' по $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Пусть $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ — треугольники и точка e_1 лежит вне плоскости треугольника $a_1b_1c_1$. Выберем некоторую прямую α' (не параллельную плоскости изображения $\overline{S}_1$) в качестве направления проекции. Проведем через точки a_1, b_1, c_1, e_1 лучи, параллельные α', и на каждом луче возьмем соответственно по точке a', b', c', e' так, чтобы они не лежали в одной плоскости. Пусть теперь d_1 — произвольная точка на $\overline{S}_1$. Построим соответствующую ей точку d' тела T'.

1. Пусть d_1 лежит в плоскости треугольника $a_1b_1c_1$. Совместим аффинными преобразованиями изображения $\overline{S}_1$ точки a_1, b_1, c_1 соответственно с точками a', b', c'. Точка, в которую перейдет d_1, есть d'.

2. Пусть d_1 лежит вне плоскости треугольника $a_1b_1c_1$.

Пусть хотя бы одна из троек $c_1d_1e_1$ и $c_2d_2e_2$ — треугольник. Тогда $\langle (a_1b_1c_1)(a_2b_2c_2)(c_1d_1e_1)(c_2d_2e_2)\rangle$ — правильная четверка. Построим по $\overline{S}_1$

и $\overline{S}_2$ прямые $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$ на них. Аффинными преобразованиями изображения $\overline{S}_1$ совместим точки a_1, b_1, c_1 соответственно с точками a', b', c'. Прямую, в которую преобразуется $\overline{L}_1$, обозначим L'. Пусть для определенности $c_2d_2e_2$ — треугольник. Аффинными преобразованиями изображения $\overline{S}_2$ (с прямой $\overline{L}_2$) совместим $\overline{L}_2$ с L' и точку l_2 с l'. Точка, в которую перейдет при этом d_2, есть d'.

Пусть теперь и $c_1d_1e_1$, и $c_2d_2e_2$ не треугольники. Возможны две ситуации.

2а. Точки c, d, e в теле T лежат на одной прямой. Тогда на $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ в каждой из четверок a_1, c_1, e_1, d_1 и b_1, c_1, e_1, d_1 точки лежат в одной плоскости. В свою очередь точки a_1, c_1, e_1, d_1 лежат в одной плоскости, если $\overline{S}_1(a_1, c_1, e_1, d_1) \approx \overline{S}_2(a_2, c_2, e_2, d_2)$, где $a_1c_1e_1$ и $a_2c_2e_2$ — треугольники. Если же, например, $a_1c_1e_1$ — не треугольник (т. е. направление проекции α_1 параллельно плоскости грани ace), то точки a_1, c_1, e_1, d_1 должны лежать на одной прямой. Аналогично определяется принадлежность одной плоскости и точек b_1, c_1, e_1, d_1.

Аффинным преобразованием изображения $\overline{S}_1$ совмещаем точки c_1 и e_1 с точками c' и e'. Точка, в которую переходит d_1, есть d'.

2б. Точки c, d, e в теле T образуют грань, и направления α_1 и α_2 оба параллельны этой грани. Если точка d лежит на одной прямой с точками a и e, или b и e, то построение d' сводится к п. 2а. Если aed и bed — грани; то, например, четверка $\langle(a_1b_1c_1)(a_2b_2c_2)(a_1e_1d_1)(a_2e_2d_2)\rangle$ правильная, и построение точки d' сводится к началу п. 2.

Теорема 4. *Если S_1 и S_2 суть a'-разные проекции тела T, $\overline{S}_1 \approx S_1$, $\overline{S}_2 \approx S_2$ и тело T' построено по $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ использованием* $\operatorname{Alg} T'$, *то тела T и T' a'-эквивалентны.*

Доказательство. Совместим аффинными преобразованиями точки a', b', c', e' тела T' соответственно с точками a, b, c, e тела T. Покажем, что произвольная точка d' тела T' при этом совместится с соответствующей точкой d тела T. При этом будем опираться на ту последовательность действий и обозначений, которые использованы в описании $\operatorname{Alg} T'$.

1. Если d_1 лежит в плоскости треугольника $a_1b_1c_1$, то $T(a, b, c, d) \approx \approx \overline{S}_1(a_1, b_1, c_1, d_1)$. По построению имеем $T'(a', b', c', d') \approx \overline{S}_1(a_1, b_1, c_1, d_1)$. Поэтому $T(a, b, c, d) \approx T'(a', b', c', d')$. Значит, при совмещении точек a', b', c' соответственно с точками a, b, c точка d' совместится с d.

2. Пусть точка d_1 лежит вне плоскости треугольника $a_1b_1c_1$.

Пусть хотя бы одна из троек $c_1d_1e_1$ и $c_2d_2e_2$ — треугольник (для определенности $c_2d_2e_2$). По построению $T'(a', b', c', L') \approx \overline{S}_1(a_1, b_1, c_1, \overline{L}_1')$. Кроме того, по условию $T(a, b, c, L) \approx \overline{S}_1(a_1, b_1, c_1, \overline{L}_1')$. Отсюда $T'(a', b', c', L') \approx \approx T(a, b, c, L)$ и, следовательно, при совмещении точек a', b', c' соответственно с точками a, b, c прямая L' совместится с прямой L.

По построению имеем $T'(c', d', e', L') \approx \overline{S}_2(c_2, d_2, e_2, \overline{L}_2)$. По условию $T(c, d, e, L) \approx \overline{S}_2(c_2, d_2, e_2, \overline{L}_2)$. Отсюда $T'(c', d', e', L') \approx T(c, d, e, L)$ и, следовательно, при совмещении прямой L' с прямой L и точки e' с точкой e точка d' совместится с точкой d.

Если $c_1d_1e_1$ и $c_2d_2e_2$ — не треугольники, то в соответствии с описанием $\operatorname{Alg} T'$ возможны два случая.

2а. Точка d лежит на ребре ce (или его продолжении) тетраэдра $abce$, т. е. точки c, d, e лежат на одной прямой. В этом случае отношения длин отрезков ce, cd и ed при аффинных преобразованиях не меняются, т. е. они одни и те же для троек $c_1e_1d_1$, $c_2e_2d_2$, ced и $c'e'd'$. Следовательно, при совмещении точек c, e соответственно с точками c', e' точка d совместится с d'.

Аналогично показываем совмещение точек d' и d и в тех случаях, когда точка d лежит на ребрах ae и be тетраэдра $abce$.

2б. Точки c, d, e образуют в теле T грань, направления проекций α_1 и α_2 параллельны плоскости этой грани и точка d не лежит на ребрах ae и be тетраэдра $abce$. Тогда, например, из троек $a_1b_1d_1$ и $a_2b_2d_2$ хотя бы одна — треугольник, и, следовательно, рассуждения могут быть сведены к началу п. 2 настоящего доказательства. Теорема доказана.

Содержательно теорема 4 состоит в следующем. В процедуре $\mathrm{Alg}\,T'$ присутствует много моментов, которые могут варьироваться. Можно, например, выбирать разные $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, по-разному брать исходную четверку точек на $\overline{S}_1$ (или на $\overline{S}_2$) и т. д. Варьируя такие моменты, можно построить некоторое множество $\{T'\}$ тел. Теорема, однако, утверждает, что все они a'-эквивалентны телу T и, значит, a'-эквивалентны между собой. Тело посредством процедуры $\mathrm{Alg}\,T'$ восстанавливается тем самым с точностью до аффинных преобразований. При этом нет необходимости знать расстояние между проекциями S_1 и S_2 (аналог расстояния между сетчатками глаз), тело T' строится по произвольным образом сдвинутым, повернутым, сжатым или растянутым, уменьшенным или увеличенным проекциям тела T.

Выше уже отмечалось, что по одной проекции тело восстановить нельзя. Из теоремы 4 следует, что для этого (с точностью до аффинных преобразований) достаточно двух проекций. Можно предположить, что это имеет некоторое отношение к тому обстоятельству, что зрительное восприятие в живых организмах повсеместно осуществляется посредством именно двух глаз.

Работа с восстановленным телом может включать в себя построение его проекций по произвольным направлениям, в том числе и таким, для которых на каждом луче проекции может быть более чем одна точка. Такие проекции будем здесь называть *неполными*. Конечно, имея восстановленное тело, можно построить произвольную его проекцию. Покажем, однако, что любую проекцию, в том числе и неполную, можно получить непосредственно по $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, не прибегая к восстановлению тела в качестве, так сказать, промежуточного этапа. Такие построения могут оказаться полезными, например, в компьютерных играх.

Далее описывается процедура $\mathrm{Alg}\,S_0$ построения по $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ некоторого изображения S_0. Эта процедура похожа на $\mathrm{Alg}\,T'$, и это сходство мы постараемся при описании подчеркнуть, поскольку оно будет использовано при дальнейших доказательствах.

Пусть $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ — треугольники и точка e_1 лежит вне плоскости треугольника $a_1b_1c_1$. Выберем на плоскости четыре точки a_0, b_0, c_0, e_0 такие, что $a_0b_0c_0$ — треугольник. Точки a_0, b_0, c_0, e_0 — точки строящегося изображения S_0. Покажем, как строятся, причем однозначно, остальные точки изображения S_0.

Возьмем на $\overline{S}_1$ произвольную точку d_1, отличную от a_1, b_1, c_1, e_1.

1. Пусть d_1 лежит в плоскости треугольника $a_1b_1c_1$. Совместим аффинными преобразованиями изображения $\overline{S}_1$ точки a_1, b_1, c_1 соответственно с точками a_0, b_0, c_0. Точку, в которую перейдет при этом преобразовании d_1, обозначим через d_0.

2. Пусть d_1 лежит вне плоскости треугольника $a_1b_1c_1$.

Пусть хотя бы одна из троек точек $c_1d_1e_1$ и $c_2d_2e_2$ — треугольник. Тогда $\langle(a_1b_1c_1)(a_2b_2c_2)(c_1d_1e_1)(c_2d_2e_2)\rangle$ — правильная четверка. Построим на $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ прямые $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$. Аффинными преобразованиями изображения $\overline{S}_1$ совместим точки a_1, b_1, c_1 соответственно с точками a_0, b_0, c_0. Образ $\overline{L}_1$ обозначим через L_0. Пусть теперь для определенности $c_2d_2e_2$ — треугольник. Аффинными преобразованиями изображения $\overline{S}_2$ совместим прямую $\overline{L}_2$ с прямой L_0 и точки c_2 и e_2 — соответственно с точками c_0 и e_0. Образ d_2 обозначим через d_0.

Пусть теперь и $c_1d_1e_1$, и $c_2d_2e_2$ — не треугольники. Возможны две ситуации.

2а. Точки c, d, e в теле T лежат на одной прямой, т. е. точка d лежит на ребре ce тетраэдра $abce$ или на его продолжении. Распознается это обстоятельство так же, как и в соответствующем пункте описания $\mathrm{Alg}\,T'$. Аффинными преобразованиями изображения S_1 совместим точки c_1 и e_1 соответственно с точками c_0 и e_0. Образ d_1 обозначим через d_0. Аналогично поступаем и в случаях, когда точка d лежит на ребрах ae и be тетраэдра.

2б. Точки c, d, e в теле T образуют грань, и ей параллельны направления проекции α_1 и α_2. Пусть уже исключен случай расположения точки d на ребрах ae и be тетраэдра $abce$. Таким образом, aed и bed — грани. Следовательно, грань, например, aed проецируется и на S_1, и на S_2 в виде треугольника. Но тогда четверка $\langle(a_1b_1c_1)(a_2b_2c_2)(a_1e_1d_1)(a_2e_2d_2)\rangle$ правильная, и построение точки d_0 сводится к началу п. 2. Описание $\mathrm{Alg}\,S_0$ закончено.

Из описания $\mathrm{Alg}\,S_0$ нетрудно видеть, что если $S_0(a_0,b_0,c_0,e_0) \approx \overline{S}_1(a_1,b_1,c_1,e_1)$ или $S_0(a_0,b_0,c_0,e_0) \approx \overline{S}_2(a_2,b_2,c_2,e_2)$, то соответственно $S_0 \approx \overline{S}_1$ или $S_0 \approx \overline{S}_2$. В противном случае изображение S_0 заведомо a'-разное и с $\overline{S}_1$, и с $\overline{S}_2$.

Теорема 5. *Если S_1 и S_2 суть a'-разные проекции тела T, $\overline{S}_1 \approx S_1$, $\overline{S}_2 \approx S_2$ и изображение S_0 построено по $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ использованием $\mathrm{Alg}\,S_0$, то существует тело T', a'-эквивалентное телу T и такое, что изображение S_0 является его проекцией (возможно неполной) по некоторому направлению.*

Доказательство. Выберем на $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ точки a_1, b_1, c_1, e_1 и a_2, b_2, c_2, e_2 такие, что $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ — треугольники и точка e_1 лежит вне плоскости треугольника $a_1b_1c_1$. Используя алгоритмы $\mathrm{Alg}\,T'$ и $\mathrm{Alg}\,S_0$, построим тело T' и изображение S_0.

Выберем некоторое направление проекции α' (не параллельное плоскости построенного изображения S_0). Проведем через каждую из точек a_0, b_0, c_0, e_0 лучи проекции, параллельные α', и возьмем на этих лучах по произвольной точке (обозначим их соответственно a'', b'', c'', e'') с тем, однако, условием, чтобы они не лежали в одной плоскости. Совместим аффинными преобразованиями тела T' точки a', b', c', e' (см. $\mathrm{Alg}\,T'$) соответственно с точками a'', b'', c'', e''. Покажем, что тело T' после преобразования и есть искомое тело. Надо, очевидно, показать, что проекциями точек тела T' по направлению α' будут после преобразования точки изображения S_0.

Проекциями точек a', b', c', e' (совмещенными с a'', b'', c'', e'') являются по построению точки a_0, b_0, c_0, e_0.

Рассмотрим произвольную точку d_1 (отличную от a_1, b_1, c_1, e_1) на $\overline{S}_1$. Ей соответствует на S_0 точка d_0, а на T' — точка d'. Покажем, что проекцией точки d' является точка d_0.

1. Пусть точка d_1 лежит в плоскости треугольника $a_1b_1c_1$. Тогда по построению имеем $T'(a',b',c',d') \approx \overline{S}_1(a_1,b_1,c_1,d_1)$ и $S_0(a_0,b_0,c_0,d_0) \approx \overline{S}_1(a_1,b_1,c_1,d_1)$. Следовательно, $T'(a',b',c',d') \approx S_0(a_0,b_0,c_0,d_0)$. Известно, что параллельным проецированием точек одной плоскости на другую определяется аффинное преобразование точек одной плоскости в точки другой (и наоборот). Заданием направления проекции α' каждой точке плоскости изображения $T'(a',b',c',d')$ ставится в соответствие единственная точка плоскости изображения S_0, причем этим аффинным преобразованием точкам a', b', c' ставятся в соответствие a_0, b_0, c_0. Следовательно, в силу того, что $T'(a',b',c',d') \approx S_0(a_0,b_0,c_0,d_0)$, точке d' будет поставлена в соответствие точка d_0, т. е. точка d_0 будет лежать на луче проекции от точки d'.

Итак, показано, что d_0 является проекцией точки d' для случая, когда d_1 лежит в плоскости треугольника $a_1b_1c_1$. Это соответствует случаю п. 1 в $\mathrm{Alg}\,T'$ и $\mathrm{Alg}\,S_0$. Повторяя аналогичным образом рассуждения для пп. 2, 2а и 2б, покажем, что произвольная точка d' имеет проекцией по направлению α' точку d_0, что и завершит доказательство теоремы.

Посредством $\mathrm{Alg}\, S_0$ получается изображение S_0, про которое априори нельзя утверждать, что оно — проекция. Содержательный смысл теоремы 2 как раз и состоит в утверждении о том, что для любого таким образом построенного изображения S_0 можно так аффинно преобразовать тело T, что S_0 будет его проекцией по некоторому направлению.

В связи с этим встает такой вопрос: можно ли для тела T', полученного из T аффинными преобразованиями (в частности, и для самого тела T), посредством $\mathrm{Alg}\, S_0$ получить любую его проекцию?

Лемма 7. *Для любой (в том числе и неполной) проекции S_x объемного тела T существуют в T такие четыре точки, не лежащие в одной плоскости, что их проекции на S_x — разные точки.*

Доказательство. Возьмем на S_x точки a_x, b_x, c_x такие, что $a_xb_xc_x$ — треугольник. На S_x должны существовать точки, отличные по положению от a_x, b_x, c_x, ибо в противном случае T — не объемное тело. Пусть e_x — такая точка. Если соответствующая точка e лежит вне плоскости грани abc, то четверка точек a, b, c, e — искомая. Допустим противное, и точек на S_x, отличных по положению от a_x, b_x, c_x и таких, что соответствующие точки в теле T лежат вне плоскости грани abc, нет. Тогда на каком-либо из лучей проекции, идущих от a, b, c, должна быть точка, отличная от a, b, c, ибо в противном случае T — двумерное тело. Пусть для определенности это будет точка v на луче проекции, идущем от точки a. Таким образом, проекция v_x точки v на S_x совпадает с a_x. Но тогда четверка v, e, b, c — искомая, если e не лежит на ребре bc или его продолжении.

Пусть e лежит на ребре bc или его продолжении. Тело T не может состоять только из точек a, b, c, e, v, ибо тогда T — не объемное тело. Значит, на каком-либо из лучей проекции, идущем от точек a, b, c, должна быть еще хотя бы одна точка (обозначим ее u). Эта точка не может лежать на луче от a, ибо в противном случае все точки тела T будут располагаться в пространстве на двух скрещивающихся прямых: точки a, v, u — на одной, и точки b, c, e — на другой. В этом случае тело T — не объемное. Значит, точка u должна быть на луче либо от точки b, либо от точки c. Пусть для определенности u расположена на луче от точки b. Тогда, например, четверка v, u, c, e — искомая. Лемма доказана.

Теорема 6. *Если T — объемное тело, S_1 и S_2 — проекции его по разным направлениям α_1 и α_2, $\overline{S}_1 \approx S_1$, $\overline{S}_2 \approx S_2$ и T' — некоторое тело, a'-эквивалентное телу T, то по $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ использованием $\mathrm{Alg}\, S_0$ можно получить любую (включая неполные) проекцию тела T'.*

Доказательство. Пусть S_x — произвольная (включая неполные) проекция тела T' по направлению α_x. Покажем, что она может быть получена по $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ использованием $\mathrm{Alg}\, S_0$.

Рассмотрим четыре разные точки a_x, b_x, c_x, e_x на S_x такие, что соответствующие точки a', b', c', e' в теле T' образуют тетраэдр. Согласно лемме 7 такие точки есть. Рассмотрим тетраэдр $a'b'c'e'$ в теле T' и соответствующий тетраэдр $abce$ в теле T. В каждом из этих тетраэдров по четыре грани. Каждое из направлений проекций α_x, α_1, α_2 может быть параллельным только одной грани (в своем тетраэдре). Следовательно, имеется такая грань в T' и соответствующая грань в T, которые не параллельны α_x в T' и α_1, α_2 в T. Пусть для определенности это будет грань $a'b'c'$ в T' и соответственно грань abc в T. Следовательно, $a_xb_xc_x$, $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ — треугольники.

Выберем в качестве исходных четверок точек на $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ для $\mathrm{Alg}\, S_0$ точки a_1, b_1, c_1, e_1 и a_2, b_2, c_2, e_2. В качестве точек a_0, b_0, c_0, e_0 возьмем точки соответственно a_x, b_x, c_x, e_x. Остальные точки изображения S_0 строятся при заданных a_x, b_x, c_x, e_x однозначно. Построениями, повторяющими использованные в теоремах 1 и 2, нетрудно показать, что каждая точка d_0, строящаяся посредством $\mathrm{Alg}\, S_0$, совместится с соответствующей точкой d_x на проекции S_x, что и завершает доказательство теоремы.

Теорему 5 можно рассматривать как в некотором смысле прямое утверждение: *если имеются две проекции тела T, то в результате применения* $\mathrm{Alg}\, S_0$ *получается изображение, которое тоже является проекцией тела T (или тела, a'-эквивалентного телу T).*

Теорему 6 можно интерпретировать как своего рода обратное утверждение: *если S_x — проекция тела T (или тела, a'-эквивалентного телу T), то S_x можно получить как результат применения* $\mathrm{Alg}\, S_0$.

До сих пор предполагалось, что точки на $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ размечены. Теперь же предположим, что разметка неизвестна. Если каждое из $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ состоит из n точек, то возможны $n!$ вариантов разметки. Пусть при данном варианте разметки точкам $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ на $\overline{S}_1$ ставятся в соответствие точки $y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}$ на $\overline{S}_2$. Пусть существует тело T' из точек $z_1, \ldots, z_n$ и его проекции S'_1 и S'_2 такие, что $S'_1 \approx \overline{S}_1$, $S'_2 \approx \overline{S}_2$, и точки x_{i_k} и y_{j_k} являются проекциями точки z_k $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда данный вариант разметки назовем *приемлемым* или *решением*. По условию одно решение (с исходным телом T) существует, однако в общем случае решение не единственное. Пример нетрудно построить с использованием симметричного объемного тела.

Опишем процедуру проверки данной разметки на приемлемость. Выберем на $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ такие точки x_{i_a}, x_{i_b}, x_{i_c}, x_{i_e} и y_{j_a}, y_{j_b}, y_{j_c}, y_{j_e}, что x_{i_a}, x_{i_b}, x_{i_c} и y_{j_a}, y_{j_b}, y_{j_c} — треугольники и $\overline{S}_1(x_{i_a}, x_{i_b}, x_{i_c}, x_{i_e}) \not\approx \overline{S}_2(y_{j_a}, y_{j_b}, y_{j_c}, y_{j_e})$. Проведем лучи, параллельные некоторому направлению α', через все точки изображения $\overline{S}_1$. На лучах, проходящих через x_{i_a}, x_{i_b}, x_{i_c}, x_{i_e}, возьмем точки z'_a, z'_b, z'_c, z'_e, не лежащие в одной плоскости. Если разметка приемлемая, то далее применением $\mathrm{Alg}\, T'$ можно было бы построить остальные точки тела T', лежащие на лучах от соответствующих точек на $\overline{S}_1$. Затем аналогичное проделаем для $\overline{S}_2$: проведем лучи по направлению α''; на лучах через точки y_{j_a}, y_{j_b}, y_{j_c}, y_{j_e} отметим точки z''_a, z''_b, z''_c, z''_e, не лежащие в одной плоскости. Далее, если разметка приемлемая, можно построить тело T''. Возьмем теперь всю конструкцию из точек изображения $\overline{S}_1$ и лучей проекции через эти точки и аффинными преобразованиями ее как целого совместим точки z'_a, z'_b, z'_c, z'_e с точками z''_a, z''_b, z''_c, z''_e. Если тела T' и T'' существуют, то в силу теоремы 4 они a'-эквивалентны, значит, они совместятся полностью, и в каждой их точке сходятся пары лучей от соответствующих точек на $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, и только они. Отметим, что не все возможные $n!$ вариантов разметок надо проверять на приемлемость. Пусть, например, при данных четверках x_{i_a}, x_{i_b}, x_{i_c}, x_{i_e} и y_{j_a}, y_{j_b}, y_{j_c}, y_{j_e} лучи проекции от некоторой точки x на $\overline{S}_1$ и сопоставленной ей (при данной разметке) точки y на $\overline{S}_2$ не сходятся. Тогда они не сходятся и при всех вариантах разметок, в которых сопоставляются друг другу точки данных четверок и точка x точке y. Все такие разметки заранее можно исключить как неприемлемые. С учетом этого оценка числа вариантов разметки для проверки на приемлемость понижается до n^4.

Автор выражает глубокую благодарность С. В. Яблонскому и В. Б. Кудрявцеву за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейн Ф. Геометрия. — М.: Наука, 1987.
2. Козлов В. Н. О математическом моделировании сложных форм поведения // Проблемы кибернетики. Вып. 39. — М.: Наука, 1982. — С. 223–256.
3. Крушинский Л. В., Козлов В. Н., Кудрявцев В. Б. О некоторых результатах применения математики к моделированию в биологии // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 52–88.
4. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. — М.: Мир, 1989.
5. Хорн Б. К. П. Зрение роботов. — М.: Мир, 1989.
6. Хьюбел Д. Глаз, мозг, зрение. — М.: Мир, 1990.

Поступило в редакцию 19 VII 1995