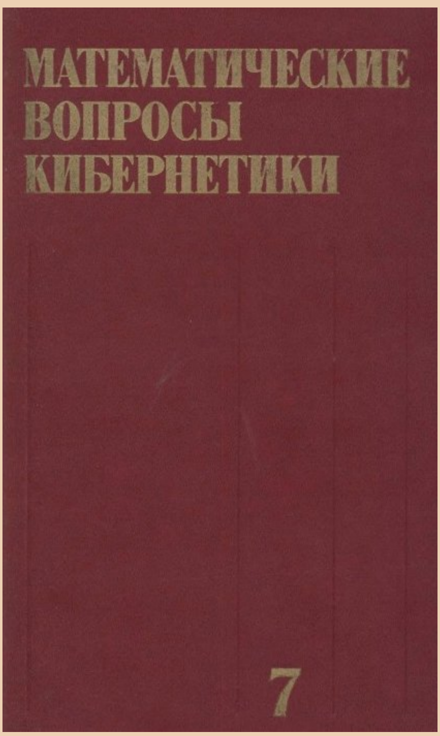

Л. А. Шоломов

Представление и исследование порядковых моделей выбора средствами логики первого порядка

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПОРЯДКОВЫХ МОДЕЛЕЙ ВЫБОРА СРЕДСТВАМИ ЛОГИКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА*)

Л. А. ШОЛОМОВ

(МОСКВА)

Прикладные задачи принятия решений чаще всего ставятся в терминах многокритериального выбора: варианты описываются наборами оценок по некоторым n скалярным критериям, и выбор производится на основе сравнения этих наборов. Модели выбора, использующие лишь порядковую информацию (больше, меньше, равно) о соотношениях оценок по одноименным критериям, называют порядковыми.

При решении конструктивных задач в области построения и анализа моделей выбора достаточно хорошо зарекомендовали себя логические методы, которые сводят эти задачи к преобразованию и исследованию формул алгебры логики. Впервые в теории выбора логические методы использовались в работе И. Мураками [22]. На логическом языке могут быть представлены результаты Б. Монжарде [21], полученные им в других терминах. Эффективные алгоритмы для задач анализа, синтеза и оптимизации моделей выбора развиты на основе логического подхода в [15, 16, 18]. Логические методы использовались в задачах выбора Б. А. Березовским и др. [5], Т. М. Виноградской и А. М. Рубчинским [7, 8], В. С. Левченковым [12], Ф. Т. Алескеровым и А. В. Владимировым [4].

Методы, развитые в указанных работах, требуют явного перечисления вариантов, участвующих в процедуре выбора. По этой причине они в принципе не применимы к задачам многокритериального выбора (где множество вариантов потенциально бесконечно) и, в частности, — к порядковым моделям. Отсутствие единых способов представления порядковых функций выбора препятствует разработке общих алгоритмов исследования порядковых моделей.

В данной работе к описанию порядковых моделей выбора привлекаются более сильные средства, чем алгебра логики: используется некоторый вариант языка первого порядка [6, 14]. Это позволяет формализовать широкий класс порядковых моделей выбора (но не все, ибо это принципиально невозможно). Система эквивалентностей логики предикатов дает средства для преобразования и упрощения формализаций. Но при использовании языка возникают трудности, обусловленные алгоритмической неразрешимостью ряда задач в области построения и анализа порядковых моделей. Исследованию проблем, связанных с представлением порядковых моделей выбора в этом языке, упрощением формул языка и построением моделей

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-01-00297).

на основе формул, посвящена настоящая работа. Некоторые элементы предикатного описания моделей выбора использовались ранее М. А. Айзерманом и А. В. Малишевским [3].

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 содержится описание используемого языка первого порядка и методов формализации в нем порядковых моделей. Приведена формализация ряда распространенных правил выбора и указана реализация в языке основных операций над моделями. Это позволяет преобразовывать содержательные описания моделей выбора (на уровне блоков) в формулы языка и дает возможность формализовать широкий класс порядковых моделей. Вместе с тем доказана непредставимость в данном языке ряда известных моделей (например, турнирного выбора).

Методы формализации из § 1 обычно приводят к формулам большой сложности. Вопросам упрощения формализаций посвящен § 2 (сложность формул измеряется числом кванторов). Описан метод упрощения формул для модели последовательного выбора глубины k, приводящий к формулам с k кванторами (вместо 2^k-1 в исходных формализациях). Параллельный выбор ширины k также формализуем с k кванторами. Для параллельного выбора со свойством монотонности описан полиномиальный алгоритм построения формул с минимальным числом кванторов и показано, что в немонотонном случае эта задача NP-трудна.

В § 3 изучаются алгоритмические вопросы, связанные с построением моделей. Возникающие здесь проблемы рассмотрены на примере модели выбора по бинарному отношению, считающейся в теории выбора основной. Исследуется задача построения отношения, реализующего либо (если это невозможно) аппроксимирующего заданный выбор. На основе неразрешимости элементарной теории двух линейных порядков [23] показано, что задачи синтеза и аппроксимации алгоритмически неразрешимы. В заключение исследуются так называемые парно-выявленные отношения, позволяющие иногда обойти эти трудности и найти реализацию или аппроксимацию. Краткое изложение некоторых результатов работы имеется в [17].

§ 1. Формализация порядковых моделей выбора

1.1. Порядковые функции выбора. Пусть задано множество Ω, элементы которого будем называть *вариантами*. Подмножества $X \subseteq \Omega$ называются *предъявлениями* (или, более полно, — множествами, предъявленными для выбора). Произвольное отображение $C\colon 2^\Omega \to 2^\Omega$, для которого $C(X) \subseteq X$ при всех $X \in 2^\Omega$, называется *функцией выбора* на Ω. Варианты, входящие в $C(X)$, считаются *выбранными* в предъявлении X. Дальше будем полагать, что Ω совпадает с n-мерным действительным пространством $\mathbb{R}^n$. Это соответствует тому, что варианты описываются n числовыми характеристиками (значениями *критериев*).

Для чисел x и y положим $[x, y] = \operatorname{sgn}(x-y)$, где $\operatorname{sgn}(z)$ равен 1, -1 или 0 соответственно при $z>0$, $z<0$ и $z=0$. Результат сравнения вариантов $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ и $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ будем характеризовать набором

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}] = ([x_1,y_1],\ldots,[x_n,y_n]) \in \{1,0,-1\}^n.$$

Назовем $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *порядковым отображением*, если

$$(\forall \mathbf{x})\ (\forall \mathbf{y})\ ([\mathbf{x},\mathbf{y}] = [\psi(\mathbf{x}),\psi(\mathbf{y})]).$$

Легко видеть, что отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ порядково в том и только том случае, когда при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant n$, оно осуществляет строго монотонное преобразование i-й координаты точек из $\mathbb{R}^n$.

Бинарное отношение ρ на $\mathbb{R}^n$ (т. е. $\rho \subseteq \mathbb{R}^{2n}$) назовем *порядковым отношением* [5], если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и порядкового отображения ψ имеет место соотношение $\mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{y} \Longleftrightarrow \psi(\mathbf{x})\,\rho\,\psi(\mathbf{y})$.

Функцию выбора C на $\mathbb{R}^n$ назовем *порядковой функцией* [5], если для всех $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и порядкового отображения ψ выполнено соотношение

$$C(\psi(X)) = \psi(C(X)),$$

где $\psi(Z)$ — образ множества Z. Пусть задана модель (правило) выбора M [1]. Каждому предъявлению X модель сопоставляет множество $C_M(X)$ выбранных вариантов и, таким образом, модели M соответствует функция выбора C_M. Назовем M *порядковой моделью*, если C_M — порядковая функция выбора.

1.2. Формализация. Для представления порядковых функций выбора на $\mathbb{R}^n$ будем использовать язык первого порядка [6, 14], сигнатура которого состоит из n имен $\geqslant_1, \ldots, \geqslant_n$ двухместных предикатов. Будем рассматривать интерпретацию, в которой предметные переменные принимают значения из $\mathbb{R}^n$ и для $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ из $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, значения $\mathbf{x} \geqslant_j \mathbf{y}$ предикатов $\geqslant_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, совпадают со значениями неравенств $x_j \geqslant y_j$. Имея это в виду, будем записывать формулы языка в несколько ином виде.

Будем считать, что предметные переменные имеют вид n-ок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, а сигнатура включает лишь предикатный символ $\geqslant$ (двуместный), который применяется к компонентам n-ок, имеющим одинаковые номера. Дадим индуктивное определение формулы над конечным полным базисом $\mathfrak{B}$ логических функций, а также *свободных* и *связанных переменных* формулы. Символами $x_i, y_i, \ldots$ будем обозначать i-е компоненты n-ок $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$

1. Выражение $x_i \geqslant y_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, — формула. Свободными переменными являются $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, связанные переменные отсутствуют.

2. Если $f(u_1, \ldots, u_k)$ — функция из $\mathfrak{B}$, а $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_k$ — формулы, никакие две из которых не содержат переменную, свободную в одной и связанную в другой, то выражение $f(\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_k)$ — формула. Множества ее свободных и связанных переменных состоят соответственно из всех свободных и всех связанных переменных формул $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_k$.

3. Если переменная $\mathbf{x}$ входит в формулу $\mathscr{F}$ свободно, то формулой является выражение $(Q\mathbf{x})\mathscr{F}$, где Q — один из кванторов $\forall$ или $\exists$. Ее связанные переменные — это $\mathbf{x}$ и все связанные переменные формулы $\mathscr{F}$, а свободные — все свободные переменные формулы $\mathscr{F}$, исключая $\mathbf{x}$.

Формулы такого вида будем называть *формулами на* $\mathbb{R}^n$. Запись $\mathscr{F}(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{z})$ будет означать, что всеми свободными переменными формулы $\mathscr{F}$ являются $\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{z}$. Если нужно указать область интерпретации $X \subseteq \mathbb{R}^n$ формулы $\mathscr{F}$, будем применять запись $\mathscr{F}_X(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{z})$. В этом случае $\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{z} \in X$ и входящие в $\mathscr{F}$ кванторы Qy распространяются на X. Значение формулы $\mathscr{F}$ на множестве X при заданных $\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{z}$ находится обычным образом (истинность и ложность условимся обозначать символами 1 и 0).

Пусть $\mathscr{C}(x)$ — формула на $\mathbb{R}^n$ с одной свободной переменной. С ней свяжем функцию выбора C, положив для всех $X \subseteq \mathbb{R}^n$

$$C(X) = \{\mathbf{x} \mid \mathscr{C}_X(\mathbf{x})\}. \tag{1.1}$$

Функцию выбора C назовем *формализуемой*, если существует формула $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ (формализация), для которой имеет место (1.1). Очевидно, что все формализуемые функции выбора являются порядковыми. *Класс порядковых моделей выбора* будем называть *формализуемым*, если для любой модели M из этого класса функция C_M формализуема.

Ясно, что понятие формализуемости не зависит от выбора полного базиса $\mathfrak{B}$. Кроме того, из предиката $\geqslant$ можно с помощью логических функций получить предикаты $>$, $=$ и $\neq$, которые будем применять в записи формул наряду с $\geqslant$.

Легко видеть, что не всякую порядковую функцию выбора можно задать «конечной информацией». Поэтому все порядковые функции выбора не могут быть представлены в виде конечных выражений ни в каком языке. Выразительные возможности введенного выше языка будут обсуждены ниже.

1.3. Стандартная форма. Напомним некоторые понятия и факты из [18]. Обозначим через $P_{3,2}$ множество двузначных функций $g(\widetilde{u}) = g(u_1, \ldots, u_m)$ от трехзначных аргументов, $g\colon \{-1, 0, 1\}^m \to \{0, 1\}$. Введем функции $p(u), p'(u) \in P_{3,2}$ (от одного аргумента), положив $p(u) = 1 \iff u = 1$, $p'(u) = 1 \iff (u = 0) \vee (u = 1)$. Функции из $P_{3,2}$ и только они могут быть представлены в виде

$$g(\widetilde{u}) = f(p(u_1), \ldots, p(u_m), p'(u_1), \ldots, p'(u_m)), \tag{1.2}$$

где $f\colon \{0, 1\}^{2m} \to \{0, 1\}$ — булева функция. *Двойственной* к $g(\widetilde{u})$ называется функция $g^*(\widetilde{u}) = \bar{g}(-\widetilde{u})$, где $-(u_1, \ldots, u_m) = (-u_1, \ldots, -u_m)$, а $\bar{g}$ — булево отрицание. Если функция g представлена в виде (1.2), то

$$g^*(\widetilde{u}) = f^*(p'(u_1), \ldots, p'(u_m), p(u_1), \ldots, p(u_m)),$$

где f^* — булева функция, двойственная к f (функции p и p' меняются местами). Подробнее о функциях из $P_{3,2}$ см. в [18].

Всякую бескванторную формулу $\mathcal{F}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ на $\mathbb{R}^n$ можно эквивалентно записать в виде $g([\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{j_1}], \ldots, [\mathbf{x}_{i_r}, \mathbf{x}_{j_r}])$, где $g(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_r) = g(u_{11}, \ldots \ldots, u_{1n}, \ldots, u_{r1}, \ldots, u_{rn}) \in P_{3,2}$, $i_s, j_s \in \{1, \ldots, k\}$, $1 \leqslant s \leqslant r$. Для этого достаточно заменить в $\mathcal{F}$ неравенства $x_{i_s} \geqslant x_{j_s}$ на $p'([x_{i_s}, x_{j_s}])$ и воспользоваться (1.2). И обратно, всякое выражение $g([\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{j_1}], \ldots, [\mathbf{x}_{i_r}, \mathbf{x}_{j_r}])$ равносильно некоторой бескванторной формуле на $\mathbb{R}^n$: достаточно представить g в виде (1.2) и заменить все $p([x_{i_s}, x_{j_s}])$ и $p'([x_{i_s}, x_{j_s}])$ на $\overline{x_{j_s} \geqslant x_{i_s}}$ и $x_{i_s} \geqslant x_{j_s}$ соответственно.

Выражение

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q) = (Q_1 \mathbf{y}_1) \ldots (Q_s \mathbf{y}_s)\ g([\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{j_1}], \ldots, [\mathbf{z}_{i_r}, \mathbf{z}_{j_r}]), \tag{1.3}$$

где $Q_1, \ldots, Q_s \in \{\forall, \exists\}$, $g \in P_{3,2}$, $\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{j_1}, \ldots, \mathbf{z}_{i_r}, \mathbf{z}_{j_r} \in \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$, назовем *стандартной формой*. Возможность приведения всякой формулы на $\mathbb{R}^n$ к стандартной форме следует из того, что ее можно преобразовать к предваренному (пренексному) виду $(Q_1 \mathbf{y}_1) \ldots (Q_s \mathbf{y}_s) \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — бескванторная формула [14].

Формализация функции выбора C в стандартной форме имеет вид

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = (Q_1 \mathbf{y}_1) \ldots (Q_s \mathbf{y}_s)\ g([\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{j_1}], \ldots, [\mathbf{z}_{i_r}, \mathbf{z}_{j_r}]), \tag{1.4}$$

где $\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{j_1}, \ldots, \mathbf{z}_{i_r}, \mathbf{z}_{j_r} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$.

1.4. Модели выбора по бинарному отношению. Пусть на множестве вариантов Ω задано бинарное отношение ρ. Будем интерпретировать $\mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{y}$ как «вариант $\mathbf{x}$ предпочтительнее варианта $\mathbf{y}$». Если отношение ρ антирефлексивно (рефлексивно), говорят о строгой (нестрогой) предпочтительности. Обычно в качестве «элементарных актов выбора» используется выбор по отношению предпочтения. На этой основе строятся более сложные модели (см. п. 1.7).

Опишем и исследуем на формализуемость встречающиеся в литературе (см., например, [2, 9]) правила выбора по бинарному отношению. Для целей данной статьи достаточно только порядковых отношений. Но сами правила имеют смысл (и используются) для отношений на произвольном множестве вариантов Ω, поэтому введем их для общего случая. Правила будем формулировать лишь для конечных предъявлений X. Если правило формализуемо, формализация автоматически распространяет его на любые X.

С $\mathbf{x}\in\Omega$ свяжем множества $\rho(\mathbf{x})=\{\mathbf{y}\in\Omega\,|\,\mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{y}\}$ и $\rho^{-1}(\mathbf{x})=\{\mathbf{y}\in\Omega\,|\,\mathbf{y}\,\rho\,\mathbf{x}\}$. Для $X\subseteq\Omega$ положим $\rho_X(\mathbf{x})=\rho(\mathbf{x})\cap X$ и $\rho_X^{-1}(\mathbf{x})=\rho^{-1}(\mathbf{x})\cap X$. Через $r_X^\rho(\mathbf{x})$ и $s_X^\rho(\mathbf{x})$ обозначим мощности множеств $\rho_X^{-1}(\mathbf{x})$ и $\rho_X(\mathbf{x})$.

Основным в случае антирефлексивного отношения ρ считается правило выбора *максимальных* (*недоминируемых*) вариантов

$$C_\rho^1(X)=\{\mathbf{x}\in X\mid\rho_X^{-1}(\mathbf{x})=\varnothing\}=\{\mathbf{x}\in X\mid r_X^\rho(x)=0\}. \tag{1.5}$$

Для рефлексивных отношений ρ используется правило выбора *лучших* вариантов

$$C_\rho^2(X)=\{\mathbf{x}\in X\mid\rho_X(\mathbf{x})=X\}. \tag{1.6}$$

Эти правила двойственны в том смысле, что $C_\rho^2=C_{\rho^*}^1$ и $C_\rho^1=C_{\rho^*}^2$, где $\rho^*=\bar\rho^{-1}$ — *двойственное отношение* (операции дополнения и обращения отношений перестановочны, поэтому их порядок не указан). Обобщениями правила (1.5) являются правило выбора t*-максимальных* вариантов:

$$C_{\rho,t}^3(X)=\{\mathbf{x}\in X\mid r_X^\rho(\mathbf{x})<t\},\qquad t=1,2,\ldots; \tag{1.7}$$

правило выбора вариантов из t первых «слоев», задаваемое индукцией по t:

$$C_{\rho,1}^4(X)=C_\rho^1(X),\quad C_{\rho,t}^4(X)=C_{\rho,t-1}^4(X)\cup C_\rho^1(X\setminus C_{\rho,t-1}^4(X)),\ t\geqslant2; \tag{1.8}$$

и правило выбора вариантов $\mathbf{x}$ с минимальным $r_X^\rho(\mathbf{x})$:

$$C_\rho^5(X)=\{\mathbf{x}\in X\mid(\forall\mathbf{y}\in X)\ (r_X^\rho(\mathbf{x})\leqslant r_X^\rho(\mathbf{y}))\}. \tag{1.9}$$

Правило выбора по максимуму величины $s_X^\rho(\mathbf{x})$

$$C_\rho^6(X)=\{\mathbf{x}\in X\mid(\forall\mathbf{y}\in X)\ (s_X^\rho(\mathbf{x})\geqslant s_X^\rho(\mathbf{y}))\} \tag{1.10}$$

двойственно к (1.9). Сформулированное Коуплендом правило

$$C_\rho^7(X)=\{\mathbf{x}\in X\mid(\forall\mathbf{y}\in X)\ (s_X^\rho(\mathbf{x})-r_X^\rho(\mathbf{x})\geqslant s_X^\rho(\mathbf{y})-r_X^\rho(\mathbf{y}))\} \tag{1.11}$$

называют *турнирным*. Если однокруговому турниру сопоставить бинарное отношение $\mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{y}$ («$\mathbf{x}$ выигрывает партию у $\mathbf{y}$»), то (1.11) указывает тех же победителей, что и правило «сумма очков», где за победу, поражение и ничью дается 1, 0 и 0,5 очков соответственно.

Еще одна группа моделей выбора по отношению ρ возникает, если множества $\rho_X(\cdot)$ и $\rho_X^{-1}(\cdot)$ сравнивать не по мощности, а по включению. Таковы правило Фишберна

$$C_\rho^8(X)=\{\mathbf{x}\in X\mid(\forall\mathbf{y}\in X)\ (\rho_X^{-1}(\mathbf{x})\subseteq\rho_X^{-1}(\mathbf{y}))\}, \tag{1.12}$$

двойственное ему правило Миллера

$$C_\rho^9(X)=\{\mathbf{x}\in X\mid(\forall\mathbf{y}\in X)\ (\rho_X(\mathbf{x})\supseteq\rho_X(\mathbf{y}))\} \tag{1.13}$$

и совмещающее их правило Ричелсона

$$C_\rho^{10}(X)=\{\mathbf{x}\in X\mid(\forall\mathbf{y}\in X)\ (\rho_X^{-1}(\mathbf{x})\subseteq\rho_X^{-1}(\mathbf{y})\wedge\rho_X(\mathbf{x})\supseteq\rho_X(\mathbf{y}))\}. \tag{1.14}$$

К этому же типу относятся правила Юдина [19, гл. V].

Все эти правила предписывают выбор «хороших» вариантов и относятся к классу *прямых* правил. Наряду с ними используются *обратные* правила, предписывающие удаление «плохих» вариантов. Если C_ρ — некоторое правило выбора по порядковому отношению ρ, то обратное ему правило $\widehat{C}_\rho$ определим соотношением

$$\widehat{C}_\rho(X) = X \setminus (-C_\rho(-X)), \tag{1.15}$$

где $-X = \{-\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X\}$. Очевидно, что C_ρ и $\widehat{C}_\rho$ взаимно обратны.

Приведем соображения в пользу определения (1.15). Если $\mathbf{x}$ «лучше» $\mathbf{y}$ (в смысле C_ρ) и в формулировке правила используются некоторые порядковые соотношения (например, $\mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{y}$, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}, \ldots$), то — в силу $[-\mathbf{y}, -\mathbf{x}] = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ — для $(-\mathbf{y})$ и $(-\mathbf{x})$ выполнены аналогичные соотношения $((-\mathbf{y})\,\rho\,(-\mathbf{x}),\ (-\mathbf{y}) \geqslant (-\mathbf{x}), \ldots)$, и понятие «$\mathbf{y}$ хуже $\mathbf{x}$» можно ввести как «$(-\mathbf{y})$ лучше $(-\mathbf{x})$». Поэтому если $C_\rho(X)$ — множество «хороших» вариантов, то множеством «плохих» вариантов естественно считать $-C_\rho(-X)$.

Если ρ — порядковое отношение, то правила (1.5)–(1.14) и построенные по ним в соответствии с (1.15) обратные правила реализуют порядковые функции выбора. *Правило* назовем *формализуемым*, если для любого порядкового отношения ρ соответствующая ему функция выбора C_ρ формализуема. В п. 1.7 будет показано, что прямое и обратное правила одновременно формализуемы или одновременно не формализуемы.

Некоторое представление о выразительных возможностях языка дает анализ правил (1.5)–(1.14) на формализуемость.

Теорема 1.1. 1. *Правила* (1.5)–(1.8), (1.12)–(1.14) (*и обратные им*) *формализуемы.*

2. *При* $n \geqslant 2$ *правила* (1.9)–(1.11) *выбора на* $\mathbb{R}^n$ *и обратные им правила не формализуемы.*

Доказательство теоремы 1.1 приведено в пп. 1.5, 1.6. Упоминавшиеся выше правила из [19] также формализуемы.

1.5. Формализация правил выбора по порядковому отношению. Порядковое отношение ρ можно описать представляющей функцией $g_\rho \in P_{3,2}$, для которой $\mathbf{x}\,\rho\,\mathbf{y} \iff g_\rho([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = 1$. Используя g_ρ, построим формализации правил (1.5)–(1.8), (1.12)–(1.14) и тем самым докажем первое утверждение теоремы.

Поскольку $C^1_\rho(X) = \{\mathbf{x} \in X \mid (\forall \mathbf{y} \in X)\ (\mathbf{y}\,\bar{\rho}\,\mathbf{x})\}$, то

$$\mathscr{C}^1_\rho(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ \bar{g}_\rho([\mathbf{y}, \mathbf{x}]) = (\forall \mathbf{y})\ \bar{g}_\rho(-[\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = (\forall \mathbf{y})\ g^*_\rho([\mathbf{x}, \mathbf{y}]). \tag{1.16}$$

Правило (1.6), очевидно, имеет формализацию $\mathscr{C}^2_\rho(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ g_\rho([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$.

Из $g_{\rho^*} = g^*_\rho$ (см. [18]) вытекает упоминавшаяся выше двойственность правил (1.5) и (1.6). Правило (1.7) формализуется в виде

$$\mathscr{C}^3_{\rho,t}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y}_1 \ldots \forall \mathbf{y}_t)\ \Big(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant t} g_\rho([\mathbf{y}_i, \mathbf{x}]) \to \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant t} (\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_j)\Big) =$$
$$= (\forall \mathbf{y}_1 \ldots \forall \mathbf{y}_t)\ \Big(\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant t} g^*_\rho([\mathbf{x}, \mathbf{y}_i]) \vee \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant t} (\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_j)\Big).$$

Это выражение можно превратить в стандартную форму заменой равенств $\mathbf{z} = \mathbf{v}$ на $\bigwedge\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (p'([z_i, v_i]) \wedge p'([v_i, z_i]))$. Легко проверить, что вариант $\mathbf{x} \in X$ не выбирается по правилу (1.8) в том и только том случае, когда в X найдется цепочка $\mathbf{y}_1\,\rho\,\mathbf{x}$, $\mathbf{y}_2\,\rho\,\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_t\,\rho\,\mathbf{y}_{t-1}$. Отсюда нетрудно получить формализацию $\mathscr{C}^4_{\rho,t}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y}_1 \ldots \forall \mathbf{y}_t)\ \Big(g^*_\rho([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1]) \vee \bigvee\limits_{1 \leqslant i \leqslant t-1} g^*_\rho([\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i+1}])\Big)$.

Правило (1.12) имеет формализацию

$$\mathscr{C}_\rho^8(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ (\forall \mathbf{z})\ (g_\rho([\mathbf{y},\mathbf{x}]) \to g_\rho([\mathbf{y},\mathbf{z}])) = (\forall \mathbf{y})\ (\forall \mathbf{z})\ (g_\rho^*([\mathbf{x},\mathbf{y}]) \vee g_\rho([\mathbf{y},\mathbf{z}])),$$

правило (1.13) двойственно ему: $\mathscr{C}_\rho^9(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ (\forall \mathbf{z})\ (g_\rho([\mathbf{x},\mathbf{y}]) \vee g_\rho^*([\mathbf{y},\mathbf{z}]))$, а правило (1.14) является их конъюнкцией, поэтому

$$\mathscr{C}_\rho^{10}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ (\forall \mathbf{z})\ ((g_\rho^*([\mathbf{x},\mathbf{y}]) \vee g_\rho([\mathbf{y},\mathbf{z}])) \wedge (g_\rho([\mathbf{x},\mathbf{y}]) \vee g_\rho^*([\mathbf{y},\mathbf{z}]))).$$

1.6. Доказательство неформализуемости. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ назовем *строгим*, если для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$ соотношение $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ влечет $x_1 \neq y_1,\ \ldots,\ x_n \neq y_n$. Наборы $x, y \in \mathbb{R}^n$ будем называть *сравнимыми*, если $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ или $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{x}$, где $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ означает $x_1 \geqslant y_1,\ \ldots,\ x_n \geqslant y_n$. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ назовем *разделимым*, если существует такое разбиение $X = X_1 \cup X_2$, что два элемента из X сравнимы в том и только том случае, когда они принадлежат одному множеству X_i, $i = 1, 2$. Если $\mathscr{A}$ — некоторая формула первого порядка, то ее *релятивизацией* относительно одноместного предиката P называется формула $\mathscr{A}_P$, полученная из $\mathscr{A}$ заменой всех подформул вида $(\forall y)\ \mathscr{F}$ и $(\exists y)\ \mathscr{F}$ соответственно на $(\forall y)\ (P(y) \to \mathscr{F})$ и $(\exists y)\ (P(y) \wedge \mathscr{F})$, см. [6].

Доказательство неформализуемости правил (1.9)–(1.11) основано на следующем утверждении.

Лемма 1.1. *Не существует замкнутой формулы на $\mathbb{R}^2$, ложной на всех строгих разделимых множествах нечетной мощности и такой, что для любого числа N существует строгое разделимое множество четной мощности, не меньшей N, на котором она истинна.*

Доказательство. Предположим, что это не так и формула $\mathscr{A}$ с указанным свойством существует. Свойство строгости множеств из $\mathbb{R}^2$ описывается формулой $\mathscr{S} = (\forall \mathbf{x})\ (\forall \mathbf{y})\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \to x_1 \neq y_1 \wedge x_2 \neq y_2)$, а свойство разделимости строгих конечных множеств — формулой

$$\begin{aligned}\mathscr{D} = (\exists \mathbf{x})\ (\exists \mathbf{y})\ (\forall \mathbf{z})\ (\forall \mathbf{u})\ \big(&x_1 < y_1 \wedge x_2 > y_2 \wedge \\ &(\mathbf{z} = \mathbf{x} \vee \mathbf{z} = \mathbf{y} \vee z_1 < x_1 \wedge z_2 < x_2 \vee z_1 > y_1 \wedge z_2 > y_2) \wedge \\ &(z_1 < u_1 \leqslant x_1 \to z_2 < u_2) \wedge (z_1 > u_1 \geqslant y_1 \to z_2 > u_2) \wedge (z_1 \leqslant x_1 \wedge u_1 \geqslant y_1 \to z_2 > y_2)\big)\end{aligned}$$

(если в определении разделимости выбрать подходящую нумерацию множеств X_1 и X_2, можно взять в качестве $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ максимальный элемент в X_1 и минимальный элемент в X_2). Всякое строгое конечное множество удовлетворяет условиям

$$\mathscr{R} = (\forall \mathbf{x})\ ((\forall \mathbf{y})\ x_1 \leqslant y_1 \vee (\exists \mathbf{z})\ (\forall \mathbf{u})\ (z_1 < x_1 \wedge (u_1 < x_1 \to z_1 \geqslant u_1))),$$
$$\mathscr{L} = (\forall \mathbf{x})\ ((\forall \mathbf{y})\ x_1 \geqslant y_1 \vee (\exists \mathbf{z})\ (\forall \mathbf{u})\ (z_1 > x_1 \wedge (u_1 > x_1 \to z_1 \leqslant u_1))).$$

Первое условие означает, что если упорядочить наборы из множества по возрастанию первых компонент, то у любого набора, не являющегося первым в упорядочении, найдется непосредственный предшественник; второе описывает наличие непосредственных последователей.

Введем формулу $\mathscr{B} = (\exists \mathbf{x})\ \mathscr{A}'(\mathbf{x})$, где формула $\mathscr{A}' = \mathscr{A}_{\neq \mathbf{x}}$ образована из $\mathscr{A}$ релятивизацией относительно предиката $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, т. е. заменой в $\mathscr{A}$ подформул $(\forall \mathbf{y})\ \mathscr{F}$ и $(\exists \mathbf{y})\ \mathscr{F}$ на $(\forall \mathbf{y})\ (\mathbf{y} \neq \mathbf{x} \to \mathscr{F})$ и $(\exists \mathbf{y})\ (\mathbf{y} \neq \mathbf{x} \wedge \mathscr{F})$ соответственно. Ясно, что для любого $X \subseteq \mathbb{R}$ имеет место равенство $\mathscr{A}'_X(\mathbf{x}) = \mathscr{A}_{X \setminus \{\mathbf{x}\}}$. Если X — строгое разделимое множество четной мощности, то по условиям леммы значение $\mathscr{A}_{X \setminus \{\mathbf{x}\}}$ ложно для любого $\mathbf{x} \in X$, а потому формула $\mathscr{B}$ ложна на X, а $\overline{\mathscr{B}}$ истинна.

Запишем $\mathscr{A}, \mathscr{S}, \mathscr{D}, \mathscr{R}, \mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{B}}$ (формулы на $\mathbb{R}^2$) в виде формул первого порядка, заменив символы $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ предметных переменных на $x, y, \ldots$, выразив предикаты $>, <, =$ и $\neq$ через $\geqslant$ и заменив выражения вида $x_i \geqslant y_i$ на $x \geqslant_i y$, $i=1,2$. Обозначим через $\mathbf{P}$ некоторую систему аксиом элементарной теории (с равенством) двух линейных порядков $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ и рассмотрим множество формул первого порядка $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \cup \{\mathscr{A}, \mathscr{S}, \mathscr{D}, \mathscr{R}, \mathscr{L}, \overline{\mathscr{B}}\}$.

Для любого $N > 0$ существует строгое разделимое множество X_N четной мощности, не меньшей N, для которого формула $\mathscr{A}$ истинна. Для него также истинны $\mathscr{S}, \mathscr{D}, \mathscr{R}, \mathscr{L}$ и, как мы видели, $\overline{\mathscr{B}}$. Условие строгости означает антисимметрию отношений $\geqslant_1$ и $\geqslant_2$ на X_N. Поэтому они являются линейными порядками и удовлетворяют системе аксиом $\mathbf{P}$. Таким образом, для множества формул $\mathbf{Q}$ существуют нормальные (т. е. такие, в которых равенство означает совпадение элементов [14]) модели сколь угодно большой конечной мощности. Поэтому $\mathbf{Q}$ имеет бесконечную нормальную модель [6] $(M, \geqslant_1, \geqslant_2)$, которую можно полагать счетной. В $\mathbb{R}$ имеются подмножества всех счетных порядковых типов [11], поэтому линейные порядки $(M, \geqslant_1)$ и $(M, \geqslant_2)$ изоморфно вложимы в $\mathbb{R}$; пусть φ_1 и φ_2 — соответствующие изоморфизмы. Каждому $x \in M$ сопоставим пару $\mathbf{x} = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ и множество всех полученных пар обозначим через $\widehat{X}$. Формулы $\mathscr{A}, \mathscr{S}, \mathscr{D}, \mathscr{R}, \mathscr{L}, \overline{\mathscr{B}}$, рассматриваемые на $\mathbb{R}^2$, истинны для $\widehat{X}$.

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — наборы, гарантируемые формулой $\mathscr{D}$. Тогда имеет место разбиение $\widehat{X} = X_1 \cup X_2$, где $X_1 = \{\mathbf{z} \in \widehat{X} \mid \mathbf{z} \leqslant \mathbf{x}\}$, $X_2 = \{\mathbf{z} \in \widehat{X} \mid \mathbf{z} \geqslant \mathbf{y}\}$. Хотя бы одно из множеств X_1 и X_2 (пусть X_1) счетно. Из условия $z_1 < u_1 \to z_2 < u_2$ для $\mathbf{z}, \mathbf{u} \in X_1$, содержащегося в $\mathscr{D}$, и из $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$ следует существование элемента $\mathbf{v} \in X_1$, для которого множества X_1 и $X_1 \setminus \mathbf{v}$ изоморфны. Условия $z_1 < u_1$, $z_2 > u_2$ для $\mathbf{z} \in X_1$, $\mathbf{u} \in X_2$, вытекающие из $\mathscr{D}$, влекут изоморфизм множеств $\widehat{X}$ и $\widehat{X} \setminus \mathbf{v}$. Поэтому значения формулы $\mathscr{A}$ на множествах $\widehat{X}$ и $\widehat{X} \setminus \mathbf{v}$ совпадают. Отсюда $\mathscr{A}'(\mathbf{v})_{\widehat{X}} = \mathscr{A}_{\widehat{X} \setminus \mathbf{v}} = \mathscr{A}_{\widehat{X}} = 1$, а потому формула $\mathscr{B}$ истинна на $\widehat{X}$. Это противоречит истинности $\overline{\mathscr{B}}$ на $\widehat{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.1 (утверждение 2). Рассмотрим вначале случай $n=2$. Начнем с турнирного правила C_ρ^7. Возьмем в качестве ρ *нестрогое отношение Парето* π: $\mathbf{x} \,\pi\, \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ и убедимся, что при $n=2$ функция C_π^7 неформализуема.

Предположим, что это не так и $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ — формализация этой функции. Образуем замкнутую формулу $\mathscr{A} = (\exists \mathbf{x})\ (\exists \mathbf{y})\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \wedge \mathscr{C}(\mathbf{x}) \wedge \mathscr{C}(\mathbf{y}))$. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^2$ — строгое разделимое множество. Оно представимо в виде $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1 = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$, $X_2 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_M\}$, $\mathbf{y}_1 < \mathbf{y}_2 < \ldots < \mathbf{y}_N$, $\mathbf{z}_1 < \mathbf{z}_2 < \ldots < \mathbf{z}_M$ (запись $\mathbf{u} < \mathbf{v}$ означает $\mathbf{u} \leqslant \mathbf{v}$ и $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$), $\mathbf{y}_i$ и $\mathbf{z}_j$ не сравнимы при $1 \leqslant i \leqslant N$, $1 \leqslant j \leqslant M$. Ясно, что $s_X^\pi(\mathbf{y}_i) = i$, $r_X^\pi(\mathbf{y}_i) = N - i + 1$, $s_X^\pi(\mathbf{z}_j) = j$, $r_X^\pi(\mathbf{z}_j) = M - j + 1$. Наибольшее значение величины $s_X^\pi(\mathbf{x}) - r_X^\pi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in X$, достигается на $\mathbf{y}_N$ при $N > M$, на $\mathbf{z}_M$ при $M > N$, на $\mathbf{y}_N$ и $\mathbf{z}_M$ при $N = M$. Таким образом, значение $\mathscr{A}_X$ истинно при $N = M$ и ложно при $N \neq M$. Для любого строгого разделимого множества X нечетной мощности формула $\mathscr{A}$ ложна, ибо $N \neq M$, и при каждом $N \geqslant 1$ имеется строгое разделимое множество мощности $2N$; например,

$$X_N = \{(-N, 1), (-N+1, 2), \ldots, (-1, N), (1, -N), (2, -N+1), \ldots, (N, -1)\},$$

на котором она истинна. Это противоречит лемме 1.1. При $n=2$ неформализуемость функции C_π^7 доказана.

Случай $n > 2$ сводится к рассмотренному следующим образом. Сопоставим набору $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ набор $\widehat{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_2, \ldots, x_2) \in \mathbb{R}^n$, и каждому множеству $X \subseteq \mathbb{R}^2$ поставим в соответствие $\widehat{X} = \{\widehat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in X\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ясно, что $\mathbf{x}\,\pi\,\mathbf{y} \Longleftrightarrow \widehat{\mathbf{x}}\,\pi\,\widehat{\mathbf{y}}$, а потому $\mathbf{x} \in C^7_\pi(X) \Longleftrightarrow \widehat{\mathbf{x}} \in C^7_\pi(\widehat{X})$. Отсюда следует, что если бы при некотором n, $n > 2$, существовала формализация функции C^7_π, то из нее заменой всех соотношений $x_i \geqslant y_i$ при $i \geqslant 3$ на $x_2 \geqslant y_2$ можно было бы получить формализацию для $n = 2$.

Доказательство неформализуемости функции C^6_π почти дословно повторяет доказательство для C^7_π. Правило C^5_ρ двойственно C^6_ρ, поэтому C^6_π совпадает с $C^5_{\pi^*}$ и, следовательно, правило C^5_ρ при $\rho = \pi^*$ неформализуемо.

Отметим, что к неформализуемым относится и известное правило Борда выбора «по сумме рангов» [2, 9]. Доказательство этого факта также основано на лемме 1.1.

1.7. Операции над формализациями. Непосредственное построение формализаций для сколь-нибудь сложных моделей выбора связано с определенными трудностями. Однако можно разработать приемы, облегчающие этот процесс. Часто модели выбора строятся из более простых применением некоторых операций (например, параллельным или последовательным соединением, введением обратной связи). Операциям над моделями соответствуют операции над функциями выбора. Здесь, в п. 1.7, рассмотрены основные из таких операций и показано, что в применении к формализуемым функциям выбора они дают формализуемые функции выбора. Это позволяет использовать для описания моделей выбора язык более высокого уровня, включающий операции над моделями. Эти описания допускают автоматическую трансляцию на язык формул.

Теоретико-множественные операции. Пусть заданы функции выбора $C_1, \ldots, C_k$ и теоретико-множественная операция $F = F(Y_1, \ldots, Y_k)$. Будем говорить, что функция выбора C образована из $C_1, \ldots, C_k$ *композицией* (при *способе композиции* F), если для любого $X \subseteq \Omega$ имеет место равенство

$$C(X) = F(C_1(X), \ldots, C_k(X)). \tag{1.17}$$

При выполнении операции F полным множеством считается X, и, например, под $\overline{C}_i(X)$ понимается $X \setminus C_i(X)$. Операции $F(Y_1, \ldots, Y_k)$ естественным образом можно сопоставить булеву функцию $f(y_1, \ldots, y_k)$, называемую *представляющей функцией операции* F. Очевидно, что композиция порядковых функций выбора на $\mathbb{R}^n$ дает порядковую функцию выбора. Если при этом функции $C_1, \ldots, C_k$ формализуемы, то функция выбора C имеет формализацию

$$\mathscr{C}(\mathbf{x}) = f(\mathscr{C}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathscr{C}_k(\mathbf{x})). \tag{1.18}$$

В терминах композиции описывается параллельное соединение моделей выбора, при котором выходы моделей подаются на входы некоторого «агрегирующего» блока F. Примером может служить построение коллективного выбора C на основе индивидуальных выборов $C_1, \ldots, C_k$, а примерами способов композиции — операторы $F_{k,t}$ голосования «t из k», которым соответствуют представляющие функции $f_{k,t}(y_1, \ldots, y_k) = 1 \Longleftrightarrow y_1 + \ldots + y_k \geqslant t$.

Операция суперпозиции. *Суперпозицией* функций C_1 и C_2 называется функция выбора $C(X) = C_2(C_1(X))$, которую будем обозначать $C_1 \circ C_2$ или $C_2(C_1)$. Легко видеть, что если C_1 и C_2 — порядковые функции выбора на $\mathbb{R}^n$, то и C — порядковая функция выбора. В терминах суперпозиции описывается последовательное соединение моделей выбора (выход одной из них подается на вход другой).

Лемма 1.2. *Операция суперпозиции функций выбора ассоциативна*: $(C_1 \circ C_2) \circ C_3 = C_1 \circ (C_2 \circ C_3)$.

Доказательство. Функция выбора на множестве вариантов Ω является отображением $2^\Omega \to 2^\Omega$, а суперпозиция функций выбора соответствует произведению отображений, которое ассоциативно.

Следующее утверждение показывает, что суперпозиция не выводит за пределы класса формализуемых функций.

Теорема 1.2. *Если функция выбора C получена суперпозицией формализуемых функций выбора C_1 и C_2, то ее формализация имеет вид*

$$\mathscr{C}(\mathbf{x}) = \mathscr{C}_1(\mathbf{x}) \wedge \mathscr{C}_{2,\mathscr{C}_1}(\mathbf{x}), \tag{1.19}$$

где $\mathscr{C}_{2,\mathscr{C}_1}(\mathbf{x})$ — релятивизация формулы $\mathscr{C}_2(\mathbf{x})$ относительно $\mathscr{C}_1(\mathbf{x})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные $\mathbf{x}$ и X, $\mathbf{x} \in X$. Ясно, что $\mathbf{x} \in C(X)$ в том и только том случае, когда $\mathbf{x} \in C_1(X)$ и значение $\mathscr{C}_{2,C_1(X)}(\mathbf{x})$ формулы $\mathscr{C}_2(\mathbf{x})$ на множестве $C_1(X)$ истинно. Отсюда

$$\mathscr{C}_X(\mathbf{x}) = \mathscr{C}_{1,X}(\mathbf{x}) \wedge \mathscr{C}_{2,C_1(X)}(\mathbf{x}). \tag{1.20}$$

Нетрудно видеть, что $\mathscr{C}_{2,C_1(X)}(\mathbf{x})$ совпадает с $\mathscr{C}_{2,\mathscr{C}_1,X}(\mathbf{x})$ — значением формулы $\mathscr{C}_{2,\mathscr{C}_1}(\mathbf{x})$ на множестве X. Отсюда и из (1.20) получаем $\mathscr{C}_X(\mathbf{x}) = \mathscr{C}_{1,X}(\mathbf{x}) \wedge \mathscr{C}_{2,\mathscr{C}_1,X}(\mathbf{x})$, что приводит к (1.19).

Укажем более явную форму для (1.20). Пусть формализация $\mathscr{C}_2(\mathbf{x})$ совпадает с (1.4). Тогда релятивизация формулы $\mathscr{C}_2(\mathbf{x})$ относительно предиката $\mathscr{C}_1(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\mathscr{C}_{2,\mathscr{C}_1}(\mathbf{x}) = (Q_1\mathbf{y}_1)\,(\mathscr{C}_1(\mathbf{y}_1) \circ_1 (Q_2\mathbf{y}_2)\,(\mathscr{C}_1(\mathbf{y}_2) \circ_2 \ldots$$
$$\ldots \circ_{s-1} (Q_s\mathbf{y}_s)\,(\mathscr{C}_1(\mathbf{y}_s) \circ_s g([\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{j_1}], \ldots, [\mathbf{z}_{i_r}, \mathbf{z}_{j_r}]))\ldots)),$$

где $\mathbf{z}_{i_1}, \ldots, \mathbf{z}_{i_r}$ и $\mathbf{z}_{j_1}, \ldots, \mathbf{z}_{j_r}$ заимствованы из (1.4) и $\circ_i = \begin{cases} \wedge, & Q_i = \exists, \\ \to, & Q_i = \forall, \end{cases}$ $1 \leqslant i \leqslant s$.

Подставив это выражение в (1.19) и вынеся кванторы $Q_i\mathbf{y}_i$, (операции $\wedge$ и $\to$ позволяют это сделать), приходим к

$$\mathscr{C}(\mathbf{x}) = \mathscr{C}_1(\mathbf{x}) \wedge (Q_1\mathbf{y}_1)\,(Q_2\mathbf{y}_2)\ldots(Q_s\mathbf{y}_s)\,(\mathscr{C}_1(\mathbf{y}_1) \circ_1 (\mathscr{C}_1(\mathbf{y}_2) \circ_2 (\ldots$$
$$\ldots \circ_{s-1} (\mathscr{C}_1(\mathbf{y}_s) \circ_s g([\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{j_1}], \ldots, [\mathbf{z}_{i_r}, \mathbf{z}_{j_r}]))\ldots))). \tag{1.21}$$

Применим (1.21) для формализации модели $C_{\rho_1\rho_2} = C^1_{\rho_1} \circ C^1_{\rho_2}$ двухэтапного последовательного выбора по отношениям ρ_1 и ρ_2 (определение C^1_ρ дано в (1.5)). Согласно (1.16) и (1.21) имеем

$$\mathscr{C}_{\rho_1\rho_2}(\mathbf{x}) = (\forall\mathbf{y})\ g^*_{\rho_1}([\mathbf{x},\mathbf{y}]) \wedge (\forall\mathbf{u})\ ((\forall\mathbf{z})\ g^*_{\rho_1}([\mathbf{u},\mathbf{z}]) \to g^*_{\rho_2}([\mathbf{x},\mathbf{u}])) =$$
$$= (\forall\mathbf{y})\ g^*_{\rho_1}([\mathbf{x},\mathbf{y}]) \wedge (\forall\mathbf{y})\ ((\exists\mathbf{z})\ \bar{g}^*_{\rho_1}([\mathbf{y},\mathbf{z}]) \vee g^*_{\rho_2}([\mathbf{x},\mathbf{y}])) =$$
$$= (\forall\mathbf{y})\ (\exists\mathbf{z})\ (g^*_{\rho_1}([\mathbf{x},\mathbf{y}]) \wedge (g_{\rho_1}([\mathbf{z},\mathbf{y}]) \vee g^*_{\rho_2}([\mathbf{x},\mathbf{y}])). \tag{1.22}$$

Операция ветвления. Пусть Q — некоторое свойство выбора. Будем записывать $Q_X(C)$, если множество $C(X)$ обладает свойством Q, и $\overline{Q}_X(C)$ в противном случае. *Операция ветвления* ∇_Q сопоставляет функциям C_1 и C_2 функцию $C = C_1 \nabla_Q C_2$ по правилу

$$C(X) = \begin{cases} C_1(X), & \text{если } Q_X(C_1), \\ C_2(X); & \text{если } \overline{Q}_X(C_1). \end{cases}$$

Свойство Q назовем *порядковым*, если для любых C, X и порядкового отображения ψ выполнено $Q_{\psi(X)}(C) = Q_X(C)$. Очевидно, что в случае порядковых C_1, C_2 и Q функция $C_1 \nabla_Q C_2$ будет порядковой.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПОРЯДКОВЫХ МОДЕЛЕЙ ВЫБОРА СРЕДСТВАМИ ЛОГИКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА*)

Л. А. ШОЛОМОВ

(МОСКВА)

Прикладные задачи принятия решений чаще всего ставятся в терминах многокритериального выбора: варианты описываются наборами оценок по некоторым n скалярным критериям, и выбор производится на основе сравнения этих наборов. Модели выбора, использующие лишь порядковую информацию (больше, меньше, равно) о соотношениях оценок по одноименным критериям, называют порядковыми.

При решении конструктивных задач в области построения и анализа моделей выбора достаточно хорошо зарекомендовали себя логические методы, которые сводят эти задачи к преобразованию и исследованию формул алгебры логики. Впервые в теории выбора логические методы использовались в работе И. Мураками [22]. На логическом языке могут быть представлены результаты Б. Монжарде [21], полученные им в других терминах. Эффективные алгоритмы для задач анализа, синтеза и оптимизации моделей выбора развиты на основе логического подхода в [15, 16, 18]. Логические методы использовались в задачах выбора Б. А. Березовским и др. [5], Т. М. Виноградской и А. М. Рубчинским [7, 8], В. С. Левченковым [12], Ф. Т. Алескеровым и А. В. Владимировым [4].

Методы, развитые в указанных работах, требуют явного перечисления вариантов, участвующих в процедуре выбора. По этой причине они в принципе не применимы к задачам многокритериального выбора (где множество вариантов потенциально бесконечно) и, в частности, — к порядковым моделям. Отсутствие единых способов представления порядковых функций выбора препятствует разработке общих алгоритмов исследования порядковых моделей.

В данной работе к описанию порядковых моделей выбора привлекаются более сильные средства, чем алгебра логики: используется некоторый вариант языка первого порядка [6, 14]. Это позволяет формализовать широкий класс порядковых моделей выбора (но не все, ибо это принципиально невозможно). Система эквивалентностей логики предикатов дает средства для преобразования и упрощения формализаций. Но при использовании языка возникают трудности, обусловленные алгоритмической неразрешимостью ряда задач в области построения и анализа порядковых моделей. Исследованию проблем, связанных с представлением порядковых моделей выбора в этом языке, упрощением формул языка и построением моделей

---

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-01-00297).

не является композицией функций выбора $C_1, \ldots, C_k$, ибо F — не теоретико-множественная операция. Но, как легко видеть, функцию выбора C можно записать в виде

$$C = \mathcal{O}(F_{k,k}(\mathbf{C}), F_{k,k-1}(\mathbf{C}), \ldots, F_{k,1}(\mathbf{C}) \mid \neq \varnothing),$$

где $\mathbf{C} = (C_1, \ldots, C_k)$, $F_{k,t}$ — оператор голосования t из k, а через $\neq \varnothing$ обозначено условие непустоты выбора.

Если рассмотреть другой способ агрегирования, когда в $C(X)$ включаются варианты $\mathbf{x}$ с $t_X(\mathbf{x}) > T(X)/2$, то функцию выбора C можно представить с помощью более общей операции $\mathcal{O}'$:

$$C = \mathcal{O}'(F_{k,k}(\mathbf{C}), \ldots, F_{k,i}(\mathbf{C}), \ldots, F_{k,1}(\mathbf{C});$$
$$F_{k,[(k+1)/2]}(\mathbf{C}), \ldots, F_{k,[(i+1)/2]}(\mathbf{C}), \ldots, F_{k,1}(\mathbf{C}) \mid \neq \varnothing).$$

Пример 2 (задача индивидуального выбора). Как было доказано, правило C^5_ρ, см. (1.9), выбора по минимуму $r^\rho_X(\mathbf{x})$ неформализуемо. Однако ограниченное правило $C^5_{\rho,s}$ выбора по минимуму $r^\rho_X(\mathbf{x})$ при условии, что он не больше s (иначе — отказ от выбора), формализуемо, ибо

$$C^5_{\rho,s} = \mathcal{O}(C^3_{\rho,1}, C^3_{\rho,2}, \ldots, C^3_{\rho,s+1} \mid \neq \varnothing).$$

Пример 3. Пусть $\widehat{C}_\rho$ — некоторое обратное правило, $\widehat{C}^t_\rho = \widehat{C}_\rho \circ \ldots \circ \widehat{C}_\rho$ — его t-кратная суперпозиция, $\leqslant q$ — условие, что выбор содержит не более q элементов. Тогда функция выбора

$$C = \mathcal{O}(\widehat{C}_\rho, \widehat{C}^2_\rho, \ldots, \widehat{C}^s_\rho \mid (\neq \varnothing) \wedge (\leqslant q))$$

соответствует модели, в которой производится последовательная отбраковка вариантов, пока их останется не более q и не менее одного (при невыполнимости этого за s туров — отказ от выбора).

Операция обращения. Распространим определение (1.15) обратного правила на произвольные порядковые функции выбора, положив

$$\widehat{C}(X) = X \setminus (-C(-X)). \tag{1.23}$$

Двойственной формуле (1.3) назовем формулу

$$\mathscr{G}^*(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q) = (Q^*_1 \mathbf{y}_1) \ldots (Q^*_s \mathbf{y}_s)\, g^*([\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{j_1}], \ldots, [\mathbf{z}_{i_r}, \mathbf{z}_{j_r}]),$$

где $\forall^* = \exists$, $\exists^* = \forall$, функция g^* двойственна g. Ясно, что $(\mathscr{G}^*)^* = \mathscr{G}$.

Теорема 1.3. *Если функция выбора C формализуема, то функция выбора $\widehat{C}$ (см.* (1.23)*) также формализуема и их формализации двойственны*: $\widehat{\mathscr{C}}(\mathbf{x}) = \mathscr{C}^*(\mathbf{x})$.

Доказательство. Пусть формализация функции C имеет вид (1.4). Тогда в соответствии с (1.23) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \in \widehat{C}(X) &\Longleftrightarrow \mathbf{x} \in X \setminus (-C(-X)) \Longleftrightarrow -\mathbf{x} \in (-X \setminus C(-X)) \Longleftrightarrow \overline{\mathscr{C}}_{-X}(-\mathbf{x}) \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \neg((Q_1(-\mathbf{y}_1)) \ldots (Q_s(-\mathbf{y}_s))\, g([-\mathbf{z}_{i_1}, -\mathbf{z}_{j_1}], \ldots, [-\mathbf{z}_{i_r}, -\mathbf{z}_{j_r}])) \mid_X \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \neg((Q_1 \mathbf{y}_1) \ldots (Q_s \mathbf{y}_s)\, g([\mathbf{z}_{j_1}, \mathbf{z}_{i_1}], \ldots, [\mathbf{z}_{j_r}, \mathbf{z}_{i_r}])) \mid_X \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow (Q^*_1 \mathbf{y}_1) \ldots (Q^*_s \mathbf{y}_s)\, \bar{g}([\mathbf{z}_{j_1}, \mathbf{z}_{i_1}], \ldots, [\mathbf{z}_{j_r}, \mathbf{z}_{i_r}])) \mid_X \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow (Q^*_1 \mathbf{y}_1) \ldots (Q^*_s \mathbf{y}_s)\, g^*([\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{j_1}], \ldots, [\mathbf{z}_{i_r}, \mathbf{z}_{j_r}])) \mid_X \Longleftrightarrow \mathscr{C}^*_X(\mathbf{x});
\end{aligned}$$

отсюда в силу произвольности X следует нужное утверждение.

Замечание. На основе теоремы 1.3 можно ввести для всякой порядковой функции выбора C *двойственную* функцию выбора $C^*(X) = X \setminus (-C(-X))$. Прямому и обратному правилам выбора соответствуют взаимно двойственные функции выбора.

Анализ большого числа приведенных в [9] моделей выбора показал, что большинство из них может быть описано в терминах введенных операций и потому формализуемо. Это свидетельствует о достаточно больших выразительных возможностях языка.

Анализ большого числа приведенных в [9] моделей выбора показал, что большинство из них может быть описано в терминах введенных операций и потому формализуемо. Это свидетельствует о достаточно больших выразительных возможностях языка.

1.8. Свойства функций выбора и вид формализаций. Формализации могут быть использованы для исследования свойств представляемых ими функций выбора. Остановимся на двух свойствах, наиболее часто встречающихся в теории выбора.

Говорят, что функция выбора C обладает *свойством наследования* [1] (свойством α, см. [24]), если $Y \subseteq X \implies C(Y) \supseteq C(X) \cap Y$. Это означает сохранение выбора на подмножествах. Нетрудно убедиться, что свойство наследования можно эквивалентно переписать в виде $C(X \cup Y) \subseteq C(X) \cup C(Y)$, а в терминах формализаций (для формализуемых порядковых функций выбора) — в виде $\mathscr{C}_{X \cup Y}(\mathbf{x}) \to \mathscr{C}_X(\mathbf{x}) \vee \mathscr{C}_Y(\mathbf{x})$.

Говорят, что функция выбора C обладает *свойством согласия* [1] (свойством γ, см. [24]), если для любого множества предъявлений X_α, $\alpha \in A$, имеет место соотношение

$$C\Big(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\Big) \supseteq \bigcap_{\alpha \in A} C(X_\alpha). \tag{1.24}$$

В терминах формализаций это свойство записывается в виде

$$(\forall\alpha)\ \mathscr{C}_{X_\alpha}(\mathbf{x}) \to \mathscr{C}_X(\mathbf{x}), \qquad X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \tag{1.25}$$

(здесь считается, что если $\mathbf{x} \notin X_\alpha$, то $\mathscr{C}_{X_\alpha}(\mathbf{x}) \equiv 0$).

Предваренные формулы с кванторной группой $(Q_1\mathbf{y}_1)\dots(Q_s\mathbf{y}_s)$ будем называть *$(Q_1 \dots Q_s)$-формулами*; $(\forall\dots\forall)$- и $(\exists\dots\exists)$-формулы назовем соответственно *$\forall$- и $\exists$-формулами*.

Утверждение 1.1. *Функция выбора, представимая $\forall$-формулой, обладает свойством наследования.*

Доказательство. При уменьшении области X действия $\forall$-кванторов значение предиката $C_X(\mathbf{x})$, выражаемого $\forall$-формулой, не уменьшается.

Все функции выбора по бинарному отношению из п. 1.4, которые формализуемы, представимы $\forall$-формулами (п. 1.5) и потому обладают свойством наследования. Еще одним примером могут служить функции параллельного выбора, см. (2.10).

Утверждение 1.2. *Функция выбора, представимая $(\forall\exists\dots\exists)$-формулой, обладает свойством согласия.*

Доказательство. Пусть формализация функции C имеет вид $\mathscr{C}(\mathbf{x}) = (\forall\mathbf{y})\ (\exists\mathbf{z}_1)\dots(\exists\mathbf{z}_s)\ \mathscr{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s)$. Предположим, что для некоторого $\mathbf{x} \in X$ (обозначения см. в (1.25)) и всех $\alpha \in A$ выполнено $\mathscr{C}_{X_\alpha}(\mathbf{x}) = 1$. Рассмотрим произвольное $\hat{\mathbf{y}} \in X$; пусть $\hat{\mathbf{y}} \in X_{\hat\alpha}$. В силу $\mathscr{C}_{X_{\hat\alpha}}(\mathbf{x}) = 1$ найдутся $\hat{\mathbf{z}}_1, \dots, \hat{\mathbf{z}}_s \in X_{\hat\alpha} \subseteq X$, для которых $\mathscr{F}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}_1, \dots, \hat{\mathbf{z}}_s = 1$. Отсюда следует, что $\mathscr{C}_X(\mathbf{x}) = 1$.

В качестве иллюстрации рассмотрим правила выбора $\widehat{C}_\rho$, обратные к правилам C_ρ, введенным в п. 1.4. По теореме 1.4 формализация $\widehat{\mathscr{C}}_\rho(\mathbf{x})$, если она существует, двойственна к $\mathscr{C}_\rho(\mathbf{x})$, т. е. является $\exists$-формулой, а потому $\widehat{C}_\rho$ обладает свойством согласия ($\exists$-формулы сводятся к $(\forall\exists\dots\exists)$-формулам введением фиктивного аргумента). Еще один важный пример функций выбора со свойством согласия дает двухэтапный последовательный выбор, см. формализацию (1.22).

Нетрудно показать, что только $\forall$-формулы гарантируют свойство наследования, и только $(\forall\exists\dots\exists)$-формулы (либо сводящиеся к ним введением несущественных аргументов) — свойство согласия. Нам неизвестно, всякая ли формализуемая функция выбора со свойством наследования представима $\forall$-формулой, а со свойством согласия — $(\forall\exists\ldots\exists)$-формулой. Но если присутствуют оба свойства, задача имеет простое решение.

Утверждение 1.3. *Порядковая функция выбора обладает свойствами наследования и согласия в том и только том случае, когда она представима однокванторной $\forall$-формулой.*

Доказательство. Если функция выбора C обладает свойствами наследования и согласия, то для любых X и $\mathbf{x}\in X$ имеет место соотношение

$$\mathbf{x}\in C(X) \Longleftrightarrow (\forall \mathbf{y}\in X)\ \mathbf{x}\in C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}). \tag{1.26}$$

Действительно, если правая часть (1.26) истинна, то с использованием свойства согласия имеем $C(X)\supseteq \bigcap\limits_{\mathbf{y}\in X} C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\})\supseteq\{\mathbf{x}\}$.

Если правая часть ложна, то $\mathbf{x}\notin C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\})$ при некотором $\mathbf{y}\in X$, и по свойству наследования имеем $\mathbf{x}\notin C(X)$.

Поскольку C — порядковая функция выбора, соотношение $\mathbf{x}\in C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\})$ можно записать в виде $g([\mathbf{x},\mathbf{y}])=1$ с помощью некоторой функции g из $P_{3,2}$. Это и (1.26) означает, что C имеет формализацию $(\forall\mathbf{y})\ g([\mathbf{x},\mathbf{y}])$. Обратно, всякая функция выбора, формализуемая в таком виде, обладает свойствами наследования и согласия в соответствии с утверждениями 1.1 и 1.2.

Замечание. Чаще свойство согласия формулируют [1] в ослабленном виде: $C(X\cup Y)\supseteq C(X)\cap C(Y)$, что эквивалентно (1.24) для конечного Ω (определение (1.24) соответствует свойству γ из [24]). Ослабленного свойства недостаточно для справедливости утверждения 1.3. В частности, такая порядковая функция выбора C, что $C(X)=X$ для конечных X и $C(X)=\varnothing$ для бесконечных X, обладает свойствами наследования и согласия (ослабленного), но, как нетрудно показать, не формализуема.

Можно рассматривать формализацию произвольных функций выбора на произвольном Ω, если расширить множество допускаемых в формулах предикатов. Все результаты § 1 допускают модификацию для этого случая. Формализация (1.22), например, приобретает вид

$$\mathscr{C}_{\rho_1\rho_2}(\mathbf{x})=(\forall\mathbf{y})\ (\exists\mathbf{z})\ (\mathbf{x}\,\rho_1^*\,\mathbf{y}\wedge(\mathbf{z}\,\rho_1\,\mathbf{y}\vee\mathbf{x}\,\rho_2^*\,\mathbf{y}))=(\forall\mathbf{y})\ (\exists\mathbf{z})\ (\mathbf{y}\,\bar\rho_1\,\mathbf{x}\wedge(\mathbf{z}\,\rho_1\,\mathbf{y}\vee\mathbf{y}\,\bar\rho_2\,\mathbf{x})).$$

Это — $(\forall\exists)$-формула, а потому двухэтапный выбор обладает свойством согласия в случае произвольных отношений (прямое доказательство без построения формализаций имеется в [1]).

§ 2. Упрощение формализаций

2.1. Последовательный и параллельный выбор. Логика предикатов предоставляет достаточно широкие возможности для упрощения формализаций. В данном параграфе задача упрощения рассматривается применительно к важным в прикладном отношении моделям последовательного и параллельного выбора.

Основным правилом выбора по отношению является (1.5), и, говоря о выборе по отношению, всюду дальше мы будем иметь в виду это правило. При этом вместо C_ρ^1 будем использовать запись C_ρ.

Модель последовательного выбора задается набором отношений $\rho_1,\ldots,\rho_k$ и реализует функцию выбора $C_{\rho_1\ldots\rho_k}=C_{\rho_k}(\ldots C_{\rho_2}(C_{\rho_1})\ldots)$.

Число k называется *глубиной выбора. Модель параллельного выбора* задается набором отношений $\rho_1, \ldots, \rho_k$ и k-местной нетривиальной (не дающей тождественно пустого или полного множества) монотонной теоретико-множественной операцией F. Она реализует функцию выбора

$$C_{F,\rho_1\ldots\rho_k} = F(C_{\rho_1}, \ldots, C_{\rho_k}). \tag{2.1}$$

Число k называется *шириной выбора*. Операция F выразима через $\cap$ и $\cup$, а ее представляющая функция f — через $\wedge$ и $\vee$. Отношения $\rho_1, \ldots, \rho_k$ в этих моделях считаются порядковыми, поэтому функции выбора $C_{\rho_1\ldots\rho_k}$ и $C_{F,\rho_1\ldots\rho_k}$ также будут порядковыми.

Непосредственное применение методов из § 1 приводит к формализациям, имеющим большую сложность, и возникает задача их упрощения. Сложность формализации (1.4) в стандартной форме будем характеризовать ее *высотой* — числом s кванторов.

2.2. Глубина последовательного выбора и высота формул. Прямое построение формализаций по теореме 1.1 для выбора глубины k приводит к формулам высоты $2^k - 1$. Используя эквивалентности логики предикатов и ассоциативность операции суперпозиции, можно значительно уменьшить эту величину.

Теорема 2.1. *Функция выбора, реализуемая моделью последовательного выбора глубины k, допускает формализацию высоты не больше k.*

Доказательство. Проведем индукцию по глубине k выбора. Обозначим через $C^{(k)}$ произвольную функцию выбора глубины k. Докажем, что для $C^{(k)}$ имеется формализация

$$\mathscr{C}^{(k)}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y}_1)\ (\exists \mathbf{y}_2)\ (\forall \mathbf{y}_3) \ldots (Q\mathbf{y}_k)\ a_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k) \tag{2.2}$$

высоты k, в которой кванторы $\forall$ и $\exists$ чередуются (здесь $Q = \exists$ при четном k и $Q = \forall$ при k нечетном).

Базис индукции ($k=1$). Функция представима отношением ρ_1, и, согласно (1.16), формализация имеет вид

$$\mathscr{C}^{(1)}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y}_1)\ g^*_{\rho_1}([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1]) = (\forall \mathbf{y}_1)\ a_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1). \tag{2.3}$$

Индукционный шаг. Пусть $C^{(k)}$ имеет формализацию (2.2). Рассмотрим функцию $C_{\rho_1\ldots\rho_k\rho_{k+1}} = C^{(k+1)}$ глубины $k+1$. Воспользовавшись ассоциативностью операции суперпозиции (лемма 1.2), представим $C^{(k+1)}$ в виде $C_{\rho_1} \circ (C_{\rho_2} \circ \ldots \circ C_{\rho_{k+1}}) = C_{\rho_1} \circ C_{\rho_2\ldots\rho_{k+1}} = C^{(1)} \circ C^{(k)}$. Из предположения индукции (2.2) в силу (1.21) получаем формализацию

$$\mathscr{C}^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \mathscr{C}^{(1)}(\mathbf{x}) \wedge (\forall \mathbf{y}_1)\ (\exists \mathbf{y}_2) \ldots (Q\mathbf{y}_k)\ (\mathscr{C}^{(1)}(\mathbf{y}_1) \to$$
$$\to (\mathscr{C}^{(1)}(\mathbf{y}_2) \wedge (\mathscr{C}^{(1)}(\mathbf{y}_3) \to (\ldots(\mathscr{C}^{(1)}(\mathbf{y}_k) \circ a_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k))\ldots)))),$$

где $\circ$ означает $\wedge$ и $\to$ соответственно при четном и нечетном k. Перепишем эту формулу с учетом (2.3)

$$\mathscr{C}^{(k+1)}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{z})\ a_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \wedge (\forall \mathbf{y}_1)\ (\exists \mathbf{y}_2)\ \ldots (Q\mathbf{y}_k)\ ((\forall \mathbf{z}_1)\ a_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1) \to$$
$$\to ((\forall \mathbf{z}_2)\ a_1(\mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2) \wedge (\ldots((\forall \mathbf{z}_k)\ a_1(\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k) \circ a_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k))\ldots))). \tag{2.4}$$

Прежде, чем привести (2.4) к требуемому виду, сформулируем и докажем вспомогательные утверждения.

I. Для любой $(\exists\forall)$-формулы $\Phi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t)=(\exists\mathbf{z}_1)\ (\forall\mathbf{z}_2)\ \varphi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)$ выражения

$$\begin{aligned}\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t)&=(\forall\mathbf{z})\ \psi(\mathbf{x},\mathbf{z})\to\Phi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t),\\ \Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t)&=(\forall\mathbf{z})\ \psi(\mathbf{x},\mathbf{z})\vee\Phi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t)\end{aligned}\tag{2.5}$$

равносильны некоторым $(\exists\forall)$-формулам.

II. Для любой $(\forall\exists)$-формулы $\Phi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t)=(\forall\mathbf{z}_1)\ (\exists\mathbf{z}_2)\ \varphi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)$ выражения (2.5) равносильны $(\forall\exists)$-формулам.

Докажем для определенности утверждение I. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t)&=(\exists\mathbf{z})\ \bar{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{z})\vee(\exists\mathbf{z}_1)\ (\forall\mathbf{z}_2)\ \varphi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)=\\ &=(\exists\mathbf{z}_1)\ (\bar{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)\vee(\forall\mathbf{z}_2)\ \varphi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2))=\\ &=(\exists\mathbf{z}_1)\ (\forall\mathbf{z}_2)\ (\bar{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)\vee\varphi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)),\\ \Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t)&=((\exists\mathbf{z}_1)\ (\forall\mathbf{z}_2)\ \varphi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2))\wedge((\forall\mathbf{z})\ \psi(\mathbf{x},\mathbf{z}))=\\ &=(\exists\mathbf{z}_1)\ (\forall\mathbf{z}_2)\ (\varphi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)\wedge\psi(\mathbf{x},\mathbf{z}_2)).\end{aligned}$$

Вернемся к формализации (2.4). Рассмотрим два случая.

Случай 1 (k нечетно). При этом (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^{(k+1)}(\mathbf{x})&=(\forall\mathbf{z})\ a_1(\mathbf{x},\mathbf{z})\wedge(\forall\mathbf{y}_1)\ (\exists\mathbf{y}_2)\ldots(\forall\mathbf{y}_k)\ ((\forall\mathbf{z}_1)\ a_1(\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1)\to\\ &\to((\forall\mathbf{z}_2)\ a_1(\mathbf{y}_2,\mathbf{z}_2)\wedge(\ldots((\forall\mathbf{z}_k)\ a_1(\mathbf{y}_k,\mathbf{z}_k)\to a_k(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k))\ldots))).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Воспользовавшись равносильностями $(Q\mathbf{y})\ (\varphi\circ\psi(\mathbf{y}))=\varphi\circ(Q\mathbf{y})\ \psi(\mathbf{y})$, где $Q\in\{\forall,\exists\}$, $\circ\in\{\wedge,\to\}$, φ не зависит от $\mathbf{y}$, сдвинем квантор $\forall y_k$ так, чтобы он оказался перед внутренними скобками в (2.6):

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^{(k+1)}(\mathbf{x})&=(\forall\mathbf{z})\ a_1(\mathbf{x},\mathbf{z})\wedge(\forall\mathbf{y}_1)\ (\exists\mathbf{y}_2)\ldots(\exists\mathbf{y}_{k-1})\ ((\forall\mathbf{z}_1)\ a_1(\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1)\to\\ &\to(\ldots[(\forall\mathbf{z}_{k-1})\ a_1(\mathbf{y}_{k-1},\mathbf{z}_{k-1})\wedge(\forall\mathbf{y}_k)\ ((\exists\mathbf{z}_k)\ \bar{a}_1(\mathbf{y}_k,\mathbf{z}_k)\vee\\ &\qquad\vee a_k(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k))]\ldots)).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках:

$$\begin{aligned}[\ldots]&=(\forall\mathbf{z}_{k-1})\ a_1(\mathbf{y}_{k-1},\mathbf{z}_{k-1})\wedge((\exists\mathbf{z}_k)\ \bar{a}_1(\mathbf{z}_{k-1},\mathbf{z}_k)\vee\\ &\vee a_k(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{k-1},\mathbf{z}_{k-1}))=(\forall\mathbf{z}_{k-1})\ (\exists\mathbf{z}_k)\ b(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{k-1},\mathbf{z}_{k-1},\mathbf{z}_k).\end{aligned}$$

Подставим полученную $(\forall\exists)$-формулу в (2.7):

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^{(k+1)}(\mathbf{x})&=(\forall\mathbf{z})\ a_1(\mathbf{x},\mathbf{z})\wedge(\forall\mathbf{y}_1)\ (\exists\mathbf{y}_2)\ldots(\exists\mathbf{y}_{k-1})\ \{(\forall\mathbf{z}_1)\ a_1(\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1)\to\\ &\to(\ldots(\forall\mathbf{z}_{k-2})\ a_1(\mathbf{y}_{k-2},\mathbf{z}_{k-2})\wedge(\forall\mathbf{z}_{k-1})\ (\exists\mathbf{z}_k)\ b(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{k-1},\mathbf{z}_{k-1},\mathbf{z}_k)\ldots)\}.\end{aligned}$$

Применив нужное число раз утверждение II, заменим выражение в фигурных скобках $(\forall\exists)$-формулой $(\forall\mathbf{u})\ (\exists\mathbf{v})\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{k-1},\mathbf{u},\mathbf{v})$. Переименовав связанные переменные $\mathbf{u}=\mathbf{y}_k$, $\mathbf{v}=\mathbf{y}_{k+1}$, продолжим преобразования:

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^{(k+1)}(\mathbf{x})&=(\forall\mathbf{z})\ a_1(\mathbf{x},\mathbf{z})\wedge(\forall\mathbf{y}_1)\ (\exists\mathbf{y}_2)\ldots(\forall\mathbf{y}_k)\ (\exists\mathbf{y}_{k+1})\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{k+1})=\\ &=(\forall\mathbf{y}_1)\ a_1(\mathbf{x},\mathbf{y}_1)\wedge(\exists\mathbf{y}_2)\ldots(\forall\mathbf{y}_k)\ (\exists\mathbf{y}_{k+1})\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{k+1})=\\ &=(\forall\mathbf{y}_1)\ (\exists\mathbf{y}_2)\ldots(\forall\mathbf{y}_k)\ (\exists\mathbf{y}_{k+1})\ a_{k+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{k+1}),\end{aligned}$$

где $a_{k+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{k+1})=a_1(\mathbf{x},\mathbf{y}_1)\wedge d(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{k+1})$.

Случай 2 (k четно). При этом (2.4) имеет вид

$$\mathscr{C}^{(k+1)}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{z})\ a_1(\mathbf{x},\mathbf{z}) \wedge (\forall \mathbf{y}_1)\ (\exists \mathbf{y}_2)\dots(\exists \mathbf{y}_k)\ ((\forall \mathbf{z}_1)\ a_1(\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1) \to$$
$$\to ((\forall \mathbf{z}_2)\ a_1(\mathbf{y}_2,\mathbf{z}_2) \wedge (\dots((\forall \mathbf{z}_k)\ a_1(\mathbf{y}_k,\mathbf{z}_k)) \wedge a_k(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_k)\dots))).$$

Аналогично случаю 1 пронесем квантор $\exists \mathbf{y}_k$ внутрь формулы:

$$\mathscr{C}^{(k+1)}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{z})\ a_1(\mathbf{x},\mathbf{z}) \wedge (\forall \mathbf{y}_1)\ (\exists \mathbf{y}_2)\dots(\exists \mathbf{y}_k)\ ((\forall \mathbf{z}_1)\ a_1(\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1) \to$$
$$\to (\dots[(\forall \mathbf{z}_{k-1})\ a_1(\mathbf{y}_{k-1},\mathbf{z}_{k-1}) \to (\exists \mathbf{y}_k)\ (\forall \mathbf{z}_k)\ (a_1(\mathbf{y}_k,\mathbf{z}_k) \wedge$$
$$\wedge\, a_k(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_k))]\dots)). \qquad (2.8)$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках:

$$[\dots] = (\exists \mathbf{z}_{k-1})\ \bar{a}_1(\mathbf{y}_{k-1},\mathbf{z}_{k-1}) \vee ((\exists \mathbf{y}_k)\ (\forall \mathbf{z}_k)\ (a_1(\mathbf{y}_k,\mathbf{z}_k) \wedge a_k(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_k)) =$$
$$= (\exists \mathbf{z}_{k-1})\ (\bar{a}_1(\mathbf{y}_{k-1},\mathbf{z}_{k-1}) \vee (\forall \mathbf{z}_k)\ a_1(\mathbf{z}_{k-1},\mathbf{z}_k) \wedge a_k(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_{k-1},\mathbf{z}_{k-1})) =$$
$$= (\exists \mathbf{z}_{k-1})\ (\forall \mathbf{z}_k)\ b(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_{k-1},\mathbf{z}_{k-1},\mathbf{z}_k).$$

Далее нужно подставить полученную $(\exists\forall)$-формулу в (2.8), воспользоваться необходимое число раз утверждением I и завершить доказательство так же, как в случае 1.

2.3. Ширина параллельного выбора и высота формул. Перейдем к модели параллельного выбора. Рассмотрим функцию (2.1), реализуемую этой моделью. Согласно теореме 1.2 и (1.16) функция выбора $C = C_{F,\rho_1\dots\rho_k}$ имеет формализацию

$$\mathscr{C}(\mathbf{x}) = f(\mathscr{C}_{\rho_1}(\mathbf{x}),\dots,\mathscr{C}_{\rho_k}(\mathbf{x})) = f((\forall \mathbf{y})\ g^*_{\rho_1}([\mathbf{x},\mathbf{y}]),\dots,(\forall \mathbf{y})\ g^*_{\rho_k}([\mathbf{x},\mathbf{y}])). \qquad (2.9)$$

В результате приведения к предваренной форме получаем

$$\mathscr{C}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y}_1)\dots(\forall \mathbf{y}_s)\ g([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\dots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s]), \qquad g \in P_{3,2}. \qquad (2.10)$$

Из утверждения 1.1 и (2.10) вытекает

Лемма 2.1. *Порядковая функция выбора, реализуемая моделью параллельного выбора, обладает свойством наследования.*

Более экономный способ приведения формализаций (2.9) к форме (2.10) позволяет получить оценку высоты формализаций.

Теорема 2.2. *Функция выбора, реализуемая моделью параллельного выбора ширины k, допускает формализацию высоты не выше k.*

Доказательство. Представив монотонную булеву функцию f из (2.9) в конъюнктивной нормальной форме

$$f(u_1,\dots,u_k) = \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant r}\ \bigvee_{1\leqslant j\leqslant s(i)} u_{ij},$$

перепишем (2.9) в виде $\mathscr{C}(\mathbf{x}) = \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant r}\ \bigvee_{1\leqslant j\leqslant s(i)} (\forall \mathbf{y})\ g^*_{\rho_{ij}}([\mathbf{x},\mathbf{y}])$.

Введя обозначение $s = \max\{s(1),\dots,s(r)\}$, преобразуем $\mathscr{C}(\mathbf{x})$, используя эквивалентности логики предикатов:

$$\mathscr{C}(\mathbf{x}) = \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant r} (\forall \mathbf{y}_1)\dots(\forall \mathbf{y}_{s(i)})\ \bigvee_{1\leqslant j\leqslant s(i)} g^*_{\rho_{ij}}([\mathbf{x},\mathbf{y}_j]) =$$
$$= (\forall \mathbf{y}_1)\dots(\forall \mathbf{y}_s)\ \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant r}\ \bigvee_{1\leqslant j\leqslant s(i)} g^*_{\rho_{ij}}([\mathbf{x},\mathbf{y}_j]).$$

Отсюда и из неравенства $s \leqslant k$ получаем требуемое утверждение.

2.4. Условие реализуемости моделью параллельного выбора. Нам понадобятся некоторые факты, относящиеся к функциям g из $P_{3,2}$ (подробнее в [18]). Введя обозначения $p(u_i) = p_i$, $p'(u_i) = p'_i$, $(p_1, \ldots, p_m) = \widetilde{p}$, $(p'_1, \ldots, p'_m) = \widetilde{p}'$, будем записывать (1.2) в виде $g = f(\widetilde{p}, \widetilde{p}')$. *Элементарной дизъюнкцией* назовем выражение $D = s_1 \vee \ldots \vee s_m$, где $s_i \in \{p_i, p'_i, \bar{p}_i, \bar{p}'_i, p'_i \vee \bar{p}_i, 0\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, называется *элементарным слагаемым* ($s_i = 0$ означает отсутствие i-го слагаемого). Всякая функция g из $P_{3,2}$, $g \neq \mathrm{const}$, представима в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций. Это представление называется *конъюнктивной нормальной формой.*

Формулы вида (2.10) назовем *однородными* $\forall$*-формулами.*

Теорема 2.3. *Порядковая функция выбора C реализуема моделью параллельного выбора в том и только том случае, когда она представима однородной* $\forall$*-формулой* (2.10), *в которой* $g(0, \ldots, 0) = 1$.

Доказательство. Из (2.9) и процедуры приведения к предваренной форме (2.10) следует, что $g(\widetilde{0}) = f(g^*_{\rho_1}(\widetilde{0}), \ldots, g^*_{\rho_k}(\widetilde{0}))$, $\widetilde{0} = (0, \ldots, 0)$. Поскольку ρ_i антирефлексивно, $g_{\rho_i}(\widetilde{0}) = 0$ и $g^*_{\rho_i}(\widetilde{0}) = 1$. Так как $f \not\equiv 0$ и функция f монотонна, то $g(\widetilde{0}) = f(1, \ldots, 1) = 1$.

Обратно, пусть функция выбора C формализована в виде (2.10), где $g(\widetilde{0}) = 1$. Рассмотрим конъюнктивную нормальную форму $g(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_s) = D_1 \wedge \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_N$ и каждую из дизъюнкций D_i запишем в виде $D_i(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_s) = D_{i1}(\widetilde{u}_1) \vee \ldots \vee D_{is}(\widetilde{u}_s)$, отнеся к D_{ij} все члены дизъюнкции D_i, зависящие от переменных группы $\widetilde{u}_j$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(\mathbf{x}) &= (\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_s) \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant N} D_i([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1], \ldots, [\mathbf{x}, \mathbf{y}_s]) = \\ &= \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant N} (\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_s)\, D_i([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1], \ldots, [\mathbf{x}, \mathbf{y}_s]) = \\ &= \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant N} \bigvee_{1 \leqslant j \leqslant s} (\forall \mathbf{y}_j) D_{ij}([\mathbf{x}, \mathbf{y}_j] = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant N} \bigvee_{1 \leqslant j \leqslant s} (\forall \mathbf{y}) D_{ij}([\mathbf{x}, \mathbf{y}].\end{aligned} \tag{2.11}$$

Введем функции выбора C_{ij}, положив $\mathscr{C}_{ij}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ D_{ij}([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$. Если $D_{ij}(\widetilde{0}) = 0$ при некоторых i и j, то $D_{ij}([\mathbf{x}, \mathbf{x}]) = D_{ij}(\widetilde{0}) = 0$. Это означает, что выбор C_{ij} в одноэлементных предъявлениях $\{\mathbf{x}\}$ пуст. Поскольку $\forall$-формулы соответствуют функциям выбора со свойством наследования, выбор C_{ij} тождественно пуст. Обозначим через $J(i)$ множество всех j, для которых $D_{ij}(\widetilde{0}) = 1$ (множество $J(i)$ непусто, иначе $D_i(\widetilde{0}) = 0$ и $g(\widetilde{0}) = 0$). С учетом сказанного имеем

$$\mathscr{C}(\mathbf{x}) = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant N} \bigvee_{j \in J(i)} (\forall \mathbf{y})\ D_{ij}([\mathbf{x}, \mathbf{y}]). \tag{2.12}$$

Введем отношение ρ_{ij}, $j \in J(i)$, с представляющей функцией $g_{\rho_{ij}} = D^*_{ij}$. Из равенства $D_{ij}(\widetilde{0}) = 1$ следует, что $g_{\rho_{ij}}(\widetilde{0}) = 0$, а потому отношение ρ_{ij} антирефлексивно. Согласно (1.16), функция C_{ij} представима отношением ρ_{ij}. Отсюда и из (1.18) вытекает, что функция выбора C реализуется моделью параллельного выбора по набору отношений $\{\rho_{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant N,\ j \in J(i)\}$ с оператором $F = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant N} \bigvee_{j \in J(i)} Y_{ij}$.

Полученное в теореме описание формализаций для модели параллельного выбора позволяет поставить задачу нахождения наилучших формализаций (ей посвящена заключительная часть § 2). Что касается модели последовательного выбора, то для нее, скорее всего, не существует «хорошего» описания реализуемых функций. Основания для такого предположения дает ситуация в случае конечного множества Ω, см. [16]: функции параллельного выбора имеют простое описание, а распознавание функций последовательного выбора — NP-трудная задача.

2.5. Преобразования однородных $\forall$-формул. Пусть задана функция $g(\widetilde{u})$ из $P_{3,2}$, переменные которой разбиты на группы: $\widetilde{u}=(\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_s)$, $\widetilde{u}_i=(u_{i1},\ldots,u_{in})$, $1\leqslant i\leqslant s$. Пусть η — некоторое отображение $\{1,\ldots,s\}\to\{0,1,\ldots,s\}$. Обозначим $\eta\widetilde{u}_i=\widetilde{u}_{\eta(i)}$, где по определению $\widetilde{u}_0=\widetilde{0}$. Положим $\eta\widetilde{u}=(\eta\widetilde{u}_1,\ldots,\eta\widetilde{u}_s)$ и через $g^\eta(\widetilde{u})=g^\eta(\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_s)$ обозначим функцию $g(\eta\widetilde{u})=g(\eta\widetilde{u}_1,\ldots,\eta\widetilde{u}_s)$. Для формул $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ и $\mathscr{C}'(\mathbf{x})$ запись $\mathscr{C}(\mathbf{x})\geqslant\mathscr{C}'(\mathbf{x})$ в дальнейшем означает, что $\mathscr{C}_X(\mathbf{x})\geqslant\mathscr{C}'_X(\mathbf{x})$ для любого предъявления X, содержащего $\mathbf{x}$. Подобный смысл вкладывается и в запись $\mathscr{C}(\mathbf{x})=\mathscr{C}'(\mathbf{x})$.

Лемма 2.2. *Имеют место соотношения*

$$(\forall\mathbf{y}_1)\ldots(\forall\mathbf{y}_s)\ g([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s])\leqslant \leqslant(\forall\mathbf{y}_1)\ldots(\forall\mathbf{y}_s)\ g^\eta([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s]),\tag{2.13}$$

$$(\exists\eta)\ g_1(\widetilde{u})\geqslant g_2^\eta(\widetilde{u})\Longrightarrow \Longrightarrow(\forall\mathbf{y}_1)\ldots(\forall\mathbf{y}_s)\ (g_1([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s])\wedge g_2([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s]))= =(\forall\mathbf{y}_1)\ldots(\forall\mathbf{y}_s)\ g_2([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s]),\tag{2.14}$$

$$(\exists\eta)\ g_1(\widetilde{u})\geqslant g_2^\eta(\widetilde{u})\Longrightarrow \Longrightarrow(\forall\mathbf{y}_1)\ldots(\forall\mathbf{y}_s)\,(g_1([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s]))\vee(\forall\mathbf{y}_1)\ldots(\forall\mathbf{y}_s)\,(g_2([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s]))= =(\forall\mathbf{y}_1)\ldots(\forall\mathbf{y}_s)\ g_1([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s]),\tag{2.15}$$

$$g(\widetilde{0})=0\Longrightarrow(\forall\mathbf{y}_1)\ldots(\forall\mathbf{y}_s)\ g([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s])\equiv0.\tag{2.16}$$

Доказательство. Если правая часть в (2.13) равна 0 на предъявлении X, $\mathbf{x}\in X$, то найдутся такие $\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_s\in X$, что $g^\eta([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s])=0$. Тогда $g([\mathbf{x},\mathbf{y}_{\eta(1)}],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_{\eta(s)}])=0$ и, поскольку $\mathbf{y}_{\eta(1)},\ldots,\mathbf{y}_{\eta(s)}\in X$, левая часть (2.13) также равна 0.

Утверждения (2.14) и (2.15) легко следуют из (2.13). Чтобы получить (2.16), достаточно положить $\eta(1)=\ldots=\eta(s)=0$. Тогда в силу (2.13) имеем

$$(\forall\mathbf{y}_1)\ldots(\forall\mathbf{y}_s)\ g([\mathbf{x},\mathbf{y}_1],\ldots,[\mathbf{x},\mathbf{y}_s])\leqslant(\forall\mathbf{y}_1)\ldots(\forall\mathbf{y}_s)\ g(\widetilde{0})=0.$$

Эти преобразования будут использованы в дальнейшем для упрощения однородных $\forall$-формул. Особо будет выделен случай монотонных функций.

Порядковую функцию выбора C назовем *монотонной*, если для любых X и X', $X,X'\subseteq\mathbb{R}^n$, и $\mathbf{x}\in X$ из того, что $\mathbf{x}\in C(X)$ и имеется биекция φ: $X\to X'$, при которой $\varphi(\mathbf{x})\geqslant\mathbf{x}$ и $\varphi(\mathbf{y})\leqslant\mathbf{y}$, $\mathbf{y}\in X\setminus\{\mathbf{x}\}$, следует, что $\varphi(\mathbf{x})\in C(X')$. (Если характеристики варианта $\mathbf{x}$ не ухудшились, а других — не улучшились, то возможность $\mathbf{x}$ быть выбранным не уменьшилась.)

Функцию g из $P_{3,2}$ назовем *монотонной*, если $\widetilde{u}'\geqslant\widetilde{u}''$ влечет $g(\widetilde{u}')\geqslant g(\widetilde{u}'')$. Класс всех монотонных функций из $P_{3,2}$ обозначим $M_{3,2}$. Напомним некоторые факты из [18]. Функции класса $M_{3,2}$ и только они допускают представление (1.2) с монотонной булевой функцией f. Если $g\in M_{3,2}$, то $g^*\in M_{3,2}$. Для $g\in M_{3,2}$ существует единственная *приведенная* конъюнктивная нормальная форма. В ней отсутствуют поглощения $D\wedge D'=D'$ дизъюнкций и элементарные слагаемые s_i дизъюнкций принадлежат множеству $\{p_i,p'_i,0\}$. *Однородную $\forall$-формулу* (2.10) назовем *монотонной*, если функция g в ней монотонна.

Теорема 2.4. *Монотонная порядковая функция выбора C реализуема моделью параллельного выбора в том и только том случае, когда она представима монотонной однородной $\forall$-формулой* (2.10), *где $g(\widetilde{0})=1$.*

Доказательство. Функции $g(\widetilde{u}) = g(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_s)$ сопоставим функцию

$$\widehat{g}(\widetilde{u}) = \bigwedge_{\eta} g^{\eta}(\widetilde{u}), \tag{2.17}$$

которую назовем ее *ядром* (конъюнкция в (2.17) берется по всем отображениям η: $\{1, \ldots, s\} \to \{0, 1, \ldots, s\}$). Докажем ряд фактов.

А. Замена в однородной $\forall$-формуле (2.10) функции g ее ядром $\widehat{g}$ приводит к равной формуле. Имеем

$$((\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_s)\ \widehat{g}([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1], \ldots, [\mathbf{x}, \mathbf{y}_s]) = \bigwedge_{\eta} (\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_s)\ g^{\eta}([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1], \ldots, [\mathbf{x}, \mathbf{y}_s]).$$

Остается воспользоваться неравенством (2.13) и тем, что функция $g^{\eta'}$ при отображении $\eta'(i) = i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, совпадает с g.

Б. Если функция выбора C, формализованная в виде (2.10), монотонна, то ядро $\widehat{g}$ монотонно (т. е. $\widehat{g} \in M_{3,2}$).

Предположим, что $\widehat{g} \notin M_{3,2}$ и наборы $\widetilde{\sigma} = (\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_s)$, $\widetilde{\tau} = (\widetilde{\tau}_1, \ldots, \widetilde{\tau}_s)$ таковы, что $\widetilde{\sigma} \leqslant \widetilde{\tau}$ и $g(\widetilde{\sigma}) = 1$, $g(\widetilde{\tau}) = 0$. На основе $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\tau}$ легко указать точки $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s, \mathbf{x}', \mathbf{y}'_1, \ldots, \mathbf{y}'_s$, удовлетворяющие условиям $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{x}'$, $\mathbf{y}_i \geqslant \mathbf{y}'_i$, $[\mathbf{x}, \mathbf{y}_i] = \widetilde{\sigma}_i$, $[\mathbf{x}', \mathbf{y}'_i] = \widetilde{\tau}_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Положим $X = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$ и $X' = \{\mathbf{x}', \mathbf{y}'_1, \ldots, \mathbf{y}'_s\}$. Из (2.17) следует, что $\widehat{g} \leqslant g^{\eta}$ при любом η. Поскольку $\widehat{g}(\widetilde{\sigma}) = 1$, для всех η имеем $g^{\eta}(\widetilde{\sigma}) = g^{\eta}([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1], \ldots, [\mathbf{x}, \mathbf{y}_s]) = 1$.

Это, как нетрудно видеть, означает, что $\mathscr{C}_X(\mathbf{x}) = 1$, где $\mathscr{C}_X(\mathbf{x})$ — значение формулы (2.10) на предъявлении X. С другой стороны, $\widehat{g}(\widetilde{\tau}) = \widehat{g}([\mathbf{x}', \mathbf{y}'_1], \ldots, [\mathbf{x}', \mathbf{y}'_s]) = 0$, поэтому формула $(\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_s)\ \widehat{g}([\mathbf{x}', \mathbf{y}'_1], \ldots, [\mathbf{x}', \mathbf{y}'_s])$ обращается на множестве X' в 0. Отсюда в силу А заключаем, что $\mathscr{C}_{X'}(\mathbf{x}') = 0$. Соотношения $\mathscr{C}_X(\mathbf{x}) = 1$ и $\mathscr{C}_{X'}(\mathbf{x}') = 0$ противоречат монотонности C.

Из А, Б и теоремы 2.3 следует, что монотонная функция выбора, реализуемая моделью параллельного выбора, представима в виде (2.10) с функцией $g \in M_{3,2}$, $g(\widetilde{0}) = 1$. Обратное очевидно.

2.6. Минимизация однородных $\forall$-формул. Будем считать, что функции g в формулах вида (2.10) заданы посредством конъюнктивных нормальных форм. Если функция выбора C монотонна, то в соответствии с теоремой 2.4 можно полагать функцию g монотонной. Будем считать, что она задана приведенной конъюнктивной нормальной формой. Формулу (2.10) назовем *минимальной*, если она имеет наименьшую высоту (число кванторов) среди всех эквивалентных ей (реализующих ту же функцию выбора) формул вида (2.10). Под *задачей минимизации* будем понимать задачу построения минимальных однородных $\forall$-формул. Формулу (2.10) будем также характеризовать *сложностью* L — числом символов переменных в представлении g (в виде конъюнктивной нормальной формы). Минимальную формулу, имеющую наименьшую (среди минимальных формул) сложность L, будем называть *строго минимальной*. Целью п. 2.6 является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2.5. 1. *Задача минимизации однородных $\forall$-формул алгоритмически разрешима, но NP-трудна.*

2. *Существует полиномиальный алгоритм минимизации монотонных однородных $\forall$-формул, причем он строит строго минимальные формулы.*

Понятия, относящиеся к NP-трудности и полиномиальности см. в [10]. Доказательство теоремы распадается на ряд лемм.

Лемма 2.3. *Проблема эквивалентности однородных $\forall$-формул алгоритмически разрешима.*

Доказательство. Легко видеть, что значение $\mathscr{C}_X(\mathbf{x})$ формулы (2.10) совпадает со значением $\mathscr{C}_{X'}(\mathbf{0})$, где $X' = \{[\mathbf{y}, \mathbf{x}] \mid \mathbf{y} \in X\}$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Поэтому формулы $\mathscr{C}_X(\mathbf{x})$ и $\mathscr{C}'_X(\mathbf{x})$ эквивалентны в том и только том случае, когда $\mathscr{C}_X(\mathbf{0}) = \mathscr{C}'_X(\mathbf{0})$ при всех $X \subseteq \{-1, 0, 1\}^n$. В силу конечности множества $\{-1, 0, 1\}^n$ это можно проверить алгоритмически.

Следствие. *Задача минимизации однородных $\forall$-формул алгоритмически разрешима.*

Разрешимость проблемы эквивалентности позволяет решить задачу минимизации однородных $\forall$-формул перебором.

Из утверждения 1.2 следует, что всякая функция выбора, представимая формулой (2.10) высоты 1, обладает свойством согласия.

Лемма 2.4. *Задача минимизации однородных $\forall$-формул является NP-трудной.*

Доказательство. Покажем, что к задаче минимизации однородных $\forall$-формул полиномиально сводится NP-трудная задача выполнимости конъюнктивной нормальной формы [10].

Рассмотрим произвольную конъюнктивную нормальную форму вида $F(z_1, \ldots, z_{n-1}) = D_1 \wedge \ldots \wedge D_N$. Если $F(\widetilde{1}) = 1$, $\widetilde{1} = (1, \ldots, 1)$, то она выполнима. Пусть $F(\widetilde{1}) = 0$. Введем функцию $G(z_1, \ldots, z_n) = F(z_1, \ldots, z_{n-1}) \vee \bar{z}_n$ и положим $\mathscr{C}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ (\forall \mathbf{y}')\ G(p([x_1, y_1]), \ldots, p([x_{n-1}, y_{n-1}]), p([x_n, y'_n]))$.

Поскольку $G(\widetilde{0}) = 1$, функция выбора с формализацией $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ представима моделью параллельного выбора (теорема 2.3). Формула $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ приводится к виду $\mathscr{C}(\mathbf{x}) = \mathscr{C}'(\mathbf{x}) \vee \mathscr{C}''(\mathbf{x})$, где

$$\mathscr{C}'(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ (F(p([x_1, y_1]), \ldots, p([x_{n-1}, y_{n-1}])), \quad \mathscr{C}''(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ \bar{p}([x_n, y_n]).$$

Предположим, что формула F выполнима и $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ — набор, на котором $F(\widetilde{\sigma}) = 1$ (по условию $\widetilde{\sigma} \neq \widetilde{1}$). Рассмотрим предъявления $X' = \{\mathbf{0}, (-\widetilde{\sigma}, 1)\}$ и $X'' = \{\mathbf{0}, (-\widetilde{1}, -1)\}$. Легко проверить, что $\mathscr{C}'_{X'}(\mathbf{0}) = \mathscr{C}''_{X''}(\mathbf{0}) = 1$ и $\mathscr{C}'_{X' \cup X''}(\mathbf{0}) = \mathscr{C}''_{X' \cup X''}(\mathbf{0}) = 0$. Поэтому $\mathbf{0} \in C(X') \cap C(X'')$ и $\mathbf{0} \notin C(X' \cup X'')$. Это противоречит свойству согласия и означает, что высота минимальных формул для $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ не меньше 2.

Если формула F невыполнима, то $\mathscr{C}(\mathbf{x}) = \mathscr{C}''(\mathbf{x})$ и функция выбора C формализуема однокванторной формулой.

Таким образом, по формуле, полученной минимизацией $\mathscr{C}(\mathbf{x})$, можно дать ответ о выполнимости конъюнктивной нормальной формы F. Отметим, что конъюнктивная нормальная форма функции G имеет вид $(D_1 \vee \bar{z}_n) \wedge \ldots \ldots \wedge (D_n \vee \bar{z}_n)$ и по конъюнктивной нормальной форме функции F находится с полиномиальной сложностью.

Опишем теперь алгоритм упрощения однородных $\forall$-формул, который в монотонном случае решает задачу минимизации. Как и раньше, будем функцию g из (2.10) записывать в виде $g(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_s)$, $\widetilde{u}_i = (u_{i1}, \ldots, u_{in})$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Пусть

$$g(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_s) = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_N \tag{2.18}$$

есть произвольная конъюнктивная нормальная форма. Представим каждую дизъюнкцию D_i в виде

$$D_i(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_s) = D_{i1}(\widetilde{u}_1) \vee \ldots \vee D_{is}(\widetilde{u}_s), \tag{2.19}$$

включив в D_{ij} члены дизъюнкции D_i, зависящие от переменных группы $\widetilde{u}_j$. Введем множество переменных $\widetilde{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, и наряду с $D_{ij}(\widetilde{u}_j)$ будем рассматривать дизъюнкции $D_{ij}(\widetilde{v})$, полученные из $D_{ij}(\widetilde{u}_j)$ заменой группы переменных $\widetilde{u}_j$ на $\widetilde{v}$. С дизъюнкцией D_i свяжем множество

$\mathbf{Q}_i = \{D_{i1}(\tilde{v}), \ldots, D_{is}(\tilde{v})\}$ (одинаковые D_{ij} учитываются в нем один раз). Совокупность всех различных множеств, встречающихся среди $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_N$, обозначим через $\mathbf{Q}_g$.

Следующее утверждение показывает, что $\mathbf{Q}_g$ однозначно характеризует формулу (2.10) с точностью до равносильности.

Лемма 2.5. *Если*

$$\mathscr{C}'(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_s)\ g'([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1], \ldots, [\mathbf{x}, \mathbf{y}_s]),$$
$$\mathscr{C}''(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_t)\ g''([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1], \ldots, [\mathbf{x}, \mathbf{y}_t])$$

и $\mathbf{Q}_{g'} = \mathbf{Q}_{g''}$, *то формулы* $\mathscr{C}'(\mathbf{x})$ *и* $\mathscr{C}''(\mathbf{x})$ *равносильны.*

Доказательство. Приведем формулу (2.10) для $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ с помощью (2.18) и (2.19) к виду (2.11). Пусть $\mathbf{Q}_g = \{\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_m\}$ и $\mathbf{Q}_i = \{D_{i1}, \ldots, D_{is_i}\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Вводя обозначение $s_0 = \max\{s_1, \ldots, s_m\}$, преобразуем (2.11):

$$\mathscr{C}(\mathbf{x}) = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant m}\ \bigvee_{1 \leqslant j \leqslant s_i} (\forall \mathbf{y})\ D_{ij}([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant m} (\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_{s_i}) \bigvee_{1 \leqslant j \leqslant s_i} D_{ij}([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) =$$
$$= (\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_{s_0}) \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant m}\ \bigvee_{1 \leqslant j \leqslant s_i} D_{ij}([\mathbf{x}, \mathbf{y}]). \quad (2.20)$$

Представление (2.20) однозначно определяется системой множеств $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_g$. Различные формулы вида (2.11), которым соответствует одна и та же система $\mathbf{Q}$, приводятся с помощью указанных эквивалентных преобразований к одинаковому (с точностью до перенумерации множеств $\mathbf{Q}_i$ и дизъюнкций D_{ij}) представлению (2.20). Это означает равносильность формул.

При различной нумерации дизъюнкций D_{ij} в $\mathbf{Q}_i$ получаются различные представления (2.20). Любые два из них могут быть переведены одно в другое. Для этого достаточно над одним из них произвести цепочку преобразований (2.20) в обратном порядке, перенумеровать дизъюнкции D_{ij} (или, что то же самое — связанные переменные в $(\forall \mathbf{y}_j)\ D_{ij}([\mathbf{x}, \mathbf{y}_j])$) в соответствии с другим представлением и перейти к виду (2.20). Указанное преобразование будем называть *обобщенным переименованием переменных*, а про различные представления (2.20), отвечающие одинаковой системе $\mathbf{Q}$, будем говорить, что они эквивалентны с точностью до обобщенного переименования переменных.

Опишем в терминах систем $\mathbf{Q}_g$ *алгоритм упрощения однородных $\forall$-формул*. Он состоит в следующем.

1. В множествах $\mathbf{Q}_i$ устраняются все дизъюнкции $D_{ij}(\tilde{v})$, для которых $D_{ij}(\tilde{0}) = 0$. Полученные множества обозначаются $\mathbf{Q}'_i$.

2. В множествах $\mathbf{Q}'_i$ устраняются все $D_{ij}(\tilde{v})$, для которых имеются такие $D_{ij'}(\tilde{v}) \in \mathbf{Q}'_i$, $j' \neq j$, что $D_{ij'}(\tilde{v}) \geqslant D_{ij}(\tilde{v})$ (напомним, что $D_{ij'} \neq D_{ij}$). Полученные множества обозначаются $\mathbf{Q}''_i$.

3. На множествах $\mathbf{Q}''_i$ вводится частичный порядок

$$\mathbf{Q}''_{i'} \succ \mathbf{Q}''_i \iff (\forall D_{ij} \in \mathbf{Q}''_i)\ (\exists D_{i'j'} \in \mathbf{Q}''_{i'})\ D_{i'j'}(\tilde{v}) \geqslant D_{ij}(\tilde{v})$$

и удаляются множества $\mathbf{Q}''_i$, не максимальные по $\succ$.

Результатом алгоритма считаем систему всех оставшихся множеств $\mathbf{Q}''_i$, которую обозначим через $\widehat{\mathbf{Q}}_g$. Этот алгоритм полиномиален, так как используемые в нем неравенства вида $D \leqslant D'$ проверяются полиномиально.

Обозначим через $\widehat{\mathscr{C}}(\mathbf{x})$ формулу, построенную по системе $\widehat{\mathbf{Q}}_g$ в соответствии с леммой 2.4, и запишем ее в виде

$$\widehat{\mathscr{C}}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_{s_0})\ \widehat{g}([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1], \ldots, [\mathbf{x}, \mathbf{y}_{s_0}]), \quad (2.21)$$

где

$$\widehat{g}(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_{s_0}) = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant m} (D_{i1}(\widetilde{u}_1) \vee \ldots \vee D_{is_i}(\widetilde{u}_{s_i})). \tag{2.22}$$

Очевидно, что сложностные параметры s_0 и L_0 формулы (2.22) не хуже, чем у исходной формулы, а если хотя бы один шаг указанной процедуры нетривиален, то — лучше.

Лемма 2.6. *Формула $\widehat{\mathscr{C}}(\mathbf{x})$, полученная применением алгоритма, равносильна исходной, т. е. формализует ту же функцию выбора.*

Доказательство. 1. Осуществление первого этапа алгоритма соответствует переходу от формулы (2.11) к равносильной формуле (2.12).

2. Если при некоторых i, j и j' имеет место $D_{ij}(\widetilde{u}) \leqslant D_{ij'}(\widetilde{u})$, то $(\forall \mathbf{y})\ D_{ij}([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \leqslant (\forall \mathbf{y})\ D_{ij'}([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$. Этап 2 алгоритма соответствует применению вытекающего отсюда равенства

$$(\forall \mathbf{y})\ D_{ij}([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \vee (\forall \mathbf{y})\ D_{ij'}([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = (\forall \mathbf{y})\ D_{ij'}([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$$

и приводит к равносильной формуле.

Пусть $\mathbf{Q}_i'' = \{D_{ij_1}, \ldots, D_{ij_{s_i}}\}$, $1 \leqslant i \leqslant M$, — множества, полученные после этапа 2. Если обозначить $D_i''(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_s) = D_{ij_1}(\widetilde{u}_{j_1}) \vee \ldots \vee D_{ij_{s_i}}(\widetilde{u}_{ij_{s_i}})$, то формула, полученная после этапа 2, приобретет вид

$$(\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_s)(D_1''([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1], \ldots, [\mathbf{x}, \mathbf{y}_s]) \wedge \ldots \wedge D_M''([\mathbf{x}, \mathbf{y}_1], \ldots, [\mathbf{x}, \mathbf{y}_s])).$$

Легко видеть, что соотношение $\mathbf{Q}_{i'}'' \succ \mathbf{Q}_i''$ применительно к дизъюнкциям $D_{i'}''$ и D_i'' означает существование такой подстановки η: $\{1, \ldots, s\} \to \{1, \ldots s\}$, что $D_{i'}''(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_s) \geqslant (D_i'')^{\eta}(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_s)$. Тогда дизъюнкцию D_i'' можно устранить по (2.14). Преобразования, выполненные на этапе 3, соответствуют применению этого правила и дают равносильную формулу. Она совпадает с (2.21)–(2.22).

Лемма 2.7. *Результат применения алгоритма к монотонной однородной $\forall$-формуле дает строго минимальную формулу. Строго минимальная формула единственна с точностью до обобщенного переименования переменных.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{C}'(\mathbf{x})$ и $\mathscr{C}''(\mathbf{x})$ — произвольные монотонные однородные $\forall$-формулы, равносильные $\mathscr{C}(\mathbf{x})$, к которым алгоритм неприменим, а $\mathbf{Q}'$ и $\mathbf{Q}''$ — отвечающие им системы множеств.

С каждой монотонной дизъюнкцией $D = s_1 \vee \ldots \vee s_n$, $s_j \in \{0, p_j, p_j'\}$, будем связывать набор $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_j = \begin{cases} 1, & s_j = 0, \\ 0, & s_j = p_j, \\ -1, & s_j = p_j'. \end{cases}$

Это наибольший набор, удовлетворяющий условию $D(\widetilde{\sigma}) = 0$. Ясно, что для любой дизъюнкции D'

$$D'(\widetilde{\sigma}) = 0 \iff D'(\widetilde{u}) \leqslant D(\widetilde{u}). \tag{2.23}$$

1. Убедимся вначале, что для всякого множества $\mathbf{Q}_a'$ из $\mathbf{Q}'$ найдется такое $\mathbf{Q}_b''$ из $\mathbf{Q}''$, что $\mathbf{Q}_a' \succ \mathbf{Q}_b''$. Пусть $\mathbf{Q}_a' = \{D_{a1}', \ldots, D_{as_a}'\}$ и пусть $\widetilde{\sigma}_j$, $1 \leqslant j \leqslant s_a$, — наибольший набор, на котором $D_{aj}'(\widetilde{\sigma}_j) = 0$. Рассмотрим значение формулы $\mathscr{C}'(\mathbf{x})$ на предъявлении $X = \{\widetilde{0}, -\widetilde{\sigma}_1, \ldots, -\widetilde{\sigma}_{s_a}\}$ в точке $\mathbf{x} = \widetilde{0}$. Имеет место равенство $\mathscr{C}_X(\widetilde{0}) = 0$, ибо

$$(\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_{s_a})\ (D_{a1}'([\widetilde{0}, \mathbf{y}_1]) \vee \ldots \vee D_{as_a}'([\widetilde{0}, \mathbf{y}_{s_a}])) \leqslant D_{a1}'([\widetilde{0}, -\widetilde{\sigma}_1]) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee D_{as_a}'([\widetilde{0}, -\widetilde{\sigma}_{s_a}]) = D_{a1}'(\widetilde{\sigma}_1) \vee \ldots \vee D_{as_a}'(\widetilde{\sigma}_{s_a}) = 0.$$

Предположим, что в $\mathbb{Q}''$ не существует $\mathbf{Q}''_b$, для которого $\mathbf{Q}'_a \succ \mathbf{Q}''_b$. Это означает, что для любого $\mathbf{Q}''_b$ из $\mathbb{Q}''$ найдется такая дизъюнкция D''_{br} из $\mathbf{Q}''_b$, что ни для какого j, $1 \leqslant j \leqslant s$, не имеет места $D''_{br} \leqslant D'_{aj}$. Рассмотрим значения $D''_{br}([\widetilde{0}, \mathbf{y}])$ для $\mathbf{y} \in X$. Если $\mathbf{y} = \widetilde{0}$, то $D''_{br}([\widetilde{0}, \widetilde{0}]) = D''_{br}(\widetilde{0}) = 1$, ибо в случае $D''_{br}(\mathbf{0}) = 0$ к формуле $\mathscr{C}'(\mathbf{x})$ применим этап 1 алгоритма. Если $\mathbf{y} = -\widetilde{\sigma}_j$ при некотором j, то $D''_{br}([\widetilde{0}, -\widetilde{\sigma}_j]) = D''_{br}(\widetilde{\sigma}_j) = 1$ в силу (2.23) и того, что $D''_{br} \leqslant D'_{aj}$ не имеет места. Отсюда $(\forall \mathbf{y} \in X)\ D''_{br}([\widetilde{0}, \mathbf{y}]) = 1$, а потому

$$(\forall \mathbf{y}_1) \ldots (\forall \mathbf{y}_{t_b})\ (D''_{b1}([\widetilde{0}, \mathbf{y}_1]) \vee \ldots \vee D''_{bt_b}([\widetilde{0}, \mathbf{y}_{t_b}]) = 1,$$

где t_b — мощность множества $\mathbf{Q}''_b$. Поскольку b произвольно, то $\mathscr{C}''(\widetilde{0}) = 1$, что противоречит равносильности $\mathscr{C}'(\mathbf{x})$ и $\mathscr{C}''(\mathbf{x})$.

2. Докажем, что $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}''$. Как было установлено, для каждого $\mathbf{Q}'_a$ из $\mathbb{Q}'$ в $\mathbb{Q}''$ найдется такое $\mathbf{Q}''_b$, что $\mathbf{Q}'_a \succ \mathbf{Q}''_b$. Аналогично найдется $\mathbf{Q}'_d$ из $\mathbb{Q}'$, для которого $\mathbf{Q}''_b \succ \mathbf{Q}'_d$. Отсюда по транзитивности выводим, что $\mathbf{Q}'_a \succ \mathbf{Q}'_d$. Алгоритм неприменим к $\mathbb{Q}'$, поэтому $\mathbf{Q}'_a = \mathbf{Q}'_a = \mathbf{Q}''_b$. Таким образом, для каждого $\mathbf{Q}'_a$ из $\mathbb{Q}'$ найдется равное множество $\mathbf{Q}''_b$ из $\mathbb{Q}''$, т. е. $\mathbb{Q}' \subsetneq \mathbb{Q}''$. В силу равноправности множеств $\mathbb{Q}'$ и $\mathbb{Q}''$, верно и обратное включение $\mathbb{Q}'' \subseteq \mathbb{Q}'$.

3. Рассмотрим произвольную монотонную формулу $\mathscr{C}_1(\mathbf{x})$ вида (2.21), равносильную $\mathscr{C}(\mathbf{x})$; пусть число кванторов в ней равно s. Обозначим через $\mathscr{C}'_1(\mathbf{x})$ формулу, полученную из $\mathscr{C}_1(\mathbf{x})$ применением алгоритма. По доказанному $\mathbb{Q}'_1 = \widehat{\mathbb{Q}}$, а потому максимум мощностей множеств из $\mathbb{Q}'_1$ равен s_0. Согласно алгоритму эта величина не превосходит s. Отсюда следует, что $s \geqslant s_0$, т. е. число кванторов в формуле $\widehat{\mathscr{C}}(\mathbf{x})$ минимально.

4. Пусть $\widehat{\mathscr{C}}(\mathbf{x})$ — формула, полученная применением к $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ алгоритма, а $\mathscr{C}'(\mathbf{x})$ — формула наименьшей сложности L, эквивалентная $\mathscr{C}(\mathbf{x})$. К $\mathscr{C}'(\mathbf{x})$ алгоритм неприменим, поэтому $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}'$ (п. 2 доказательства). Отсюда следует, что $\widehat{\mathscr{C}}(\mathbf{x})$ также имеет наименьшую сложность L. В сочетании с результатом п. 3 это означает строгую минимальность формулы $\widehat{\mathscr{C}}(\mathbf{x})$.

5. Все равносильные формулы, полученные алгоритмом, имеют одинаковую систему $\mathbb{Q}$, а потому совпадают с точностью до обобщенного переименования переменных.

Замечание. Из доказательства видно, что в монотонном случае строго минимальные формулы являются одновременно наилучшими по числу кванторов и сложности L.

Теорема 2.5 непосредственно следует из лемм 2.1–2.5.

§ 3. Алгоритмические вопросы построения моделей

3.1. Реализации и аппроксимации. Задача *синтеза моделей выбора* класса $\mathbb{M}$ состоит в том, чтобы по заданной функции выбора C построить модель M, $M \in \mathbb{M}$, для которой $C_M = C$ (либо установить, что это невозможно). Пусть $\mathfrak{C}_{\mathbb{M}}$ — множество всех функций выбора, реализуемых моделями из $\mathbb{M}$. Если C не принадлежит $\mathfrak{C}_{\mathbb{M}}$, можно поставить вопрос о наилучших приближениях C моделями из $\mathbb{M}$. Введем соответствующие понятия.

Функция выбора C^* называется *мажорантой* функции C, если $C^* \supseteq C$ (запись $C^* \supseteq C$ означает $C^*(X) \supseteq C(X)$, $X \subseteq \Omega$). Мажоранта $C_{\text{в}}$ называется *верхней аппроксимацией* функции C в классе моделей $\mathbb{M}$, если $C_{\text{в}} \in \mathfrak{C}_{\mathbb{M}}$ и для любой мажоранты $C^* \in \mathfrak{C}_{\mathbb{M}}$ функции C выполнено $C_{\text{в}} \subseteq C^*$. Аналогично определяются миноранта — функция выбора C_*, удовлетворяющая условию $C_* \subseteq C$, и *нижняя аппроксимация* в классе $\mathbb{M}$ — функция $C_{\text{н}}$ из $\mathfrak{C}_{\mathbb{M}}$, которая является минорантой для C и такова, что для любой миноранты C_* из $\mathfrak{C}_\mathbf{M}$ выполнено $C_н \supseteq C_*$. Легко видеть, что верхняя аппроксимация и нижняя аппроксимация, если они существуют, — единственны. Критерий существования верхних и нижних аппроксимаций в классе $\mathbf{M}$ для функций выбора на конечном множестве Ω установлен в [13].

Будем рассматривать порядковые функции выбора и порядковые модели, которые будем считать формализуемыми. К этому случаю можно адаптировать результат из [13], приобретающий здесь следующий вид. Скажем, что класс моделей $\mathbf{M}$ *замкнут относительно объединения* (*пересечения*) функций, если из принадлежности C_1 и C_2 множеству $\mathfrak{C}_\mathbf{M}$ следует $C_1 \cup C_2 \in \mathfrak{C}_\mathbf{M}$ $(C_1 \cap C_2 \in \mathfrak{C}_\mathbf{M})$.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathbf{M}$ — конечный класс формализуемых моделей выбора. Для того, чтобы в классе $\mathbf{M}$ существовала верхняя (нижняя) аппроксимация для любой формализуемой функции выбора, необходимо и достаточно, чтобы класс $\mathbf{M}$ был замкнут относительно пересечения (объединения) и чтобы функция выбора $C^1(X) \equiv X$ (функция выбора $C^0(X) \equiv \varnothing$) содержалась в $\mathbf{M}$.*

Доказательство проведем для верхней аппроксимации (для нижней — аналогично).

Предположим, что выполнены условия леммы, и пусть C — произвольная функция выбора. Рассмотрим множество всех ее мажорант $C_1^*, \ldots, C_q^*$ из класса $\mathfrak{C}_\mathbf{M}$ (оно конечно и непусто, ибо содержит C^1). Образуем функцию $C^* = C_1^* \cap \ldots \cap C_q^*$. Она содержится в $\mathfrak{C}_\mathbf{M}$, и для любой мажоранты C_s^*, $1 \leqslant s \leqslant q$, выполнено $C^* \subseteq C_s^*$. Поэтому C является верхней аппроксимацией.

Если нарушено условие замкнутости и для функций C_1 и C_2 из $\mathfrak{C}_\mathbf{M}$ функция $C = C_1 \cap C_2$ не принадлежит $\mathfrak{C}_\mathbf{M}$, то функция выбора C, являющаяся формализуемой (как пересечение формализуемых функций), не имеет верхней аппроксимации в классе $\mathbf{M}$. В противном случае верхняя аппроксимация $C_в$, являясь минимальной из мажорант, должна удовлетворять включениям $C_в \subseteq C_1$, $C_в \subseteq C_2$ и, следовательно, $C_в \subseteq C$. Но по определению верхней аппроксимации выполнено $C_в \supseteq C$, а потому $C_в = C$. Это противоречит условию $C_в \in \mathfrak{C}_\mathbf{M}$.

Если функция выбора C^1 не входит в $\mathfrak{C}_\mathbf{M}$, то она не имеет мажорант и, тем более, — верхней аппроксимации в классе $\mathbf{M}$. В то же время она формализуема в виде $\mathscr{C}^1(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ (x_1 \geqslant y_1 \vee y_1 \geqslant x_1))$.

3.2. Реализации и аппроксимации отношениями. При рассмотрении вопросов реализации и аппроксимации ограничимся моделью выбора (1.5) по порядковому отношению. Уже в этом случае возникают принципиальные алгоритмические трудности.

Напомним, см. (1.16), что функция выбора C_ρ по отношению ρ имеет формализацию $\mathscr{C}_\rho(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ g_\rho^*([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$. Отсюда и из теоремы 2.3 следует, что функция выбора C представима отношением в том и только том случае, когда допускает формализацию $\mathscr{C}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ g([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$, где $g \in P_{3,2}$ удовлетворяет условию $g(\widetilde{0}) = 1$. Обозначим через $\mathfrak{C}$ класс функций выбора, формализуемых в таком виде. Согласно лемме 3.1 вопрос о существовании верхних и нижних аппроксимаций для произвольных функций выбора сводится к вопросу о замкнутости класса $\mathfrak{C}$ относительно операций $\cap$ и $\cup$.

Лемма 3.2. *Класс $\mathfrak{C}$ замкнут относительно пересечения, но не замкнут относительно объединения функций.*

Доказательство. Пусть C_1 и C_2 *принадлежат* $\mathfrak{C}$ и их формализации имеют вид $\mathscr{C}_i(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ g_i([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$, $g_i(\widetilde{0}) = 1$, $i = 1, 2$.

Функция $C' = C_1 \cap C_2$ имеет формализацию

$$\mathscr{C}'(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ g_1([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \wedge (\forall \mathbf{y})\ g_2([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = (\forall \mathbf{y})\ g'([\mathbf{x}, \mathbf{y}]),$$

где $g' = g_1 \wedge g_2$. При этом $g'(\widetilde{0}) = g_1(\widetilde{0}) \wedge g_2(\widetilde{0}) = 1$, а потому $C' \in \mathfrak{C}$.

Пусть $C'' = C_1 \cup C_2$. Рассмотрим случай, когда функции g_1 и g_2 не сравнимы, т. е. найдутся $\widetilde{u}_1$ и $\widetilde{u}_2$, для которых $g_1(\widetilde{u}_1) = g_2(\widetilde{u}_2) = 1$, $g_1(\widetilde{u}_2) = g_2(\widetilde{u}_1) = 0$. С учетом $[\widetilde{0}, -\widetilde{u}_i] = \widetilde{u}_i$, $i = 1, 2$, это дает $\widetilde{0} \in C_1(\{\widetilde{0}, -\widetilde{u}_1\}) \subseteq C''(\{\widetilde{0}, -\widetilde{u}_1\})$ и $\widetilde{0} \in C_2(\{\widetilde{0}, -\widetilde{u}_2\}) \subseteq C''(\{\widetilde{0}, -\widetilde{u}_2\})$. В то же время из соотношений $\widetilde{0} \notin C_1(\{\widetilde{0}, -\widetilde{u}_1, -\widetilde{u}_2\})$ и $\widetilde{0} \notin C_2(\{\widetilde{0}, -\widetilde{u}_1, -\widetilde{u}_2\})$ следует $\widetilde{0} \notin C''(\{\widetilde{0}, -\widetilde{u}_1, -\widetilde{u}_2\})$. Таким образом, для C'' нарушено свойство согласия $C''(X_1 \cup X_2) \supseteq C''(X_1) \cap \cap C''(X_2)$ (при $X_1 = \{\widetilde{0}, -\widetilde{u}_1\}$, $X_2 = \{\widetilde{0}, -\widetilde{u}_2\}$), а потому $C'' \notin \mathfrak{C}$.

Из лемм 3.1 и 3.2 получаем

Следствие. *Всякая функция выбора имеет верхнюю аппроксимацию в классе отношений, а нижняя аппроксимация в классе отношений существует не для всех функций выбора.*

Чтобы воспользоваться леммой 3.1 для верхней аппроксимации, достаточно заметить, что класс $\mathfrak{C}$ конечен (при заданной размерности n пространства $\mathbb{R}^n$) и что функция выбора $C^1(X) \equiv X$ реализуется пустым отношением. Результат для нижней аппроксимации непосредственно следует из леммы 3.1.

Критерий существования нижней аппроксимации в классе отношений для произвольных функций выбора *на конечном* множестве Ω получен Б. М. Литваковым [13]. Для порядковых функций выбора результат имеет другой вид.

Пусть C — порядковая функция выбора. Сопоставим ей множество наборов

$$S_C = \{\widetilde{\sigma} \in \{-1, 0, 1\}^n \setminus \widetilde{0} \mid (\exists X)\ (\exists \mathbf{x})\ (\mathbf{x} \in X \setminus C(X) \wedge [\mathbf{x}, X] = \{-\widetilde{\sigma}, \widetilde{0}\})\}, \quad (3.1)$$

где $[\mathbf{x}, X] = \{[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \mid \mathbf{y} \in X\}$. С набором $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{-1, 0, 1\}^n$ свяжем конъюнкцию $K_{\widetilde{\sigma}} = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$, где $q_i = \begin{cases} p_i, & \sigma_i = 1, \\ p_i' \wedge \bar{p}_i, & \sigma_i = 0, \\ \bar{p}_i', & \sigma_i = -1, \end{cases}$ и введем отношение $\rho_{\text{н}}$ представляющей функцией

$$g_{\rho_{\text{н}}} = \bigvee_{\widetilde{\sigma} \in S_C} K_{\widetilde{\sigma}}. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. *Порядковая функция выбора C имеет нижнюю аппроксимацию в классе отношений в том и только том случае, когда $C_{\rho_{\text{н}}} \subseteq C$. При выполнении этого условия нижняя аппроксимация реализуется отношением $\rho_{\text{н}}$.*

Доказательство. 1. Если $\widetilde{\sigma} \in S_C$ и C_ρ — миноранта функции C, то $g_\rho(\widetilde{\sigma}) = 1$.

Предположим, что $g_\rho(\widetilde{\sigma}) = 0$. Рассмотрим X и $\mathbf{x} \in X \setminus C(X)$, для которых $[\mathbf{x}, X] = \{-\widetilde{\sigma}, \widetilde{0}\}$. Имеем $(\forall \mathbf{y} \in X)\ \mathbf{y} \bar{\rho} \mathbf{x}$, откуда $\mathbf{x} \in C_\rho(X)$, что противоречит условию минорируемости $C_\rho \subseteq C$.

2. Если $\widetilde{\sigma} \notin S_C$ и функция C имеет хотя бы одну миноранту, то найдется миноранта C_ρ, для которой $g_\rho(\widetilde{\sigma}) = 0$.

Введем отношение ρ, положив функцию g_ρ равной 1 на всех наборах, кроме $\widetilde{0}$ и $\widetilde{\sigma}$. Рассмотрим произвольные X и $\mathbf{x} \in X \setminus C(X)$. Функция выбора C имеет миноранту (в классе отношений), поэтому $\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x}\})$ и предъявление X не одноэлементно. По определению S_C найдется $\mathbf{y} \in X$, для которого $[\mathbf{y}, \mathbf{x}] \notin \{\widetilde{\sigma}, \widetilde{0}\}$. Тогда $\mathbf{y} \rho \mathbf{x}$ и $\mathbf{x} \notin C_\rho(X)$. В силу произвольности выбора X и $\mathbf{x}$ выполнено соотношение $C_\rho \subseteq C$, означающее, что C_ρ минорирует C.

3. Если множество минорант функции C непусто и $C_{\rho_1}, \ldots, C_{\rho_s}$ — все такие миноранты, то представляющая функция отношения $\rho_н = \rho_1 \cap \ldots \cap \rho_s$ задается равенством (3.2).

Из 1 и 2 следует, что множеством единичных значений функции $g_{\rho_н}$ является S_C. Учитывая, что $K_{\tilde{\sigma}}$ обращается в единицу лишь на наборе $\tilde{\sigma}$, приходим к (3.2).

4. Нижняя аппроксимация существует в том и только том случае, когда $C_{\rho_н} \subseteq C$. При этом она реализуется отношением $\rho_н$.

Если выполнено условие $C_{\rho_н} \subseteq C$, то $C_{\rho_н}$ является минорантой и, в силу соотношений $\rho_i \supseteq \rho_н$, $1 \leqslant i \leqslant s$, — максимальной. Поэтому $C_{\rho_н} = C_н$. Обратно, если нижняя аппроксимация $C_н$ существует и $C_н = C_{\rho'}$ при некотором ρ', то из максимальности $C_н$ следует $\rho_i \supseteq \rho'$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Поэтому $\rho' \subseteq \rho_н$. Учитывая, что $C_н$ — миноранта, имеем $C_{\rho_н} \subseteq C_{\rho'} = C_н \subseteq C$.

3.3. Вопросы разрешимости. Здесь доказывается, что проблемы построения реализаций и аппроксимаций (в классе отношений) по формализациям функций выбора алгоритмически неразрешимы.

Замкнутую формулу $\mathcal{F}$ на $\mathbb{R}^n$ назовем (тождественно) *истинной*, если $\mathcal{F}_X = 1$ для всех $X \subseteq \mathbb{R}^n$, и назовем *выполнимой*, если $\mathcal{F}_X = 1$ для некоторого $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Проблемы истинности и выполнимости формул сводятся друг к другу, ибо формула $\mathcal{F}$ истинна в том и только том случае, когда $\overline{\mathcal{F}}$ невыполнима.

Теорема 3.2. *При $n \geqslant 2$ проблема истинности (выполнимости) замкнутых формул на $\mathbb{R}^n$ алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Воспользуемся неразрешимостью элементарной теории (с равенством) двух линейных порядков $(\geqslant_1, \geqslant_2)$, см. [23]. Обозначим через $\mathbf{A}$ некоторую систему аксиом этой теории. Из свойств элементарных теорий следует [14], что проблема выполнимости множества формул, полученного добавлением к $\mathbf{A}$ замкнутой формулы в сигнатуре $\{\geqslant_1, \geqslant_2\}$, также неразрешима.

Пусть $\mathcal{A}$ — формула в сигнатуре $\{\geqslant_1, \geqslant_2\}$. Можно считать ее предваренной, т. е. имеющей вид $\mathcal{A} = (Q_1 x^{(1)}) \ldots (Q_s x^{(s)}) \mathcal{F}$. Построим по ней формулу $\mathcal{B} = \mathcal{D} \wedge \mathcal{A}'$ на $\mathbb{R}^n$, где $D = (\forall \mathbf{x})\ (\forall \mathbf{y})\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \to x_1 \neq y_1 \wedge x_2 \neq y_2)$, $\mathcal{A}' = (Q_1 \mathbf{x}^{(1)}) \ldots (Q_s \mathbf{x}^{(s)}) \mathcal{F}'$, а $\mathcal{F}'$ получена из $\mathcal{F}$ заменой соотношений $x^{(u)} \geqslant_i x^{(v)}$, $i = 1, 2$, $1 \leqslant u, v \leqslant s$, неравенствами $x_i^{(u)} \geqslant x_i^{(v)}$. Покажем, что множество $\mathbf{A} \cup \{\mathcal{A}\}$ выполнимо в том и только том случае, когда выполнима формула $\mathcal{B}$.

Пусть система $\mathbf{A} \cup \{\mathcal{A}\}$ выполнима и $(M, \geqslant_1, \geqslant_2)$ — ее нормальная модель. Множество M можно считать не более чем счетным. Тогда линейные порядки $(M, \geqslant_1)$ и $(M, \geqslant_2)$ изоморфно вложимы в $\mathbb{R}$, см. [11]; пусть φ_1 и φ_2 — соответствующие изоморфизмы. Фиксируем некоторое a из $\mathbb{R}$ и каждому x из M сопоставим n-ку $\mathbf{x} = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), a, \ldots, a)$. Множество всех полученных n-ок обозначим через X. Из истинности формулы $\mathcal{A}$ на M вытекает $\mathcal{A}'_X = 1$, откуда с учетом очевидного соотношения $\mathcal{D}_X = 1$ получаем $\mathcal{B}_X = 1$.

Обратно, пусть формула $\mathcal{B}$ истинна на некотором X, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X = \{\mathbf{x}^\mu, \mu \in M\}$. Введем линейные порядки $\geqslant_1$ и $\geqslant_2$, для $i = 1, 2$ положив $\mu \geqslant_i \nu \iff x_i^\mu \geqslant x_i^\nu$ (истинность $\mathcal{D}_X$ гарантирует их антисимметрию). Модель $(M, \geqslant_1, \geqslant_2)$ удовлетворяет системе формул $\mathbf{A} \cup \{\mathcal{A}\}$.

Из полученной сводимости следует неразрешимость проблемы выполнимости (и истинности) формул на $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Из разрешимости элементарной теории линейного порядка [20] следует, что при $n = 1$ проблемы истинности и выполнимости замкнутых формул (на $\mathbb{R}$) разрешимы.

Сформулируем задачи, относящиеся к реализации и аппроксимациям формализуемых функций выбора отношениями.

Проблема реализуемости. По формализации $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ узнать, представима ли соответствующая функция выбора C отношением, т. е. имеет ли место $C = C_\rho$ при некотором ρ.

Проблема существования нижней аппроксимации. По формализации $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ узнать, имеет ли функция выбора C нижнюю аппроксимацию в классе отношений.

Верхняя аппроксимация существует всегда (следствие из леммы 3.2), поэтому можно поставить вопрос о ее нахождении.

Проблема построения верхней аппроксимации. По формализации $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ найти отношение $\rho_{\text{в}}$, реализующее верхнюю аппроксимацию функции C в классе отношений.

Теорема 3.3. *Проблемы реализуемости, существования нижней аппроксимации и построения верхней аппроксимации в классе отношений на $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$ алгоритмически неразрешимы.*

Доказательство. Более подробно рассмотрим задачу о нижней аппроксимации (остальные две — конспективно).

Пусть $\mathscr{F}$ — замкнутая формула на $\mathbb{R}^n$, вопрос об истинности которой нужно решить. Рассмотрим функцию выбора C, задаваемую формулой

$$\mathscr{C}(\mathbf{x}) = \mathscr{F} \vee \bigvee_{\tilde{\sigma} \in \{-1,0,1\}^n \setminus \tilde{0}} (\forall \mathbf{y})\ ([\mathbf{x},\mathbf{y}] = \tilde{0} \vee [\mathbf{x},\mathbf{y}] = \tilde{\sigma}) \tag{3.3}$$

(запись $[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \tilde{\sigma}$ — сокращение для $x_1 \square_1 y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \square_n y_n$, где $\square_i$ означает $>$, $<$ и $=$ при σ_i, соответственно равном 1, -1 и 0). Покажем, что функция выбора C имеет нижнюю аппроксимацию в том и только том случае, когда $\mathscr{F}_X = 1$ для всех X, у которых $|X| \geqslant 3$, где $|\cdot|$ — мощность множества. Запишем $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ в виде $\mathscr{C}(\mathbf{x}) = \mathscr{F} \vee \mathscr{B}(\mathbf{x})$.

1. Пусть $\mathscr{F}_X = 1$ для всех X, у которых $|X| \geqslant 3$. Убедимся, что $\mathscr{C}(\mathbf{x}) \equiv 1$ (т. е. $\mathscr{C}_X(\mathbf{x}) = 1$ для всех X и $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in X$). Возьмем произвольное X. Если $\mathscr{F}_X = 1$, то $\mathscr{C}_X(\mathbf{x}) = 1$. Если же $\mathscr{F}_X = 0$, то $|X| \leqslant 2$, а потому, как легко видеть, $\mathscr{B}_X(\mathbf{x}) = 1$ при любом $\mathbf{x} \in X$, откуда $\mathscr{C}_X(\mathbf{x}) \geqslant \mathscr{B}_X(\mathbf{x}) = 1$, т. е. $\mathscr{C}_X(\mathbf{x}) = 1$. Формула $\mathscr{C}(\mathbf{x}) \equiv 1$ соответствует функции $C(X) \equiv X$. Она имеет нижнюю аппроксимацию $C_{\text{н}}(X) \equiv X$, реализуемую пустым отношением.

2. Обратно, пусть функция выбора C, задаваемая формулой (3.3), имеет нижнюю аппроксимацию. На основе $\mathscr{C}(\mathbf{x}) \geqslant \mathscr{B}(\mathbf{x})$ нетрудно заключить, что множество S_C в (3.1) пусто. Отношение $\rho_{\text{н}}$, построенное согласно (3.2), также пусто и $C_{\rho_{\text{н}}}(X) \equiv X$. По теореме 3.1 выполнено $C_{\rho_{\text{н}}} \subseteq C$, а потому $C(X) \equiv X$ и $\mathscr{C}(\mathbf{x}) \equiv 1$. Убедимся, что отсюда следует $\mathscr{F}_X = 1$ для всех X, у которых $|X| \geqslant 3$. Предположим, что это не так и $\mathscr{F}_X = 0$ для некоторого X, у которого $|X| \geqslant 3$. Легко видеть, что в X найдутся такие $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$, что $[\mathbf{x},\mathbf{y}_1] \neq [\mathbf{x},\mathbf{y}_2] \neq \tilde{0}$. Из выражения для $\mathscr{B}(\mathbf{x})$ видно, что для так выбранного $\mathbf{x}$ выполнено $\mathscr{B}_X(\mathbf{x}) = 0$. Это приводит к $\mathscr{C}_X(\mathbf{x}) = \mathscr{F}_X \vee \mathscr{B}_X(\mathbf{x}) = 0$, что противоречит $\mathscr{C}(\mathbf{x}) \equiv 1$.

Из доказанного следует, что формула $\mathscr{F}$ истинна в том и только том случае, когда функция выбора C имеет нижнюю аппроксимацию и $\mathscr{F}_X = 1$ для всех X, у которых $|X| \leqslant 2$. Истинность формул на не более чем двухэлементных множествах можно проверять алгоритмически (элиминацией кванторов). Поэтому из разрешимости проблемы существования нижней аппроксимации следовала бы разрешимость проблемы истинности формул на $\mathbb{R}^n$, что согласно теореме 3.1 при $n \geqslant 2$ невозможно.

Для доказательства неразрешимости проблемы реализуемости и проблемы построения верхней аппроксимации достаточно рассмотреть формализации $\mathscr{C}'(\mathbf{x}) = \mathscr{F} \vee (\exists \mathbf{y})\ (\forall \mathbf{z})\ (\mathbf{z} = \mathbf{y} \vee \mathbf{z} = \mathbf{x})$, $\mathscr{C}''(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ (\mathbf{y} = \mathbf{x}) \vee \overline{\mathscr{F}}$.

Можно доказать, что:

формула $\mathcal{F}$ истинна в том и только том случае, когда функция выбора C' реализуема отношением и истинна на множествах X, у которых $|X| \leqslant 2$,

формула $\mathcal{F}$ истинна в том и только том случае, когда верхняя аппроксимация функции C'' реализуется отношением, состоящим из всех пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Замечание. В случае однокритериального выбора (т. е. при $n = 1$) проблемы реализуемости, существования нижней аппроксимации и нахождения верхней аппроксимации алгоритмически разрешимы, ибо разрешимость проблемы истинности формул на $\mathbb{R}$ (см. замечание к теореме 3.2) позволяет решать проблему эквивалентности формул и использовать в задачах о реализациях и аппроксимациях перебор.

3.4. Парно-выявленное отношение. Ряд трудностей, связанных с неразрешимостью проблем реализации и аппроксимации функций выбора отношениями, частично удается преодолеть с помощью так называемых парно-выявленных отношений.

Для функций выбора C антирефлексивное отношение $\omega = \omega(C)$, определяемое для произвольных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, условием

$$\mathbf{x}\, \omega\, \mathbf{y} \iff \mathbf{y} \notin C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}),$$

называется парно-выявленным отношением [1]. В случае порядковых функций выбора отношение ω также будет порядковым. Ясно, что $C_\omega(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})$ (т. е. при $|X| = 2$ парно-выявленное отношение ω реализует выбор C).

Опишем полиномиальный (по размерности n пространства) способ построения парно-выявленного отношения ω по формализации $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ функции C. Будем считать вначале, что C удовлетворяет условию

$$C(\{\mathbf{x}\}) = \{\mathbf{x}\} \tag{3.4}$$

(выбор в одноэлементных предъявлениях непуст). Пусть

$$\mathscr{C}(\mathbf{x}) = (Q_1 \mathbf{y}_1) \ldots (Q_s \mathbf{y}_s)\, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s),$$

где $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s) = g([\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{j_1}], \ldots, [\mathbf{z}_{i_r}, \mathbf{z}_{j_r}])$, $\mathbf{z}_{i_t}, \mathbf{z}_{j_t} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$, $1 \leqslant t \leqslant r$, $g \in P_{3,2}$. С $\alpha \in \{0, 1\}^s$ свяжем функцию $\varphi_{\tilde\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, полученную из $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s)$ подстановками $\mathbf{y} = \begin{cases} \mathbf{x}, & \alpha_i = 1, \\ \mathbf{y}, & \alpha_i = 0, \end{cases}$ $1 \leqslant i \leqslant s$. Введем функцию

$$\varphi_C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underset{\alpha_1 \in \{0,1\}}{\Phi^1}\ \underset{\alpha_2 \in \{0,1\}}{\Phi^2} \ldots \underset{\alpha_s \in \{0,1\}}{\Phi^s} \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{3.5}$$

где $\Phi^i = \bigwedge$ при $Q_i = \forall$, $\Phi^i = \bigvee$ при $Q_i = \exists$.

Теорема 3.4. *При условии* (3.4) *функция* $\varphi_C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *представима в виде* $g_C([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$, $g_C \in P_{3,2}$. *Парно-выявленное отношение* ω *описывается представляющей функцией* $g_\omega = g_C^*$, *двойственной к* g_C.

Доказательство. Рассмотрим значение формулы $\mathscr{C}(\mathbf{x})$ на двухэлементном множестве $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$. Кванторы $\forall$ и $\exists$ в этом случае можно заменить двухместными операциями $\wedge$ и $\vee$. Проделав это и используя (3.5), получаем

$$\mathscr{C}_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}}(\mathbf{x}) = \varphi_C(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{3.6}$$

Очевидно, при любом $\tilde\alpha$ имеют место равенства $\varphi_{\tilde\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x})$. Подстановка этих равенств в (3.5) при $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ дает $\varphi_C(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x})$. Условие (3.4) можно переписать в виде $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}) = 1$, а потому $\varphi_C(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$. С учетом этого продолжим (3.6):

$$\mathscr{C}_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}}(\mathbf{x}) = \varphi_C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \varphi_C(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\forall \mathbf{z} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})\ \varphi_C(\mathbf{x}, \mathbf{z}). \tag{3.7}$$

Функция $\varphi_{\widetilde{\alpha}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ получена из $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s)$ подстановкой в g вместо каждого $[\mathbf{z}_{i_t}, \mathbf{z}_{j_t}]$ одного из наборов $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, $[\mathbf{y}, \mathbf{x}]$, $[\mathbf{x}, \mathbf{x}]$ и $[\mathbf{y}, \mathbf{y}]$. Поскольку $[\mathbf{y}, \mathbf{x}] = -[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, а $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = [\mathbf{y}, \mathbf{y}] = \widetilde{0}$ — константа, функцию $\varphi_{\widetilde{\alpha}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ можно записать в виде $g_{\widetilde{\alpha}}([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$, $g_{\widetilde{\alpha}} \in P_{3,2}$, что в силу (3.5) дает представление $\varphi_C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_C([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$, $g_C \in P_{3,2}$. Из $g_C(\widetilde{0}) = g_C([\mathbf{x}, \mathbf{x}]) = \varphi_C(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ следует, что функция выбора с формализацией $(\forall \mathbf{z})\ \varphi_C(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\forall \mathbf{z})\ g_C([\mathbf{x}; \mathbf{z}])$ представима отношением (теорема 2.3 при $s = 1$). Равенства $C_\omega(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})$ и (3.7) показывают, что это отношение совпадает с ω, откуда в силу (1.16) имеем $g_\omega = g_C^*$.

Замечание. Если формализуемая функция выбора C не удовлетворяет условию (3.4), то для построения парно-выявленного отношения ω можно использовать функцию выбора C', задаваемую формализацией $\mathscr{C}'(\mathbf{x}) = \mathscr{C}(\mathbf{x}) \vee (\forall \mathbf{y})\ (\mathbf{y} = \mathbf{x})$. Она обладает свойством (3.4) и имеет то же парно-выявленное отношение, что и C.

Операциям над функциями выбора, введенным в п. 1.7, соответствуют определенные преобразования парно-выявленных отношений. Обозначим через $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_k$ парно-выявленные отношения функций $C, C_1, \ldots, C_k$, а через δ — *диагональное отношение*: $\mathbf{x}\,\delta\,\mathbf{y} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Теорема 3.5. 1. *Если $C = F(C_1, \ldots, C_k)$, то*

$$\omega = F^*(\omega_1, \ldots, \omega_k) \setminus \delta, \tag{3.8}$$

где $F^*(Y_1, \ldots, Y_k) = \overline{F}(\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_k)$ — двойственная теоретико-множественная операция.

2. *Если $C = C_2(C_1)$, то*

$$\omega = \begin{cases} \omega_1 \cup \omega_1^* \cap \omega_2, & C_2 \text{ удовлетворяет } (3.4), \\ \omega_1 \cup \omega_1^{-1} \cup \omega_1^* \cap \omega_2, & C_2 \text{ не удовлетворяет } (3.4). \end{cases} \tag{3.9}$$

3. *Если $C = C_1 \nabla C_2$, то*

$$\omega = \omega_1 \cap (\omega_1^* \cup \omega_2). \tag{3.10}$$

4. *Если $\widehat{C}$ — правило выбора, обратное к C, то $\widehat{\omega} = \omega^* \setminus \delta$.*

Доказательство. 1. Убедимся вначале, что для $C = C_1 \cup C_2$, $C = C_1 \cap C_2$ и $C = \overline{C}_1$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ имеют место соотношения $\mathbf{x}\,\omega\,\mathbf{y} \iff \mathbf{x}\,(\omega_1 \cap \omega_2)\,\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\,\omega\,\mathbf{y} \iff \mathbf{x}\,(\omega_1 \cup \omega_2)\,\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}\,\omega\,\mathbf{y} \iff \mathbf{x}\,\bar{\omega}_1\,\mathbf{y}$ соответственно. Докажем первое из них (остальные два — аналогично). Имеем

$$\mathbf{x}\,\omega\,\mathbf{y} \iff \mathbf{y} \notin C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \iff \mathbf{y} \notin C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \wedge \mathbf{y} \notin C_2(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \iff$$
$$\iff \mathbf{x}\,\omega_1\,\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}\,\omega_2\,\mathbf{y} \iff \mathbf{x}\,(\omega_1 \cap \omega_2)\,\mathbf{y}.$$

Всякую теоретико-множественную операцию F можно представить суперпозицией операций $\cup$, $\cap$ и дополнения. В силу принципа двойственности, с учетом соотношений $\cup^* = \cap$ и $\cap^* = \cup$ и самодвойственности дополнения заключаем, что из $C = F(C_1, \ldots, C_k)$ следует $\mathbf{x}\,\omega\,\mathbf{y} \iff \mathbf{x} F^*(\omega_1, \ldots, \omega_k)\mathbf{y}$. Чтобы обеспечить антирефлексивность ω, нужно из $F^*(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ вычесть δ. Это дает (3.8).

2. Если (3.4) для C_2 не выполнено, то при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ имеем

$$\mathbf{x}\,\omega\,\mathbf{y} \iff y \notin C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \iff \mathbf{y} \notin C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \vee \mathbf{y} \in C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \wedge \mathbf{x} \notin C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \vee$$
$$\vee\, \mathbf{y} \in C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \wedge \mathbf{x} \in C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \wedge \mathbf{y} \notin C_2(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \iff \mathbf{x}\,\omega_1\,\mathbf{y} \vee$$
$$\vee\, \mathbf{x}\,\bar{\omega}_1\,\mathbf{y} \wedge \mathbf{y}\,\omega_1\,\mathbf{x} \vee \mathbf{x}\,\bar{\omega}_1\,\mathbf{y} \wedge \mathbf{y}\,\bar{\omega}_1\,\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}\,\omega_2\,\mathbf{y} \iff \mathbf{x}\,\omega_1\,\mathbf{y} \vee \mathbf{x}\,\omega_1^{-1}\,\mathbf{y} \vee \mathbf{x}\,\omega_1^*\,\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}\,\omega_2\,\mathbf{y},$$

что соответствует нижней строке в (3.9). В случае, когда C_2 удовлетворяет (3.4), возможность $\mathbf{y} \in C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \wedge x \notin C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})$ учитывать не нужно, и после преобразований приходим к верхней строке в (3.9). Отношение ω в (3.9) антирефлексивно.

3. Для произвольного отношения ρ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ введем обозначение $\rho_{|\mathbf{x},\mathbf{y}} = \rho \cap \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$. Можно проверить непосредственно, что из $\rho_{|\mathbf{x},\mathbf{y}} \neq \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$ следует $\rho_{|\mathbf{x},\mathbf{y}} \subseteq \rho^*_{|\mathbf{x},\mathbf{y}}$.

Отношение ω в (3.10) антирефлексивно. Запишем (3.10) в виде $\omega_{|\mathbf{x},\mathbf{y}} = \omega_{1|\mathbf{x},\mathbf{y}} \cap (\omega^*_{1|\mathbf{x},\mathbf{y}} \cup \omega_{2|\mathbf{x},\mathbf{y}})$. Имеем

$$C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \neq \varnothing \Longrightarrow \omega_{1|\mathbf{x},\mathbf{y}} \neq \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{y}, \mathbf{x})\} \Longrightarrow \omega_{1|\mathbf{x},\mathbf{y}} \subseteq \omega^*_{1|\mathbf{x},\mathbf{y}} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \omega_{|\mathbf{x},\mathbf{y}} = \omega_{1|\mathbf{x},\mathbf{y}} \Longrightarrow C_\omega(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = C_{\omega_1}(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \Longrightarrow C_\omega(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}),$$
$$C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \varnothing \Longrightarrow \omega_{1|\mathbf{x},\mathbf{y}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{y}, \mathbf{x})\} \Longrightarrow \omega^*_{1|\mathbf{x},\mathbf{y}} = \varnothing \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \omega_{|\mathbf{x},\mathbf{y}} = \omega_{2|\mathbf{x},\mathbf{y}} \Longrightarrow C_\omega(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = C_{\omega_2}(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \Longrightarrow C_\omega(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = C_2(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}).$$

Из этих соотношений вытекает, что ω — парно-выявленное отношение функции $C_1 \nabla C_2$.

4. Учитывая (1.23), выводим для $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

$$\mathbf{x}\, \widehat{\omega}\, \mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{y} \notin \widehat{C}(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) \Longleftrightarrow (-\mathbf{y}) \in C(\{-\mathbf{x}, -\mathbf{y}\}) \Longleftrightarrow (-\mathbf{x}, -\mathbf{y}) \notin \omega \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \notin \omega \Longleftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin \omega^{-1} \Longleftrightarrow \mathbf{x}\, \omega^*\, \mathbf{y}.$$

Отношение ω^* рефлексивно, поэтому необходимо вычесть δ.

Следствие. 1. *Для функции $C = F(C_{\rho_1}, \ldots, C_{\rho_k})$ параллельного выбора парно-выявленное отношение имеет вид $\omega = F^*(\rho_1, \ldots, \rho_k)$.*

2. *Для функции $C = C_{\rho_1 \ldots \rho_k} = C_{\rho_1} \circ \ldots \circ C_{\rho_k}$ последовательного выбора парно-выявленное отношение имеет вид*

$$\omega = \rho_1 \cup \rho_1^* \cap \rho_2 \cup \ldots \cup \rho_1^* \cap \ldots \cap \rho^*_{k-1} \cap \rho_k.$$

Доказательство. 1. В модели параллельного выбора операция F монотонна и нетривиальна. Такой же будет F^*. Поэтому отношение $F^*(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ антирефлексивно и совпадает с $F^*(\rho_1, \ldots, \rho_k) \setminus \delta$. Отсюда и из (3.8) с учетом того, что ρ — парно-выявленное отношение функции C_ρ, получаем требуемое утверждение.

2. Применим индукцию по k. Основание ($k = 1$) тривиально. При $k \geqslant 2$, пользуясь ассоциативностью суперпозиции, представим C в виде $C = C_{\rho_1} \circ C_{\rho_2 \ldots \rho_k}$. Для функций $C_1 = C_{\rho_1}$ и $C_2 = C_{\rho_2 \ldots \rho_k}$ выполнено $\omega_1 = \rho_1$ и $\omega_2 = \rho_2 \cup \rho_2^* \cap \rho_3 \cup \ldots \cup \rho_2^* \cap \ldots \cap \rho^*_{k-1} \cap \rho_k$ (предположение индукции). Применив к C_1 и C_2 второе утверждение теоремы 3.5, получаем нужное равенство.

Замечание. В теореме рассмотрена лишь базовая операция ветвления ∇. Произвольная операция ∇_Q сводится к ∇ следующим равенством (п. 1.7): $C_1 \nabla_Q C_2 = (C_1 \cap C_Q) \nabla C_2$, где функция выбора C_Q имеет формализацию $C_Q(\mathbf{x}) = \mathscr{Q}(\mathscr{C}_1)$. Поэтому парно-выявленное отношение для функции выбора $C_1 \nabla_Q C_2$ можно найти использованием первого и третьего утверждений теоремы. Операции обратной связи $\mathscr{O}$ и $\mathscr{O}'$ выражаются через ∇_Q, что позволяет найти парно-выявленное отношение для функций выбора, получаемых применением этих операций.

Если модель выбора построена из некоторых исходных моделей применением операций из п. 1.7, то парно-выявленные отношения исходных моделей могут быть найдены по теореме 3.4, а для построения результирующего парно-выявленного отношения удобно использовать теорему 3.5. При этом не требуется нахождения формализации всей модели.

3.5. Применение парно-выявленных отношений. Возможность конструктивного нахождения парно-выявленного отношения произвольной формализуемой функции выбора облегчает решение ряда задач, связанных с синтезом моделей. Приведем ряд относящихся сюда утверждений.

Следующий факт очевиден.

Утверждение 3.1. *Если функция выбора C представима отношением, то этим отношением является парно-выявленное отношение ω.*

Таким образом, для формализуемых функций выбора факт реализуемости отношением дает возможность указать это отношение. Напомним, что для аппроксимаций это не так: всякая функция выбора имеет верхнюю аппроксимацию в классе отношений, но задача ее нахождения неразрешима (теорема 3.3).

Утверждение 3.2. *Если для функции выбора C выполнено условие $C \subseteq C_\omega$ ($C \supseteq C_\omega$), то парно-выявленное отношение ω реализует верхнюю (нижнюю) аппроксимацию функции C.*

Доказательство. Случаи $C \subseteq C_\omega$ и $C \supseteq C_\omega$ рассматриваются аналогично. Ограничимся первым из них.

Если C_ρ при некотором ρ мажорирует C, то $\rho \subseteq \omega$, иначе найдутся $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, для которых нарушено включение $C_\rho(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}) \supseteq C_\omega(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}) = C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\})$. Условие $C \subseteq C_\omega$ означает, что C_ω — мажоранта. Она минимальна, поскольку из $\rho \subseteq \omega$ следует $C_\rho \supseteq C\omega$.

Отметим, что для функций выбора на произвольном конечном множестве Ω условие $C \subseteq C_\omega$ необходимо и достаточно для существования нижней аппроксимации [13]. В случае порядковых функций выбора это не так (теорема 3.1).

Утверждение 3.3. *Если функция выбора C обладает свойством наследования (согласия), то парно-выявленное отношение ω реализует верхнюю (нижнюю) аппроксимацию функции C.*

Доказательство. Пусть выполнено свойство наследования. Рассмотрим произвольные X и $\mathbf{x} \in X$. Имеем

$$\mathbf{x} \notin C_\omega(X) \Longrightarrow (\exists \mathbf{y} \in X)\,(\mathbf{y}\,\omega\,\mathbf{x}) \Longrightarrow (\exists \mathbf{y} \in X)\,(\mathbf{x} \notin C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\})) \Longrightarrow \mathbf{x} \notin C(X).$$

Это дает включение $C \subseteq C_\omega$ и в соответствии с утверждением 3.2 парно-выявленное отношение ω реализует верхнюю аппроксимацию.

Пусть C удовлетворяет свойству согласия. Тогда для любых таких X и $\mathbf{x}$, что $\mathbf{x} \in X$, выполнено

$$\mathbf{x} \in C_\omega(X) \Longrightarrow (\forall \mathbf{y} \in X)\,(\mathbf{y}\,\bar{\omega}\,\mathbf{x}) \Longrightarrow (\forall \mathbf{y} \in X)\,(\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\})) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathbf{x} \in \bigcap_{\mathbf{y} \in X} C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}) \Longrightarrow \mathbf{x} \in C\Big(\bigcup_{\mathbf{y} \in X} \{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\Big) \Longrightarrow \mathbf{x} \in C(X).$$

Отсюда $C \supseteq C_\omega$, и по утверждению 3.2 ω реализует нижнюю аппроксимацию функции C.

В качестве иллюстрации рассмотрим применение утверждений 3.2 и 3.3 к моделям параллельного и последовательного выбора.

Утверждение 3.4. *Парно-выявленное отношение ω для функции параллельного выбора реализует верхнюю аппроксимацию, для функции последовательного выбора — нижнюю аппроксимацию.*

Доказательство. Этот факт для функции параллельного выбора следует из утверждения 3.3 и того, что она обладает свойством наследования (лемма 2.1).

Рассмотрим функцию последовательного выбора $C_{\rho_1 \ldots \rho_k} = C_{\rho_1} \circ \ldots \circ C_{\rho_k}$. Введем отношения $\rho_i' = \rho_1^* \cap \ldots \cap \rho_{i-1}^* \cap \rho_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Индукцией по k докажем, что $C_{\rho_1 \ldots \rho_k} = C_{\rho_1' \ldots \rho_k'}$.

Случай $k = 1$ тривиален, ибо $\rho_1' = \rho_1$. При $k = 2$ используем (1.22). С учетом свойств двойственных функций [18] находим

$$\mathscr{C}_{\rho_1'\rho_2'}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ (\exists \mathbf{z})\ (g_{\rho_1}([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \wedge (g_{\rho_1}([\mathbf{z}, \mathbf{y}]) \vee g_{\rho_2}^*([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \vee g_{\rho_1}([\mathbf{x}, \mathbf{y}]))).$$

Из $\mathbf{x} \in X$ следует, что $(\exists \mathbf{z})\ g_{\rho_1}([\mathbf{z}, \mathbf{y}]) \vee g_{\rho_1}([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = (\exists \mathbf{z})\ g_{\rho_1}([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$. Эти равенства приводят к требуемому соотношению

$$\mathscr{C}_{\rho_1'\rho_2'}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{y})\ (\exists \mathbf{z})\ (g_{\rho_1}([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \wedge (g_{\rho_1}([\mathbf{z}, \mathbf{y}]) \vee g_{\rho_2}^*([\mathbf{x}, \mathbf{y}]))) = \mathscr{C}_{\rho_1\rho_2}(x).$$

При $k \geqslant 3$, воспользовавшись ассоциативностью суперпозиции и предположением индукции для $C_{\rho_2 \ldots \rho_k}$, запишем

$$C_{\rho_1 \ldots \rho_k} = C_{\rho_1} \circ C_{\rho_2 \ldots \rho_k} = C_{\rho_1} \circ C_{\rho_2'' \ldots \rho_k''},$$

где $\rho_i'' = \rho_2^* \cap \ldots \cap \rho_{i-1}^* \cap \rho_i$, $2 \leqslant i \leqslant k$. Отсюда, поскольку повторный выбор по уже использованному отношению не изменяет результат, с учетом ассоциативности суперпозиции получаем

$$C_{\rho_1 \ldots \rho_k} = C_{\rho_1} \circ C_{\rho_2''} \circ \ldots \circ C_{\rho_k''} = (C_{\rho_1} \circ C_{\rho_2''}) \circ (C_{\rho_1} \circ C_{\rho_3''}) \circ \ldots \circ (C_{\rho_1} \circ C_{\rho_k''}).$$

Из рассмотренного случая $k = 2$ следует $C_{\rho_1} \circ C_{\rho_i''} = C_{\rho_1'} \circ C_{\rho_i'}$, поэтому

$$C_{\rho_1 \ldots \rho_k} = (C_{\rho_1'} \circ C_{\rho_2'}) \circ \ldots \circ (C_{\rho_1'} \circ C_{\rho_k'}) = C_{\rho_1'} \circ C_{\rho_2'} \circ \ldots \circ C_{\rho_k'} = C_{\rho_1' \ldots \rho_k'},$$

что и требовалось.

В соответствии с (3.8) $\omega = \rho_1' \cup \ldots \cup \rho_k'$. Если $\mathbf{x} \in C_\omega(X)$, то для всех $\mathbf{y} \in X$ выполнено $\mathbf{y}\, \bar{\omega}\, \mathbf{x}$, а потому и $\mathbf{y}\, \bar{\rho}_i'\, \mathbf{x}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{x} \in C_{\rho_1' \ldots \rho_k'}(X) = C_{\rho_1 \ldots \rho_k}(X)$. Это доказывает справедливость соотношения $C_\omega \subseteq C_{\rho_1 \ldots \rho_k}$ и означает по утверждению 3.4, что ω реализует нижнюю аппроксимацию функции $C_{\rho_1 \ldots \rho_k}$.

Утверждение 3.4 дает примеры разрешимых случаев для задач построения нижней и верхней аппроксимации. Все задачи из § 3 разрешимы в модели однокритериального выбора (замечание к теореме 3.3). Разрешимые задачи, связанные с построением порядковых моделей выбора, предполагаем рассмотреть отдельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Выбор вариантов. Основы теории. — М.: Наука, 1990.
2. Айзерман М. А., Вольский В. И., Литваков Б. М. Элементы теории выбора. Псевдокритерии и псевдокритериальный выбор. — М.: Нефтяник, 1994.
3. Айзерман М. А., Малишевский А. В. Проблемы логического обоснования в общей теории выбора. Общая модель выбора и ее классически-рациональные основания. — Препринт/Институт проблем управления. — М., 1980.
4. Алескеров Ф. Т., Владимиров А. В. Квазилокальные операторы коллективного выбора // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 3. — С. 127–140.
5. Березовский Б. А., Борзенко В. И., Кемпнер Л. М. Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. — М.: Наука, 1981.
6. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. — М.: Мир, 1994.
7. Виноградская Т. М., Рубчинский А. М. Логические формы бинарных отношений в критериальном пространстве // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 251, № 2. — С. 300–304.

8. Виноградская Т. М., Рубчинский А. М. Логические формы функций выбора // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 254, № 6. — С. 1362–1366.
9. Вольский В. И., Лезина З. М. Голосование в малых группах: процедуры и методы сравнительного анализа. — М.: Наука, 1991.
10. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.
11. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970.
12. Левченков В. С. Алгебраический подход в теории группового выбора. — М.: Наука, 1990.
13. Литваков Б. М. Аппроксимация функций выбора // Автоматика и телемеханика. — 1984. — № 9. — С. 138–146.
14. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1971.
15. Шоломов Л. А. Логические методы в задачах согласованного выбора. — Препринт/ВНИИ системных исследований. — М., 1978.
16. Шоломов Л. А. Логические методы исследования дискретных моделей выбора. — М.: Наука, 1989.
17. Шоломов Л. А. Логические методы представления и исследования порядковых моделей выбора // Автоматика и телемеханика. — 1994. — № 5. — С. 100–108.
18. Шоломов Л. А. Исследование отношений в критериальных пространствах и синтез операторов группового выбора // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. — М.: Наука, 1994. — С. 109–143.
19. Юдин Д. Б. Вычислительные методы теории принятия решений. — М.: Наука, 1989.
20. Ehrenfeucht A. Decidability of the theory of linear ordering relation // Notices of Amer. Math. Soc. — 1959. — V. 6. — P. 268–269.
21. Monjardet B. An axiomatic theory of tournment aggregation // Mathematics and Operation Research. — 1978. — V. 3, № 4. — P. 334–351.
22. Murakami Y. Logic and social choice. — London: Routledge & Kegan Paul Ltd.; New York: Dover Publication Inc., 1968.
23. Rogers H. Certain logical reduction and decision problems // Annals of Mathematics. — 1956. — V. 64, № 2. — P. 264–284.
24. Sen A. K. Choice functions and revealed preference // Review of Economic Studies. — 1971. — V. 38. — P. 307–317.

Поступило в редакцию 1 XII 1996