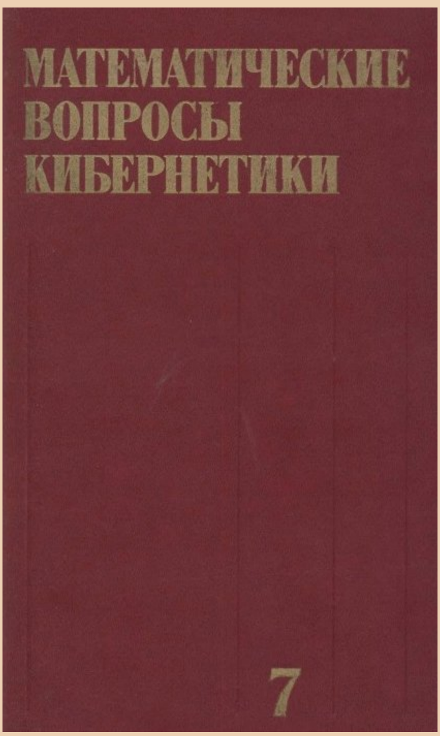

М. Ю. Мошков

Оценки глубины деревьев решений над конечными двузначными системами проверок

ОЦЕНКИ ГЛУБИНЫ ДЕРЕВЬЕВ РЕШЕНИЙ НАД КОНЕЧНЫМИ ДВУЗНАЧНЫМИ СИСТЕМАМИ ПРОВЕРОК *)

М. Ю. МОШКОВ

(НИЖНИЙ НОВГОРОД)

1. Введение. В работе рассматриваются конечные двузначные системы проверок, широко используемые в различных приложениях, связанных с решением задач распознавания образов, диагностики неисправностей, дискретной оптимизации. Для произвольной конечной двузначной системы проверок, не содержащей проверок, тождественно равных константе, изучается поведение глобальной функции Шеннона — неулучшаемой верхней оценки минимальной глубины деревьев решений, решающих задачи над данной системой проверок, в зависимости от числа проверок, входящих в описание задачи. В работе рассматривается глобальный подход к исследованию деревьев решений, при котором в деревьях решений допускается использование произвольных проверок из данной системы. Отметим, что близкие к полученным в работе, но несколько более слабые оценки были ранее приведены без доказательства в докладе [9]. Упомянем также работу [7], которая содержит результаты аналогичного исследования, проведенного в рамках локального подхода, когда в деревьях решений для задачи разрешается использовать только проверки, входящие в описание задачи.

Доказательства основаны на применении методов и результатов теории тестов, начало которой положено работами [5, 6]. Следует отметить также исследования в области теории грубых множеств [11, 14], идейно близкие к теории тестов и возникшие в связи с необходимостью обработки (с целью осмысления и использования) больших массивов экспериментальной информации, накопленной в разнообразных базах данных. Постановка рассматриваемой задачи в значительной мере связана с подобными исследованиями.

2. Основные понятия. Пусть A — непустое множество, F — некоторое непустое множество функций, определенных на A и принимающих значения из множества $E_2 = \{0, 1\}$. Функции из F будем называть *проверками*, а пару $U = (A, F)$ — *двузначной системой проверок*. Далее для любой проверки f из F будем предполагать, что $f \not\equiv \mathrm{const}$. Систему U будем называть *конечной* или *бесконечной* системой проверок в зависимости от того, конечно или бесконечно множество F.

Обозначим через Ω_U множество всевозможных конечных слов в алфавите $\{(f, \delta)\colon\ f \in F,\ \delta \in E_2\}$, включая пустое слово λ. Для произвольного слова α из Ω_U обозначим через $\chi(\alpha)$ множество букв алфавита $\{(f, \delta)\colon\ f \in F,\ \delta \in E_2\}$, входящих в α. Слову α сопоставим подмножество $A(\alpha)$ множества A: при $\alpha = \lambda$ положим $A(\alpha) = A$, а ес-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00428) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект № 473 — Учебно-научный центр «Методы дискретной математики для новых информационных технологий»).

ли $\alpha \neq \lambda$ и $\alpha = (f_1, \delta_1) \ldots (f_n, \delta_n)$, то пусть $A(\alpha)$ есть множество решений на A системы уравнений $f_1(x) = \delta_1, \ldots, f_n(x) = \delta_n$.

Мы будем рассматривать задачи над системой проверок U. *Задача над U* — это произвольный набор вида $z = (\nu, f_1, \ldots, f_n)$, где $\nu\colon E_2^n \to \omega$, $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, а $f_1, \ldots, f_n$ — попарно различные проверки из F. Число n будем называть *размерностью* задачи z и будем обозначать его $\dim z$. Обозначим $P(z) = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Задаче z сопоставим отображение $z\colon A \to \omega$, где $z(a) = \nu(f_1(a), \ldots, f_n(a))$ для любого $a \in A$. Задачу z можно интерпретировать как поиск значения $z(a)$ для произвольного $a \in A$. В таком виде представимы различные задачи распознавания образов, дискретной оптимизации, диагностики неисправностей, вычислительной геометрии. Через $Z(U)$ обозначим множество всевозможных задач над системой проверок U.

В качестве алгоритмов решения задач будем рассматривать деревья решений. *Дерево решений над U* — это конечное ориентированное дерево с корнем, причем каждой концевой вершине приписано число из ω (результат работы дерева решений); каждой неконцевой вершине (такие вершины будем называть рабочими) — проверка из F; каждой дуге — число из множества E_2 (значение проверки, при котором переход осуществляется по данной дуге), причем дугам, выходящим из одной и той же рабочей вершины, приписаны попарно различные числа.

Пусть Γ — дерево решений над U. Обозначим через $P(\Gamma)$ множество проверок, приписанных рабочим вершинам дерева Γ. *Полный путь* в Γ — это произвольная последовательность $\xi = v_1, d_1, \ldots, v_m, d_m, v_{m+1}$ вершин и дуг, в которой v_1 — корень, v_{m+1} — концевая вершина, и для $i = 1, \ldots, m$ дуга d_i ведет из вершины v_i в вершину v_{i+1}. Число m называется *длиной* пути ξ. (Если путь содержит ровно одну вершину, считаем $m = 0$.) Пути ξ сопоставим слово $\pi(\xi)$ из Ω_U. При $m = 0$ положим $\pi(\xi) = \lambda$. Пусть $m > 0$ и пусть при $i = 1, \ldots, m$ вершинам v_i приписаны проверки f_i, а дугам d_i — числа δ_i из E_2. Тогда $\pi(\xi) = (f_1, \delta_1) \ldots (f_m, \delta_m)$. Обозначим через $\Xi(\Gamma)$ множество всех полных путей в дереве решений Γ.

Будем говорить, что дерево решений Γ над U *решает* задачу z над U, если для любого a из A в дереве Γ существует такой полный путь ξ, что $a \in A(\pi(\xi))$ и концевой вершине пути ξ приписано число $z(a)$.

В качестве меры сложности дерева решений Γ будем рассматривать его *глубину* $h(\Gamma)$ — максимальную длину полного пути.

3. Глобальные функции Шеннона. Пусть $U = (A, F)$ — двузначная система проверок. Через $h_U(z)$ обозначим минимальную глубину дерева решений над U, решающего задачу z. Мы будем изучать соотношения между параметрами $h_U(z)$ и $\dim z$. Для задачи $z = (\nu, f_1, \ldots, f_n)$ значение $\dim z$ можно интерпретировать как глубину дерева решений, решающего задачу z тривиальным образом: посредством последовательного вычисления значений проверок $f_1, \ldots, f_n$. Таким образом, мы будем изучать соотношения между глубиной оптимального и тривиального деревьев решений. С этой целью определим функцию $S_U\colon \omega \setminus \{0\} \to \omega$, положив

$$S_U(n) = \max\{h_U(z)\colon z \in Z(U), \dim z \leqslant n\}, \qquad n \in \omega \setminus \{0\}.$$

Значение $S_U(n)$ является неулучшаемой верхней оценкой значения $h_U(z)$ для задач z из $Z(U)$, удовлетворяющих неравенству $\dim z \leqslant n$. Ясно, что $S_U(n) \leqslant n$ при $n \in \omega \setminus \{0\}$. Функцию S_U будем называть *глобальной функцией Шеннона* для системы проверок U.

Как было показано в [4, 8], поведение этой функции для произвольной двузначной системы проверок U относится к одному из трех типов:

1) $S_U(n) = O(1)$, $n \to \infty$;
2) $S_U(n) = \Omega(\log_2 n)$ и $S_U(n) = O(\log_2^2 n)$, $n \to \infty$;
3) $S_U(n) = n$ для любого n из $\omega \setminus \{0\}$.

Первый тип реализуется в том и только том случае, когда U — конечная система проверок. (Отметим, что работа [10] содержит критерии реализации второго и третьего типов поведения.)

Приведенное утверждение дает некоторую информацию о поведении глобальных функций Шеннона для бесконечных систем проверок; для конечных же систем U мы имеем лишь соотношение $S_U(n)=O(1)$. Однако конечные системы проверок очень важны для различных приложений.

Мы изучим поведение глобальной функции Шеннона для произвольной конечной двузначной системы проверок $U=(A, F)$.

Множество проверок $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq F$ будем называть *зависимым*, если $n \geqslant 2$ и существует такое число i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, и отображение μ: $E_2^{n-1} \to E_2$, что для любого a из A выполнено соотношение

$$f_i(a)=\mu(f_1(a), \ldots, f_{i-1}(a), f_{i+1}(a), \ldots, f_n(a));$$

в противном случае множество проверок будем называть *независимым*. Обозначим через $\operatorname{in}(U)$ максимальную мощность независимого подмножества в множестве F.

Задачу $z \in Z(U)$ будем называть *стабильной*, если $h_U(z)=\dim z$. Через $\operatorname{st}(U)$ обозначим максимальную размерность стабильной задачи над U. Можно показать, что $1 \leqslant \operatorname{st}(U) \leqslant \operatorname{in}(U)$.

Опишем поведение глобальной функции Шеннона S_U в терминах параметров $\operatorname{st}(U)$ и $\operatorname{in}(U)$ системы проверок U.

Теорема. *Пусть $U=(A, F)$ — конечная двузначная система проверок, причем для любой проверки f из F выполнено $f \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда для любого n из $\omega \setminus \{0\}$ имеют место следующие утверждения.*

I. *Если $n \leqslant \operatorname{st}(U)$, то $S_U(n)=n$.*

II. *Если $\operatorname{st}(U) < n \leqslant \operatorname{in}(U)$, то*

$$\max\{\operatorname{st}(U), \log_2(n+1)\} \leqslant S_U(n) \leqslant$$
$$\leqslant \min\{n-1,\ 4(\operatorname{st}(U)+1)^4 \log_2^2 n + 4(\operatorname{st}(U)+1)^5 \log_2 n\}.$$

III. *Если $n \geqslant \operatorname{in}(U)$, то $S_U(n)=S_U(\operatorname{in}(U))$.*

Проблема вычисления значений $\operatorname{st}(U)$ и $\operatorname{in}(U)$ для произвольной конечной двузначной системы проверок U является сложной. Однако полученные результаты позволяют существенно сузить класс возможных типов поведения глобальных функций Шеннона для таких систем.

Пример 1. Пусть A — множество точек плоскости. Рассмотрим произвольную прямую l, которая разбивает плоскость на положительную и отрицательную открытые полуплоскости и собственно линию l. Прямой l сопоставим функцию f: $A \to \{0, 1\}$, принимающую значение 1, если точка расположена в положительной полуплоскости, и значение 0, если точка расположена в отрицательной полуплоскости или на прямой l. Обозначим через F множество функций, сопоставленных прямым из некоторых r, $r > 0$, непустых конечных попарно непересекающихся классов параллельных прямых. Рассмотрим конечную двузначную систему проверок $U=(A, F)$. Можно показать, что $\operatorname{in}(U)=|F|$ и $\operatorname{st}(U) \leqslant 2r$.

4. Некоторые результаты из теории тестов. В п. 4 приводятся оценки, полученные в теории тестов и применяемые в дальнейшем при изучении глубины деревьев решений. Для удобства использования мы формулируем эти оценки не в терминах параметров тестовых таблиц, а непосредственно в терминах параметров задач.

Пусть $U=(A, F)$ — двузначная система проверок, $z=(\nu, f_1, \ldots, f_n)$ — задача над U. Обозначим $C(z)=|\{z(a)\colon a \in A\}|$. Ясно, что $C(z) \geqslant 1$. Следующая нижняя оценка величины $h_U(z)$ вытекает из леммы 4.1.3 работы [3].

Предложение 1. *Пусть U — двузначная система проверок, z — задача над U. Тогда $h_U(z) \geqslant \lceil \log_2 C(z) \rceil$.*

Определим параметры $M(z)$ и $N(z)$ задачи z. Для произвольного $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ из E_2^n обозначим через $M(z, \boldsymbol{\delta})$ минимальную длину слова α из Ω_U, для которого $\chi(\alpha) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_n, \delta_n)\}$ и $|\{z(a)\colon a \in A(\alpha)\}| \leqslant 1$. Тогда $M(z) = \max\{M(z, \boldsymbol{\delta})\colon \boldsymbol{\delta} \in E_2^n\}$. Обозначим, далее, $N(z) = |\{(\delta_1, \ldots, \delta_n)\colon (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E_2^n,\ A((f_1, \delta_1) \ldots (f_n, \delta_n)) \neq \varnothing\}|$.

Приведем верхнюю оценку величины $h_U(z)$ через эти параметры. Она является простым следствием теорем 2.3.1 и 3.2.1 работы [3]. Аналогичная оценка содержится в работе [2].

Предложение 2. *Пусть U — двузначная система проверок, z — задача над U. Тогда $h_U(z) \leqslant M(z) \log_2 N(z)$.*

Определим параметр $V(z)$ задачи z. При $N(z) = 1$ положим $V(z) = 0$. При $N(z) > 1$ пусть $V(z)$ — максимальное число m, $m \in \{1, \ldots, n\}$, для которого существуют такие проверки $f_{i_1}, \ldots, f_{i_m} \in \{f_1, \ldots, f_n\}$, что при любых $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in E_2$ выполняется соотношение $A((f_{i_1}, \sigma_1) \ldots (f_{i_m}, \sigma_m)) \neq \varnothing$. Приведем верхнюю оценку величины $N(z)$, которая непосредственно вытекает из теоремы 3.5.1 работы [3].

Предложение 3. *Пусть U — двузначная система проверок, z — задача над U. Тогда $N(z) \leqslant (4 \dim z)^{V(z)}$.*

Отметим, что эта оценка подобна результатам, полученным в [1, 12, 13].

5. Доказательство теоремы. Для произвольного p из $\omega \setminus \{0\}$ обозначим через ν_p такое отображение множества E_2^p в ω, что $\nu_p(\boldsymbol{\delta}_1) \neq \nu_p(\boldsymbol{\delta}_2)$ для любых различных $\boldsymbol{\delta}_1$ и $\boldsymbol{\delta}_2$ из E_2^p. Это обозначение будем часто использовать в последующих доказательствах.

Докажем вначале следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $U = (A, F)$ — конечная двузначная система проверок, причем $f \not\equiv \mathrm{const}$ для любой проверки f из F. Тогда для всех n, $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$, справедливо неравенство*

$$S_U(n) \leqslant 4(\mathrm{st}(U) + 1)^4 \log_2^2 n + 4(\mathrm{st}(U) + 1)^5 \log_2 n.$$

Доказательство. Обозначим $m = \mathrm{st}(U)$. Ясно, что $S_U(m+1) \leqslant m$.

Покажем, что для любой задачи z из $Z(U)$ выполняется неравенство $V(z) \leqslant m$. Предположим противное: пусть существует задача $z \in Z(U)$, для которой $V(z) = t > m$. Тогда существуют такие проверки $f_1, \ldots, f_t \in P(z)$, что для любых чисел $\delta_1, \ldots, \delta_t \in E_2$ выполнено соотношение $A((f_1, \delta_1) \ldots (f_t, \delta_t)) \neq \varnothing$. Рассмотрим задачу $z' = (\nu_t, f_1, \ldots, f_t)$. Ясно, что $C(z') = N(z') = 2^t$. Используя предложение 1, получаем $h_U(z') \geqslant t$. Поскольку $\dim z' = t$, получаем, что z' — стабильная задача над U, а этого не может быть. Таким образом, для любой задачи z из $Z(U)$ выполнено неравенство $V(z) \leqslant m$. Используя предложение 3, получаем, что для любой задачи z из $Z(U)$ имеет место неравенство

$$N(z) \leqslant 2^{2m} (\dim z)^m. \tag{1}$$

Пусть $f_1, \ldots, f_{m+1}$ — попарно различные проверки из F. Обозначим $z(f_1, \ldots, f_{m+1}) = (\nu_{m+1}, f_1, \ldots, f_{m+1})$. Используя неравенство $S_U(m+1) \leqslant m$, получаем, что существует дерево решений $\Gamma(f_1, \ldots, f_{m+1})$ над U, имеющее глубину не более m и решающее задачу $z(f_1, \ldots, f_{m+1})$. Ясно, что для любых $\delta_1, \ldots, \delta_{m+1} \in E_2$ и для любого полного пути ξ из дерева $\Gamma(f_1, \ldots, f_{m+1})$ выполнено соотношение $A((f_1, \delta_1) \ldots (f_{m+1}, \delta_{m+1})) \cap A(\pi(\xi)) = \varnothing$ или соотношение $A(\pi(\xi)) \subseteq A((f_1, \delta_1) \ldots (f_{m+1}, \delta_{m+1}))$. Число рабочих вершин в дереве $\Gamma(f_1, \ldots, f_{m+1})$ обозначим через $L_w(\Gamma(f_1, \ldots, f_{m+1}))$. Нетрудно показать, что

$$L_w(\Gamma(f_1, \ldots, f_{m+1})) \leqslant 2^m. \tag{2}$$

Пусть $f_1, \ldots, f_q$ — попарно различные проверки из F, причем $q \leqslant m$. Определим дерево решений $\Gamma(f_1, \ldots, f_q)$ над U. Пусть из каждой его рабочей вершины выходят ровно две дуги, и в каждом полном пути имеется ровно q рабочих вершин. Пусть $\xi = v_1, d_1, \ldots, v_q, d_q, v_{q+1}$ — произвольный полный путь в дереве $\Gamma(f_1, \ldots, f_q)$. Тогда вершине v_i, $i = 1, \ldots, q$ припишем проверку f_i, а вершине v_{q+1} — число 0.

Индуктивно определим для каждой задачи $z \in Z(U)$ подмножество $J(z)$ множества F. При $\dim z \leqslant m$ положим $J(z) \rightleftharpoons P(z)$. Пусть для некоторого n, $n \geqslant m+1$, множества $J(z')$ уже определены для всех задач z' из $Z(U)$, $\dim z' < n$. Определим множество $J(z)$ для $z = (\nu, f_1, \ldots, f_n) \in Z(U)$. Пусть $n = t(m+1) + q$, где $t \in \omega \setminus \{0\}$, $0 \leqslant q \leqslant m$. Обозначим $\Gamma_i = \Gamma(f_{(m+1)(i-1)+1}, \ldots, f_{(m+1)(i-1)+m+1})$ при $i = 1, \ldots, t$. Определим дерево решений Γ_{t+1} над U. При $q = 0$ пусть оно состоит только из корня, которому приписано число 0. При $q > 0$ положим $\Gamma_{t+1} = \Gamma(f_{(m+1)t+1}, \ldots, f_{(m+1)t+q})$. Определим деревья решений $G_1, \ldots, G_{t+1}$ над U следующим образом: $G_1 = \Gamma_1$, а для $i = 1, \ldots, t$ дерево G_{i+1} получается из G_i заменой каждой концевой вершины v на дерево Γ_{i+1} (дуга, входившая в вершину v, присоединяется к корню дерева Γ_{i+1}). Обозначим через $\Gamma(z)$ дерево решений над U, состоящее из тех и только тех вершин и дуг дерева G_{t+1}, через каждую из которых проходит некоторый полный путь ξ со свойством $A(\pi(\xi)) \neq \varnothing$. Нетрудно показать, что $\bigcup_{\xi \in \Xi(\Gamma(z))} A(\pi(\xi)) = A$. Обозначим $c = \frac{2m}{2m+1}$. Легко видеть, что $h(G_{t+1}) \leqslant mt + q \leqslant cn$. Поэтому

$$h(\Gamma(z)) \leqslant cn. \tag{3}$$

Из (2) и описания дерева Γ_{t+1} следует, что $|P(G_{t+1})| \leqslant t2^m + q \leqslant n2^m$. Используя эти оценки и (1), нетрудно показать, что дерево G_{t+1} имеет не более $2^{2m}(n2^m)^m = n^m 2^{m^2+2m}$ полных путей ξ, для которых $A(\pi(\xi)) \neq \varnothing$. Поэтому

$$|\Xi(\Gamma(z))| \leqslant n^m 2^{m^2+2m}. \tag{4}$$

Каждому полному пути ξ дерева $\Gamma(z)$ сопоставим задачу z_ξ из $Z(U)$. Пусть $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}\}$ — множество проверок из F, приписанных рабочим вершинам пути ξ. Тогда $z_\xi = (\nu_p, f_{i_1}, \ldots, f_{i_p})$. Из (3) следует, что для любого ξ из $\Xi(\Gamma(z))$ имеет место неравенство

$$\dim z_\xi \leqslant cn. \tag{5}$$

Поэтому, согласно предположению, множество $J(z_\xi)$ уже определено для любого ξ из $\Xi(\Gamma(z))$. Положим

$$J(z) = P(z) \cup \bigcup_{\xi \in \Xi(\Gamma(z))} J(z_\xi). \tag{6}$$

При $n \in \omega \setminus \{0\}$ обозначим $J_U(n) = \max\{|J(z)|: z \in Z(U), \dim z \leqslant n\}$. Индукцией по n, $n \in \omega \setminus \{0\}$, докажем неравенство

$$J_U(n) \leqslant n^{2(m+1)^2 \ln n} 2^{2(m+1)^3 \ln n}. \tag{7}$$

Ясно, что $J_U(n) \leqslant n$ при $n \leqslant m$. Таким образом, при $n \leqslant m$ неравенство (7) выполнено. Пусть для некоторого n, $n \geqslant m+1$, и любого n' из $\omega \setminus \{0\}$, $n' < n$, неравенство (7) справедливо. Покажем, что оно выполняется и для n. Пусть $z \in Z(U)$, $\dim z \leqslant n$. При $\dim z < n$ с использованием предположения индукции нетрудно показать, что $|J(z)| \leqslant n^{2(m+1)^2 \ln n} 2^{2(m+1)^3 \ln n}$. Пусть $\dim z = n$. Ясно, что $1 \leqslant \lfloor cn \rfloor < n$ и $J_U(\lfloor cn \rfloor) \geqslant 1$. Используя (4)–(6), получаем $|J(z)| \leqslant n + n^m 2^{m^2+2m} J_U(\lfloor cn \rfloor) \leqslant n^m 2^{m^2+2m+1} J_U(\lfloor cn \rfloor)$. Используя предположение индукции, получаем

$$|J(z)| \leqslant n^m 2^{(m+1)^2} \lfloor cn \rfloor^{2(m+1)^2 \ln \lfloor cn \rfloor} 2^{2(m+1)^3 \ln \lfloor cn \rfloor} \leqslant n^{m+2(m+1)^2 \ln cn} 2^{(m+1)^2 + 2(m+1)^3 \ln cn}.$$

Применяя справедливое для любого r из $\omega \setminus \{0\}$ неравенство $\ln(1+1/r) > 1/(r+1)$, получаем $\ln c < -1/(2m+1) < -1/2(m+1)$. Поэтому $|J(z)| \leqslant n^{2(m+1)^2 \ln n} 2^{2(m+1)^3 \ln n}$. Но z — произвольная задача из $Z(U)$, для которой $\dim z \leqslant n$, поэтому неравенство (7) выполняется.

Индукцией по n докажем следующее утверждение. Пусть $z = (\nu, f_1, \ldots, f_n)$ — задача из $Z(U)$, $J(z) = \{f_1, \ldots, f_p\}$, $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ принадлежит E_2^p, $\alpha(z, \boldsymbol{\delta}) = (f_1, \delta_1) \ldots (f_p, \delta_p)$ и $\beta(z, \boldsymbol{\delta}) = (f_1, \delta_1) \ldots (f_n, \delta_n)$. Тогда в Ω_U существует слово $\gamma(z, \boldsymbol{\delta})$ длины не более $2(m+1)$, для которого $\chi(\gamma(z, \boldsymbol{\delta})) \subseteq \chi(\alpha(z, \boldsymbol{\delta}))$ и $A(\gamma(z, \boldsymbol{\delta})) \subseteq A(\beta(z, \boldsymbol{\delta}))$.

При $n \leqslant 2(m+1)$ рассматриваемое утверждение выполняется: в качестве слова $\gamma(z, \boldsymbol{\delta})$ можно взять $\beta(z, \boldsymbol{\delta})$. Предположим, что при некотором n, $n \geqslant 2(m+1)+1$, рассматриваемое утверждение справедливо для всех задач z из $Z(U)$, для которых $\dim z < n$. Покажем, что рассматриваемое утверждение выполнено для произвольной задачи $z = (\nu, f_1, \ldots, f_n)$ из $Z(U)$. Пусть $J(z) = \{f_1, \ldots, f_p\}$ и $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ принадлежит E_2^p. Нетрудно показать, что $P(\Gamma(z)) \subseteq J(z)$. Рассмотрим в дерева $\Gamma(z)$ ориентированный путь $\varkappa = v_1, d_1, \ldots, v_r, d_r, v_{r+1}$, начинающийся в корне этого дерева и обладающий следующими свойствами:

1) если вершине v_i, $i = 1, \ldots, r$, приписана проверка f_l, то дуге d_i приписано число δ_l;

2) если v_{r+1} — рабочая вершина дерева $\Gamma(z)$, которой приписана проверка f_l, то из вершины v_{r+1} не выходит дуга, которой приписано число δ_l.

Предположим вначале, что $\varkappa$ — полный путь в дереве $\Gamma(z)$. Пусть $n = t(m+1)+q$, где $t \in \omega \setminus \{0\}$, $0 \leqslant q \leqslant m$. Для $i = 1, \ldots, t$ обозначим $\Gamma_i = \Gamma(f_{(m+1)(i-1)+1}, \ldots, f_{(m+1)(i-1)+m+1})$. Определим дерево решений Γ_{t+1} над U. При $q = 0$ пусть оно состоит только из корня, которому приписано число 0. При $q > 0$ пусть $\Gamma_{t+1} = \Gamma(f_{(m+1)t+1}, \ldots, f_{(m+1)t+q})$. Определим слова $\beta_1, \ldots, \beta_{t+1}$:

$$\beta_i = \begin{cases} (f_{(m+1)(i-1)+1}, \delta_{(m+1)(i-1)+1}) \ldots (f_{(m+1)(i-1)+m+1}, \delta_{(m+1)(i-1)+m+1}), & 1 \leqslant i \leqslant t; \\ \lambda, & i = t+1,\ q = 0; \\ (f_{(m+1)t+1}, \delta_{(m+1)t+1}) \ldots (f_{(m+1)t+q}, \delta_{(m+1)t+q}), & i = t+1,\ q > 0. \end{cases}$$

Ясно, что $\beta(z, \boldsymbol{\delta}) = \beta_1 \ldots \beta_{t+1}$. Нетрудно заметить, что слово $\pi(\varkappa)$ можно представить в виде $\pi(\varkappa) = \pi(\xi_1) \ldots \pi(\xi_{t+1})$, где ξ_i — некоторый полный путь в дереве Γ_i, $i = 1, \ldots, t+1$.

Пусть существует такое i из $\{1, \ldots, t\}$, что $A(\beta_i) \cap A(\pi(\xi_i)) = \varnothing$. Обозначим $\gamma = \beta_i \pi(\xi_i)$. Ясно, что $\chi(\gamma) \subseteq \chi(\alpha(z, \boldsymbol{\delta}))$, $A(\gamma) = \varnothing$ и, следовательно, $A(\gamma) \subseteq A(\beta(z, \boldsymbol{\delta}))$, а длина слова γ не превосходит $m + 1 + m < 2(m+1)$. Таким образом, в данном случае в качестве слова $\gamma(z, \boldsymbol{\delta})$ можно взять γ.

Пусть при $i = 1, \ldots, t$ справедливо соотношение $A(\beta_i) \cap A(\pi(\xi_i)) \neq \varnothing$. Тогда, как отмечалось выше, $A(\pi(\xi_i)) \subseteq A(\beta_i)$. Ясно, что $A(\pi(\xi_{t+1})) = A(\beta_{t+1})$. Следовательно,

$$A(\pi(\varkappa)) \subseteq A(\beta(z, \boldsymbol{\delta})). \tag{8}$$

Рассмотрим задачу $z_\varkappa$. Пусть $z_\varkappa = (\nu_1, f_{j_1}, \ldots, f_{j_l})$ и $J(z_\varkappa) = \{f_{j_1}, \ldots, f_{j_u}\}$. Из (6) следует, что $J(z_\varkappa) \subseteq J(z)$. Обозначим $\boldsymbol{\delta}' = (\delta_{j_1}, \ldots, \delta_{j_u})$. Используя (5), получаем $\dim z_\varkappa < n$. Из этого неравенства и из предположения индукции следует, что существует такое слово $\gamma(z_\varkappa, \boldsymbol{\delta}')$ из Ω_U, что

$\chi(\gamma(z_x, \delta')) \subseteq \chi(\alpha(z_x, \delta'))$, $A(\gamma(z_x, \delta')) \subseteq A(\beta(z_x, \delta'))$, причем длина слова $\gamma(z_x, \delta')$ не превосходит $2(m+1)$. Понятно, что $\chi(\alpha(z_x, \delta')) \subseteq \chi(\alpha(z, \delta))$. Поэтому $\chi(\gamma(z_x, \delta')) \subseteq \chi(\alpha(z, \delta))$. Ясно, что $A(\pi(x)) = A(\beta(z_x, \delta'))$. Используя соотношение (8), получаем $A(\gamma(z_x, \delta')) \subseteq A(\beta(z, \delta))$. Таким образом, в этом случае в качестве слова $\gamma(z, \delta)$ можно взять $\gamma(z_x, \delta')$.

Предположим теперь, что путь x не является полным путем в дерева $\Gamma(z)$. Ясно, что в $\Gamma(z)$ существует полный путь ξ, проходящий через вершину v_{r+1}. Рассмотрим задачу z_ξ. Пусть $z_\xi = (\nu_l, f_{j_1}, \ldots, f_{j_l})$ и $J(z_\xi) = \{f_{j_1}, \ldots, f_{j_u}\}$. Из (6) следует, что $J(z_\xi) \subseteq J(z)$. Обозначим $\delta' = (\delta_{j_1}, \ldots, \delta_{j_u})$. Путь x не является полным путем дерева $\Gamma(z)$; с учетом этого нетрудно показать, что $A(\beta(z_\xi, \delta')) = \varnothing$. Используя (5), получаем $\dim z_\xi < n$. Из этого неравенства и из предположения индукции следует, что существует такое слово $\gamma(z_\xi, \delta')$ из Ω_U, что $\chi(\gamma(z_\xi, \delta')) \subseteq \chi(\alpha(z_\xi, \delta'))$, $A(\gamma(z_\xi, \delta')) \subseteq A(\beta(z_\xi, \delta'))$, а длина этого слова не превосходит $2(m+1)$. Ясно, что $\chi(\alpha(z_\xi, \delta')) \subseteq \chi(\alpha(z, \delta))$. Поэтому $\chi(\gamma(z_\xi, \delta')) \subseteq \chi(\alpha(z, \delta))$. В силу того, что $A(\gamma(z_\xi, \delta')) \subseteq A(\beta(z_\xi, \delta')) = \varnothing$, имеем $A(\gamma(z_\xi, \delta')) \subseteq A(\beta(z, \delta))$. Таким образом, в данном случае в качестве слова $\gamma(z, \delta)$ можно взять $\gamma(z_\xi, \delta')$.

Пусть $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$. Рассмотрим произвольную задачу z из $Z(U)$, для которой $\dim z \leqslant n$. Пусть $z = (\nu, f_1, \ldots, f_r)$ и $J(z) = \{f_1, \ldots, f_p\}$. Рассмотрим также задачу $z' = (\nu', f_1, \ldots, f_p)$, где $\nu'\colon E_2^p \to \omega$ и для любого набора $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ из E_2^p выполнено равенство $\nu'(\delta) = \nu(\delta_1, \ldots, \delta_r)$. Используя (1) и (7), получаем

$$N(z') \leqslant 2^{2m}\left(n^{2(m+1)^2 \ln n} 2^{2(m+1)^3 \ln n}\right)^m = n^{2m(m+1)^2 \ln n} 2^{2m + 2m(m+1)^3 \ln n} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2(m+1)^3 \log_2^2 n + 2(m+1)^4 \log_2 n}. \quad (9)$$

Покажем, что

$$M(z') \leqslant 2(m+1). \quad (10)$$

Пусть $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ принадлежит E_2^p. Тогда по доказанному выше существует такое слово $\gamma(z, \delta)$ из Ω_U, что $\chi(\gamma(z, \delta)) \subseteq \chi(\alpha(z, \delta))$, $A(\gamma(z, \delta)) \subseteq A(\beta(z, \delta))$, а длина этого слова не превосходит $2(m+1)$. Ясно, что $\chi(\gamma(z, \delta)) \subseteq \{(f_1, \delta_1), \ldots, (f_p, \delta_p)\}$. Используя соотношение $A(\gamma(z, \delta)) \subseteq$ $\subseteq A(\beta(z, \delta))$, нетрудно показать, что $|\{z'(a)\colon a \in A(\gamma(z, \delta))\}| \leqslant 1$. Следовательно, $M(z', \delta) \leqslant 2(m+1)$. Неравенство (10) выполнено, поскольку δ — произвольный набор из E_2^p. Из предложения 2 и неравенств (9), (10) следует, что $h_U(z') \leqslant M(z') \log_2 N(z') \leqslant 4(m+1)^4 \log_2^2 n + 4(m+1)^5 \log_2 n$. Ясно, что для любого элемента a множества A выполнено равенство $z(a) = z'(a)$. Поэтому $h_U(z) = h_U(z')$ и $h_U(z) \leqslant 4(m+1)^4 \log_2^2 n + 4(m+1)^5 \log_2 n$. Учитывая, что $m = \mathrm{st}(U)$ и z — произвольная задача из $Z(U)$, для которой $\dim z \leqslant n$, получаем $S_U(n) \leqslant 4(\mathrm{st}(U)+1)^4 \log_2^2 n + 4(\mathrm{st}(U)+1)^5 \log_2 n$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $n \in \omega \setminus \{0\}$.

I. (Случай $n \leqslant \mathrm{st}(U)$.) Обозначим $m = \mathrm{st}(U)$. Пусть $z = (\nu, f_1, \ldots, f_m)$ — задача над U, для которой $h_U(z) = m$. Рассмотрим задачу $z' = (\nu_n, f_1, \ldots, f_n)$ из $Z(U)$. Предположим, что $h_U(z') < n$. Тогда, как нетрудно показать, $h_U(z) < m$, что невозможно. Следовательно, $h_U(z') = n$ и $S_U(n) \geqslant n$. Ясно, что $S_U(n) \leqslant n$. Поэтому $S_U(n) = n$ и утверждение I теоремы доказано.

II. (Случай $\mathrm{st}(U) < n \leqslant \mathrm{in}(U)$.) Неравенство $\mathrm{st}(U) \leqslant S_U(n)$ очевидно. Покажем, что имеет место неравенство $\log_2(n+1) \leqslant S_U(n)$.

Из того, что $n \leqslant \mathrm{in}(U)$, следует существование множества проверок $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq F$, которое является независимым. Ясно, что $n \geqslant 2$.

Для $i = 1, \ldots, n$ обозначим $z_i = (\nu_i, f_1, \ldots, f_i)$. Из условия $f_1 \not\equiv \mathrm{const}$ следует $N(z_1) \geqslant 2$. Покажем, что $N(z_i) < N(z_{i+1})$ при $i = 1, \ldots, n-1$. Предположим противное: пусть $N(z_i) = N(z_{i+1})$ для некоторого i из $\{1, \ldots, n-1\}$. Нетрудно показать, что в этом случае существует такое отображение μ: $E_2^i \to E_2$, что $f_{i+1}(a) = \mu(f_1(a), \ldots, f_i(a))$ для любого a из A; но это невозможно. Таким образом, $N(z_1) \geqslant 2$ и $N(z_i) < N(z_{i+1})$ при $i = 1, \ldots, n-1$. Поэтому $N(z_n) \geqslant n+1$. Нетрудно заметить, что $C(z_n) = N(z_n)$. Используя предложение 1, получаем $h_U(z_n) \geqslant \log_2(n+1)$. С учетом равенства $\dim z_n = n$ получаем $\log_2(n+1) \leqslant S_U(n)$.

Неравенство $S_U(n) \leqslant n-1$ очевидно. Неравенство

$$S_U(n) \leqslant 4(\mathrm{st}(U)+1)^4 \log_2^2 n + 4(\mathrm{st}(U)+1)^5 \log_2 n$$

следует из леммы. Тем самым утверждение II теоремы доказано.

III. (Случай $n \geqslant \mathrm{in}(U)$.) Рассмотрим произвольную задачу z над U, для которой $\dim z \leqslant n$. Пусть $\{f_1, \ldots, f_t\}$ — некоторое максимальное по мощности независимое подмножество множества $P(z)$. Ясно, что $t \leqslant \mathrm{in}(U)$. Как нетрудно показать, существует такое отображение ν: $E_2^t \to \omega$, что задача $z' = (\nu, f_1, \ldots, f_t)$ обладает следующим свойством: $z(a) = z'(a)$ для любого a из A. Легко видеть, что $h_U(z) = h_U(z')$. Поэтому $h_U(z) \leqslant S_U(t)$ и, следовательно, $h_U(z) \leqslant S_U(\mathrm{in}(U))$. Но z — произвольная задача над U, для которой $\dim z \leqslant n$; с учетом этого получаем, что $S_U(n) \leqslant S_U(\mathrm{in}(U))$. Неравенство $S_U(\mathrm{in}(U)) \leqslant S_U(n)$ очевидно. Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. Е. Об энтропии двумерных фрагментно замкнутых языков // Комбинаторно-алгебраические методы и их применение. — Горький: ГГУ, 1987. — С. 5–13.
2. Мошков М. Ю. Условные тесты // Проблемы кибернетики. Вып. 40. — М.: Наука, 1983. — С. 131–170.
3. Мошков М. Ю. Деревья решений. Теория и приложения. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1994.
4. Мошков М. Ю. О глубине деревьев решений над произвольной системой проверок // XI Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики»: Тез. докл. — Ульяновск, 1996. — С. 146–147.
5. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Тр. МИАН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.
6. Яблонский С. В., Чегис И. А. О тестах для электрических схем // Успехи математич. наук. — 1955. — Т. 10, вып. 4. — С. 182–184.
7. Moshkov M. Ju. Unimprovable upper bounds on complexity of decision trees over information systems // Foundations of Computing and Decision Sciences. — 1996. — V. 21, № 4. — P. 219–231.
8. Moshkov M. Ju. On the depth of decision trees over infinite information systems // Proc. of the Congress "Information processing and management of uncertainty in knowledge-based systems". Granada, 1996. — P. 885–886.
9. Moshkov M. Ju. On global Shannon functions of two-valued information systems // Proc. of the Fourth international workshop on rough sets, fuzzy sets and machine discovery. — Tokyo, 1996. — P. 142–143.
10. Moshkov M. Ju. On complexity of decision trees over infinite information systems // Proc. of the Third joint conference on information systems. — Duke University, 1997. — P. 353–354.
11. Pawlak Z. Rough sets—theoretical aspects of reasoning about data. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1991.
12. Sauer N. On the density of families of sets // J. of Combinatorial Theory. Ser. A. — 1972. — V. 13. — P. 145–147.
13. Shelah S. A combinatorial problem; stability and order for models and theories in infinitary languages // Pacific J. of Mathematics. — 1972. — V. 41. — P. 241–261.
14. Skowron A., Rauszer C. The discernibility matrices and functions in information systems // Intelligent decision support. Handbook of applications and advances of the rough set theory. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1992. — P. 331–362.

Поступило в редакцию 9 IX 1997