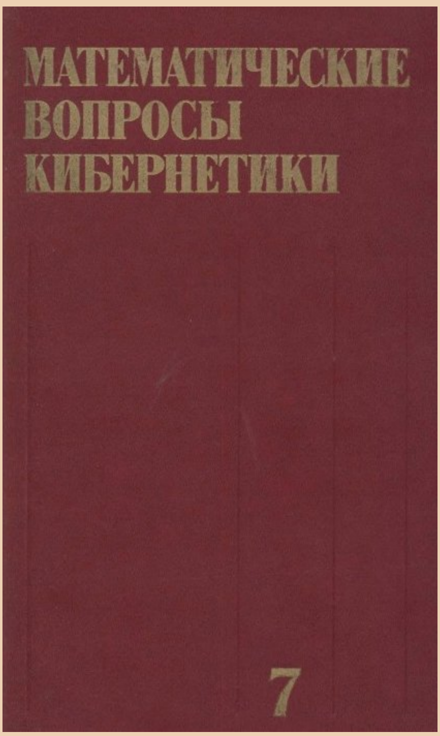


С. С. Марченков

Инварианты S-замкнутых классов трехзначной логики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Марченков С. С. Инварианты S-замкнутых классов трехзначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. — М.: Физматлит, 1998. — С. 243–264. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1998-243

ИНВАРИАНТЫ S-ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ *)

С. С. МАРЧЕНКОВ

(МОСКВА)

Функции многозначной логики [19, 20] являются одним из основных модельных объектов в дискретной математике и математической кибернетике. Всякое систематическое исследование множества функций многозначной логики предполагает в качестве первоначального этапа структурирование (классификацию) исследуемого объекта. Практика показала, что наибольшее значение как с теоретической, так и с прикладной точки зрения имеют классификации, в основе которых лежат порождающие возможности функций по отношению к операции суперпозиции и некоторым другим операциям. В качестве классического примера следует указать на счетную классификацию Поста [21, 23, 24] множества P_2 булевых функций (функций 2-значной логики), выполненную для операции суперпозиции. Обобщения этой классификации на множества P_k функций k-значной логики при $k \geqslant 3$ уже не могут играть той роли, которую классификация Поста играет для булевых функций, поскольку в силу известных результатов Ю. И. Янова и А. А. Мучника [22] подобные классификации (относительно операции суперпозиции) оказываются континуальными и, следовательно, малоэффективными. Тем не менее, при некоторых обобщениях операции суперпозиции образующиеся классификации могут быть даже конечными [4, 18]. Одна из идей в этом направлении состоит в том [8–10, 13–17], чтобы наряду с операцией суперпозиции рассматривать операции взятия функций, двойственных (сопряженных) относительно подстановок из достаточно «большой» группы, — например, из полной симметрической группы. В [8, 10, 13–15] показано, что соответствующая классификация (в [8] она названа S-классификацией) при любом k, $k \geqslant 3$, является конечной. Кроме того, она имеет достаточно эффективное описание и нетривиальна. Эти качества, а также важность понятия двойственности (сопряженности) в алгебре и теории функций многозначной логики позволяют считать S-классификацию основной классификацией множеств в P_k, $k \geqslant 3$.

На множестве всех подмножеств из P_k S-классификация порождает отношение S-эквивалентности: две системы функций из P_k называются S-эквивалентными, если совпадают S-замыкания этих систем. Один из путей определения S-неэквивалентных систем функций состоит в том, чтобы для каждой системы функций найти некоторое множество объектов-инвариантов; при этом две системы функций должны быть S-эквивалентными тогда и только тогда, когда совпадают соответствующие им множества инвариантов. В таком случае говорят также о полной системе инвариантов.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-01-00989).

Для классификаций постовского типа полные системы инвариантов существуют [1]. Каждый элемент такой системы состоит из всех отношений, сохраняемых всеми функциями данной системы функций, и представляет собой множество, замкнутое относительно некоторых логических операций. В [11] все такие замкнутые множества инвариантов описаны для классификации Поста. Из общей теории [1] нетрудно вывести, что в случае S-классификации также существуют полные системы инвариантов. Каждому множеству S-эквивалентных систем функций отвечает соответствующее замкнутое множество отношений-инвариантов; при любом k, $k \geqslant 3$, количество этих замкнутых множеств инвариантов конечно.

Теоретически метод порождения всех инвариантов для фиксированного S-замкнутого класса функций вытекает из [1]. Однако на практике он неприемлем ввиду чрезвычайной громоздкости. Кроме того, этот метод не позволяет охарактеризовать каким-либо внешним образом множество всех инвариантов данного класса. Из результатов работ [13–17] следует, что для любого k, $k \geqslant 3$, и для любого S-замкнутого класса Q функций из P_k множество $\mathrm{Inv}\, Q$ всех инвариантов класса Q порождается (с помощью определяемых ниже логических операций) конечным числом отношений. В работах [8–10] начата систематизация множества таких отношений, выделены отношения, которые играют ключевую роль (в [8–10] они названы основными). Опираясь на результаты работ [6, 12, 13], в которых описаны все S-замкнутые классы в P_3, а также на результаты из [8–10], мы в данной работе для всякого S-замкнутого класса Q из P_3, содержащего селекторные функции, указываем конечное множество отношений, порождающее множество $\mathrm{Inv}\, Q$, и находим внешнее описание всех отношений из $\mathrm{Inv}\, Q$.

Основные понятия

Пусть $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$, $k = 1, 2, 3$; P_2 — множество всех функций на E_2 (булевы функции или функции двузначной логики); P_3 — множество всех функций на E_3 (функции трехзначной логики). Через $\mathbf{S}_3$ обозначим полную симметрическую группу подстановок на E_3, а через $\mathbf{A}_3$ — знакопеременную подгруппу в $\mathbf{S}_3$. Группа $\mathbf{S}_3$ состоит из подстановок x, $x+1$, $x+2$, $2x$, $2x+1$, $2x+2$, группа $\mathbf{A}_3$ — из подстановок x, $x+1$, $x+2$ (сложение и умножение рассматриваются по модулю 3).

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_3$ и $\pi \in \mathbf{S}_3$. Через f^π обозначим функцию $\pi^{-1}(f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)))$, которая называется *двойственной* к f относительно подстановки π. При $f^\pi = f$ говорят, что функция f *самодвойственна* относительно подстановки π. Пусть $Q \subseteq P_3$. Через $[Q]_S$ обозначим наименьшее множество функций, содержащее Q и замкнутое относительно операций суперпозиции и взятия двойственных функций относительно любых подстановок из $\mathbf{S}_3$. Множества вида $[Q]_S$ назовем *S-замкнутыми* классами. Множества Q и T из P_3 назовем *S-эквивалентными*, если $[Q]_S = [T]_S$.

Для любых n и i, $1 \leqslant i \leqslant n$, функции $e_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$ носят название *селекторных* функций. Селекторные функции самодвойственны относительно любых подстановок.

Наряду с функциями на E_3 рассматриваем также отношения на E_3. Отношение $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ на E_3 отождествляем с множеством всех тех наборов из E_3^m, на которых оно истинно. В связи с этим применяем выражения «набор $(a_1, \ldots, a_m)$ принадлежит отношению ρ», «отношение ρ полно (тождественно истинно)», «отношение ρ пусто (тождественно ложно)». Множество всех отношений на E_3 обозначим через Π_3.

Пусть ε — отношение эквивалентности на $\{1, 2, \ldots, m\}$. *Диагональю*, соответствующей отношению ε, называется такое отношение $\rho(x_1, \ldots, x_m)$, что $((a_1,\ldots,a_m)\in\rho)\equiv((i,j)\in\varepsilon\Longrightarrow(a_i=a_j))$. Элементарной диагональю называем отношение вида $x_i=x_j$, где равенство $i=j$ не исключается. Пустое отношение удобно считать диагональю. К диагоналям относим также нульместное полное отношение.

Отношение $\rho^\pi(x_1,\ldots,x_m)\equiv\rho(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_m))$, где $\rho(x_1,\ldots,x_m)\in\Pi_3$ и $\pi\in\mathbf{S}_3$, называется *двойственным* к ρ относительно подстановки π. Нетрудно видеть, что для любой диагонали δ и любой подстановки π отношение δ^π совпадает с δ.

На множестве Π_3 определим несколько операций (см. также [16]). *Конъюнкцией* отношений ρ и σ, где $\rho(x_1,\ldots,x_m),\sigma(x_1,\ldots,x_n)\in\Pi_3$, называем $(m+n)$-местное отношение

$$\rho(x_1,\ldots,x_m)\,\&\,\sigma(x_{m+1},\ldots,x_{m+n}).$$

Проекцией отношения $\rho(x_1,\ldots,x_m)$ по переменной x_i, $1\leqslant i\leqslant m$, называется $(m-1)$-местное отношение

$$(\exists x_i)\,\rho(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_m),$$

где областью действия квантора $\exists x_i$ является множество E_3. Операции перестановки и отождествления переменных для отношений предполагаем известными. Через $[R]_S$, где $R\subseteq\Pi_3$, обозначаем наименьшее множество отношений, содержащее R и замкнутое относительно операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных, а также взятия двойственных отношений для любых подстановок из $\mathbf{S}_3$. Множества вида $[R]_S$ называем *S-замкнутыми* классами отношений.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_3$ и $\rho(x_1,\ldots,x_m)\in\Pi_3$. Говорят, что функция f *сохраняет отношение* ρ, если для любых n наборов $(a_{11},\ldots,a_{m1})$, … …, $(a_{1n},\ldots,a_{mn})$, принадлежащих отношению ρ, набор

$$(f(a_{11},\ldots,a_{1n}),\ldots,f(a_{m1},\ldots,a_{mn}))$$

также принадлежит ρ. Множество всех функций из P_3, сохраняющих отношение ρ, обозначим через $\operatorname{Pol}\rho$, а множество всех отношений из Π_3, сохраняемых функцией f, — через $\operatorname{Inv}f$. Нетрудно видеть, что для любой функции f и любого отношения ρ множество $\operatorname{Pol}\rho$ является замкнутым (относительно суперпозиции) классом функций, содержащим все селекторные функции, а множество $\operatorname{Inv}f$ — замкнутым (относительно операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных) классом отношений, содержащим все диагонали.

Отображения Pol и Inv распространим на все подмножества из Π_3 и P_3: если $R\subseteq\Pi_3$ и $Q\subseteq P_3$, положим $\operatorname{Pol}R=\bigcap\limits_{\rho\in R}\operatorname{Pol}\rho$ и $\operatorname{Inv}Q=\bigcap\limits_{f\in Q}\operatorname{Inv}f$. Отображения Pol и Inv определяют соответствия Галуа [18, 19] между частично упорядоченными по включению множествами всех подмножеств из P_3 и всех подмножеств из Π_3. При этом Галуа-замкнутыми множествами являются замкнутые классы функций из P_3, содержащие все селекторные функции, и замкнутые классы отношений из Π_3, содержащие все диагонали [1]. Отображение Pol (или Inv) задает антиизоморфизм между частично упорядоченными по включению множествами Галуа-замкнутых классов функций и Галуа-замкнутых классов отношений. В дальнейшем, говоря о соответствии Галуа, мы будем иметь в виду соответствия Pol и Inv, рассматриваемые лишь для Галуа-замкнутых классов функций и отношений.

Если $f\in\operatorname{Pol}\rho$ и π — подстановка, то $f^\pi\in\operatorname{Pol}\rho^\pi$. Отсюда сразу следует, что функтор Pol отображает S-замкнутые классы отношений в S-замкнутые классы функций, а функтор Inv, соответственно, — S-замкнутые классы функций в S-замкнутые классы отношений. Таким образом, согласно [1] множества Q и T из P_3 являются S-эквивалентными в том и только том случае, когда совпадают множества инвариантов $\mathrm{Inv}\,Q$ и $\mathrm{Inv}\,T$, представляющие собой S-замкнутые классы отношений. Этот факт, в частности, обусловливает важность задачи описания S-замкнутых классов отношений.

Пользуясь работами [6, 12, 13], дадим определения всем S-замкнутым классам из P_3, содержащим селекторные функции.

Через C_4, M_4, D_1, D_2, L_4, O_1 обозначаем соответственно следующие замкнутые классы булевых функций (см. [21]): класс всех α-функций, класс всех монотонных α-функций, класс всех самодвойственных α-функций, класс всех самодвойственных монотонных функций, класс всех линейных α-функций, класс всех селекторных функций.

Через $B_i f$, где $f \in P_3$ и $i \in E_3$, обозначим ограничение функции f на $\{i, i+1\}$ (сложение рассматривается по модулю 3).

Пусть $\varphi_i(x)$ — отображение E_2 на $\{i, i+1\}$, $\varphi_i(x) = x + i$. Для любой булевой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ рассмотрим такую функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$ на множестве $\{i, i+1\}$, что для любого булевского набора $(a_1, \ldots, a_n)$ имеет место равенство
$$h(\varphi_i(a_1), \ldots, \varphi_i(a_n)) = \varphi_i(g(a_1, \ldots, a_n)); \qquad (1)$$
положим $\varphi_i(g) = h$. Затем, для любого множества Q булевых функций положим $\varphi_i(Q) = \bigcap\limits_{g \in Q} \varphi_i(g)$.

Далее используются следующие обозначения для классов функций трехзначной логики:

$I_3 = \{f \in P_3 \colon f(x, \ldots, x) = x\}$ (класс всех идемпотентных функций);

$PA_3 = \{f \in P_3$: функция f самодвойственна относительно всех подстановок из группы $\mathbf{A}_3\}$;

$L = \{f \in P_3$: функция f линейна над полем $GF(3)\}$;

B_3 — класс Слупецкого (множество всех функций из P_3, которые либо существенно зависят не более чем от одной переменной, либо принимают не более двух значений);

$IA_3 = I_3 \cap PA_3$; $LA_3 = L \cap PA_3$; $LI_3 = L \cap I_3$;

$PS_3 = \{f \in P_3$: функция f самодвойственна относительно всех подстановок из группы $\mathbf{S}_3\}$ (класс всех однородных [20] функций из P_3);

$P_3^{(1)}$ — множество всех функций из P_3, существенно зависящих не более чем от одной переменной;

S_3 (A_3) — множество всех функций из P_3, которые с точностью до несущественных переменных совпадают с подстановками из группы $\mathbf{S}_3$ (соответственно, $\mathbf{A}_3$);

O_1 — множество всех селекторных функций из P_3. (Через O_1 ранее мы обозначили также множество всех селекторных функций из P_2. Однако из контекста всегда будет ясно, в каком из классов — P_2 или P_3 — рассматривается множество O_1.)

Положим, далее,
$$\left.\begin{aligned} P_3^2K &= \{f \in P_3 \colon B_i f \in \varphi_i(K),\ i \in E_3\},\\ P_3^2AK &= \{f \in P_3^2K \colon B_i f = \varphi_i(B_0 f),\ i = 1, 2\},\\ PA_3K &= P_3^2 \cap PA_3, \end{aligned}\right\} \quad K \in \{C_4, M_4, D_1, D_2, L_4, O_1\};$$
$$PS_3K = P_3^2 \cap PS_3, \qquad\qquad K \in \{D_1, D_2, L_4, O_1\}.$$

Через $P_3^3AD_2$ обозначим множество всех функций f из $P_3^2AD_2$, которые обладают следующим свойством: если при некотором отождествлении переменных из функции f получается такая функция $g(x_1, \ldots, x_n)$, что $B_0 g(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, то $g(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Полагаем, далее,
$$P_3^3A_3D_2 = P_3^3AD_2 \cap PA_3, \qquad P_3^3S_3D_2 = P_3^3AD_2 \cap PS_3.$$

Ниже представлена диаграмма включений всех упомянутых классов.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_3 называется *квазилинейной* [2], если она представима в виде $g_0(g_1(x_1) \oplus \ldots \oplus g_n(x_n))$, где $g_0, g_1, \ldots, g_n$ — произвольные одноместные функции из P_3, а $\oplus$ обозначает сложение по модулю 2. Через QL обозначим множество всех квазилинейных функций из P_3, а через B_2 — множество всех функций, принимающих не более двух значений. Положим, наконец,

$$B_2A_3 = B_2 \cup A_3, \quad B_2O_1 = B_2 \cup O_1, \quad QLA_3 = QL \cap B_2A_3,$$
$$QLO_1 = QL \cap B_2O_1, \quad QL^{(1)}A_3 = P_3^{(1)} \cap B_2A_3, \quad QL^{(1)}O_1 = P_3^{(1)} \cap B_2O_1,$$
$$CA_3 = L^{(1)} \cap B_2A_3, \qquad CO_1 = L^{(1)} \cap B_2O_1.$$

Отношения 1) — 8) из приводимого ниже списка в [8–10] названы *основными*:

1) $E_i(x) \equiv (x \in E_i)$, где $i = 1, 2$;

2) $\mu_2(x, y) \equiv E_2(x) \,\&\, E_2(y) \,\&\, (x \neq y)$, $\mu_3(x, y) \equiv E_2(x) \,\&\, E_2(y) \,\&\, (x \neq y) \vee$ $\vee\, x = y = 2$;

3) $\nu(x, y) \equiv (x \in \{0, 2\}) \,\&\, \mu_3(x, y)$;

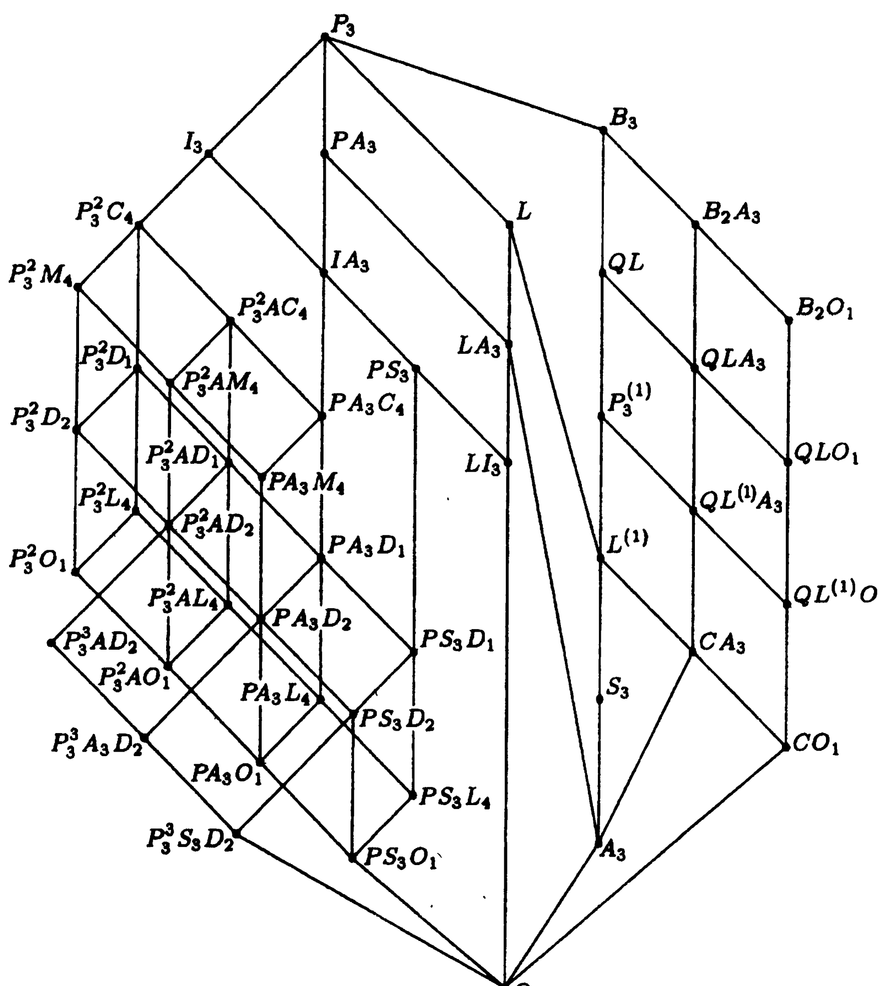
4) $\eta(x, y) \equiv (x+1 = y)$, где сложение рассматривается по модулю 3;

5) $\theta(x, y) \equiv E_2(x) \,\&\, \eta(x, y)$;

6) $\chi_2(x, y) \equiv E_2(x) \& E_2(y) \& (x \leqslant y)$, $\chi_3(x, y) \equiv (x \in \{0, 2\}) \& (x \leqslant y)$;

7) $\lambda(x, y, z) \equiv E_2(x) \& E_2(y) \& E_2(z) \& (x \oplus y \oplus z = 0)$;

8) $x+y+z = 0$, где сложение рассматривается по модулю 3;



9) $\tau(x, y, z) \equiv (x=y) \vee (x=z) \vee (y=z)$;
10) $\delta(x, y, z, w) \equiv (x=y) \& (x=w) \vee (x=z) \& (y=w) \vee (x=w) \& (y=z)$;
11) $x=y \vee x=z$;
12) $(x \neq y)$;
13) $\gamma(x, y, z) \equiv \mathop{\&}\limits_{\pi \in \{2x, 2x+1, 2x+2\}} (x, y, z) \neq (\pi(0), \pi(1), \pi(2))$;
14) $\varepsilon(x, y, z) \equiv \tau(x, y, z) \vee (x=0) \& (y=1) \& (z=2)$.

Лемма. *Операция взятия двойственного отношения перестановочна с операциями конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных.*

Доказательство. Непосредственно проверяем, что если $\pi \in \mathbf{S}_3$ и

$$\rho_1(x_1, \ldots, x_{m+n}) \equiv \rho(x_1, \ldots, x_m) \& \sigma(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}),$$
$$\rho_2(x_2, \ldots, x_m) \equiv (\exists x_1)\, \rho(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$
$$\rho_3(x_1, \ldots, x_m) \equiv \rho(x_{\omega(1)}, \ldots, x_{\omega(m)}), \quad \rho_4(x_2, \ldots, x_m) \equiv \rho(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_m),$$

где ω — подстановка на множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$, то

$$\rho_1^\pi(x_1, \ldots, x_{m+n}) \equiv \rho^\pi(x_1, \ldots, x_m) \& \sigma^\pi(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}),$$
$$\rho_2^\pi(x_2, \ldots, x_m) \equiv (\exists x_1)\, \rho^\pi(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$
$$\rho_3^\pi(x_1, \ldots, x_m) \equiv \rho^\pi(x_{\omega(1)}, \ldots, x_{\omega(m)}), \quad \rho_4^\pi(x_2, \ldots, x_m) \equiv \rho^\pi(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_m).$$

Лемма доказана.

Основные результаты

Класс P_3. Хорошо известно [1], что $\mathrm{Inv}\, P_3$ состоит только из диагоналей, а $\mathrm{Inv}\, O_1 = \Pi_3$. Отметим также, что каждую диагональ можно представить в виде расширенной конъюнкции (не обязательно с попарно не пересекающимися множествами переменных) элементарных диагоналей. В дальнейшем под конъюнкцией обычно будем понимать расширенную конъюнкцию. Последняя очевидным образом выражается через операцию конъюнкции, введенную ранее, и операции перестановки и отождествления переменных.

Класс I_3. Из определения этого класса сразу следует, что $I_3 = \mathrm{Pol}\{x=0, x=1, x=2\}$. Отношения $x=1$ и $x=2$ двойственны отношению $x=0$, поэтому $\mathrm{Inv}\, I_3 = [\{E_1(x)\}]_S$, см. [1]. Покажем, что $\mathrm{Inv}\, I_3$ совпадает с множеством R всех отношений, которые либо нульместны, либо пусты, либо представимы в виде (расширенной) конъюнкции диагоналей и отношений типа $x=a$, где $a \in E_3$. Соотношение $R \subseteq [\{E_1(x)\}]_S = \mathrm{Inv}\, I_3$ очевидно. Из определения множества R и доказанной леммы следует, что R содержит элементарные диагонали, отношения $x=0$, $x=1$, $x=2$ и замкнуто относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных, взятия двойственных отношений. Поэтому для доказательства равенства $R = \mathrm{Inv}\, I_3$ остается установить, что R замкнуто относительно операции проектирования. Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_n) \in R$ и

$$\sigma(x_2, \ldots, x_n) \equiv (\exists x_1)\, \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Если в конъюнктивное представление K отношения ρ входит сомножитель $x_1 = a$, то в силу известных логических правил получаем, что

$$\sigma(x_2, \ldots, x_n) \equiv \rho(a, x_2, \ldots, x_n).$$

Элементарные диагонали вида $x_1 = x_i$, которые могут содержаться в представлении K, преобразуются в отношения $a = x_i$. Если в K не входят сомножители вида $x_1 = b$, где $b \neq a$, приходим к включению $\sigma \in R$. В противном случае σ — пустая диагональ и, следовательно, снова $\sigma \in R$.

Если в представлении K нет сомножителя вида $x_1 = a$, но имеется сомножитель вида $x_1 = x_i$, то в случае $i \neq 1$ имеем $\sigma(x_2, \ldots, x_n) \equiv \rho(x_i, x_2, \ldots, x_n)$, и, следовательно, отношение σ получается из отношения ρ отождествлением переменных.

Пусть $i = 1$. Если K состоит из одного сомножителя $x_1 = x_1$, то отношение σ будет полным нульместным отношением. В противном случае при применении операции проектирования по переменной x_1 сомножитель $x_1 = x_1$ в представлении K можно опустить.

Случаи нульместных и пустых отношений тривиальны, а потому в дальнейшем мы эти случаи особо оговаривать не будем, включая, например, нульместные и пустые отношения в элементарные диагонали.

Классы PA_3 и PS_3. Из определений следует, что самодвойственность функции f относительно подстановки π эквивалентна тому, что функция f сохраняет *график* подстановки π, т. е. отношение $\pi(x) = y$. Поэтому

$$PA_3 = \mathrm{Pol}\{\pi(x) = y\colon\ \pi \in \mathbf{A}_3\}, \qquad PS_3 = \mathrm{Pol}\{\pi(x) = y\colon\ \pi \in \mathbf{S}_3\}.$$

Для единичной подстановки π отношение $\pi(x)=y$ является диагональю,

$$(x + 2 = y) \equiv (\exists z)\,(\eta(x, z)\ \&\ \eta(z, y)), \tag{3}$$

отношения $2x + 2 = y$, $2x = y$ двойственны к $\mu_3(x, y)$ относительно подстановок $x + 1$ и $x + 2$ и

$$\eta(x, y) \equiv (\exists z)\,(\mu_3(x, z)\ \&\ (2z + 2 = y)).$$

Поэтому $PA_3 = \mathrm{Pol}[\{\eta\}]_S$, $PS_3 = \mathrm{Pol}[\{\mu_3\}]_S$ и, следовательно, $\mathrm{Inv}\,PA_3 = [\{\eta\}]_S$, $\mathrm{Inv}\,PS_3 = [\{\mu_3\}]_S$.

Покажем, что:

1) класс $\mathrm{Inv}\,PA_3$ совпадает с множеством R_1 всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $\pi(x) = y$, где $\pi \in \mathbf{A}_3$;

2) класс $\mathrm{Inv}\,PS_3$ совпадает с множеством R_2 всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $x = a$, $\pi(x) = y$, где $a \in E_3$, $\pi \in \mathbf{S}_3$.

Доказательства в основном аналогичны, поэтому рассмотрим $\mathrm{Inv}\,PA_3$. Включение $R_1 \subseteq [\{\eta\}]_S$ следует из определения множества R_1 и равенства (3). Кроме того, множество R_1 содержит элементарные диагонали, отношение η (которое совпадает с любым двойственным к нему отношением) и очевидным образом замкнуто относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. Поэтому для доказательства равенства $R_1 = \mathrm{Inv}\,PA_3$ достаточно установить, что R_1 замкнуто относительно операции проектирования. Пусть $\rho \in R_1$ и σ определяется по формуле (2). Случай, когда переменная x_1 в конъюнктивном представлении K отношения ρ входит только в диагональ $x_1 = x_1$, тривиален. Если же переменная x_1 в представлении K входит в сомножитель вида $\pi(x_1) = x_i$ (или $x_1 = \pi(x_i)$), где $\pi \in \mathbf{A}_3$ и $i \neq 1$, то

$$\sigma(x_2, \ldots, x_n) \equiv \rho(\pi^{-1}(x_i), x_2, \ldots, x_n), \tag{4}$$

либо соответственно

$$\sigma(x_2, \ldots, x_n) \equiv \rho(\pi(x_i), x_2, \ldots, x_n). \tag{5}$$

Остается заметить, что всякое отношение из K вида $\psi(x_1) = x_j$, $x_1 = \psi(x_j)$, где $\psi \in \mathbf{A}_3$, в правых частях эквивалентностей (4), (5) преобразуется в одно из отношений $\psi(\pi^{-1}(x_i)) = x_j$, $\psi(\pi(x_i)) = x_j$, $\pi^{-1}(x_i) = \psi(x_j)$, $\pi(x_i) = \psi(x_j)$. Ясно, что каждое из этих отношений можно представить также в форме $\omega(x_i) = x_j$, где $\omega \in \mathbf{A}_3$.

Для класса $\mathrm{Inv}\,PS_3$ необходимо дополнительно заметить, что $\mu_3(x, x) \equiv (x = 2)$.

Класс IA_3. По определению $IA_3 = I_3 \cap PA_3$. Так как $\operatorname{Inv} I_3 = [\{E_1(x)\}]_S$ и $\operatorname{Inv} PA_3 = [\{\eta\}]_S$, то согласно соответствию Галуа [1] получаем, что $\operatorname{Inv} IA_3 = [\{E_1(x), \eta\}]_S$. Объединяя рассуждения, приведенные выше для классов $\operatorname{Inv} I_3$ и $\operatorname{Inv} PA_3$, находим, что $\operatorname{Inv} IA_3$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $x=a$ и $x+a=y$, где $a \in E_3$.

Классы $P_3^2C_4$, $P_3^2M_4$, $P_3^2D_1$, $P_3^2D_2$, $P_3^2L_4$, $P_3^2O_1$. Согласно определению, $f \in P_3^2K$ в том и только том случае, когда ограничение f на любое двухэлементное подмножество из E_3 является аналогом (в смысле отображений φ_i) булевой функции из K. Класс C_4 задается отношениями $x=0$ и $x=1$, т. е. $C_4 = \operatorname{Pol}\{x=0, x=1\}$, см. [11]. Поэтому класс $P_3^2C_4$ будет определяться отношениями $x=a$, где $a \in E_3$, и отношениями $x \in \{a, b\}$, где $a, b \in E_3$, $a \neq b$. Отношения вида $x \in \{a, b\}$ обеспечивают «булевость» ограничения функции f из $P_3^2C_4$ на множество $\{a, b\}$: ограничение f на $\{a, b\}$ должно принимать значения из $\{a, b\}$. Таким образом, $P_3^2C_4 = \operatorname{Pol}\{x=a, x \in \{a, b\}; a, b \in E_3\}$. Отношения $x \in \{0, 2\}$, $x \in \{1, 2\}$ двойственны отношению $E_2(x)$, и $(x=0) \equiv E_2(x) \,\&\, (x \in \{0, 2\})$, поэтому приходим к равенству $P_3^2C_4 = \operatorname{Pol}[\{E_2(x)\}]_S$.

Аналогичным образом, согласно [11], имеем $M_4 = \operatorname{Pol}\{x=0, x=1, x \leqslant y\}$, $D_1 = \operatorname{Pol}\{x=0, x \neq y\}$, $L_4 = \operatorname{Pol}\{x=1, x \oplus y \oplus z = 0\}$. Поэтому классы $P_3^2M_4$, $P_3^2D_1$ и $P_3^2L_4$ будут определяться отношениями, двойственными к отношениям из наборов

$$\{x=0,\ E_2(x) \,\&\, E_2(y) \,\&\, (x \leqslant y)\}, \qquad \{E_2(x) \,\&\, E_2(y) \,\&\, (x \neq y)\},$$
$$\{x=0,\ E_2(x) \,\&\, E_2(y) \,\&\, E_2(z) \,\&\, (x \oplus y \oplus z = 0)\}.$$

Однако

$$E_2(x) \,\&\, E_2(y) \,\&\, (x \leqslant y) \equiv \chi_2(x, y), \qquad E_2(x) \,\&\, E_2(y) \,\&\, (x \neq y) \equiv \mu_2(x, y),$$
$$E_2(x) \,\&\, E_2(y) \,\&\, E_2(z) \,\&\, (x \oplus y \oplus z = 0) \equiv \lambda(x, y, z).$$

Кроме того, отношение $x=0$ входит в каждое из множеств $[\{\chi_2\}]_S$, $[\{\mu_2\}]_S$, $[\{\lambda\}]_S$. Следовательно, приходим к равенствам

$$P_3^2M_4 = \operatorname{Pol}[\{\chi_2\}]_S, \qquad P_3^2D_1 = \operatorname{Pol}[\{\mu_2\}]_S, \qquad P_3^2L_4 = \operatorname{Pol}[\{\lambda\}]_S.$$

Из соотношений $P_3^2D_2 = P_3^2M_4 \cap P_3^2D_1$ и $P_3^2O_1 = P_3^2M_4 \cap P_3^2L_4$ вытекает далее, что $P_3^2D_2 = \operatorname{Pol}[\{\mu_2, \chi_2\}]_S$ и $P_3^2O_1 = \operatorname{Pol}[\{\lambda, \chi_2\}]_S$. Итак,

$$\operatorname{Inv} P_3^2C_4 = [\{E_2(x)\}]_S, \qquad \operatorname{Inv} P_3^2M_4 = [\{\chi_2\}]_S, \qquad \operatorname{Inv} P_3^2D_1 = [\{\mu_2\}]_S,$$
$$\operatorname{Inv} P_3^2D_2 = [\{\mu_2, \chi_2\}]_S, \qquad \operatorname{Inv} P_3^2O_1 = [\{\lambda, \chi_2\}]_S.$$

Так же, как и для класса $\operatorname{Inv} I_3$, устанавливаем, что $\operatorname{Inv} P_3^2C_4$ совпадает с множеством всех отношений, представимых в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $x=a$, $x \in \{a, b\}$, где $a, b \in E_3$.

Покажем, что $\operatorname{Inv} P_3^2M_4$ совпадает с множеством R всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x=a, \quad x \in \{a, b\}, \quad (x, y \in \{a, b\}) \,\&\, (x \leqslant y), \quad (x, y \in \{a, b\}) \,\&\, (x \geqslant y). \qquad (6)$$

Включение $R \subseteq \operatorname{Inv} P_3^2M_4$ очевидно. Множество отношений (6) замкнуто относительно операции взятия двойственных отношений, поэтому для доказательства обратного включения достаточно установить замкнутость множества R относительно операции проектирования. Чтобы не загромождать изложение несущественными деталями, рассмотрим случай, когда

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{1 \leqslant k \leqslant s} ((x_1, x_{i_k} \in \{a_{i_k}, b_{i_k}\}) \,\&\, (x_1 \leqslant x_{i_k})) \,\&$$
$$\& \mathop{\&}_{1 \leqslant l \leqslant t} ((x_1, x_{j_l} \in \{c_{j_l}, d_{j_l}\}) \,\&\, (x_1 \geqslant x_{j_l})),$$

а проектирование проводится по переменной x_1. Если множество

$$\{a_{i_1}, b_{i_1}\} \cap \ldots \cap \{a_{i_s}, b_{i_s}\} \cap \{c_{j_1}, d_{j_1}\} \cap \ldots \cap \{c_{j_t}, d_{j_t}\} \qquad (7)$$

состоит лишь из элемента a, то $(\exists x_1)\,\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \rho(a, x_2, \ldots, x_n)$.

В связи с этим замечаем, что отношение $(x, y \in \{a, b\})\ \&\ (x \leqslant y)$ при $x = a$ эквивалентно отношению $y \in \{a, b\}$, если $a < b$, и отношению $y = a$, если $a > b$.

Допустим, что множество (7) состоит из двух элементов: a и b. Тогда имеет место эквивалентность

$$(\exists x_1)\,\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{\substack{1 \leqslant k \leqslant s\\ 1 \leqslant l \leqslant t}} (x_{i_k}, x_{j_l} \in \{a, b\})\ \&\ (x_{j_l} \leqslant x_{i_k}).$$

Покажем, что $\operatorname{Inv} P_3^2 D_1$ совпадает с множеством R всех отношений, представимых в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \qquad x \in \{a, b\}, \qquad (x, y \in \{a, b\})\ \&\ (x \neq y), \qquad (8)$$

где $a, b \in E_3$. Включение $R \subseteq \operatorname{Inv} P_3^2 D_1$ очевидно. Множество R замкнуто относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных, а множество (8) — относительно операции взятия двойственных отношений, поэтому для доказательства обратного включения достаточно установить, что R замкнуто относительно операции проектирования. Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_n) \in R$. Рассмотрим основной случай, когда переменная x_1 в конъюнктивном представлении K отношения ρ входит в сомножитель вида $(x_1, x_i \in \{a, b\})\&(x_1 \neq x_i)$, где $a \neq b$, $i \neq 1$, а проектирование отношения ρ проводится по переменной x_1. Тогда

$$(\exists x_1)\,\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \rho(\bar{x}_i, x_2, \ldots, x_n),$$

где для $x_i \in \{a, b\}$ положено $\bar{a} = b$, $\bar{b} = a$. Нетрудно убедиться в том, что все одно- и двухместные отношения, входящие в конъюнкцию K и содержащие переменную x_1, после замены x_1 на $\bar{x}_i$ будут представимы либо в форме отношений из (8), либо в виде $(x_j \in \{a, b\})\&(x_i = x_j)$, либо в виде конъюнкции двух одноместных отношений, или же окажутся полными отношениями.

Покажем, что $\operatorname{Inv} P_3^2 D_2$ совпадает с множеством R всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $x = a$, $x \in \{a, b\}$, $(x, y \in \{a, b\})\ \&\ \sigma(x, y)$, где σ — произвольное двухместное отношение из Π_3.

Установим вначале, что $R \subseteq \operatorname{Inv} P_3^2 D_2$. Пусть отношение

$$\rho(x, y) \equiv (x, y \in \{a, b\})\ \&\ \sigma(x, y)$$

непусто. Если отношению ρ принадлежит ровно один набор, то $\rho(x, y)$ эквивалентно конъюнкции двух одноместных отношений вида $x = c$, $y = d$, где $c, d \in \{a, b\}$. Если ему принадлежат ровно два набора, то $\rho(x, y)$ либо распадается в конъюнкцию двух одноместных отношений вида $x = c$, $y \in \{a, b\}$ или $x \in \{a, b\}$, $y = c$, где $c \in \{a, b\}$, либо двойственно отношению $\mu_2(x, y)$, либо совпадает с отношением $(x, y \in \{a, b\})\ \&\ (x = y)$. Пусть отношению ρ принадлежат ровно три набора. Тогда $\rho(x, y)$ двойственно одному из следующих отношений:

$$\chi_2(x, y), \quad \chi_2(y, x), \quad (\exists z)\,(\mu_2(x, z)\ \&\ \chi_2(z, y)), \quad (\exists z)\,(\chi_2(x, z)\ \&\ \mu_2(z, y)).$$

Наконец, если отношению $\rho(x, y)$ принадлежат четыре набора, то оно совпадает с отношением $(x \in \{a, b\})\&(y \in \{a, b\})$.

Чтобы доказать включение $\operatorname{Inv} P_3^2 D_2 \subseteq R$, как легко видеть, достаточно установить замкнутость множества R относительно операции проектирования. Рассмотрим сразу ключевой случай, когда $\rho(x_1, \ldots, x_n) \in R$, $n \geqslant 2$,

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} \rho_i(x_1, x_i), \qquad (9)$$

каждое из отношений $\rho_i(x_1, x_i)$ имеет вид $(x_1, x_i \in \{a, b\}) \,\&\, \sigma_i(x_1, x_i)$ и проектирование отношения ρ проводится по переменной x_1. Если некоторому отношению ρ_j, $2 \leqslant j \leqslant n$, принадлежит ровно один набор, т. е. $\rho_j(x_1, x_j) \equiv (x_1 = c) \& (x_j = d)$, где $c, d \in \{a, b\}$, то

$$(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} \rho_i(c, x_i).$$

Аналогично рассматривается случай $\rho_j(x_1, x_j) \equiv (x_1 = c) \,\&\, (x_j \in \{a, b\})$. В случае $\rho_j(x_1, x_j) \equiv (x_1 \in \{a, b\}) \,\&\, (x_j = c)$ при $n \geqslant 3$ имеет место эквивалентность

$$(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv (x_j = c) \,\&\, (\exists x_1) \mathop{\&}_{\substack{2 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \rho_i(x_1, x_i),$$

а при $n = 2$ отношение $(\exists x_1)\, \rho(x_1, x_2)$ эквивалентно отношению $x_2 = c$. Пусть отношению ρ_j удовлетворяют ровно два набора, которые не имеют общих компонент. Если это наборы (a, b) и (b, a), то

$$(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} \rho_i(\bar{x}_j, x_i),$$

где $\bar{a} = b$ и $\bar{b} = a$. Аналогично рассматривается случай двух наборов (a, a) и (b, b). Если же отношению ρ_j удовлетворяют четыре набора, то при $n \geqslant 3$ его из представления (9) можно вообще исключить, а при $n = 2$ отношение $(\exists x_1)\, \rho(x_1, x_2)$ оказывается эквивалентным отношению $x_2 \in \{a, b\}$.

Таким образом, остается исследовать случай, когда каждому из отношений $\rho_2, \ldots, \rho_n$ принадлежит ровно три набора. Заметим, что при этом каждое из отношений $\sigma_i(x_1, x_i)$ можно представить в форме $(x_1 = c_i) \vee (x_i = d_i)$, где $c_i, d_i \in \{a, b\}$. Следовательно,

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i \in \{a, b\}) \;\&\; \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} ((x_1 = c_i) \vee (x_i = d_i)).$$

Пользуясь эквивалентностью

$$(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \rho(0, x_2, \ldots, x_n) \vee \rho(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \rho(2, x_2, \ldots, x_n)$$

и замечая, что одно из дизъюнктивных слагаемых в правой части этой эквивалентности пусто (поскольку $x_1 \in \{a, b\}$), получаем

$$\begin{aligned}(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv& \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} (x_i \in \{a, b\}) \,\&\\ &\& \Big(\mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} ((a = c_i) \vee (x_i = d_i)) \vee \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} ((b = c_i) \vee (x_i = d_i)) \Big).\end{aligned} \tag{10}$$

Пусть $N = \{i \colon 2 \leqslant i \leqslant n,\ a = c_i\}$. Предполагая, что $a \neq b$, имеем

$$\mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} ((a = c_i) \vee (x_i = d_i)) \equiv \mathop{\&}_{i \in \{2, \ldots, n\} \setminus N} (x_i = d_i), \quad \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} ((b = c_i) \vee (x_i = d_i)) \equiv \mathop{\&}_{i \in N} (x_i = d_i).$$

Значит, при $N \neq \varnothing$, $N \neq \{2, \ldots, n\}$ эквивалентность (10) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n) &\equiv \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} (x_i \in \{a, b\}) \,\&\, \Big(\mathop{\&}_{i \in \{2, \ldots, n\} \setminus N} (x_i = d_i) \vee \mathop{\&}_{i \in N} (x_i = d_i) \Big) \equiv \\ &\equiv \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} (x_i \in \{a, b\}) \,\&\, \Big(\mathop{\&}_{\substack{i \in \{2, \ldots, n\} \setminus N \\ j \in N}} ((x_i = d_i) \vee (x_j = d_j)) \Big).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что отношение $(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n)$ входит в множество R. При $N = \varnothing$ или $N = \{2, \ldots, n\}$ одно из слагаемых

$$\mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} ((a = c_i) \vee (x_i = d_i)), \qquad \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} ((b = c_i) \vee (x_i = d_i))$$

в эквивалентности (10) есть полное отношение, а потому

$$(\exists x_1)\, \rho(x_1 \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} (x_i \in \{a, b\}).$$

Покажем, что $\mathrm{Inv}\, P_3^2 L_4$ совпадает с множеством R всех отношений, представимых в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \quad x \in \{a, b\}, \quad (x_1, \ldots, x_n \in \{a, b\}) \mathbin{\&} (\pi(x_1) \oplus \ldots \oplus \pi(x_n) = c), \tag{11}$$

где $a, b \in E_3$, $a \neq b$, $c \in E_2$, $n \geqslant 2$, а π — отображение $\{a, b\}$ на E_2. Чтобы доказать включение $R \subseteq \mathrm{Inv}\, P_3^2 L_4$, достаточно заметить, что отношение

$$(x_1, \ldots, x_n \in \{a, b\}) \mathbin{\&} (\pi(x_1) \oplus \ldots \oplus \pi(x_n) = c)$$

двойственно отношению

$$E_2(x_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} E_2(x_n) \mathbin{\&} (x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = c),$$

$$(\exists y) \big(E_2(x_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} E_2(x_{n-1}) \mathbin{\&} E_2(y) \mathbin{\&} (x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} \oplus y = 0) \mathbin{\&} \lambda(x_n, x_{n+1}, y)\big) \equiv$$
$$\equiv E_2(x_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} E_2(x_{n+1}) \mathbin{\&} (x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n+1} = 0),$$

$$(\exists y) \big(E_2(x_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} E_2(x_n) \mathbin{\&} E_2(y) \mathbin{\&} (x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus y = 0) \mathbin{\&} (y = 1)\big) \equiv$$
$$\equiv E_2(x_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} E_2(x_n) \mathbin{\&} (x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = 1).$$

Множество отношений (11) выдерживает операцию взятия двойственных отношений, поэтому для доказательства включения $\mathrm{Inv}\, P_3^2 L_4 \subseteq R$ достаточно лишь установить замкнутость R относительно операции проектирования. Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_n) \in R$ и операция проектирования применяется к отношению ρ по переменной x_1. Чтобы не рассматривать более простые частные случаи, предположим, что конъюнктивное представление отношения ρ содержит только отношения последнего типа из (11), причем с одним и тем же множеством $\{a, b\}$. В силу соображений двойственности тогда можно считать, что

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{1 \leqslant i \leqslant n} E_2(x_i) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{1 \leqslant i \leqslant m} (x_1 \oplus x_1^i \oplus \ldots \oplus x_{p_i}^i = c_i),$$

где $\{x_1^1, \ldots, x_{p_1}^1, \ldots, x_1^m, \ldots, x_{p_m}^m\} = \{x_2, \ldots, x_n\}$, $c_1, \ldots, c_m \in E_2$ и $m \geqslant 2$. В этом случае имеем

$$(\exists x_1) \rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathop{\&}_{2 \leqslant i \leqslant n} E_2(x_i) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (x_1^i \oplus \ldots \oplus x_{p_i}^i \oplus x_1^j \oplus \ldots \oplus x_{p_j}^j = c_i \oplus c_j).$$

Покажем, что $\mathrm{Inv}\, P_3^2 O_1$ совпадает с множеством R всех отношений, представимых в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$(x_1, \ldots, x_n \in \{a, b\}) \mathbin{\&} \sigma(x_1, \ldots, x_n), \tag{12}$$

где $a, b \in E_3$, $n \geqslant 1$, а σ — произвольное отношение на E_3.

Согласно лемме 18 из [8] множеству $[\{\lambda, \chi_2\}]_S$ принадлежат все отношения вида (12). Отсюда следует, что $R \subseteq \mathrm{Inv}\, P_3^2 O_1$. Замкнутость множества R относительно всех порождающих операций очевидна. Поэтому $\mathrm{Inv}\, P_3^2 O_1 \subseteq R$.

Классы $P_3^2 AC_4$, $P_3^2 AM_4$, $P_3^2 AD_1$, $P_3^2 AD_2$, $P_3^2 AL_4$, $P_3^2 AO_1$. Из определений следует, что класс $P_3^2 AC_4$ состоит из всех функций класса $P_3^2 C_4$, самодвойственных относительно ограничений подстановок $x+1$ и $x+2$ на множество E_2 (см. равенство (1)). Иными словами, $P_3^2 AC_4$ есть множество всех функций из $P_3^2 C_4$, сохраняющих отношения $E_2(x) \mathbin{\&} (x + 1 = y)$ и $E_2(x) \mathbin{\&} (x + 2 = y)$. Первое из этих отношений совпадает с отношением $\theta(x, y)$, второе двойственно к $\theta(y, x)$, $E_2(x) \equiv (\exists y)\, \theta(x, y)$ и $P_3^2 C_4 = \mathrm{Pol}[\{E_2(x)\}]_S$, поэтому приходим к равенству $P_3^2 AC_4 = \mathrm{Pol}[\{\theta\}]_S$.

Каждый из оставшихся классов $P_3^2 AK$ представляет собой пересечение соответствующего класса $P_3^2 K$ и $P_3^2 AC_4$. Исходя из этого и используя установленные ранее равенства $P_3^2 M_4 = \mathrm{Pol}[\{\chi_2\}]_S$, $P_3^2 D_1 = \mathrm{Pol}[\{\mu_2\}]_S$, $P_3^2 D_2 = \mathrm{Pol}[\{\mu_2, \chi_2\}]_S$, $P_3^2 L_4 = \mathrm{Pol}[\{\lambda\}]_S$, $P_3^2 O_1 = \mathrm{Pol}[\{\lambda, \chi_2\}]_S$, получаем $P_3^2 AM_4 = \mathrm{Pol}[\{\theta, \chi_2\}]_S$, $P_3^2 AD_1 = \mathrm{Pol}[\{\theta, \mu_2\}]_S$, $P_3^2 AD_2 = \mathrm{Pol}[\{\theta, \mu_2, \chi_2\}]_S$,

$P_3^2AL_4 = \mathrm{Pol}[\{\theta, \lambda\}]_S$, $P_3^2AO_1 = \mathrm{Pol}[\{\theta, \lambda, \chi_2\}]_S$. Однако отношение $\nu(x, y)$ двойственно отношению $(\exists z)(\mu_2(x, z) \mathbin{\&} \theta(z, y))$. Следовательно, в силу леммы 4 из [8] имеет место включение $\{\mu_2, \theta\} \subset [\{\nu\}]_S$. Поэтому $P_3^2AD_1 = \mathrm{Pol}[\{\nu\}]_S$, $P_3^2AD_2 = \mathrm{Pol}[\{\nu, \chi_2\}]_S$. Поскольку $P_3^2AL_4 = P_3^2L_4 \cap \cap P_3^2AD_1$ и $P_3^2AO_1 = P_3^2O_1 \cap P_3^2AD_1$, имеем также $P_3^2AL_4 = \mathrm{Pol}[\{\lambda, \nu\}]_S$ и $P_3^2AO_1 = \mathrm{Pol}[\{\lambda, \nu, \chi_2\}]_S$.

Итак, $\mathrm{Inv}\, P_3^2AC_4 = [\{\theta\}]_S$, $\mathrm{Inv}\, P_3^2AM_4 = [\{\theta, \chi_2\}]_S$, $\mathrm{Inv}\, P_3^2AD_1 = [\{\nu\}]_S$, $\mathrm{Inv}\, P_3^2AD_2 = [\{\nu, \chi_2\}_S$, $\mathrm{Inv}\, P_3^2AL_4 = [\{\lambda, \nu\}]_S$, $\mathrm{Inv}\, P_3^2AO_1 = [\{\lambda, \nu, \chi_2\}]_S$.

Покажем, что $\mathrm{Inv}\, P_3^2AC_4$ совпадает с множеством R всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \qquad x \in \{a, b\}, \qquad (x \in \{a, b\}) \mathbin{\&} (x + c = y), \tag{13}$$

где $a, b, c \in E_3$. Для доказательства включения $R \subseteq \mathrm{Inv}\, P_3^2AC_4$ достаточно установить, что множеству $\mathrm{Inv}\, P_3^2AC_4$ принадлежат все отношения

$$\theta_{abc}(x, y) \equiv (x \in \{a, b\}) \mathbin{\&} (x + c = y),$$

где $a \neq b$ и $c \neq 0$. Однако отношение θ_{011} совпадает с основным отношением θ, отношение θ_{012} двойственно к θ относительно подстановки $2x + 1$, $\theta_{021}(x, y) \equiv \theta_{012}(y, x)$, отношение θ_{022} двойственно к θ относительно подстановки $2x$, и $\theta_{121}(x, y) \equiv \theta_{022}(y, x)$, $\theta_{122}(x, y) \equiv \theta(y, x)$.

При доказательстве включения $\mathrm{Inv}\, P_3^2AC_4 \subseteq R$ заметим, что в силу нормальности $\mathbf{A}_3$ в $\mathbf{S}_3$ множество $\{\theta_{abc}\colon a, b, c \in E_3\}$ (и, следовательно, множество (13)) замкнуто относительно операции взятия двойственных отношений. Кроме того, множество R очевидным образом замкнуто относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. При рассмотрении операции проектирования предположим, что $\rho(x_1, \ldots, x_n) \in R$ и переменная x_1 в конъюнктивном представлении отношения ρ входит в отношение $\theta_{abc}(x_1, x_i)$, где $i \neq 1$. Тогда

$$(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv (x_i \in \{d, e\}) \mathbin{\&} \rho(x_i - c, x_2, \ldots, x_n), \tag{14}$$

где $d = a + c$, $e = b + c$. Подстановка функции $x_i - c$ вместо переменной x_1 в отношения вида $\theta_{pqr}(x_1, x_j)$ приводит к отношениям этого же вида.

Покажем, что $\mathrm{Inv}\, P_3^2AM_4$ совпадает с множеством R всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей, отношений типа (13) и

$$\chi_{abcde}(x, y) \equiv (x \in \{a, b\}) \mathbin{\&} (x + c = y \vee x = d \mathbin{\&} y = e), \tag{15}$$

где $a, b, c, d, e \in E_3$, $d \in \{a, b\}$, $e \in \{a{+}c, b{+}c\}$ и $(d, e) \notin \{(a, a{+}c), (b, b{+}c)\}$.

Для доказательства включения $R \subseteq \mathrm{Inv}\, P_3^2AM_4$ достаточно заметить, что всякое отношение χ_{ab0de} $(a \neq b)$ двойственно одному из отношений $\chi_2(x, y)$ или $\chi_2(y, x)$,

$$\chi_{01200}(x, y) \equiv (\exists z)\, (\chi_2(x, z) \mathbin{\&} (z \in E_2) \mathbin{\&} (z + 2 = y)),$$
$$\chi_{01212}(x, y) \equiv (\exists z)\, (\chi_2(z, x) \mathbin{\&} (z \in E_2) \mathbin{\&} (z + 2 = y)),$$

и всякое отношение χ_{abcde}, где $a \neq b$ и $c \neq 0$, двойственно одному из отношений χ_{01200} или χ_{01212}.

При доказательстве обратного включения замечаем, что множество (15) замкнуто относительно операции взятия двойственных отношений. Множество R очевидным образом замкнуто относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных, поэтому остается лишь показать, что R замкнуто относительно операции проектирования.

Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_n) \in R$ и отношение ρ проектируется по переменной x_1. Оставляя в стороне более простые случаи, будем считать, что переменная x_1 в конъюнктивном представлении K отношения ρ входит только в отношения вида θ_{abc} и χ_{pqrst}. Если представление K содержит сомножитель

$\theta_{abc}(x_1, x_i)$, где $i \neq 1$, то имеет место эквивалентность (14). Как отмечалось, подстановка функции $x_i - c$ вместо переменной x_1 в отношение $\theta_{pqr}(x_1, x_j)$ сохраняет тип отношения. Аналогичное утверждение, как нетрудно убедиться, справедливо и для отношений $\chi_{pqrst}(x_1, x_j)$.

Предположим поэтому, что все сомножители из K, содержащие переменную x_1, имеют вид χ_{abcde}, причем (чтобы случай был невырожденным) с одними и теми же значениями a, b. Иными словами, пусть, например,

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \underset{2 \leqslant i \leqslant n}{\&} (x_1 \in \{a, b\}) \,\&\, (x_1 + c_i = x_i \vee x_1 = d_i \,\&\, x_i = e_i),$$

где $a \neq b$, $d_i \in \{a, b\}$, $e_i \in \{a+c_i, b+c_i\}$ и $(d_i, e_i) \notin \{(a, a+c_i), (b, b+c_i)\}$. Тогда

$$(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \underset{2 \leqslant i \leqslant n}{\&} ((a + c_i = x_i) \vee (a = d_i) \,\&\, (x_i = e_i)) \vee \\ \vee \underset{2 \leqslant i \leqslant n}{\&} ((b + c_i = x_i) \vee (b = d_i) \,\&\, (x_i = e_i)). \quad (16)$$

Положим $N = \{i\colon 2 \leqslant i \leqslant n,\ a = d_i\}$. Так как $a \neq b$, $e_i \in \{a + c_i,\ b + c_i\}$ и $(d_i, e_i) \notin \{(a, a + c_i),\ (b, b + c_i)\}$, эквивалентность (16) можно переписать в виде

$$(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \Big(\underset{i \in N}{\&} ((x_i = a + c_i) \vee (x_i = b + c_i)) \ \&\ \underset{\substack{2 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin N}}{\&} (x_i = a + c_i) \Big) \vee \\ \vee \Big(\underset{i \in N}{\&} (x_i = b + c_i) \ \&\ \underset{\substack{2 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin N}}{\&} ((x_i = a + c_i) \vee (x_i = b + c_i)) \Big).$$

Пользуясь дистрибутивностью дизъюнкции относительно конъюнкции, представим последнюю эквивалентность в следующей форме:

$$\begin{aligned}(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n) \ \equiv\ & \underset{i, j \in N}{\&} \ ((x_i \in \{a + c_i, b + c_i\}) \vee (x_j = b + c_j)) \ \& \\ \& \ & \underset{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ j \notin N,\, i \in N}}{\&} \ ((x_i \in \{a + c_i, b + c_i\}) \vee x_j \in \{a + c_j, b + c_j\}) \ \& \\ \& \ & \underset{\substack{2 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin N,\, j \in N}}{\&} \ ((x_i = a + c_i) \vee (x_j = b + c_j)) \ \& \\ \& \ & \underset{\substack{2 \leqslant i, j \leqslant n \\ i, j \notin N}}{\&} \ ((x_i = a + c_i) \vee (x_j \in \{a + c_j, b + c_j\})). \qquad (17)\end{aligned}$$

В силу того, что

$$(x_i \in \{a + c_i, b + c_i\}) \vee (x_i = b + c_i) \equiv \\ \equiv (x_i = a + c_i) \vee (x_i \in \{a + c_i, b + c_i\}) \equiv (x_i \in \{a + c_i, b + c_i\}),$$

правая часть (17) содержит конъюнкцию $\underset{2 \leqslant i \leqslant n}{\&} (x_i \in \{a + c_i, b + c_i\})$. Легко видеть, что при этом условии сомножители типа $(x_i \in \{a+c_i, b+c_i\}) \vee (x_j = b + c_j)$, $(x_i \in \{a+c_i, b+c_i\}) \vee (x_j \in \{a+c_j, b+c_j\})$, $(x_i = a+c_i) \vee (x_j \in \{a + c_j, b + c_j\})$ из правой части эквивалентности (17) можно опустить. Таким образом, получаем

$$(\exists x_1)\, \rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \underset{2 \leqslant i \leqslant n}{\&} (x_i \in \{a+c_i, b+c_i\}) \ \&\ \underset{\substack{2 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin N,\, j \in N}}{\&} ((x_i = a+c_i) \vee (x_j = b+c_j)).$$

Однако при $i \neq j$ имеем

$$(x_i \in \{a + c_i, b + c_i\}) \,\&\, (x_j \in \{a + c_j, b + c_j\}) \,\&\, ((x_i = a + c_i) \vee (x_j = b + c_j)) \equiv \\ \equiv (x_i \in \{a + c_i, b + c_i\}) \,\&\, ((x_i + c_j - c_i = x_j) \vee (x_i = a + c_i) \,\&\, (x_j = b + c_j)),$$

и замкнутость множества R относительно операции проектирования установлена.

Покажем, что $\mathrm{Inv}\, P_3^2 A D_1$ совпадает с множеством R всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \qquad x \in \{a, b\}, \qquad (x \in \{a, b\}) \,\&\, (cx + d = y), \tag{18}$$

где $a, b, c, d \in E_3$. В самом деле, согласно лемме 4 из [13], в множество $[\{\nu\}]_S$ входят все отношения вида $(x \in \{a, b\}) \,\&\, (cx + d = y)$ и, разумеется, все отношения вида $x = a$, $x \in \{a, b\}$. Таким образом, $R \subseteq \mathrm{Inv}\, P_3^2 A D_1$. С другой стороны, множество (18) замкнуто относительно операции взятия двойственных отношений, а множество R — относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_n) \in R$ и пусть в конъюнктивное представление отношения ρ входит сомножитель

$$(x_1 \in \{a, b\}) \,\&\, (cx_1 + d = x_i), \tag{19}$$

где $c \neq 0$ и $i \neq 1$. Отношение (19) эквивалентно отношению $(x_i \in \{a_1, b_1\}) \,\&$ $\&\,(c_1 x_i + d_1 = x_1)$, где $a_1 = ca + d$, $b_1 = cb + d$, $c_1 = c^{-1}$ и $d_1 = -c^{-1} d$, поэтому

$$(\exists x_1)\, \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x_i \in \{a_1, b_1\}) \,\&\, \rho(c_1 x_i + d_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Очевидно, что отношения вида (18) сохраняются при подстановке вместо переменных функций вида $c_1 x_i + d_1$. Значит, $\mathrm{Inv}\, P_3^2 A D_1 \subseteq R$.

Покажем, что $\mathrm{Inv}\, P_3^2 A D_2$ совпадает с множеством R всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $x = a$, $x \in \{a, b\}$, $(x \in \{a, b\}) \,\&\, (y \in \{a, c\}) \,\&\, \sigma(x, y)$, где $a, b, c \in E_3$, а σ — произвольное отношение из Π_3.

Пусть $\rho(x, y) \equiv (x \in \{a, b\}) \,\&\, (y \in \{a, c\}) \,\&\, \sigma(x, y)$, где $a \neq b$ и $a \neq c$. По доказанному, в $\mathrm{Inv}\, P_3^2 D_2$ входит такое отношение $\rho_1(x, y) \equiv (x, y \in$ $\in \{a, b\}) \,\&\, \sigma_1(x, y)$, что $\rho(x, y) \equiv \rho_1(x, \pi(y))$, где $\pi \in \mathrm{S}_3$ и $\pi(\{a, c\}) = \{a, b\}$. Следовательно, выбрав в $[\{\nu\}]_S$, согласно лемме 4 из [8], отношение $\psi(x, y) \equiv (x \in \{a, c\}) \,\&\, (\pi(x) = y)$, будем иметь

$$\rho(x, y) \equiv (\exists z)\, (\rho_1(x, z) \,\&\, \psi(y, z)).$$

Таким образом, $R \subseteq \mathrm{Inv}\, P_3^2 A D_2$. Включение $\mathrm{Inv}\, P_3^2 A D_2 \subseteq R$ доказывается так же, как аналогичное включение для класса $P_3^2 D_2$.

Покажем, что $\mathrm{Inv}\, P_3^2 A L_4$ совпадает с множеством R всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \quad x \in \{a, b\}, \quad (x_1 \in F_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \in F_n) \,\&\, (\pi_1(x_1) \oplus \ldots \oplus \pi_n(x_n) = c),$$

где $a, b \in E_3$, $c \in E_2$, $n \geqslant 2$, $|F_1| = \ldots = |F_n| = 2$, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — подстановки на E_3, причем $\pi_1(F_1) = \ldots = \pi_n(F_n) = E_2$.

Чтобы доказать включение $R \subseteq \mathrm{Inv}\, P_3^2 A L_4$, достаточно для приведенных выше множеств $F_1, \ldots, F_n$ и подстановок $\pi_1, \ldots, \pi_n$ определить в классе $\mathrm{Inv}\, P_3^2 L_4$ отношение $\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv E_2(x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, E_2(x_n) \,\&\, (x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = c)$, выбрать в $[\{\nu\}]_S$ — согласно лемме 4 из [8] — такие отношения $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, что $\sigma_i(x, y) \equiv (x_i \in F_i) \,\&\, (\pi_i(x) = y)$, $i = 1, \ldots, n$, и заметить, что

$$\begin{aligned}(x_1 \in F_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \in F_n) \,\&\, (\pi_1(x_1) \oplus \ldots \oplus \pi_n(x_n) = c) &\equiv \\ \equiv (\exists y_1) \ldots (\exists y_n)\, (\sigma_1(x_1, y_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \sigma_n(x_n, y_n) \,\&\, \rho(y_1, \ldots, y_n)).&\end{aligned}$$

Включение $\mathrm{Inv}\, P_3^2 A L_4 \subseteq R$ доказывается так же, как соответствующее включение для класса $P_3^2 L_4$.

Используя соответствующие результаты для класса $P_3^2 O_1$, аналогично классам $P_3^2 AD_1$, $P_3^2 AD_2$, $P_3^2 AL_4$ устанавливаем, что $\mathrm{Inv}\, P_3^2 AO_1$ совпадает с множеством R всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$(x_1 \in F_1) \& \ldots \& (x_n \in F_n) \& \sigma(x_1, \ldots, x_n),$$

где $n \geqslant 1$, $|F_1|, \ldots, |F_n| \leqslant 2$, а σ — произвольное отношение на E_3.

Классы PA_3C_4, PA_3M_4, PA_3D_1, PA_3D_2, PA_3L_4, PA_3O_1. Если $K \in \{C_4, M_4, D_1, D_2, L_4, O_1\}$, то $PA_3K = P_3^2 K \cap PA_3$. Используя полученные ранее описания классов $P_3^2 K$ и PA_3, а также соотношения $[\{\nu\}]_S = \mathrm{Inv}\, P_3^2 AD_1 \subseteq \subseteq \mathrm{Inv}\, PA_3 D_1$ и $[\{\nu, \chi_2\}]_S = \mathrm{Inv}\, P_3^2 AD_2 \subseteq \mathrm{Inv}\, PA_3 D_2$, получаем, что

$$\mathrm{Inv}\, PA_3C_4 = [\{E_2(x), \eta\}]_S, \quad \mathrm{Inv}\, PA_3M_4 = [\{\eta, \chi_2\}]_S, \quad \mathrm{Inv}\, PA_3D_1 = [\{\nu, \eta\}]_S,$$
$$\mathrm{Inv}\, PA_3D_2 = [\{\nu, \eta, \chi_2\}]_S, \quad \mathrm{Inv}\, PA_3L_4 = [\{\eta, \lambda\}]_S, \quad \mathrm{Inv}\, PA_3O_1 = [\{\eta, \lambda, \chi_2\}]_S.$$

Так же, как для соответствующих классов $P_3^2 AK$, устанавливаем, что:

1) множество $\mathrm{Inv}\, PA_3C_4$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $x = a$, $x \in \{a, b\}$, $x + a = y$, где $a, b \in E_3$;

2) множество $\mathrm{Inv}\, PA_3M_4$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \quad x \in \{a, b\}, \quad x + a = y, \quad (x \in \{a, b\}) \& ((x + c = y) \vee (x = d) \& (y = e)),$$

где $a, b, c, d, e \in E_3$, $d \in \{a, b\}$, $e \in \{a+c, b+c\}$, $(d, e) \notin \{(a, a+c), (b, b+c)\}$;

3) множество $\mathrm{Inv}\, PA_3D_1$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \quad x \in \{a, b\}, \quad x + a = y, \quad (x \in \{a, b\}) \& (cx + d = y),$$

где $a, b, c, d \in E_3$;

4) множество $\mathrm{Inv}\, PA_3D_2$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \quad x \in \{a, b\}, \quad x + a = y, \quad (x \in \{a, b\}) \& (y \in \{a, c\}) \& \sigma(x, y),$$

где $a, b, c \in E_3$, а σ — произвольное отношение из Π_3;

5) множество $\mathrm{Inv}\, PA_3L_4$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \qquad x \in \{a, b\}, \qquad x + a = y,$$
$$(x_1 \in F_1) \& \ldots \& (x_n \in F_n) \& (\pi_1(x_1) \oplus \ldots \oplus \pi_n(x_n) = c),$$

где $a, b \in E_3$, $c \in E_2$, $n \geqslant 2$, $|F_1| = \ldots = |F_n| = 2$, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — подстановки на E_3, причем $\pi_1(F_1) = \ldots = \pi_n(F_n) = E_2$;

6) множество $\mathrm{Inv}\, PA_3O_1$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $x + a = y$, $(x_1 \in F_1) \& \ldots \& (x_n \in F_n) \& \sigma(x_1, \ldots, x_n)$, где $a \in E_3$, $n \geqslant 1$, $|F_1|, \ldots, |F_n| \leqslant 2$, а σ — произвольное отношение из Π_3.

Классы PS_3D_1, PS_3D_2, PS_3L_4, PS_3O_1. Если $K \in \{D_1, D_2, L_4, O_1\}$, то $PS_3K = P_3^2 K \cap PS_3$. Используя полученные ранее описания множеств $\mathrm{Inv}\, P_3^2 K$ и $\mathrm{Inv}\, PS_3$ и принимая во внимание соотношения

$E_2(x) \equiv (\exists y)\,\mu_2(x, y)$ и $\mu_2(x, y) \equiv E_2(x) \& \mu_3(x, y)$, приходим к равенствам

$$\operatorname{Inv} PS_3D_1 = [\{E_2(x), \mu_3\}]_S, \qquad \operatorname{Inv} PS_3D_2 = [\{\mu_3, \chi_2\}]_S,$$
$$\operatorname{Inv} PS_3O_1 = [\{\mu_3, \lambda, \chi_2\}]_S, \qquad \operatorname{Inv} PS_3L_4 = [\{\mu_3, \lambda\}]_S.$$

Аналогично множествам $\operatorname{Inv} PA_3K$ получаем, что:

1) множество $\operatorname{Inv} PS_3D_1$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $x = a$, $x \in \{a, b\}$, $ax + b = y$, где $a, b \in E_3$;

2) множество $\operatorname{Inv} PS_3D_2$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \quad x \in \{a, b\}, \quad ax + b = y, \quad (x \in \{a, b\} \& (y \in \{a, c\}) \& \sigma(x, y),$$

где $a, b, c \in E_3$, а σ — произвольное отношение из Π_3;

3) множество $\operatorname{Inv} PS_3L_4$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \qquad x \in \{a, b\}, \qquad ax + b = y,$$
$$(x_1 \in F_1) \& \ldots \& (x_n \in F_n) \& (\pi_1(x_1) \oplus \ldots \oplus \pi_n(x_n) = c),$$

где $a, b \in E_3$, $c \in E_2$, $n \geqslant 2$, $|F_1| = \ldots = |F_n| = 2$, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — подстановки на E_3, причем $\pi_1(F_1) = \ldots = \pi_n(F_n) = E_2$;

4) множество $\operatorname{Inv} PS_3O_1$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $ax + b = y$, $(x_1 \in F_1) \& \ldots \& (x_n \in F_n) \& \sigma(x_1, \ldots, x_n)$, где $a, b \in E_3$, $n \geqslant 1$, $|F_1|, \ldots, |F_n| \leqslant 2$, а σ — произвольное отношение из Π_3.

Класс $P_3^3AD_2$. Согласно [13], базис класса $P_3^3AD_2$ образуют функции $C_0^d(x, y, z)$, $C_1^d(x, y, z)$, $C_2^d(x, y, z)$, где

$$C_j^d(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} a_i, & \text{если } a_i \text{ встречается в наборе } (a_1, a_2, a_3) \text{ не менее двух раз,} \\ j & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Непосредственно проверяем, что функции C_0^d, C_1^d, C_2^d сохраняют отношение χ_3. Следовательно, $P_3^3AD_2 \subseteq \operatorname{Pol}[\{\chi_3\}]_S$. С другой стороны, класс $P_3^3AD_2$ непосредственно содержится только в $P_3^2AD_2$, а отношение χ_3 не сохраняется функцией $\omega(x, y, z)$ из $P_3^2AD_2$, где $\omega(a_1, a_2, a_3) = a_1$, если $|\{a_1, a_2, a_3\}| \leqslant 2$, и $\omega(0, 1, 2) = \omega(2, 1, 0) = 0$, $\omega(1, 2, 0) = \omega(0, 2, 1) = 1$, $\omega(2, 0, 1) = \omega(1, 0, 2) = 2$ (достаточно рассмотреть наборы $(2, 2)$, $(0, 1)$ и $(0, 0)$). Поэтому $P_3^3AD_2 = \operatorname{Pol}[\{\chi_3\}]_S$ и $\operatorname{Inv} P_3^3AD_2 = [\{\chi_3\}]_S$.

Покажем, что $\operatorname{Inv} P_3^3AD_2$ совпадает с множеством R всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \quad x \in \{a, b\}, \quad (x \in \{a, b\}) \& (y \in \{a, c\}) \& \sigma(x, y), \quad (x = a) \vee (y = b), \qquad (20)$$

где $a, b, c \in E_3$, σ — произвольное отношение из Π_3. В самом деле, $\operatorname{Inv} P_3^2AD_2 \subset \operatorname{Inv} P_3^3AD_2$, а потому классу $\operatorname{Inv} P_3^3AD_2$ принадлежат отношения (20) первых трех типов. Далее, отношение

$$\rho(x, y) \equiv (x \in \{0, 2\}) \& ((x = 2) \vee (y = 0))$$

двойственно отношению $\chi_3(x, y)$. Кроме того,

$$(\exists z)\,(\chi_3(z, x) \& \rho(z, y)) \equiv ((x = 2) \vee (y = 0));$$

последнему отношению двойственны все отношения вида $(x = a) \vee (y = b)$, где $a \neq b$. Если же $a = b$, имеем

$$((x = a) \vee (y = a)) \equiv (\exists z)\,(((x = a) \vee (z = c))\,\&\,((z = d) \vee (y = a))),$$

где $\{a, b, c\} = E_3$. Таким образом, $R \subseteq \operatorname{Inv} P_3^3 A D_2$.

Обратное включение доказывается так же, как соответствующее включение для класса $P_3^2 D_2$.

Классы $P_3^3 A_3 D_2$ и $P_3^3 S_3 D_2$. Имеем $P_3^3 A_3 D_2 = P_3^3 A D_2 \cap PA_3$. Из равенств $\operatorname{Inv} P_3^3 A D_2 = [\{\chi_3\}]_S$, $\operatorname{Inv} PA_3 = [\{\eta\}]_S$ следует, что $\operatorname{Inv} P_3^3 A_3 D_2 = [\{\eta, \chi_3\}]_S$. Объединяя соответствующие описания множеств $\operatorname{Inv} P_3^3 A D_2$ и $\operatorname{Inv} PA_3$, заключаем, что $\operatorname{Inv} P_3^3 A_3 D_2$ совпадает с множеством всех отношений, представимых в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \qquad x \in \{a, b\}, \qquad x + a = y, \qquad (x = a) \vee (y = b),$$
$$(x \in \{a, b\})\,\&\,(y \in \{a, c\})\,\&\,\sigma(x, y),$$

где $a, b, c \in E_3$, а σ — произвольное отношение из Π_3.

Класс $P_3^3 S_3 D_2$ рассматривается аналогичным образом: $P_3^3 S_3 D_2 = P_3^3 A D_2 \cap PS_3$, $\operatorname{Inv} P_3^3 S_3 D_2 = [\{\mu_3, \chi_3\}]_S$, $\operatorname{Inv} P_3^3 S_3 D_2$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$x = a, \quad x \in \{a, b\}, \quad ax + b = y, \quad (x = a) \vee (y = b), \tag{21}$$

где $a, b \in E_3$.

З а м е ч а н и е. В отличие от классов $P_3^3 A D_2$ и $P_3^3 A_3 D_2$, для класса $P_3^3 S_3 D_2$ мы не включили в список (21) отношение

$$(x \in \{a, b\})\,\&\,(y \in \{a, c\})\,\&\,\sigma(x, y).$$

Дело в том, что если ему принадлежит только один набор, оно представимо в виде конъюнкции двух одноместных отношений. Если этому отношению принадлежат ровно два набора, то оно либо представимо в виде конъюнкции двух одноместных отношений, либо имеет вид $(x \in \{a, b\})\,\&\,(cx + d = y)$. В случае трех наборов приходим к отношению $(x \in \{a, b\})\,\&\,(y \in \{a, c\})\,\&\,\&((x = d) \vee (y = e))$, где $d \in \{a, b\}$, $e \in \{a, c\}$. Наконец, для четырех наборов вновь имеем конъюнкцию двух одноместных отношений.

Класс L. Согласно [25], класс L определяется отношением $x + y + z = 0 \pmod 3$, т. е. $L = \operatorname{Pol}\{x + y + z = 0\}$, и, следовательно, $\operatorname{Inv} L = [\{x + y + z = 0\}]_S$ в силу S-замкнутости класса L. Покажем, что $\operatorname{Inv} L$ совпадает с множеством R_1 всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0, \tag{22}$$

где $n \geqslant 1$ и $a_1 + \ldots + a_n = 0 \pmod 3$. Чтобы установить включение $R_1 \subseteq \operatorname{Inv} L$, заметим, что при $n = 1$ отношение (22) полно, а при $n = 2$ либо полно (если $a_1 = a_2 = 0$), либо является элементарной диагональю $x_1 = x_2$. Предположим, что уже установлена принадлежность множеству $\operatorname{Inv} L$ всех отношений (22), где $n \geqslant 2$, $a_1 + \ldots + a_n = 0$ и $a_1, \ldots, a_n$ отличны от нуля. Рассмотрим аналогичное отношение $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1} x_{n+1} = 0$. Так как $n \geqslant 2$ и коэффициенты $a_1, \ldots, a_{n+1}$ отличны от нуля, то среди чисел $a_1, \ldots, a_{n+1}$ найдутся два равных. Пусть, например, $a_n = a_{n+1}$. По предположению отношение

$a_1x_1+\ldots+a_{n-1}x_{n-1}+2a_nx_n=0$ принадлежит множеству $\operatorname{Inv} L$. Отношение $2a_ny=a_nx_n+a_nx_{n+1}$ есть эквивалентная форма отношения $y+x_n+x_{n+1}=0$, и

$$(a_1x_1+\ldots+a_{n+1}x_{n+1}=0)\equiv$$
$$\equiv(\exists y)\,((y+x_n+x_{n+1}=0)\,\&\,(a_1x_1+\ldots+a_{n-1}x_{n-1}+2a_ny=0)),$$

поэтому и отношение $a_1x_1+\ldots+a_{n+1}x_{n+1}=0$ входит в множество $\operatorname{Inv} L$.

Для доказательства обратного включения достаточно установить, что множество R_1 замкнуто относительно операции проектирования. Предположим, что отношение ρ из R_1 представимо в виде

$$\underset{1\leqslant i\leqslant m}{\&}(a_1^ix_1^i+\ldots+a_{n_i}^ix_{n_i}^i+b_iy=0),$$

где для любого i, $1\leqslant i\leqslant m$, выполняется равенство $a_1^i+\ldots+a_{n_i}^i+b_i=0$. Отношение (22) эквивалентно отношению $2a_1x_1+\ldots+2a_nx_n=0$, поэтому, исключая тривиальные случаи $b_i=0$, будем считать, что $b_1=\ldots=b_m$. Тогда при $m=1$ отношение $(\exists y)\,\rho$ полно, а при $m\geqslant 2$ имеем

$$(\exists y)\,\rho\equiv\underset{1\leqslant i<j\leqslant m}{\&}(a_1^ix_1^i+\ldots+a_{n_i}^ix_{n_i}^i+2a_1^jx_1^j+\ldots+2a_{n_j}^jx_{n_j}^j=0),$$

где, очевидно, $a_1^i+\ldots+a_{n_i}^i+2a_1^j+\ldots+2a_{n_j}^j=0$.

Дадим еще одно описание множества $\operatorname{Inv} L$. Именно, покажем, что $\operatorname{Inv} L$ совпадает с множеством R_2 всех отношений, которые либо пусты, либо содержат единичный вектор $(1,\ldots,1)$ и определяют линейные пространства над полем $GF(3)$ с операцией покоординатного сложения векторов и покоординатного умножения на элементы поля $GF(3)$. В самом деле, согласно предыдущему описанию множества $\operatorname{Inv} L$ всякое непустое отношение ρ из $\operatorname{Inv} L$ представимо в виде конъюнкции отношений типа (22), где $n\geqslant 1$ и $a_1+\ldots+a_n=0$. Иначе говоря, множество истинности отношения ρ совпадает с множеством решений однородной системы линейных уравнений, в каждом из которых сумма коэффициентов равна 0 по модулю 3. Отсюда сразу следует, что отношение ρ определяет (своим множеством истинности) линейное пространство, которому принадлежит единичный вектор.

Обратно, известно [5], что для всякого линейного пространства V существует такая система Z однородных уравнений, совокупность решений которой совпадает с V. Если пространству V принадлежит единичный вектор, то в каждом уравнении системы Z сумма всех коэффициентов необходимо равна нулю. Тем самым приходим к конъюнкции отношений вида (22), где $a_1+\ldots+a_n=0$.

Классы LA_3 и LI_3. Имеем $LA_3=L\cap PA_3$. Из доказанных равенств $\operatorname{Inv} L=[\{x+y+z=0\}]_S$ и $\operatorname{Inv} PA_3=[\{\eta\}]_S$ следует, что $\operatorname{Inv} LA_3=[\{\eta,\,x+y+z=0\}]_S$. Так как $\eta(x,y)\equiv(x+1=y)$, по аналогии с классом $\operatorname{Inv} L$ устанавливаем два представления отношений из класса $\operatorname{Inv} LA_3$. Во-первых, $\operatorname{Inv} LA_3$ совпадает с множеством всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $a_1x_1+\ldots+a_nx_n+a_{n+1}=0$, где $n\geqslant 1$ и $a_1+\ldots+a_n=0$. Во-вторых, $\operatorname{Inv} LA_3$ совпадает с множеством всех отношений, которые либо пусты, либо определяют линейные многообразия над полем $GF(3)$, удовлетворяющие дополнительному условию: если многообразию принадлежит вектор $(b_1,\ldots,b_n)$, то ему принадлежит также вектор $(b_1+1,\ldots,b_n+1)$.

Имеем $LI_3=L\cap I_3$. По аналогии с классами $\operatorname{Inv} L$ и $\operatorname{Inv} LA_3$ получаем:

1) $\operatorname{Inv} LI_3=[\{E_1(x),\,x+y+z=0\}]_S$;

2) $\operatorname{Inv} LI_3$ совпадает с множеством всех отношений, представимых в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений типа $a_1x_1+\ldots+a_nx_n+a_{n+1}=0$, где $a_1,\ldots,a_{n+1}$ — произвольные элементы из E_3;

3) $\operatorname{Inv} LI_3$ совпадает с множеством всех отношений, которые либо пусты, либо определяют произвольные линейные многообразия над $GF(3)$.

Класс B_3. Назовем наборы $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ *однотипными*, если для любых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ верна эквивалентность $(a_i = a_j) \equiv (b_i = b_j)$.

Согласно [25], класс B_3 определяется отношением $\tau(x, y, z)$, т. е. $B_3 = \operatorname{Pol} \tau$. Ввиду S-замкнутости класса B_3 имеем $\operatorname{Inv} B_3 = [\{\tau\}]_S$. Покажем, что $\operatorname{Inv} B_3$ совпадает с множеством R всех отношений ρ, которые обладают следующим свойством: если отношению ρ принадлежат наборы $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$, то ему принадлежит всякий набор, однотипный с $\widetilde{a}$, а также набор $\widetilde{a} \cdot \widetilde{b}$ (умножение проводится покомпонентно по модулю 2). Легко проверяется, что $\tau \in R$ и что множество R замкнуто относительно операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных, а также относительно операции взятия двойственных отношений. Следовательно, $\operatorname{Inv} B_3 \subseteq R$. С другой стороны, из [3] следует, что базис (по суперпозиции) класса B_3 образуют функции $x+1$, $2x$, $j_1(x) \cdot j_1(y)$, где $j_1(1) = 1$ и $j_1(0) = j_1(2) = 0$. Докажем, что функции $x+1$, $2x$, $j_1(x) \cdot j_1(y)$ сохраняют любое отношение из R. Для функций $x+1$, $2x$ это вытекает из условия в определении множества R, относящегося к однотипным наборам. Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_n) \in R$, а $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ — произвольные наборы, принадлежащие отношению ρ. Тогда набор $(j_1(a_1) \cdot j_1(b_1), \ldots, j_1(a_n) \cdot j_1(b_n))$ совпадает с набором $(a_1 \cdot b_1, \ldots, a_n \cdot b_n)$, где умножение проводится по модулю 2. Этот набор по определению принадлежит отношению ρ. Итак, каждая из функций класса B_3 сохраняет любое отношение из R, т. е. $B_3 \subseteq \operatorname{Pol} R$ и $R \subseteq \operatorname{Inv} B_3$.

Класс QL. Докажем, что $QL = \operatorname{Pol} \delta$. Нетрудно видеть (см., например, [7]), что базис класса QL образуют функции $x+1$, $2x$, $j_1(x) \oplus j_1(y)$. Проверяем, что эти функции сохраняют отношение δ. Следовательно, $QL \subseteq \operatorname{Pol} \delta$. С другой стороны, отношение δ совпадает с любым своим двойственным отношением. Поэтому класс $\operatorname{Pol} \delta$ является S-замкнутым. Класс QL непосредственно содержится только в одном S-замкнутом классе B_3 и функция $j_1(x) \cdot j_1(y)$ из класса B_3 не сохраняет отношения δ (достаточно рассмотреть наборы $(0, 0, 1, 1)$ и $(0, 1, 0, 1)$), поэтому $B_3 \not\subseteq \operatorname{Pol} \delta$ и, значит, $QL = \operatorname{Pol} \delta$, $\operatorname{Inv} QL = [\{\delta\}]_S$.

Покажем далее, что $\operatorname{Inv} QL$ совпадает с множеством R всех отношений ρ со следующим свойством: если отношению ρ принадлежат наборы $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$, то ему принадлежит любой набор, однотипный с $\widetilde{a}$, а также набор $\widetilde{a} \oplus \widetilde{b}$ (сложение покомпонентное по модулю 2). Легко видеть, что множеству R принадлежит отношение δ и что R замкнуто относительно операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных, а также относительно перехода к двойственным отношениям. Поэтому $\operatorname{Inv} QL \subseteq R$. С другой стороны, функции $x+1$, $2x$, $j_1(x) \oplus j_1(y)$ сохраняют любое отношение из R. Поэтому $QL \subseteq \operatorname{Pol} R$ и, значит, $R \subseteq \operatorname{Inv} QL$.

Классы $P_3^{(1)}$, $L^{(1)}$, S_3, A_3. Покажем, что $P_3^{(1)} = \operatorname{Pol}\{x = y \vee x = z\}$. В самом деле, функции из $P_3^{(1)}$ сохраняют отношение $(x = y) \vee (x = z)$, а потому $P_3^{(1)} \subseteq \operatorname{Pol}\{(x = y) \vee (x = z)\}$. Вместе с тем отношение $(x = y) \vee (x = z)$ совпадает с любым своим двойственным отношением и, значит, класс $\operatorname{Pol}\{(x = y) \vee (x = z)\}$ является S-замкнутым. Класс $P_3^{(1)}$ непосредственно содержится только в одном S-замкнутом классе QL и функция $j_1(x) \oplus j_1(y)$ из класса QL не сохраняет отношение $(x = y) \vee (x = z)$ (достаточно рассмотреть наборы $(0, 0, 1)$ и $(0, 1, 0)$), поэтому $QL \not\subseteq \operatorname{Pol}\{(x = y) \vee (x = z)\}$ и, следовательно, $P_3^{(1)} = \operatorname{Pol}\{(x=y) \vee (x=z)\}$, $\operatorname{Inv} P_3^{(1)} = [\{(x=y) \vee (x=z)\}]_S$.

Теми же средствами, что и для класса $\operatorname{Inv} QL$, можно показать, что $\operatorname{Inv} P_3^{(1)}$ совпадает с множеством всех отношений, представимых в виде дизъюнкции произвольных диагоналей.

Далее, $L^{(1)} = L \cap B_3 = L \cap P_3^{(1)}$. В силу полученных ранее результатов отсюда следует, что $\operatorname{Inv} L^{(1)} = [\{x+y+z=0,\ \tau(x,y,z)\}]_S$ или $\operatorname{Inv} L^{(1)} = [\{x+y+z=0,\ (x=y)\vee(x=z)\}]_S$. Как и в двух предыдущих случаях, показываем, что $\operatorname{Inv} L^{(1)}$ совпадает с множеством всех отношений, которые содержат нулевой набор и вместе с каждым набором содержат также все однотипные с ним наборы.

Равенство $S_3 = \operatorname{Pol}\{x \neq y\}$ вытекает из следующих четырех фактов: все функции из S_3 сохраняют отношение $x \neq y$; это отношение совпадает с любым своим двойственным отношением; класс S_3 непосредственно содержится только в одном S-замкнутом классе $L^{(1)}$; функция-константа 0 из класса $L^{(1)}$ не сохраняет отношение $x \neq y$. Аналогично предыдущим классам устанавливаем, что $\operatorname{Inv} S_3$ совпадает с множеством всех отношений, содержащих вместе с любым набором все однотипные с ним.

Наконец, $A_3 = PA_3 \cap B_3$. Поэтому из ранее доказанного вытекает, что $\operatorname{Inv} A_3 = [\{\eta, \tau\}]_S$. Как и в предыдущих случаях, получаем, что $\operatorname{Inv} A_3$ совпадает с множеством всех отношений, которые наряду с любым набором $(a_1, \ldots, a_n)$ содержат все наборы вида $(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$, где $\pi \in \mathbf{A}_3$.

Классы B_2A_3 и B_2O_1. Покажем, что $B_2A_3 = \operatorname{Pol}[\{\gamma\}]_S$. Нетрудно убедиться в том (см., например, [7]), что базис класса B_2A_3 образуют функции $x+1$, $j_1(x)\cdot j_1(y)$. Они сохраняют отношение γ, поэтому $B_2A_3 \subseteq \operatorname{Pol}\gamma$. В силу S-замкнутости класса B_2A_3 имеем $B_2A_3 \subseteq \operatorname{Pol}[\{\gamma\}]_S$. Класс B_2A_3 непосредственно содержится только в одном S-замкнутом классе B_3, а функция $2x$ из класса B_3 не сохраняет отношение γ (достаточно рассмотреть набор $(0,1,2)$). Поэтому $B_3 \not\subseteq \operatorname{Pol}[\{\gamma\}]_S$ и $B_2A_3 = \operatorname{Pol}[\{\gamma\}]_S$, $\operatorname{Inv} B_2A_3 = [\{\gamma\}]_S$.

Аргументы, приведенные при рассмотрении класса B_3, позволяют также установить, что $\operatorname{Inv} B_2A_3$ совпадает с множеством всех отношений ρ, удовлетворяющих следующему условию: если отношению ρ принадлежат наборы $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$, то ему принадлежат также наборы $(a_1+1, \ldots, a_n+1)$ и $(a_1\cdot b_1, \ldots, a_n\cdot b_n)$, где $+$ обозначает сложение по модулю 3, а $\cdot$ есть умножение по модулю 2.

Далее, докажем, что $B_2O_1 = \operatorname{Pol}[\{\varepsilon\}]_S$. Базис класса B_2O_1 образуют функции x, $j_1(x)+1$, $j_0(x)+2$, $j_1(x)\cdot j_1(y)$, где $j_0(0)=1$ и $j_0(1)=j_0(2)=0$, см. [7]. Указанные функции сохраняют отношение ε, класс B_2O_1 непосредственно содержится только в одном S-замкнутом классе B_2A_3 и функция $x+1$ из класса B_2A_3 не сохраняет отношение ε. Из этого следует, что $B_2O_1 = \operatorname{Pol}[\{\varepsilon\}]_S$ и $\operatorname{Inv} B_2O_1 = [\{\varepsilon\}]_S$. Так же, как для классов B_3 и B_2A_3, устанавливаем, что $\operatorname{Inv} B_2O_1$ совпадает с множеством всех отношений ρ, удовлетворяющих следующим условиям: если набор $(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит отношению ρ, то отношению ρ принадлежит любой набор вида $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$, где f — произвольная функция, принимающая не более двух значений; если отношению ρ принадлежат наборы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, то ему принадлежит также набор $\tilde{a}\cdot\tilde{b}$ (умножение покомпонентное по модулю 2).

Классы QLA_3, $QL^{(1)}A_3$, CA_3, QLO_1, $QL^{(1)}O_1$, CO_1, O_1. Данные классы представляют собой пересечения классов QL, $P_3^{(1)}$, $L^{(1)}$ с классами B_2A_3 и B_2O_1. Все они рассматриваются по одной и той же изложенной выше схеме, поэтому приведем лишь формулировки результатов.

$QLA_3 = QL \cap B_2A_3$; $\operatorname{Inv} QLA_3 = [\{\delta, \gamma\}]_S$; базис класса QLA_3 образуют функции $x+1$, $j_1(x)\oplus j_1(y)$; $\operatorname{Inv} QLA_3$ совпадает с множеством всех отношений ρ, удовлетворяющих следующему условию: если отношению ρ принадлежат наборы $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$, то ему принадлежат также наборы $(a_1+1, \ldots, a_n+1)$ и $(a_1\oplus b_1, \ldots, a_n\oplus b_n)$.

$QL^{(1)}A_3 = P_3^{(1)} \cap B_2A_3$; $\operatorname{Inv} QL^{(1)}A_3 = [\{(x=y)\vee(x=z),\ \gamma(x,y,z)\}]_S$; базис класса $QL^{(1)}A_3$ образуют функции $x+1$, $j_1(x)$; $\operatorname{Inv} QL^{(1)}A_3$ совпадает с множеством всех отношений ρ, удовлетворяющих следующему условию:

если отношению ρ принадлежит набор $(a_1, \ldots, a_n)$, то ему принадлежат также наборы $(a_1+1, \ldots, a_n+1)$ и $(j_1(a_1), \ldots, j_1(a_n))$.

$CA_3 = L \cap B_2A_3$; $\mathrm{Inv}\, CA_3 = [\{x+y+z=0,\ \gamma\}]_S$; базис класса CA_3 образуют функции 0, $x+1$; $\mathrm{Inv}\, CA_3$ совпадает с множеством всех отношений, которые содержат набор $(0, \ldots, 0)$ и вместе с каждым набором $(a_1, \ldots, a_n)$ содержат также набор $(a_1+1, \ldots, a_n+1)$.

$QLO_1 = QL \cap B_2O_1$; $\mathrm{Inv}\, QLO_1 = [\{\delta, \varepsilon\}]_S$; базис класса QLO_1 образуют функции x, $j_1(x)+1$, $j_1(x)+2$, $j_0(x) \oplus j_1(y)$; $\mathrm{Inv}\, QLO_1$ совпадает с множеством всех отношений ρ, которые удовлетворяют следующему свойству: если отношению ρ принадлежат наборы $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$, то ему принадлежат все наборы вида $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$, где f — произвольная функция, принимающая не более двух значений, а также набор $(a_1 \oplus b_1, \ldots, a_n \oplus b_n)$.

$QL^{(1)}O_1 = P_3^{(1)} \cap B_2O_1$; $\mathrm{Inv}\, QL^{(1)}O_1 = [\{(x=y) \vee (x=z),\ \varepsilon\}]_S$; базис класса $QL^{(1)}O_1$ образуют функции x, $j_0(x)$, $j_2(x)$, $j_1(x)+1$, $j_1(x)+2$, где $j_2(2)=1$ и $j_2(a)=0$ при $a \neq 2$; $\mathrm{Inv}\, QL^{(1)}O_1$ совпадает с множеством всех отношений ρ, которые обладают следующим свойством: если отношению ρ принадлежит набор $(a_1, \ldots, a_n)$, то ему принадлежит также любой набор вида $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$, где $f \in B_2$.

$CO_1 = L \cap B_2O_1$; $\mathrm{Inv}\, CO_1 = [\{x+y+z=0,\ \varepsilon\}]_S$; базис класса CO_1 образуют функции 0, 1, 2, x; $\mathrm{Inv}\, CO_1$ совпадает с множеством всех отношений, которым принадлежат все наборы $(a, \ldots, a)$, где $a \in E_3$.

Наконец, из $O_1 = I_3 \cap B_3$ получаем

$$\mathrm{Inv}\, O_1 = \Pi_3 = [\{E_1(x), \tau\}]_S.$$

Данное представление не является единственным, поскольку, например, $O_1 = K_1 \cap K_2$, где $K_1 \subseteq I_3$, $K_2 \subseteq B_3$, $K_1 \neq O_1$, $K_2 \neq O_1$.

Из доказанного вытекает следующий результат.

Теорема. *Множество инвариантов любого S-замкнутого класса функций трехзначной логики, отличного от P_3, определяется S-замыканием одного, двух или трех отношений* 1) — 14). *Эти отношения представлены в таблице.*

Классы	Отношения	Классы	Отношения	Классы	Отношения
I_3	$E_1(x)$	PA_3C_4	$E_2(x)$, $\eta(x,y)$	LA_3	$\eta(x,y)$, $x+y+z=0$
PA_3	$\eta(x,y)$	PA_3M_4	$\eta(x,y)$, $\chi_2(x,y)$	LI_3	$E_1(x)$, $x+y+z=0$
IA_3	$E_1(x)$, $\eta(x,y)$	PA_3D_1	$\eta(x,y)$, $\nu(x,y)$	B_3	$\tau(x,y,z)$
PS_3	$\mu_3(x,y)$	PA_3D_2	$\eta(x,y)$,	QL	$\delta(x,y,z,w)$
$P_3^2C_4$	$E_2(x)$		$\nu(x,y)$, $\chi_2(x,y)$	$P_3^{(1)}$	$(x=y) \vee (x=z)$
$P_3^2M_4$	$\chi_2(x,y)$	PA_3L_4	$\eta(x,y)$, $\lambda(x,y,z)$	$L^{(1)}$	$x+y+z=0$, $(x=y) \vee (x=z)$
$P_3^2D_1$	$\mu_2(x,y)$	PA_3O_1	$\eta(x,y)$, $\chi_2(x,y)$,	S_3	$x \neq y$
$P_3^2D_2$	$\mu_2(x,y)$, $\chi_2(x,y)$		$\lambda(x,y,z)$	A_3	$\eta(x,y)$, $\tau(x,y,z)$
$P_3^2L_4$	$\lambda(x,y,z)$	PS_3D_1	$E_2(x)$, $\mu_3(x,y)$	B_2A_3	$\gamma(x,y,z)$
$P_3^2O_1$	$\lambda(x,y,z)$, $\chi_2(x,y)$	PS_3D_2	$\mu_3(x,y)$, $\chi_2(x,y)$	B_2O_1	$\varepsilon(x,y,z)$
$P_3^2AC_4$	$\theta(x,y)$	PS_3L_4	$\lambda(x,y,z)$, $\mu_3(x,y)$	QLA_3	$\delta(x,y,z,w)$, $\gamma(x,y,z)$
$P_3^2AM_4$	$\theta(x,y)$, $\chi_2(x,y)$	PS_3O_1	$\lambda(x,y,z)$,	$QL^{(1)}A_3$	$(x=y) \vee (x=z)$, $\gamma(x,y,z)$
$P_3^2AD_1$	$\nu(x,y)$		$\mu_3(x,y)$, $\chi_2(x,y)$	CA_3	$x+y+z=0$, $\gamma(x,y,z)$
$P_3^2AD_2$	$\nu(x,y)$, $\chi_2(x,y)$	$P_3^3AD_2$	$\chi_3(x,y)$	QLO_1	$\delta(x,y,z,w)$, $\varepsilon(x,y,z)$
$P_3^2AL_4$	$\lambda(x,y,z)$, $\nu(x,y)$	$P_3^3A_3D_2$	$\eta(x,y)$, $\chi_3(x,y)$	$QL^{(1)}O_1$	$(x=y) \vee (x=z)$, $\varepsilon(x,y,z)$
$P_3^2AO_1$	$\lambda(x,y,z)$,	$P_3^3S_3D_2$	$\mu_3(x,y)$, $\chi_3(x,y)$	CO_1	$x+y+z=0$, $\varepsilon(x,y,z)$
	$\nu(x,y)$, $\chi_2(x,y)$	L	$x+y+z=0$	O_1	$E_1(x)$, $\tau(x,y,z)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика — 1969. — № 3. — С. 1–10; № 5. — С. 1–9.
2. Бурле Г. А. Классы k-значных логик, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. Вып. 10. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1967. — С. 3–7.
3. Гниденко В. М. Нахождение порядков предполных классов в трехзначной логике // Проблемы кибернетики. Вып. 8. — М.: Физматгиз, 1962. — С. 341–346.
4. Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 4. — С. 397–416.
5. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970.
6. Марченков С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. Вып. 36. — М.: Наука, 1979. — С. 5–22.
7. Марченков С. С. О замкнутых классах квазилинейных функций в P_3 / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. — Препр. № 17. — М., 1986.
8. Марченков С. С. Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискретная математика. — 1996. — Т. 8, вып. 1. — С. 99–128.
9. Марченков С. С. S-классификация идемпотентных алгебр с конечным носителем // Докл. РАН. — 1996. — Т. 348, № 5. — С. 587–589.
10. Марченков С. С. S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. — 1997. — Т. 9, вып. 1. — С. 125–152.
11. Марченков С. С. Инварианты классов Поста // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4, вып. 4.
12. Марченков С. С., Деметрович Я., Ханнак Л. О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. Вып. 34. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. — С. 38–73.
13. Нгуен Ван Хоа. О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, вып. 4. — С. 82–95.
14. Нгуен Ван Хоа. О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. — 1993. — Т. 5, вып. 4. — С. 87–108.
15. Нгуен Ван Хоа. Описание замкнутых классов, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами k-значной логики // Докл. АН Беларуси. — 1994. — Т. 38, № 3. — С. 16–19.
16. Нгуен Ван Хоа. О структуре замкнутых классов k-значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп // Докл. АН Беларуси. — 1994. — Т. 38, № 6. — С. 17–20.
17. Нгуен Ван Хоа. О замкнутых классах k-значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп // Дискретная математика. — 1996. — Т. 8, вып. 1. — С. 129–156.
18. Тайманов В. А. О функциональных системах k-значной логики с операциями замыкания программного типа // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 268, № 6. — С. 1307–1310.
19. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Тр. МИАН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.
20. Яблонский С. В. Введение в теорию функций k-значной логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. — М.: Наука, 1974. — С. 9–66.
21. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
22. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
23. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // American Journal of Mathematics. — 1921. — V. 43. — P. 163–185.
24. Post E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annales of Math. Studies. V. 5. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.
25. Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Rada Math. Přir. Věd. Praha. — 1970. — № 80 (4). — S. 3–93.

Поступило в редакцию 27 V 1997