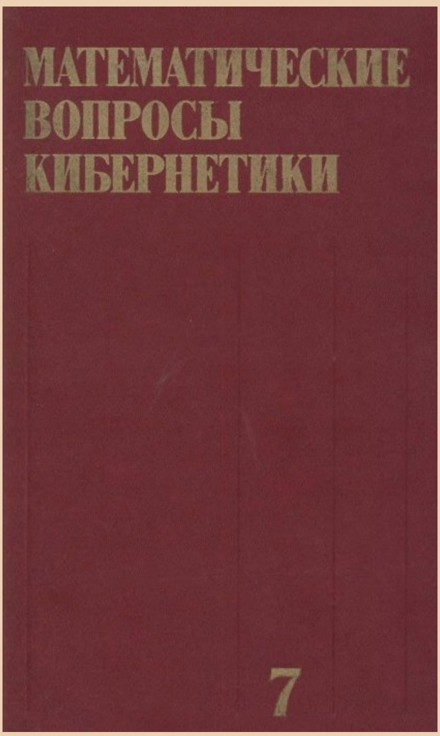

Н. К. Косовский,
А. В. Тишков

Секвенциальное исчисление для сравнений противоречивых условий различной степени достоверности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Косовский Н. К., Тишков А. В. Секвенциальное исчисление для сравнений противоречивых условий различной степени достоверности // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. — М.: Наука, 1998. — С. 213–226. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1998-213

СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ СРАВНЕНИЙ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ УСЛОВИЙ РАЗЛИЧНОЙ СТЕПЕНИ ДОСТОВЕРНОСТИ *)

Н. К. КОСОВСКИЙ, А. В. ТИШКОВ

(САНКТ-ПЕТЕРБУРГ)

§ 1. Введение

Стандартом точности рассуждений в математике является двузначная логика. В то же время во многих внематематических исследованиях используемые аксиомы сильно меняются, причем в разных науках изменения происходят с существенно разной периодичностью. Многие гуманитарные исследования приводят к радикальному перевороту в используемых парадигмах.

В двузначной логике из лжи следует все что угодно, поэтому установление ложности утверждения, следующего из аксиом одной науки или одного раздела какой-либо науки, мгновенно вызывает революцию в остальных науках.

Чтобы этого не произошло, можно применять логику, использующую только двузначные предикаты, но с различными множествами значений. Например, наряду с математическим изучением чисел можно ввести предикат «быть красивым числом», множество значений которого не пересекается с множеством значений остальных предикатов. Тогда противоречия в изучении красоты чисел не повлекут никаких математических противоречий.

Э. Пост [22] обобщил двузначную пропозициональную логику на конечнозначные. Здесь представлено дальнейшее обобщение. В то же время здесь не затрагивается представление знаний в информатике на основе нечетких множеств (см., например, книгу [5], имеющую в библиографии 322 наименования.) Тем не менее, основные практически ориентированные черты нечеткой логики из [20] внесены в предлагаемую логику.

Некоторые результаты анонсированы в [6] и разработаны в [11].

В § 5 формулируется секвенциальное исчисление для эвристической логики.

Эвристическая логика предназначается для учета мнений двух групп экспертов. Эвристическая логика полезна и для учета оппозиционного мнения, что позволяет выявить (для последующего устранения) самое сильное

*) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 97-05-12048) и федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 гг.» по комплексному проекту «Развитие и поддержка системы Учебно-научных центров СПбГУ» (рег. № 326.53).

противоречие с оппозиционным мнением, поскольку противоречия могут иметь разные значения. Возможно введение линейной комбинации значений, но это существенно затрудняет проверку аксиом, поэтому практическое использование такого приема может оказаться затруднительным.

Эвристическая логика является дальнейшим развитием уровневых логик, рассмотренных в [7] и развитых в [8–10]. Все эти логики могут рассматриваться как дискретные варианты непрерывной логики, исследованной в [2, 3], или нечеткой логики [23, 24]. См. также книгу С. А. Гинзбурга [4], в которой излагается бесконечнозначная или непрерывная логика для приложений в автоматике, например, для анализа некоторых нелинейных электрических цепей. В ней считается, что значение истинности не может быть иррациональным числом (с. 5). В то же время на с. 8 в качестве основы дальнейшего изложения для логических значений используется сегмент вещественных чисел, использованный П. С. Новиковым [14] в качестве примера булевой алгебры. На с. 15 уточняется, что в дальнейшем, как правило, будет рассматриваться симметричный относительно нуля сегмент.

По-видимому, впервые в 1960 г. В. И. Шестаков [16] использует отрицательную константу (-1) для интерпретации логической константы «ложь». В исчислении рассматриваются три константы: «истина», «ложь» и «не определено». Указывается на возможность преобразования такого трехзначного исчисления высказываний в любое k-значное исчисление, где $k > 3$ и значения симметричны относительно нуля (с. 343). Результат такого преобразования даже для бесконечной логики предложил независимо Чанг [18] в 1963 г.

Важный этап изучения многозначных логик Поста с алгебраической и кибернетической точек зрения отражен в учебных пособиях А. И. Мальцева [12] и С. В. Яблонского [17], включающих, в частности, некоторые результаты исследований А. А. Мучника и Ю. И. Янова [13].

Тесно связана с вероятностной логикой логика антонимов, которая для интерпретации логических значений вместо линейной функции использует обратную функцию, степень двух и двоичный логарифм [21], что может существенно усложнить вычисление значений.

Эвристическая логика является также обобщением четырехзначной логики с логическими константами «истина», «ложь», «неизвестно» и «противоречиво» [1].

В эвристической логике удобно пользоваться эвристическим отрицанием, читаемым как «не верно, что с другой стороны». Эта логика, по мнению авторов, более удобна для исследовательских изменяемых баз знаний, включая неполные и противоречивые знания, чем паранепротиворечивые логики [19], поскольку снабжена простой модельной интерпретацией и позволяет различать, хотя бы субъективно, степень парадоксальности (противоречивости) утверждений.

Отметим, что эвристическая логика конечнозначных предикатов взаимовложима в двузначную логику. При этом формула A двузначной логики без логических констант заменяется в эвристической логике на формулу $(0 \leqslant A)$. Поэтому эвристическую логику конечнозначных предикатов можно рассматривать как расширение двузначной логики без логических констант. Тем не менее это расширение вкладывается в двузначную логику, по существу являясь ее надстройкой.

Предлагается рассматривать эвристическую логику конечнозначных предикатов как расширение двузначной логики, приспособленное для первоначальных описаний — в том числе и в гуманитарных областях человеческого знания.

В конце статьи доказываются некоторые свойства излагаемых секвенциальных исчислений, верхние оценки сложности проверки тавтологичности пропозиционального фрагмента рассматриваемой логики.

Доказана NP-полнота задачи выполнимости пропозициональных формул в рассматриваемой теории. Авторы благодарны К. Вагнеру, замечание которого на международной конференции в Казани (1997 г.) способствовало доказательству этого результата.

§ 2. Формулировка эвристической логики

Эвристическая логика учитывает мнения двух различных направлений. Мнение характеризуется оценкой, которую можно получать, например, подсчитывая количество подтверждений и (взятое со знаком «минус») количество опровержений, полученных от экспертов.

Каждому утверждению приписывается в качестве значения упорядоченная пара рациональных чисел. Число нуль в любой из позиций означает отсутствие информации. Положительные числа обозначают степень достоверности, а отрицательные — степень недостоверности утверждения в рамках соответствующего направления.

Эвристическая логика позволяет объединить в рамках одного формализованного языка изучение предикатов, принадлежащих разным (возможно, и противоречивым) областям знаний, которые используют двузначную логику.

Предлагается использовать рациональные числа из конечных диапазонов с равномерным шагом в качестве логических значений для градуированного представления знаний. Знания в информационных системах удобно градуировать, например, по степени первоочередности их использования.

Предлагаемое исчисление и его подысчисления удобно применять при анализе аксиоматических систем, если присвоить предикатам в разных областях знаний разные уровни очевидности (истинности). Тогда в рамках одной аксиоматической теории можно соединить несколько — например, арифметику и гиперарифметику. Эти две аксиоматические системы рассматриваются на основе неотрицательных логических значений утверждений (гиперарифметика) и максимального положительного логического значения утверждений (арифметика).

Аналогичным образом можно использовать различные логические значения для постулатов различных наук, соединив несколько наук в единую иерархическую систему. Для различных наук оценки постулатов можно расположить по частоте их изменяемости. Например, можно предложить, чтобы логические значения у предикатов в постулатах наук возрастали в следующей последовательности: социология, психология, философия, другие гуманитарные науки, естественные науки — начиная с биологии и заканчивая химией, физикой, математикой и, наконец, математической логикой. При этом в математике предикаты, как правило, являются четкими, т. е. не могут принимать парадоксального значения, в отличие от гуманитарных и, возможно, технических и технологических наук.

2.1. Пропозициональная эвристическая логика. Логическим значением *пропозициональной переменной* $p^{a,b,c}$ *эвристической логики* является упорядоченная пара рациональных чисел, каждое из которых представимо в виде k/c или $-k/c$, где

$$k \in [a, b), \quad a, b, k, c \in \mathbb{Z}_+, \quad a < b, \quad c > 0;$$

при этом элементы множества $\mathbb{Z}_+$ — целые неотрицательные числа, включая нуль, которые записываются в позиционной системе счисления.

Таким образом, имеется бесконечно много сортов пропозициональных переменных, у которых сорта задаются упорядоченными тройками целых неотрицательных чисел в качестве верхнего индекса. Переменные с верхними индексами назовем сортовыми.

Пропозициональная переменная без верхнего правого индекса — это метапеременная для какой-либо переменной с верхними индексами 0, $c \cdot c!$, $c!$ при достаточно большом c. Она может принимать в качестве значения каждого члена пары любое рациональное число. Такие переменные будем называть переменными для рациональных чисел.

2.2. Логические связки. Обобщением классической двузначной логики удается в эвристической логике формализовать одноместные связки «а» («с другой стороны»), «не», а также двуместные: «и» и «или» при помощи соответственно $\backslash$, отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Логические значения выражений с этими логическими связками вычисляются в соответствии со следующей схемой (здесь значение выражения обозначается взятием его в квадратные скобки):

— если $[p]=(p_1, p_2)$, то $[\backslash p]=(p_2, p_1)$ и $[\neg p]=(-p_1, -p_2)$;

— если $[p]=(p_1, p_2)$ и $[q]=(q_1, q_2)$, то $[p \& q]=(\min(p_1, q_1), \min(p_2, q_2))$ и $[p \vee q]=(\max(p_1, q_1), \max(p_2, q_2))$.

Выражение $\backslash^l P$ будем считать сокращением для $\underbrace{\backslash \ldots \backslash}_{l} P$, где $l \geqslant 0$. (При $l=0$ запись $\backslash^l$ означает пустое слово Λ.)

Эвристическая логика имеет средство для увеличения силы высказывания путем удвоения его оценок. Соответствующая связка носит название «весьма» и обозначается знаком «!»:

$$[p!]=(2p_1, 2p_2).$$

Выражение $P!^k$ будем считать сокращением для $P\underbrace{!\ldots!}_{k}$, где $k \geqslant 0$. (При $k=0$ запись $!^k$ обозначает пустое слово Λ.)

Эта связка аналогична модификатору «очень», используемому в нечеткой логике Л. А. Заде [23]. В то же время эту связку невозможно использовать ни в какой конечнозначной логике Поста.

Значения высказываний эвристической логики упорядочиваются по первой компоненте: если $[p]=(p_1, p_2)$ и $[q]=(q_1, q_2)$, то

$$q \leqslant p \iff q_1 \leqslant p_1.$$

Эвристическая логика с таким упорядочением значений утверждений напоминает работу двухпалатного парламента, в котором две стороны вырабатывают мнение, но решающим является слово верхней палаты.

§ 3. Определение предикатного исчисления эвристической логики

Эвристическая логика имеет двухуровневую структуру. На внутреннем уровне рассматриваются формулы конечнозначной логики. Носитель для внутренней логики, т. е. множество значений, принимаемых утверждениями конечнозначной логики, а также логические связки конечнозначной логики задаются с помощью внутренней сигнатуры.

На внешнем уровне определяются двузначные предикаты равенства и нестрогого неравенства для внутренних формул, внешняя логика не вводит и не использует дополнительным образом функции и пропозициональные переменные. По существу внешний уровень является формализованным метауровнем.

Определение. *Внутренней сигнатурой* пропозициональной эвристической логики HQ называется многосортная сигнатура

$$\Big(\mathbf{Q}^2, \big|\{(\mathbf{Q}^{a,b,c})^2\colon a, b, c \in \mathbf{Z}_+,\ a<b,\ c>0\};\ \big|\mathbf{Q}^2,\ \lambda x.\backslash x,\ \lambda x.\neg x,$$
$$\lambda x.x!,\ \lambda xy.(x \& y),\ \lambda xy.(x \vee y),\ \lambda xyz.\,\text{if}\, 0 \leqslant a\, \text{then}\, b\, \text{else}\, c\, \text{fi}\Big).$$

Здесь $\mathbf{Q}^2$ — носитель, т. е. значения пропозициональных утверждений и предикатов могут быть любыми парами рациональных чисел (для ненульмерного сорта с учетом сортовых ограничений); $|\mathbf{Q}^2$ — перечень всех пар логических констант, $(\mathbf{Q}^{a,b,c})^2$ — носитель сорта a, b, c, и $|\{(\mathbf{Q}^{a,b,c})^2\colon a, b, c \in \mathbf{Z}_+,\ a < b,\ c > 0\}$ — перечень носителей всех сортов вида a, b, c. Внутренняя сигнатура также содержит логические связки: конъюнкцию, дизъюнкцию и ветвление.

Определение. *Внутренней пропозициональной формулой* эвристической логики называется формула внутренней сигнатуры эвристической логики с использованием переменных любых сортов.

Определение. *Внутренний терм* эвристической логики строится из внутренних имен функций, внутренних предметных переменных и имен внутренних объектов рассматриваемой совокупности.

Определение. *Внутренней атомарной формулой* эвристической логики называется формула, построенная из внутренних термов и внутренних имен предикатов, определенных на рассматриваемой области объектов. Внутренние атомарные формулы всегда являются сортовыми, т. е. имеют тройку неотрицательных целых чисел в качестве верхнего индекса.

Определение. *Внутренними предикатными формулами* эвристической логики являются внутренние пропозициональные формулы, внутренние атомарные формулы, а также формулы, построенные из внутренних атомарных формул при помощи внутренних кванторов $\exists$, $\forall$ и логических связок внутренней сигнатуры.

Будем говорить, что внутренняя предикатная формула A есть формула сорта S, если ее значение (валентность) принадлежит этому сорту, и что формула A построена на множестве сортов M, если сорта всех входящих в нее переменных принадлежат этому множеству. В этих случаях будем писать A^S и A^M соответственно.

Определение. *Сравнением* эвристической логики будем называть выражение вида*) $(0 \preceq p\,[+r])$, где p — внутренняя предикатная формула, r — рациональное число, $\preceq \in \{\leqslant, =\}$. Вхождения p и r в секвенцию будем называть *слагаемыми*. Слагаемые, не содержащие символов if, $\vee$ и &, будем называть атомарными. (Знак $+$ связывает слабее, чем логические связки и кванторы.)

Сравнения могут быть истинными или ложными, т. е. они интерпретируются в двузначной логике в соответствии с введенным упорядочением значений утверждений эвристической логики. Таким образом, сравнения — это двузначное металогическое расширение для сравнения значений внутренних предикатных формул эвристической логики.

Определение. *Пропозициональными формулами* эвристической логики являются внешние бескванторные формулы, построенные из сравнений при помощи двузначных логических связок: отрицания, дизъюнкции и эквивалентности. Слагаемые в сравнениях являются внутренними пропозициональными формулами.

Определение. *Предикатными формулами* эвристической логики являются формулы, построенные обычным образом из неравенств эвристической логики при помощи двузначных отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и эквивалентности, а также кванторов $\exists$ и $\forall$ по внутренним предметным переменным.

Определение. Формулы каждого вида допускают обобщение. Оно заключается в том, что в *обобщенных формулах* используется также связ-

*) Здесь и в дальнейшем, как в описаниях некоторых языков программирования, выражение в квадратных скобках может отсутствовать — тогда отсутствуют все его вхождения в правило или выражение. В более сложных случаях (§ 5) будем индексировать квадратные скобки; тогда выражения в квадратных скобках с одним и тем же индексом могут отсутствовать только все одновременно.

ка «условное выражение»:

$$\text{if } P \text{ then } x \text{ else } y \text{ fi}, \tag{1}$$

где P, x и y — формулы того же вида (или его обобщения). Условное выражение принимает значение x, если формула P не ложна, и y, если формула P ложна. Таким образом, обобщенные внутренние и предикатные (внешние) формулы определяются индуктивным образом совместно.

Набор функций внутренней сигнатуры и условное выражение являются полными для внутренней логики.

3.1. Интерпретация формул эвристической логики. Интерпретация внешних логических связок вычисляется по таблицам валентности для двузначной логики. Интерпретация всех внутренних логических связок была дана выше.

Истинность интерпретации бескванторной формулы со свободным вхождением переменной без верхнего индекса означает существование такого целого неотрицательного c_0, что для любого целого c, $c > c_0$, истинна формула, получаемая из исходной посредством замены всех свободных вхождений переменных без верхнего индекса на переменные сорта $(0, c\cdot c!, c!)$. (В п. 3.1 знак ! используется для обозначения факториала.)

Согласно следующей лемме 1 это эквивалентно тому, что формула истинна, какие бы рациональные числа ни были подставлены вместо переменных без верхних индексов.

Лемма 1. *Выполнимость бескванторного утверждения в рациональных числах эквивалентно тому, что каково бы ни было неотрицательное целое c_0, существует такое целое $c > c_0$, что выполняется это же утверждение, в котором вместо переменных для рациональных чисел используются переменные вида $p^{0,\, c\cdot c!,\, c!}$.*

Доказательство усматривается непосредственно.

Каждый предикат трехмерного сорта может принимать только конечное число значений, поэтому всегда определены следующие интерпретации. Внутренний квантор всеобщности (существования) интерпретируется как минимум (соответственно максимум) по множеству значений внутренней предметной переменной среди множества значений внутренней предикатной формулы из области действия вхождения этого квантора.

3.2. Эвристическое отрицание. Для каждой переменной p первая и вторая оценки могут быть разных знаков, т. е. могут выполняться неравенства $0 \leqslant p \vee \backslash p$ и $p \,\&\, \backslash p \leqslant 0$. В этом случае первый элемент пары рассматривается как основная оценка утверждения, а второй — как оппозиционная. Поэтому унарная связка «с другой стороны» может в эвристической логике именоваться «с оппозиционной стороны».

Пусть $[p] = (p_1, p_2)$. Утверждение p эвристически не ложно, если $p_1 \geqslant -p_2$, т. е. $\neg(0 \leqslant \backslash p + p)$; утверждение p эвристически не истинно, если $p_1 \leqslant -p_2$, т. е. $\neg(0 \leqslant \neg\backslash p + \neg p)$; наконец, утверждение p эвристически парадоксально (спорно), если $p_1 = -p_2$, т. е. $(0 = \neg\backslash p + \neg p)$. Если при этом $p_1 = p_2 = 0$, то информация о значении утверждения отсутствует.

Комбинация логических связок $\neg\backslash$ (их порядок несуществен) представляет собой эвристическое отрицание, имеющее значение «не верно, что с другой стороны». Легко видеть, что двойное эвристическое отрицание можно исключать. Для эвристического отрицания выполняются законы де Моргана.

Пусть $p_1 + p_2 = 0$, $[q] = (q_1, q_2)$ и $q_1 + q_2 = 0$. Если абсолютная величина p_1 больше абсолютной величины q_1, то будем говорить, что утверждение p более парадоксально, чем q.

Таким образом, разные парадоксальные (противоречивые относительно эвристического отрицания) утверждения могут иметь разные значения.

Тем самым парадоксальное значение расщепляется на различные уровни (отсутствие информации, противоречивость различной силы по степени достоверности источников информации), которые сливаются в одно в нечетнозначной логике Поста и в нечеткой логике.

Поэтому для разрешения эвристических противоречий в базе знаний в первую очередь полезно изучать эвристически противоречивые утверждения, значения которых представляют собой пары рациональных чисел, превосходящих по абсолютной величине все рациональные числа из других эвристически противоречивых утверждений.

Эвристическое отрицание играет роль содержательного отрицания в отличие от математического, формального, обозначаемого посредством $\neg$. Поэтому в противоречивой базе знаний вместо математического отрицания удобнее использовать эвристическое.

§ 4. Язык секвенций

4.1. Секвенции и их интерпретация.

Определение. *Секвенцией* исчисления HQ называется слово вида $\to \Delta$, где Δ — конечный список обобщенных предикатных формул эвристической логики. Список Δ должен обладать свойством чистоты переменных, т. е. нет переменных, которые имеют и свободные, и связанные вхождения в Δ.

Интерпретацией секвенции является дизъюнкция обобщенных предикатных формул эвристической логики, составляющих список Δ. Интерпретация секвенции с пустым списком Δ ложна.

Вместо истинности интерпретации секвенции будем для краткости говорить об истинности самой секвенции.

Секвенция называется истинной, если ее интерпретация истинна при всех значениях пропозициональных и предметных переменных.

Для более подробного описания тождественно истинной секвенции можно ввести преобразование δ, преобразующее секвенции и обобщенные предикатные формулы многозначной логики соответственно в секвенции и формулы двузначной логики, являющиеся их интерпретациями.

Прежде всего, выражение $\delta(0 \preceq A[+B])$, где $\preceq \in \{=, \leqslant\}$ и A, B — атомарные слагаемые, является двузначной формулой Φ, истинной в том и только том случае, когда истинно это сравнение.

Каждое исходное атомарное слагаемое моделируется при помощи $2(b-a)-1+\mathrm{sign}(a)$ попарно различных двузначных атомарных формул, где

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Затем выписывается таблица истинности для исходного сравнения с введенными двузначными аргументами. Наконец, по этой таблице строится требуемая предикатная формула Φ двузначной логики.

Продолжим определение преобразования δ:

$$\delta(A \,\&\, B) = (\delta(A) \,\&\, \delta(B)), \quad \delta(A \vee B) = (\delta(A) \vee \delta(B)), \quad \delta(\neg A) = \neg\delta(A),$$
$$\delta(\forall x A) = \forall x \delta(A); \qquad \delta(\exists x A) = \exists x \delta(A),$$
$$\delta(0 \leqslant (A \,\&\, B)[+C]) = (\delta(0 \leqslant A[+C]) \,\&\, \delta(0 \leqslant B[+C])),$$
$$\delta(0 \leqslant (A \vee B)[+C]) = (\delta(0 \leqslant A[+C]) \vee \delta(0 \leqslant B[+C])),$$
$$\delta(0 \prec \neg(A \,\&\, B)[+C]) = (\delta(0 \leqslant \neg A[+C]) \vee \delta(0 \leqslant \neg B[+C])),$$

$$\delta(0\leqslant\neg(A\vee B)[+C])=(\delta(0\neg\leqslant A[+C])\,\&\,\delta(0\leqslant\neg B[+C])),$$
$$\delta(0\leqslant\forall\alpha A[+C])=\forall\beta\delta(0\leqslant[A(\beta)\mid\alpha][+C]),$$
$$\delta(0\leqslant\neg\forall\alpha A[+C])=\exists\beta\delta(0\leqslant\neg[A(\beta)\mid\alpha][+C]),$$
$$\delta(0\leqslant\exists\alpha A[+C])=\exists\beta\delta(0\leqslant[A(\beta)\mid\alpha][+C]),$$
$$\delta(0\leqslant\neg\exists\alpha A[+C])=\forall\beta\delta(0\leqslant\neg[A(\beta)\mid\alpha][+C])$$

(здесь и далее запись $[B(T)\mid x]$ означает результат подстановки терма T в формулу B вместо всех свободных вхождений переменной x; для последних четырех равенств β не входит ни в A, ни в C); наконец,

$$\delta(0\leqslant P+C)=\delta(0\leqslant C+P),$$

где P — атомарная формула (возможно, с одноместными логическими связками).

4.2. Безантецедентное секвенциальное исчисление для двузначной логики. Пусть здесь и далее буквы со штрихами обозначают обобщенные предикатные формулы.

Определение. *Схемой аксиом* безантецедентного секвенциального исчисления для двузначной логики является $\to\Delta A'\neg A'$.

Определим правила вывода.

Правило перестановки членов секвенции:

$$\frac{\to\Delta_1A'\Delta_2B'\Delta_3}{\to\Delta_1B'\Delta_2A'\Delta_3}\ (\leftrightarrow).$$

Правило для двойного отрицания:

$$\frac{\to\Delta A'}{\to\Delta\neg\neg A'}\ (\neg\neg).$$

Правила для конъюнкции:

$$\frac{\to\Delta\neg A'\neg B'}{\to\Delta\neg(A'\,\&\,B')}\ (\neg\&),\qquad \frac{\to\Delta A',\ \to\Delta B'}{\to\Delta(A'\,\&\,B')}\ (\&).$$

Правила для дизъюнкции:

$$\frac{\to\Delta A'B'}{\to\Delta(A'\vee B')}\ (\vee),\qquad \frac{\to\Delta\neg A',\ \to\Delta\neg B'}{\to\Delta\neg(A'\vee B')}\ (\neg\vee).$$

Правила для эквивалентности:

$$\frac{\to\Delta\neg A'B',\ \to\Delta A'\neg B'}{\to\Delta(A'\Longleftrightarrow B')}\ (\Longleftrightarrow),\qquad \frac{\to\Delta\neg A'\neg B',\ \to\Delta A'B'}{\to\Delta\neg(A'\Longleftrightarrow B')}\ (\neg\Longleftrightarrow).$$

Правила для условного выражения:

$$\frac{\to\Delta\neg A'B',\ \to\Delta A'C'}{\to\Delta(\text{if } A' \text{ then } B' \text{ else } C' \text{ fi})}\ (\text{if}),\qquad \frac{\to\Delta(\text{if } A' \text{ then } \neg B' \text{ else } \neg C' \text{ fi})}{\to\Delta\neg(\text{if } A' \text{ then } B' \text{ else } C' \text{ fi})}\ (\neg\,\text{if}).$$

(при замене A' на A в первом правиле в его посылках должно быть $(0\leqslant A)$ вместо A).

Кванторные правила:

$$\frac{\to\Delta\neg[A'(T)\mid x]\neg\forall xA'}{\to\Delta\neg\forall xA'}\ (\neg\forall),\qquad \frac{\to\Delta[A'(y)\mid x]}{\to\Delta\forall xA'}\ (\forall),$$

$$\frac{\to\Delta\neg[A'(y)\mid x]}{\to\Delta\neg\exists xA'}\ (\neg\exists),\qquad \frac{\to\Delta[A'(T)\mid x]\exists xA'}{\to\Delta\exists xA'}\ (\exists).$$

Кванторные правила имеют стандартные ограничения: предметная переменная y и терм T свободны для подстановки в A' вместо свободного вхождения x и, кроме этого, переменная y не входит свободно в заключения правил $(\forall)$ и $(\neg\exists)$. Для обеспечения свойства чистоты переменных, заключение кванторного правила не должно содержать свободно переменную x.

§ 5. Секвенциальное исчисление эвристической логики

5.1. Аксиомы.

Определение. *Каноническим атомарным слагаемым* эвристической логики, входящим в некоторую секвенцию, назовем атомарное слагаемое вида $\backslash A!^k$ или $\backslash\neg A!^k$ при $0 \leqslant k$.

Определение. *Базой* секвенции S исчисления HQ называется секвенция, получающаяся из S путем вычеркивания всех внешних формул, содержащих равенства, внутренние или внешние двуместные логические связки и кванторы, а оставшиеся атомарные слагаемые являются каноническими.

Определение. *Аксиомой* исчисления HQ называется секвенция, база которой истинна.

Данному определению эквивалентно утверждение о том, что система из отрицаний всех неравенств базы аксиомы несовместна.

5.2. Правила вывода. При формулировании правил вывода будем использовать прописные латинские буквы для предикатных формул эвристической логики (в том числе и для внутренних). Прописными греческими буквами будем обозначать конечные списки предикатных формул эвристической логики, которые могут быть и пустыми. Пусть γ_1 и γ_2 — слова в алфавите $\{\backslash, \neg\}$.

Перечислим правила вывода.

Все правила для безантецедентного секвенциального исчисления двузначной логики из п. 4.2 с кванторами по внутренним предметным переменным.

Правило перестановки слагаемых сравнения:

$$\frac{\to \Delta[\neg](0 \preceq A+B)}{\to \Delta[\neg](0 \preceq B+A)}\ (\preceq\leftrightarrow).$$

Правила кратного добавления связки «с другой стороны» (каково бы ни было целое неотрицательное k):

$$\frac{\to \Delta[\neg]^1(0 \preceq [\neg]^2 A[+B]^3)}{\to \Delta[\neg]^1(0 \preceq [\neg]^2 \backslash^{2k} A[+B]^3)}\ (\preceq\backslash^*).$$

Правило перестановки отрицания и связки «с другой стороны»:

$$\frac{\to \Delta[\neg]^1(0 \preceq \gamma_1\neg\backslash\gamma_2 A[+B]^2)}{\to \Delta[\neg]^1(0 \preceq \gamma_1\backslash\neg\gamma_2 A[+B]^2)}\ (\preceq\backslash\leftrightarrow\neg).$$

Правила для кратного отрицания (каковы бы ни были целые неотрицательные k и l):

$$\frac{\to \Delta[\neg]^1(0 \preceq (A)!^k[+B]^2)}{\to \Delta[\neg]^1(0 \preceq \neg^{2l}(A)!^k[+B]^2)}\ (\preceq\neg^*).$$

Правила для равенства:

$$\frac{\to \Delta(0 \leqslant A[+B]),\ \to \Delta(0 \leqslant \neg A[+\neg B])}{\to \Delta(0 = A[+B])}\ (=),$$

$$\frac{\to \Delta\neg(0 \leqslant A[+B])\neg(0 \leqslant \neg A[+\neg B])}{\to \Delta\neg(0 = A[+B])}\ (\neg=).$$

Правила для внутренней конъюнкции (каково бы ни было целое неотрицательное k):

$$\frac{\to \Delta(0 \leqslant [\backslash]^1 A!^k[+C]^2),\ \to \Delta(0 \leqslant [\backslash]^1 B!^k[+C]^2)}{\to \Delta(0 \leqslant [\backslash]^1(A \,\&\, B)!^k[+C]^2)}\ (\leqslant\&),$$

$$\frac{\to \Delta\neg(0 \leqslant [\backslash]^1 A!^k[+C]^2)\neg(0 \leqslant [\backslash]^1 B!^k[+C]^2)}{\to \Delta\neg(0 \leqslant [\backslash]^1(A \,\&\, B)!^k[+C]^2)}\ (\neg(\leqslant\&)),$$

$$\frac{\to \Delta(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 A!^k[+C]^2)(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 B!^k[+C]^2)}{\to \Delta(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 (A \,\&\, B)!^k[+C]^2)} \ (\leqslant \neg\&),$$

$$\frac{\to \Delta\neg(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 A!^k[+C]^2),\ \to \Delta\neg(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 B!^k[+C]^2)}{\to \Delta\neg(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 (A \,\&\, B)!^k[+C]^2)} \ (\neg(\leqslant \neg\&)).$$

Правила для внутренней дизъюнкции (каково бы ни было целое неотрицательное k):

$$\frac{\to \Delta(0 \leqslant [\backslash]^1 A!^k[+C]^2)(0 \leqslant [\backslash]^1 B!^k[+C]^2)}{\to \Delta(0 \leqslant [\backslash]^1 (A \vee B)!^k[+C]^2)} \ (\leqslant \vee),$$

$$\frac{\to \Delta\neg(0 \leqslant [\backslash]^1 A!^k[+C]^2),\ \to \Delta\neg(0 \leqslant [\backslash]^1 B!^k[+C]^2)}{\to \Delta\neg(0 \leqslant [\backslash]^1 (A \vee B)!^k[+C]^2)} \ (\neg(\leqslant \vee)),$$

$$\frac{\to \Delta(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 A!^k[+C]^2),\ \to \Delta(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 B!^k[+C]^2)}{\to \Delta(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 (A \vee B)!^k[+C]^2)} \ (\leqslant \neg\vee),$$

$$\frac{\to \Delta\neg(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 A!^k[+C]^2)\neg(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 B!^k[+C]^2)}{\to \Delta\neg(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 (A \vee B)!^k[+C]^2)} \ (\neg(\leqslant \neg\vee)).$$

Правила для условного выражения (каково бы ни было целое неотрицательное k):

$$\frac{\to \Delta A'[\neg]^1(0 \leqslant [\neg]^2[\backslash]^3 C!^k[+D]^4),\ \to \Delta\neg A'[\neg]^1(0 \leqslant [\neg]^2[\backslash]^3 B!^k[+D]^4)}{\to \Delta[\neg]^1(0 \leqslant [\neg]^2[\backslash]^3 \text{ if } A' \text{ then } B \text{ else } C \text{ fi}!^k[+D]^4)} \ (\text{if})$$

(при использовании A вместо A' в посылках правил вместо A' должно быть $(0 \leqslant A)$).

Кванторные правила (каково бы ни было целое неотрицательное k):

$$\frac{\to \Delta[\neg]^1(0 \leqslant [\backslash]^1[A(y) \mid x]!^k[+B]^2)}{\to \Delta[\neg]^1(0 \leqslant [\backslash]^1 \forall x A!^k[+B]^2)} \ (\leqslant \forall),$$

$$\frac{\to \Delta\neg(0 \leqslant [\backslash]^1[A(T) \mid x]!^k[+B]^2)\neg(0 \leqslant [\backslash]^1 \forall x A!^k[+B]^2)}{\to \Delta\neg(0 \leqslant [\backslash]^1 \forall x A!^k[+B]^2)} \ (\neg(\leqslant \forall)),$$

$$\frac{\to \Delta(0 \leqslant \neg[\backslash]^1[A(T) \mid x]!^k[+B]^2)(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 \forall x A!^k[+B]^2)}{\to \Delta(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 \forall x A!^k[+B]^2)} \ (\leqslant \neg\forall),$$

$$\frac{\to \Delta\neg(0 \leqslant \neg[\backslash]^1[A(y) \mid x]!^k[+B]^2)}{\to \Delta\neg(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 \forall x A!^k[+B]^2)} \ (\neg(\leqslant \neg\forall)),$$

$$\frac{\to \Delta(0 \leqslant [\backslash]^1[A(T) \mid x]!^k[+B]^2)(0 \leqslant [\backslash]^1 \exists x A!^k[+B]^2)}{\to \Delta(0 \leqslant [\backslash]^1 \exists x A!^k[+B]^2)} \ (\leqslant \exists),$$

$$\frac{\to \Delta\neg(0 \leqslant [\backslash]^1[A(y) \mid x]!^k[+B]^2)}{\to \Delta\neg(0 \leqslant [\backslash]^1 \exists x A!^k[+B]^2)} \ (\neg(\leqslant \exists)),$$

$$\frac{\to \Delta(0 \leqslant \neg[\backslash]^1[A(y) \mid x]!^k[+B]^2)}{\to \Delta(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 \exists x A!^k[+B]^2)} \ (\leqslant \neg\exists),$$

$$\frac{\to \Delta\neg(0 \leqslant \neg[\backslash]^1[A(T) \mid x]!^k[+B]^2)\neg(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 \exists x A!^k[+B]^2)}{\to \Delta\neg(0 \leqslant \neg[\backslash]^1 \exists x A!^k[+B]^2)} \ (\neg(\leqslant \neg\exists)).$$

Кванторные правила имеют стандартные ограничения: предметная переменная y и терм T свободны для подстановки в A вместо свободного вхождения x и, кроме этого, переменная y не входит свободно в заключения правил ($\leqslant\neg\exists$), ($\neg(\leqslant\exists)$), ($\leqslant\forall$) и ($\neg(\leqslant\neg\forall)$). Кроме этого, заключение кванторного правила не должно содержать свободно переменную x; это ограничение, вместе с условием чистоты аксиом, позволяет в исчислении выводить только чистые секвенции.

§ 6. Свойства пропозициональной эвристической логики

6.1. Семантическая обоснованность и полнота.

Теорема 1 (о семантическом обосновании пропозиционального исчисления HQ). *В предложенной интерпретации секвенций все аксиомы пропозиционального исчисления для HQ являются истинными; заключения правил и заключения их обращений являются истинными, если посылки истинны.*

По определению аксиом их интерпретация истинна.

В истинности заключения любого из правил и их обращений при условии истинности посылки (посылок) легко убедиться по таблицам истинности для двузначных логических связок или интерпретации внутренних логических связок, введенной в п. 2.2 и в (1).

В качестве примера рассмотрим одно из правил для условного выражения.

Пусть истинны обе посылки правила

$$\frac{\to\Delta A'[\neg]^1(0\leqslant[\neg]^2[\backslash]^3C!^k[+D]^4),\quad \to\Delta\neg A'[\neg]^1(0\leqslant[\neg]^2[\backslash]^3B!^k[+D]^4)}{\to\Delta[\neg]^1(0\leqslant[\neg]^2[\backslash]^3\ \text{if}\ A'\ \text{then}\ B\ \text{else}\ C\ \text{fi}!^k[+D]^4)}\ (\text{if}).$$

Если при этом истинна секвенция $\to\Delta$, то заключение истинно.

В противном случае, если формула A' истинна, то условие истинности второй посылки необходимо влечет $[\neg]^1(0\leqslant[\neg]^2[\backslash]^3B!^k[+D]^4)$. Если же, наоборот, истинна формула $\neg A'$, то из истинности первой посылки следует $[\neg]^1(0\leqslant[\neg]^2[\backslash]^3C!^k[+D]^4)$. Тем самым условное выражение обеспечивает истинность заключения правила.

Теорема 2 (о полноте пропозиционального исчисления для HQ). *Всякая секвенция, интерпретация которой принадлежит пропозициональной теории HQ, выводима в секвенциальном исчислении для HQ.*

Доказательство. По теореме 1 всякое правило и обратное к нему сохраняет истинность секвенций. Поэтому, применяя обратные правила, получим набор секвенций, являющихся аксиомами.

Более сложные, чем единичные неравенства, обобщенные предикатные формулы, которые составляют рассматриваемую секвенцию, переносятся по очереди в конец секвенции при помощи правила ($\leftrightarrow$). Каждое из них разбивается на неравенства при помощи правил, обратных к ($\vee$), (&), ($\Longleftrightarrow$), ($=$) и правил для тех же логических знаков с отрицаниями. В неравенствах первое, а затем, после применения ($\preceq\leftrightarrow$), и второе слагаемое приводится к каноническому виду. Для этого достаточно в цикле применять правила, обратные ко всем еще не указанным, пока в этом цикле есть применения, изменяющие секвенцию. При увеличении числа секвенций (например, для правила, обратного к ($\leqslant$ &)) или новых обобщенных формул (например, для правила, обратного к (if)) указанная здесь процедура проделывается для всех секвенций, а в них — для всех обобщенных формул. Все правила, которые применяются в цикле, ведут к сокращению числа соответствующих правилу логических знаков в секвенции, а число других логических знаков, соответствующих этим правилам, не увеличивается; поэтому данная процедура закончится.

В результате мы получим набор секвенций, базы которых совпадают с ними самими. Как было отмечено в начале доказательства, все они являются аксиомами. Искомый вывод секвенции записывается в обратном порядке путем применения прямых правил, соответствующих обратным, к этому набору аксиом.

6.2. Верхняя оценка сложности распознавания выводимости. В используемой далее кодировке входа алгоритма числа записываются в двоичной системе счисления, внутренние и внешние логические связки; скобки, знак секвенции, символ «п» (для обозначения пропозициональной переменной), символ «с» и запятая (для обозначения сорта) являются символами исходного алфавита, а пропозициональные переменные индексируются.

Для секвенции S введем следующие обозначения:

$\mathrm{pf}(S)$ — количество обобщенных предикатных формул в S;

$\mathrm{con}(S)$ — количество одноместных логических связок (внешнее и внутреннее отрицания, «с другой стороны», «очень»);

$\mathrm{var}(S)$ — количество пропозициональных переменных в S;

$\mathrm{q}(S)$ — количество рациональных чисел в S: $p_1/q_1 \dots p_{\mathrm{q}(S)}/q_{\mathrm{q}(S)}$ (в качестве пропозициональных констант и в обозначениях сортов), а $\mathrm{mi}(S)$ — максимальное из чисел $p_1, \dots, p_{\mathrm{q}(S)}, q_1, \dots, q_{\mathrm{q}(S)}$. Тогда число сортовых переменных $\mathrm{svar}(S)$ оценивается сверху величиной $\mathrm{svar}(S) \leqslant l(S)/\log(|\mathrm{mi}(S)|+1)$, где $l(S)$ — *длина секвенции*, определяемая как

$$\mathrm{pf}(S) + \mathrm{var}(S) \log \mathrm{var}(S) + \mathrm{con}(S) + \mathrm{q}(S) + \sum_{i=1}^{\mathrm{q}(S)} (\log(|p_i| + 1) + \log(|q_i| + 1)).$$

Пусть $EXP\text{-}LIN\text{-}TIME$ ($EXP\text{-}POLY\text{-}TIME$) — класс многоленточных детерминированных машин Тьюринга, число шагов которых ограничено сверху экспонентой, в показателе которой линейная функция (соответственно, полином) от длины входа.

Лемма 2 (о сложности распознавания аксиом в HQ). *Аксиомы пропозиционального исчисления HQ распознаются алгоритмом, принадлежащим классу $EXP\text{-}LIN\text{-}TIME$.*

База секвенции на входе преобразуется в систему линейных неравенств — отрицаний сравнений базы. Требуется определить, является ли эта система несовместной. Для этого можно, подставляя всевозможные значения для сортовых переменных и применяя перекодировку, увеличивающую длину входа не более, чем квадратично, воспользоваться полиномиальным алгоритмом Хачияна [15].

В результате число шагов алгоритма оценивается сверху величиной

$$\mathrm{mi}(S)^{\mathrm{svar}(S)} p(C(l(S))^2) \leqslant 2^{l(S)} \cdot p(C(l(S))^2), \tag{2}$$

где p — полином из алгоритма Хачияна, C — константа.

Лемма 3. *Если выполнима база секвенции, то она осуществима на числах, длина записи которых не превосходит полинома от длины входа.*

Доказательство следует из [15].

Теорема 3. *Выполнимость обобщенных пропозициональных формул эвристической логики является NP-полной задачей.*

Доказательство. Докажем, что задача выполнимости формулы φ принадлежит NP. Путем применения обратных правил можно из секвенции $\to \neg\varphi$ построить набор секвенций, содержащих в своих списках простейшие обобщенные формулы, содержащие только одно сравнение, у которого слагаемые не содержат неодноместных логических связок. Объединяя эти сравнения дизъюнкциями, а получившиеся дизъюнктивные формулы конъюнкциями, строится конъюнктивная нормальная форма для $\neg\varphi$. Формула φ выполнима в том и только том случае, когда $\neg\varphi$ опровержима, т. е. существует набор значений переменных, для которого ложен хотя бы один из дизъюнктов построенной конъюнктивной нормальной формы для $\neg\varphi$.

Дерево вывода, которое строится в теореме 2 о полноте пропозиционального исчисления HQ, можно построить другим способом, увеличивая длину пришедших на вход данных не более, чем полиномиально.

Преобразуем исходную секвенцию следующим образом.

— Убираем все равенства и отрицания равенств. Проносим абсолютную величину всех числовых множителей внутрь. Длина преобразованной секвенции не превосходит квадратичного одночлена от длины исходной секвенции. Перед функциями останутся только коэффициенты, равные по абсолютной величине единице. В силу полноты исчисления исходные и преобразованные секвенции одинаково выводимы.

— Затем заменяем (начиная с самых внутренних) каждую формулу или подформулу A, содержащую функцию abs или хотя бы одну неодноместную функцию, на переменную e, добавляя в конец секвенции формулу $(0 < e - A)(0 < A - e)$. Длина преобразованной секвенции не превзойдет квадратичного одночлена от длины исходной секвенции.

— Будем выводить секвенции, содержащие формулы вида $(0 < e - A)(0 < A - e)$, используя внешнюю логическую связку формулы A. В результате длина секвенции возрастет не более, чем квадратичным образом.

Задача о существовании опровергающего набора для дизъюнкта является задачей о совместности в рациональных числах систем линейных неравенств, которая принадлежит P.

Пропозициональные формулы двузначной логики, записанные в конъюнктивной нормальной форме, содержатся в эвристической логике как фрагмент: константы -1 и 1 в качестве «истины» и «лжи», функция унарного минуса в качестве отрицания и функция max в качестве дизъюнкции. Для того, чтобы осуществить полиномиальное сведение, нужно константу И заменить на 1; константу Л — на -1, а двузначные логические связки понимать как многозначные. Затем следует написать для получившейся формулы F неравенство $(0 \leqslant F)$ и добавить к этому неравенству в виде конъюнкции выражение $((0 \leqslant \neg a + 1) \,\&\, (0 \leqslant a - 1)) \vee ((0 \leqslant \neg a - 1) \,\&\, (0 \leqslant a + 1))$ для каждой переменной a. Длина всей формулы при этом увеличивается не более, чем линейным образом.

Выполнимость пропозициональных формул двузначной логики является NP-полной задачей, эта задача сводится к исходной, и, кроме того, исходная задача принадлежат NP. Следовательно, она также NP-полна.

Следствие. *Алгоритм распознавания выводимости в пропозициональном исчислении HQ принадлежит классу EXP–POLY–TIME.*

Доказательство. Всякая NP-полная задача принадлежит классу *EXP–POLY–TIME*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. — М.: Прогресс, 1981.
2. Волгин Л. И. Непрерывная логика и ее схемотехнические применения: 5 лекций по курсу «Логические основы и модели нейронных сетей». — Ульяновск: УлГТУ, 1996.
3. Волгин Л. И., Левин В. И. Непрерывные логики, теория и применение. — Таллинн: Изд-во АН Эстонии, 1991.
4. Гинзбург С. А. Математическая непрерывная логика и изображение функций. — М.: Энергия, 1968. (Библиотека по автоматике. Вып. 274.)
5. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. — М.: Радио и связь, 1990.

6. Косовский Н. К. Полиномиальные алгоритмы для разрешимости некоторых систем линейных неравенств // Дискретный анализ и исследование операций. — 1995. — Т. 2, № 3. — С. 76.
7. Косовский Н. К. Уровневые логики // Записки научных семинаров Петербургского отд. Матем. ин-та РАН. — 1995. — Т. 220. — С. 72–82.
8. Косовский Н. К., Тишков А. В. Естественное упорядочение значений утверждений логики Поста // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. — С.-Пб.: Изд-во СПбГУ, 1996. — С. 30–32.
9. Косовский Н. К., Тишков А. В. Градуируемые логические значения для представления знаний // Записки научных семинаров Петербургского отд. Матем. ин-та РАН. — 1997. — Т. 220. — С. 135–149.
10. Косовский Н. К., Тишков А. В. Две логические теории сравнений // Тез. Первого Российского Философского Конгресса. Т. 3. — С.-Пб.: Изд-во СПбГУ, 1997. — С. 191–194.
11. Косовский Н. К., Тишков А. В. Полиномиальные алгоритмы установления совместности в рациональных числах систем строгих и нестрогих линейных неравенств // Актуальные проблемы современной математики. — Новосибирск, 1997. — Т. 3. — С. 95–100.
12. Мальцев А. И. Итеративные алгебры Поста. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976.
13. Мучник А. А., Янов Ю. И. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
14. Новиков П. С. Элементы математической логики. — М.: Наука, 1973.
15. Хачиян Л. Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1980. — № 1. — С. 51–68.
16. Шестаков В. И. О двойной арифметической интерпретации трехзначного исчисления высказываний, используемой при моделировании этого исчисления посредством релейно-коммутаторных схем // Применение логики в науке и технике. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. — С. 341–376.
17. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
18. Chang C. C. Logic with positive and negative truth values // Acta Philosophica Fennica. — 1963. — Fasc. XVI. — P. 19–39.
19. De Costa N. C. A. On the theory of inconsistent formal systems // Notre Dame J. of Formal Logic. — 1974. — V. 40, № 4. — P. 497–510.
20. Dubois D., Prade H. Fuzzy sets in approximate reasoning. Part 1: Inference with possibility distributions. Part 2: Logical approaches // Fuzzy sets and systems. — 1991. — V. 40, № 1. — P. 143–202, 203–244.
21. Golota Ya. Ya. On a certain formalization of antonyms logic // Fuzzy Sets and Systems. — 1992. — V. 45. — P. 335–340.
22. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary proposition // Amer. J. of Mathematics. — 1921. — V. 43, № 3. — P. 163–185.
23. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Informational Control. — 1965. — V. 8. — P. 338–353.
24. Zadeh L. A. Fuzzy logic, neural network and soft computing // Communications of the ACM. — 1994. — V. 37, № 3. — P. 77–89.

Поступило в редакцию 20 IV 1998