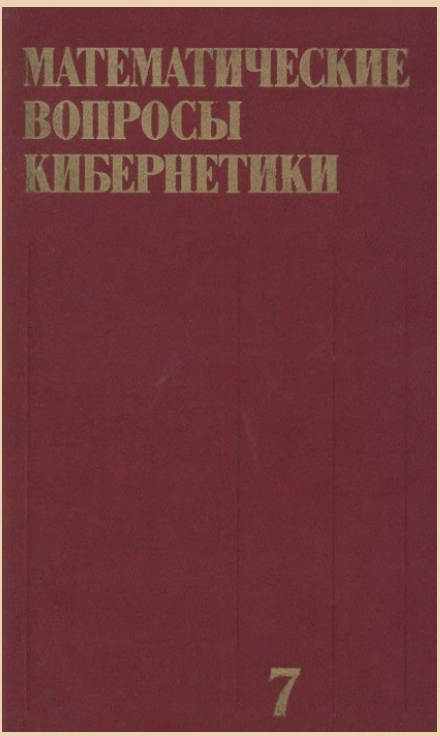
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 7



С. В. Архангельский,
Н. П. Редькин

Информационные свойства аналого-цифровых преобразований сигналов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Архангельский С. В., Редькин Н. П. Информационные свойства аналого-цифровых преобразований сигналов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. — М.: Наука, 1998. — С. 9–54. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1998-9

ИНФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА АНАЛОГО-ЦИФРОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СИГНАЛОВ

С. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Н. П. РЕДЬКИН

(САМАРА) (МОСКВА)

Весьма широкое распространение в управляющих системах имеют аналоговые сигналы, составляющие некоторый класс непрерывных функций с ограниченным спектром, у которых в качестве аргумента выступает время, а информация сосредоточена на конечном (хотя и сколь угодно большом) интервале времени. Подчеркнем, что здесь говорится о конечной «информативной» длительности, а не о конечной длительности самого сигнала, поскольку последнее противоречило бы свойству ограниченности спектра. Физическими примерами таких сигналов служат акустические сигналы [4, 25, 26], в частности, речевые [14, 27, 31], сигналы вибрации [1, 5–7, 22], видеосигналы [21], радиосигналы [20, 29], сейсмограммы и т. п.

Вследствие интенсивного развития и применения цифровых систем обработки информации (ЭВМ, микропроцессоров, цифровых БИС и т. д.) аналоговые сигналы с использованием аналого-цифровых преобразователей представляются в цифровых формах, которые имеют ряд очевидных преимуществ: высокую помехоустойчивость при передаче и хранении, высокую точность воспроизведения и отсутствие искажений при копировании, практически неограниченные возможности при функциональных преобразованиях цифровых сигналов с помощью ЭВМ. Однако эти преимущества могут быть реализованы только при надлежащем согласовании аналоговой формы сигналов на внешних полюсах системы цифровой обработки сигналов с цифровыми средствами обработки их в этой системе; такое согласование можно обеспечить только при знании количественных информационных показателей сигналов [2].

Информационная характеристика является важнейшей для цифрового сигнала, так как она служит объективным показателем качества обработки и экономичности кодирования таких сигналов, вскрывает степень влияния параметров аналого-цифровых преобразователей на количество информации в них, позволяет решать задачу восстановления искаженных сигналов и т. д.

В. А. Котельников установил [19], что сигналы с ограниченным спектром однозначно определяются дискретными последовательностями их отсчетов (значений) — дискретными сигналами. Этот факт имеет фундаментальное значение в теории сигналов. Однако цифровой сигнал лишь приближенно соответствует дискретному сигналу, поскольку отсчетами дискретного сигнала могут быть любые действительные числа, тогда как параметры цифрового сигнала — целые числа. А. Н. Колмогоров [15, 17] показал принципиальную возможность оценки количества информации в функциях из классов континуальной мощности путем использования введенных им понятий ε-энтропии и ε-сети в функциональных пространствах. Однако класс цифровых сигналов разновидностью ε-сети не является.

© С. В. Архангельский, Н. П. Редькин, 1998

Представляется естественным в качестве меры количества информации, содержащейся в цифровом сигнале заданного класса, брать энтропию (двоичный логарифм мощности) этого класса. Для нахождения зависимости энтропии от параметров классов требуется уточнить понятие аналогового сигнала. Это уточнение обосновано практическими соображениями, с учетом которых аналоговый сигнал определяется как конечномерный вектор. Множество всех аналоговых сигналов с «нормированным» спектром и с «информативной» длительностью T оказывается при этом эквивалентным T-мерному евклидову пространству $\mathbb{E}^T$. Подкласс аналоговых сигналов задается некоторой областью $F \subseteq \mathbb{E}^T$. Аналого-цифровое преобразование сигналов рассматривается как процесс проецирования их на решетку $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^2$. Энтропия класса цифровых сигналов зависит от вида и свойств множеств $\mathcal{P}$ и F. Множество $\mathcal{P}$ является общим для всех классов цифровых сигналов, а $F \subseteq \mathbb{E}^T$ отражает специфику подкласса. Это означает, что энтропия зависит от двух групп величин: параметров аналого-цифрового преобразователя (т. е. множества $\mathcal{P}$) и характеристик области F.

Основным результатом при выявлении информационных свойств цифровых сигналов является оценка так называемой удельной энтропии $h(\mathcal{P})$, отражающей влияние параметров решетки на информационные свойства цифровых сигналов. Доказано, что на количество информации (удельную энтропию) влияют три параметра решетки: длительность T, плотность β квантования сигнала по амплитуде, равная количеству уровней квантования значения сигнала на отрезке длины 1, и плотность θ дискретизации сигнала по аргументу, представляющая собой нормированную частоту дискретизации сигнала. При этом параметры β и θ имеют асимптотически одинаковое влияние на энтропию. Последнее опровергает бытовавшее мнение, что не имеет смысла делать частоту дискретизации больше минимально допустимой (в соответствии с теоремой В. А. Котельникова). Установлена справедливость следующего утверждения.

Если область F есть невырожденное тело в пространстве $\mathbb{E}^T$, имеющее объем $V(F)$ (такая область называется существенно T-мерной), то энтропия $H(\mathcal{P}, F)$ представляет собой сумму удельной энтропии и двоичного логарифма объема $V(F)$. Отсюда выявляется роль удельной энтропии как некоторой универсальной составляющей в значениях энтропии различных классов цифровых сигналов и следует, что числовой характеристикой, отражающей специфику конкретного класса в его энтропии, является объем. Данный результат позволяет находить энтропию для широкого семейства конкретных классов и сводит ее оценку к подсчету объемов соответствующих областей в $\mathbb{E}^T$.

Далее используются следующие обозначения: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ — множества соответственно действительных, целых и натуральных чисел; $\mathbb{E}^n$ — евклидово n-мерное пространство; если $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ и $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ — векторы из $\mathbb{E}^n$, то $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \xi_i$ — их скалярное произведение; $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})}$ — модуль вектора $\boldsymbol{x}$; $|D|$ — мощность множества D; $A \sim B$ — эквивалентность (равномощность) множеств A и B; если B — некоторое множество, а J — некоторое свойство, то $\{x \in B \colon J\}$ — множество, состоящее из элементов множества B, обладающих свойством J; $\mathbb{E}^{n-1}(\boldsymbol{\xi})$ есть n-мерная гиперплоскость (подпространство пространства $\mathbb{E}^n$), ортогональная вектору $\boldsymbol{\xi}$ из $\mathbb{E}^n$, представляющая собой геометрическое место точек $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}^n$, обладающих свойством $(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{x}) = 0$, где $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор точки $\boldsymbol{x}$ и $|\boldsymbol{\xi}| \neq 0$. Через $\lfloor a \rfloor$ (через $\lceil a \rceil$) обозначаем наибольшее (наименьшее) целое число, не большее (не меньшее) действительного числа a; наконец, $\log a = \log_2 a$.

§ 1. Основные свойства конечномерных аналоговых сигналов

Традиционно аналоговые сигналы определяются как функции, для которых существует преобразование Фурье (теория таких сигналов представлена, например, в [16, 18, 19, 30, 31]). Однако используемые в настоящее время средства обработки сигналов предполагают конечность представлений сигналов во временнóй и частотной областях. Аналоговый сигнал в традиционном понятии его удовлетворяет данному условию лишь приближенно [11, 22], что неприемлемо для проведения информационного анализа. Представленный ниже подход к содержательному определению аналогового сигнала базируется на выявлении и учете обусловленных практическим опытом ограничений, которым такой сигнал должен удовлетворять. Эти ограничения носят «технологический» характер и фактически сводятся к следующим четырем.

1. Основная цель обработки сигналов состоит в извлечении информации из зашумленных сигналов, и это извлечение осуществляется, как правило, с использованием линейных фильтров. Поэтому сигнал удобно представлять в виде суммы синусоид (гармоник), являющихся собственными функциями линейных фильтров (эти функции не меняют своей формы при прохождении через фильтры).

2. Каждый обрабатываемый сигнал может быть определен лишь на ограниченном временнóм интервале, поэтому естественно считать, что вся информация о сигнале содержится на конечном отрезке числовой прямой задания аргумента (времени), длительность которого равна T, где T — произвольное (сколь угодно большое) положительное число.

3. Техническими аппаратами не воспринимаются гармонические составляющие сигнала, частота которых выше некоторого значения. Отсюда следует, что реальный сигнал имеет так называемый ограниченный спектр, т. е. спектральные составляющие сигнала отличны от нуля лишь на конечном отрезке числовой прямой задания частот. В технических системах это свойство нередко обеспечивается специальным устройством — фильтром нижних частот.

4. Значение сигнала в начале и в конце наблюдения равно нулю.

Заметим, что конечная длительность самого сигнала и ограниченность его спектра — несовместимые требования, поэтому в п. 2 говорится не о всем сигнале, а о его конечном отрезке, на котором содержится вся информация о сигнале. Весь же сигнал должен быть бесконечным, т. е. «достраиваться» за пределами наблюдаемого интервала. Эта «достройка» должна быть по возможности удобной и простой. Естественнее всего вести достройку, периодически повторяя (бесконечно) функцию, заданную в наблюдаемом интервале. При этом периодичность может быть простая и так называемая нечетная, когда значения функции на каждом последующем периоде равны значениям в предыдущем, взятым с противоположным знаком. Последнее свойство сигнала $\varphi_0(t)$ записывается так:

$$\varphi_0(t) = (-1)^j \varphi_0(t - jT), \qquad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(Сигнал с простой периодичностью таков, что $\varphi_1(t) = \varphi_1(t - jT)$ при любом целом j.)

На основании п. 4 в качестве модели можно выбрать как сигнал вида $\varphi_0(t)$, так и сигнал вида $\varphi_1(t)$.

Каждая из рассмотренных функций в соответствии с пп. 1, 3 представима в виде тригонометрического ряда (ряда Фурье) с конечным числом членов. Ввиду равносильности моделей, порожденных функциями $\varphi_0(t)$ или $\varphi_1(t)$, выберем из них более удобную для дальнейших преобразований. В этом смысле предпочтительней выглядит $\varphi_0(t)$, поскольку в данном случае число членов ряда Фурье четно и все они однотипны по форме — в отличие от $\varphi_1(t)$, где первый член разложения, не имеющий «симметричной» составляющей, является особым. Отметим при этом, что вопрос выбора формы ($\varphi_0(t)$ или $\varphi_1(t)$) несуществен для конечных результатов исследований и рассматриваемые далее свойства инвариантны относительно этих форм.

На основании вышесказанного в качестве модели аналогового сигнала выбирается функция

$$\varphi(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sum_{k=0}^{T/2-1}\left(a_{2k}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{T}+a_{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi t}{T}\right), \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{T-1}\in\mathbb{R}$, а T — натуральное четное число. Параметр T назовем *длительностью* (или *размерностью*) сигнала $\varphi(t)$. Множество всех (конечномерных) аналоговых сигналов длительности T составляет полный класс (или просто класс) A^T *конечномерных аналоговых сигналов*, т. е.

$$A^T=\Bigg\{\varphi(t)\text{: существуют такие } a_0, a_1, \ldots, a_{T-1}\in\mathbb{R}, \text{ что}$$
$$\varphi(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sum_{k=0}^{T/2-1}\left(a_{2k}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{T}+a_{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi t}{T}\right)\text{ при всех } t\in\mathbb{R}\Bigg\}.$$

Поскольку $\varphi(t-jT)=(-1)^j\varphi(t)$ при $j\in\mathbb{Z}$, функция $\varphi(t)$ полностью определяется своими значениями на любом конечном интервале $[c, c+T)$ длины T (здесь $c\in\mathbb{R}$). Очевидно также, что линейные преобразования функции $\varphi(t)$ не выводят ее за пределы класса A^T.

Возьмем теперь функцию $\delta^p(t)=\dfrac{\sin\pi(p-t)}{T\sin\frac{\pi}{T}(p-t)}$, где $p\in\mathbb{R}$, являющуюся разновидностью ряда Дирихле [18]. Она является конечномерным аналогом известной функции $\dfrac{\sin\pi(p-t)}{\pi(p-t)}$, играющей роль единичной δ-функции (импульса) в классе сигналов с ограниченным спектром и бесконечной длительностью. Функцию $\delta^p(t)$ назовем *сигнальным импульсом*, а ее параметр p — *моментом возникновения импульса.*

Рассмотрим свойства сигнального импульса. При любом действительном t для него выполняется равенство

$$\delta^p(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sum_{k=0}^{T/2-1}\left(\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{(2k+1)\pi p}{T}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{T}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{(2k+1)\pi p}{T}\sin\frac{(2k+1)\pi t}{T}\right). \tag{2}$$

Действительно, обозначим правую часть (2) через $A(p, t)$. Согласно формуле косинуса разности, имеем $A(p, t)=\frac{2}{T}\sum\limits_{k=0}^{T/2-1}\cos\frac{(2k+1)\pi(p-t)}{T}$. Воспользуемся известным соотношением [12, с. 82]

$$\sum_{i=0}^{n-1}\cos(\alpha+i\delta)=\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\delta\right)\sin\frac{n\delta}{2}\Big/\sin\frac{\delta}{2}, \tag{3}$$

согласно которому $A(p, t)=\frac{2}{T}\cos\frac{\pi(p-t)}{2}\sin\frac{\pi(p-t)}{2}\Big/\sin\frac{\pi}{T}(p-t)$. Применяя к последнему выражению формулу синуса двойного аргумента, получим (с учетом определения $\delta^p(t)$) тождество (2).

Сравнивая правые части в (1) и (2), замечаем, что сигнальный импульс $\delta^p(t)$ является аналоговым сигналом, т. е.

$$\delta^p(t)\in A^T. \tag{4}$$

Пусть в $\mathbf{E}^T$ задан естественный базис $\widetilde{e}=(e^0, e^1, \ldots, e^{T-1})$, являющийся набором из T векторов $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 1)$.

Набор чисел $(\varphi(0), \ldots, \varphi(i), \ldots, \varphi(T-1))$ будем называть *оригиналом* (или *вектор-оригиналом*) функции $\varphi(t) \in A^T$ в $\mathbb{E}^T$; вектор-оригинал функции $\varphi(t)$ обозначим через $\boldsymbol{\varphi}$.

Оригинал $\boldsymbol{\delta}^p$ сигнального импульса $\delta^p(t)$ имеет вид $\boldsymbol{\delta}^p = (\delta^p(0), \ldots$ $\ldots, \delta^p(i), \ldots, \delta^p(T-1))$; будем называть его *импульсным вектором* или просто *импульсом*.

Рассмотрим функции

$$\sigma^{2k}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\frac{(2k+1)\pi t}{T}, \qquad \sigma^{2k+1}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\frac{(2k+1)\pi t}{T},$$

обычно называемые *сигнальными гармониками*. Очевидно, что функции $\sigma^{2k}(t)$ и $\sigma^{2k+1}(t)$ принадлежат A^T при $k \in \mathbb{N} \cap [0, T/2-1]$. Оригиналы указанных функций в $\mathbb{E}^T$ обозначим соответственно через $\boldsymbol{\sigma}^{2k}$ и $\boldsymbol{\sigma}^{2k+1}$ и назовем *гармоническими векторами* (или просто *гармониками*). Систему (набор) гармонических векторов $\widetilde{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}^{2k}, \boldsymbol{\sigma}^{2k+1}, \ldots, \boldsymbol{\sigma}^{T-2}, \boldsymbol{\sigma}^{T-1})$ назовем *спектральной системой*. Имеет место

Теорема 1 (о спектральной системе). *Спектральная система $\widetilde{\sigma}$ представляет собой ортонормированный базис пространства $\mathbb{E}^T$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что при любых r, q из $\mathbb{N} \cap [0, T-1]$, $r \neq q$, выполняются соотношения $(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\sigma}^r) = 1$ и $(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\sigma}^q) = 0$.

При $r = 2k$, $k \in \mathbb{N} \cap [0, T/2-1]$ имеем

$$(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\sigma}^r) = (\boldsymbol{\sigma}^{2k} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{2k}) = \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \cos^2 \frac{(2k+1)i\pi}{T} = \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{2(2k+1)i\pi}{T} + \frac{1}{2} \right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T/2-1} \cos \frac{2(2k+1)i\pi}{T} + \frac{1}{T} \sum_{i=T/2}^{T-1} \cos \frac{2(2k+1)i\pi}{T} = 1.$$

При $r = 2k+1$, $k \in \mathbb{N} \cap [0, T/2-1]$ получаем

$$(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\sigma}^r) = (\boldsymbol{\sigma}^{2k+1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{2k+1}) = \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \sin^2 \frac{(2k+1)i\pi}{T} = \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \left(1 - \cos^2 \frac{(2k+1)i\pi}{T} \right) =$$
$$= 2 - \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \cos^2 \frac{(2k+1)i\pi}{T} = 2 - (\boldsymbol{\sigma}^{2k} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{2k}) = 2 - 1 = 1.$$

Пусть теперь $r = 2k$, $q = 2p$, $k \neq p$, $k, p \in \mathbb{N} \cap [0, T/2-1]$. Тогда

$$(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\sigma}^q) = \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \cos\frac{(2k+1)i\pi}{T} \cos\frac{(2p+1)i\pi}{T} = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \left(\cos\frac{2(k+p+1)i\pi}{T} + \cos\frac{2(k-p)i\pi}{T} \right).$$

Далее, используя (3) при $\alpha = 0$, получаем

$$(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\sigma}^q) = \frac{1}{T} \left(\frac{\cos\left(\pi \frac{T-1}{T}(k+p+1)\right) \sin \pi(k+p+1)}{\sin \frac{\pi}{T}(k+p+1)} + \frac{\cos\left(\pi \frac{T-1}{T}(k-p)\right) \sin \pi(k-p)}{\sin \frac{\pi}{T}(k-p)} \right).$$

При $0 \leqslant k \leqslant T/2-1$, $0 \leqslant p \leqslant T/2-1$ имеем $1 \leqslant k+p+1 \leqslant T-1$, $-(T/2-1) \leqslant k-p \leqslant T/2-1$; отсюда следует, что $\sin \frac{\pi}{T}(k+p+1) \neq 0$, а при $k \neq p$ также $\sin \frac{\pi}{T}(k-p) \neq 0$. Вместе с тем $\sin \pi(k+p+1) = 0$, $\sin \pi(k-p) = 0$ при любых $k, p \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\sigma}^p) = 0$.

Аналогично доказывается соотношение $(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\sigma}^q) = 0$ при $r = 2k+1$, $q = 2p+1$, $k \neq p$, и при $r = 2k$, $q = 2p+1$ ($k, p \in \mathbb{N} \cap [0, T/2]$). При этом наряду с (3) используется известное соотношение [12, с. 82]

$$\sum_{i=1}^{n} \sin \alpha i = \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2} \Big/ \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Теорема доказана.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор-оригинал сигнала $\varphi(t)$ из A^T, а набор $(v_0, v_1, \ldots, v_{2k}, v_{2k+1}, \ldots, v_{T-2}, v_{T-1})$ — представление вектора $\boldsymbol{\varphi}$ в спектральной системе $\tilde{\sigma}$. В силу ортонормированности этой системы имеем $v_{2k} = (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{2k})$, $v_{2k+1} = (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{2k+1})$ при $k \in \mathbf{N} \cap [0, T/2]$. Набор $\boldsymbol{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{T-2}, v_{T-1})$ назовем *вектор-изображением* (или просто *изображением*) сигнала $\varphi(t)$ из A^T. Векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{v}$ суть наборы компонент, выражающие один и тот же вектор в разных ортонормированных системах (базисах). Поэтому каждый из векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{v}$ определяет другой однозначно.

Исходный естественный базис $\tilde{e}$ в отличие от спектрального будем называть *основным* базисом. Основной базис $\tilde{e}$, представленный в спектральной системе $\tilde{\sigma}$, обозначим через $\tilde{d} = (\boldsymbol{d}^0, \ldots, \boldsymbol{d}^i, \ldots, \boldsymbol{d}^{T-1})$; здесь вектор $\boldsymbol{d}^i$, $\boldsymbol{d}^i = (d_0^i, \ldots, d_{2k}^i, d_{2k+1}^i, \ldots, d_{T-1}^i)$, принадлежит $\mathbf{E}^T$, а его компоненты выражаются в системе $\tilde{\sigma}$ следующим образом:

$$d_{2k}^i = (\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{\sigma}^{2k}) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{(2k+1)i\pi}{T}, \quad d_{2k+1}^i = (\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{\sigma}^{2k+1}) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{(2k+1)i\pi}{T}. \quad (5)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(t)$ — произвольный сигнал в A^T,*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{T/2-1} \sqrt{\frac{2}{T}} \left(a_{2k} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{T} + a_{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi t}{T} \right).$$

Тогда вектор $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}, \ldots, a_{T-2}, a_{T-1})$ есть изображение сигнала $\varphi(t)$.

Доказательство. Покажем, что набор компонент $(b_0, \ldots, b_i, \ldots, b_{T-1})$, являющийся представлением вектора $\boldsymbol{a}$ в основном базисе, есть вектор-оригинал функции $\varphi(t)$. В самом деле, из (5) получаем

$$b_i = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}^i) = \sum_{k=0}^{T/2-1} (a_{2k} d_{2k}^i + a_{2k+1} d_{2k+1}^i) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{k=0}^{T/2-1} \left(a_{2k} \cos \frac{(2k+1)i\pi}{T} + a_{2k+1} \sin \frac{(2k+1)i\pi}{T} \right).$$

Отсюда и из определения величин $\varphi(i)$, очевидно, следует, что $b_i = \varphi(i)$ при $i = 0, 1, \ldots, T/2$, т. е. $(b_0, \ldots, b_i, \ldots, b_{T-1})$ есть вектор-оригинал функции $\varphi(t)$. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует утверждение, являющееся аналогом теоремы Котельникова для сигнала конечной длительности T. Действительно, любой сигнал $\varphi(t)$ из A^T полностью определяется набором чисел $\boldsymbol{a} = (a_0, \ldots, a_{T-1})$, являющимся изображением сигнала, а изображение взаимно однозначно соответствует вектор-оригиналу, поэтому *любой сигнал $\varphi(t)$ полностью определяется также своим вектор-оригиналом.* Отсюда следует, что $A^T \sim \mathbf{E}^T$, т. е. A^T является конечномерным функциональным пространством размерности T. Следовательно, аналоговые сигналы можно задавать как традиционно в виде функции $\varphi(t)$, $\varphi(t) \in A^T$, так и в виде вектора $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{E}^T$.

Преобразование вектор-оригинала $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi(0), \ldots, \varphi(T-1))$ в вектор-изображение $\boldsymbol{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{2k}, v_{2k+1}, \ldots, v_{T-2}, v_{T-1})$ называется *прямым дискретным преобразованием Фурье.* Оно представляет собой выражение компонент вектора $\boldsymbol{\varphi}$ в спектральном базисе $\tilde{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}^{T-1})$:

$$v_{2k} = (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{2k}) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{i=0}^{T-1} \varphi(i) \cos \frac{(2k+1)i\pi}{T},$$

$$v_{2k+1} = (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{2k+1}) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{i=0}^{T-1} \varphi(i) \sin \frac{(2k+1)i\pi}{T}, \qquad k = 0, 1, \ldots, T/2 - 1.$$

Обратная операция, которая называется *обратным преобразованием Фурье*, заключается в нахождении вектор-оригинала $\boldsymbol{\varphi}$ по заданному изображению $\boldsymbol{v}$. Для этого достаточно представить компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ в основном базисе $\widetilde{d}=(\boldsymbol{d}^0,\ldots,\boldsymbol{d}^i,\ldots,\boldsymbol{d}^{T-1})$, который сам представлен в спектральном базисе. С учетом (5) для $i=0,1,\ldots,T-1$ получаем

$$\varphi(i)=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{d}^i)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sum_{k=0}^{T/2-1}\left(v_{2k}\cos\frac{(2k+1)i\pi}{T}+v_{2k+1}\sin\frac{(2k+1)i\pi}{T}\right).$$

Находить значения функции $\varphi(t)$ для любого $t\in\mathbb{R}$ по известному вектор-оригиналу $\boldsymbol{\varphi}$ в функциональном пространстве A^T позволяет

Теорема 2 (восстановления). *Пусть $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\varphi}\in\mathbb{E}^T$, — вектор-оригинал функции $\varphi(t)$ из A^T, а $\boldsymbol{\delta}^t=(\delta^t(0),\ldots,\delta^t(T-1))$ — импульсный вектор. Тогда для любого действительного t справедливо соотношение $\varphi(t)=(\boldsymbol{\delta}^t\cdot\boldsymbol{\varphi})$.*

Доказательство. Функцию $\varphi(t)$, которая является аналоговым сигналом, можно представить в виде

$$\varphi(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sum_{k=0}^{T/2-1}\left(a_{2k}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{T}+a_{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi t}{T}\right). \tag{6}$$

Упорядоченный набор (т. е. вектор) $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{T-1})$ коэффициентов, фигурирующих в (6), по лемме 1 является изображением сигнала $\varphi(t)$.

Далее, из (2) имеем

$$\delta^t(\tau)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sum_{k=0}^{T/2-1}\left(\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{T}\cos\frac{(2k+1)\pi\tau}{T}+\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{(2k+1)\pi t}{T}\sin\frac{(2k+1)\pi\tau}{T}\right).$$

Согласно лемме 1 изображением этого сигнала $\delta^t(\tau)$ является вектор $\boldsymbol{b}^t=(b_0^t,b_1^t,\ldots,b_{2k}^t,b_{2k+1}^t,\ldots,b_{T-2}^t,b_{T-1}^t)$, в котором

$$b_{2k+1}^t=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{T},\quad b_{2k+1}^t=\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{(2k+1)\pi t}{T},\quad k=0,1,\ldots,\frac{T}{2}-1. \tag{7}$$

Изображения сигналов $\varphi(t)$ и $\delta^t(\tau)$ представляют вектор-оригиналы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\delta}^t$ в одном и том же спектральном базисе (ортонормированном по теореме 1), поэтому $(\boldsymbol{\delta}^t\cdot\boldsymbol{\varphi})=(\boldsymbol{b}^t\cdot\boldsymbol{a})$. Отсюда с учетом (7) получаем

$$(\boldsymbol{\delta}^t\cdot\boldsymbol{\varphi})=\sum_{k=0}^{T/2-1}\left(\left(\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{T}\right)a_{2k}+\left(\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{(2k+1)\pi t}{T}\right)a_{2k+1}\right);$$

из последнего соотношения и (6) следует, что $\varphi(t)=(\boldsymbol{\delta}^t\cdot\boldsymbol{\varphi})$. Теорема доказана.

Следствие. *Для любых $\varphi(t)\in A^T$ и $t\in\mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{T-1}\varphi(i)\frac{\sin\pi(t-i)}{T\sin\frac{\pi}{T}(t-i)}. \tag{8}$$

Обычно считалось [11, 22], что $\varphi(t)=\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}\varphi(i)\dfrac{\sin\pi(t-i)}{\pi(t-i)}$; нетрудно видеть, что это только некоторый предельный случай.

В теореме 2 сформулировано важнейшее свойство, отражающее основную специфику класса конечномерных аналоговых сигналов. Формула (8) — явное выражение значения функции $\varphi(t)$ при произвольном значении аргумента t по вектор-оригиналу $\boldsymbol{\varphi}$, заданному в пространстве $\mathbb{E}^T$.

Учитывая важное значение функции — сигнального импульса, рассмотрим свойство системы вектор-оригиналов, полученной из системы сигнальных импульсов. Пусть в $\mathbf{E}^T$ дана система векторов вида $\widetilde{\delta}^\nu=(\boldsymbol{\delta}^{0+\nu}, \boldsymbol{\delta}^{1+\nu}, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{\delta}^{T-1+\nu})$, где $\boldsymbol{\delta}^{j+\nu}=(\delta^{j+\nu}(0), \delta^{j+\nu}(1), \ldots, \delta^{j+\nu}(T-1))$ и, в свою очередь, $\delta^{j+\nu}(i)=\dfrac{\sin\pi(j+\nu-i)}{T\sin\frac{\pi}{T}(j+\nu-i)}$, где $i, j\in\{0, 1, \ldots, T-1\}$.

Теорема 3 (о системе импульсов). *Система импульсных векторов $\widetilde{\delta}^\nu$ при любом действительном ν представляет собой ортонормированный базис пространства $\mathbf{E}^T$.*

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что $(\boldsymbol{\delta}^{j+\nu}\cdot\boldsymbol{\delta}^{j+\nu})= =1$ и $(\boldsymbol{\delta}^{j+\nu}\cdot\boldsymbol{\delta}^{p+\nu})=0$ при $j\neq p$, $j, p\in\{0, 1, \ldots, T-1\}$, $\nu\in\mathbb{R}$. Представим вектор $\boldsymbol{\delta}^{j+\nu}$ в спектральном базисе $\widetilde{\sigma}$, обозначая результат $\boldsymbol{\gamma}^{j+\nu}=(\gamma^{j+\nu}(0),$ $\gamma^{j+\nu}(1), \ldots, \gamma^{j+\nu}(2k), \gamma^{j+\nu}(2k+1), \ldots, \gamma^{j+\nu}(T-1))$. Из леммы 1 и (2) имеем

$$\gamma^{j+\nu}(2k)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{(2k+1)(j+\nu)\pi}{T},\qquad \gamma^{j+\nu}(2k+1)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{(2k+1)(j+\nu)\pi}{T}. \quad (9)$$

Используя (9), получаем

$$(\boldsymbol{\delta}^{j+\nu}\cdot\boldsymbol{\delta}^{j+\nu})=(\boldsymbol{\gamma}^{j+\nu}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{j+\nu})=\frac{2}{T}\sum_{k=0}^{T/2-1}\left(\cos^2\frac{(2k+1)(j+\nu)\pi}{T}+\sin^2\frac{(2k+1)(j+\nu)\pi}{T}\right)=1.$$

Рассмотрим теперь $(\boldsymbol{\delta}^{j+\nu}\cdot\boldsymbol{\delta}^{p+\nu})$ при $j\neq p$. Имеем

$$(\boldsymbol{\delta}^{j+\nu}\cdot\boldsymbol{\delta}^{p+\nu})=(\boldsymbol{\gamma}^{j+\nu}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{p+\nu})=\frac{2}{T}\sum_{k=0}^{T/2-1}\left(\cos\frac{(2k+1)(j+\nu)\pi}{T}\cos\frac{(2k+1)(p+\nu)\pi}{T}+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{(2k+1)(j+\nu)\pi}{T}\sin\frac{(2k+1)(p+\nu)\pi}{T}\right)=\frac{2}{T}\sum_{k=0}^{T/2-1}\cos\frac{(2k+1)(j-p)\pi}{T}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{T}}\sum_{k=0}^{T/2-1}\left(\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{(2k+1)j\pi}{T}\cos\frac{(2k+1)p\pi}{T}+\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{(2k+1)j\pi}{T}\sin\frac{(2k+1)p\pi}{T}\right).$$

Из последнего соотношения и определения сигнального импульса, учитывая (2), получаем $(\boldsymbol{\delta}^{j+\nu}\cdot\boldsymbol{\delta}^{p+\nu})=\delta^p(j)=\dfrac{\sin(p-j)}{T\sin\frac{\pi}{T}(p-j)}$. При $p\neq j$ и $p, j\in\{0, 1, \ldots, T-1\}$ имеем $T\sin\frac{\pi}{T}(p-j)\neq0$ и $\sin(p-j)=0$. Следовательно, $(\boldsymbol{\delta}^{j+\nu}\cdot\boldsymbol{\delta}^{p+\nu})=0$. Теорема доказана.

Вектор-оригинал функции $\varphi(t)$, представленный в базисе $\widetilde{\delta}^\nu$, имеет вид $\boldsymbol{\varphi}^\nu=((\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\delta}^\nu), (\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\delta}^{1+\nu}), \ldots, (\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\delta}^{T-1+\nu}))$. По теореме 2 имеем $(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\delta}^{j+\nu})=\varphi(j+\nu)$ при $j+\nu\in\mathbb{R}$, и поэтому $\boldsymbol{\varphi}^\nu=(\varphi(0+\nu), \ldots, \varphi(j+ +\nu), \ldots, \varphi(T-1+\nu))$. Из последнего выражения следует, что $\boldsymbol{\varphi}^\nu$ является еще и вектор-оригиналом функции $\varphi(t+\nu)$ из A^T, полученной из $\varphi(t)$ путем сдвига значения аргумента на величину ν.

§ 2. Цифровые сигналы и энтропия классов цифровых сигналов

Цифровой сигнал является результатом преобразования аналогового сигнала. Уточним суть этого преобразования. Будем его представлять в виде некоторой операции проецирования аналогового сигнала на решетку $\mathcal{P}$, представляющую собой конечное множество на плоскости $\mathbf{E}^2$ с системой координат (t, y). Предполагается, что в указанной плоскости функция $\varphi(t)$ (аналоговый сигнал) задана уравнением $y=\varphi(t)$, см. рисунок.

Рассмотрим вначале дискретные множества на осях системы координат (t, y), которые назовем соответственно множеством дискретизации и множеством квантования.

Множеством дискретизации или, короче, *дискретизацией с длительностью T, плотностью дискретизации θ*, $\theta\in\mathbf{N}$, и *локальным ограничением ρ*, $\rho\in\{1, 2, \ldots, \theta\}$, называется множество $\Psi=\{t=i+\tau/\theta$: $i\in\{0, 1, \ldots, T-1\}$, $\tau\in\mathbf{Z}\cap[-\rho/2, \rho/2)\}$.

Очевидно, что при $\rho = \theta$ множество дискретизации представляет собой равномерно распределенные с шагом $1/\theta$ точки на числовой оси. Если же $\rho = 1$, то распределение также равномерно, но шаг равен 1.

Множеством квантования или, короче, *квантизацией с плотностью квантования* β, $\beta \in \mathbf{N}$, называется множество $\Phi = \{y\colon\ \beta y \in \mathbb{Z}\}$. *Решеткой* (см. рис. 1) *с дискретизацией* Ψ *и квантизацией* Φ называется множество $\mathcal{P} = \{d = (t, y) \in \mathbf{E}^2\colon\ t \in \Psi,\ y \in \Phi\}$. Числа T, θ, ρ, β называются *параметрами решетки* $\mathcal{P}$.

Пусть $p \in \mathbb{R}$. Число $\lfloor \beta p \rfloor$ назовем *цифровым представлением* числа p с плотностью квантования β.

Цифровым сигналом от сигнала $\varphi(t)$ из A^T над решеткой $\mathcal{P}$ (с дискретизацией Ψ и квантизацией Φ) называется функция $\varphi_{\text{ц}}\colon \Psi \to \Phi$, удовлетворяющая при всех $t \in \Psi$ равенству $\varphi_{\text{ц}}(t) = \lfloor \beta\varphi(t) \rfloor$.

Описанный здесь процесс получения цифрового сигнала из аналогового называется *аналого-цифровым преобразованием*, а устройство, его осуществляющее — *аналого-цифровым преобразователем* [8–10, 23, 28]. Приведенное определение аналого-цифрового преобразователя является некоторым обобщением по сравнению с общепринятым, но рассматриваемые понятия совпадают, если $\rho = \theta$. С геометрической точки зрения аналого-цифровое преобразование будем называть *проецированием сигнала* $\varphi(t)$ *на решетку* $\mathcal{P}$, см. рис. 1, а сигнал $\varphi_{\text{ц}}(t)$ — *проекцией* $\varphi(t)$ *на* $\mathcal{P}$.

Перейдем теперь к определению классов цифровых сигналов. *Полным классом цифровых сигналов над решеткой* $\mathcal{P}$ называется множество

$$\text{Ц}(\mathcal{P}) = \{\varphi_{\text{ц}}(t)\colon\ \varphi_{\text{ц}}(t) \text{ — цифровой сигнал от } \varphi(t) \in A^T \text{ над } \mathcal{P}\}.$$

Классом цифровых сигналов над решеткой $\mathcal{P}$ *от подкласса аналоговых сигналов* $F \subseteq \mathbf{E}^T$ называется множество $\text{Ц}(\mathcal{P}, F) = \{\varphi_{\text{ц}}(t)\colon\ \varphi_{\text{ц}}(t)$ — цифровой сигнал от $\varphi(t) \in A^T$ над $\mathcal{P}$ при условии $\boldsymbol{\varphi} \in F\}$, где $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор-оригинал сигнала $\varphi(t)$. По определению имеем $\text{Ц}(\mathcal{P}, \mathbf{E}^T) = \text{Ц}(\mathcal{P})$.

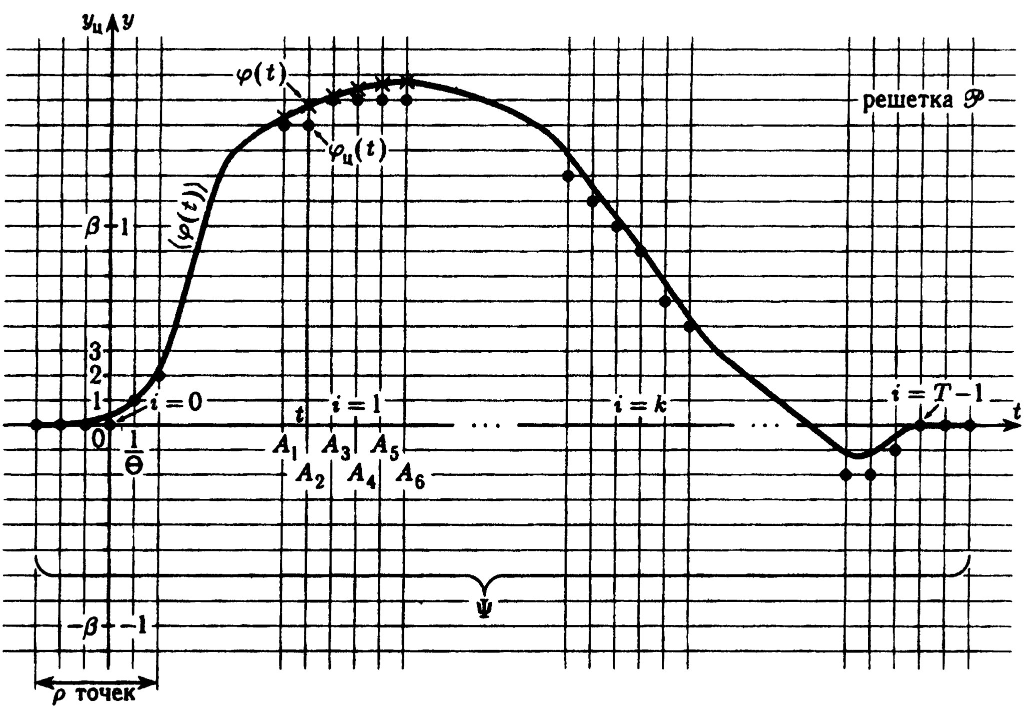


Рис. 1. Аналоговый и цифровой сигналы. Аналоговый сигнал $y = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, изображен сплошной линией; цифровой сигнал $y_{\text{ц}} = \varphi_{\text{ц}}(t)$, $t \in \Psi$, — точками. Масштабы при изображении графиков связаны соотношением $y_{\text{ц}} = \beta y$. Для данного рисунка $\Theta = 10$, $\beta = 8$, $\rho = 6$; точкам $A_1, \ldots, A_6$ отвечают значения $\tau = -3, -2, -1, 0, 1, 2$; для всех этих точек $i = 1$.

Количество информации в каждом элементе из конечного множества D принимается равным $\log|D|$, см. [15], поскольку для выделения элемента из множества необходимо и достаточно $\log|D|$ двоичных разрядов, если $\log|D| \in \mathbb{Z}$, и $\lfloor \log|D| \rfloor + 1$ двоичных разрядов при $\log|D| \notin \mathbb{Z}$. Функция $\log|D|$ называется *энтропией* множества D.

Полный класс Ц($\mathcal{P}$) цифровых сигналов — бесконечное множество, и его энтропия равна бесконечности. Поэтому для характеристики информационных свойств цифровых сигналов из полного класса естественно перейти к рассмотрению величины, характеризующей плотность расположения элементов в данном множестве (классе). Для этого введем понятие удельных классов.

Пусть $\varphi(t) \in A^T$. В соответствии с теоремой 2 аналоговому сигналу $\varphi(t)$ во взаимно однозначное соответствие ставится вектор-оригинал $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{E}^T$, и при этом $A^T \sim \mathbf{E}^T$. Поэтому классы аналоговых сигналов можно задавать в виде областей пространства $\mathbf{E}^T$.

Удельным классом аналоговых сигналов с центром в точке $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{T-1})$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{E}^T$, называется множество

$$J(\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{E}^T\colon\ -1/2 < \varphi(i) - b_i < 1/2,\ i = 0, 1, \ldots, T-1\}.$$

Легко заметить, что удельный класс $J(\boldsymbol{b})$ есть открытый единичный T-мерный куб с центром в точке $\boldsymbol{b}$.

Пусть дана решетка $\mathcal{P}$ с параметрами T, θ, ρ, β. *Удельным классом цифровых сигналов* над решеткой $\mathcal{P}$ с центром в точке $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{E}^T$, называется множество Ц($\mathcal{P}$, $J(\boldsymbol{b})$). Мощность этого множества, т. е. величину $n^{\boldsymbol{b}}(\mathcal{P}) = |$Ц$(\mathcal{P}, J(\boldsymbol{b}))|$, назовем *плотностью* класса цифровых сигналов над решеткой $\mathcal{P}$ в области точки $\boldsymbol{b}$.

Как нетрудно заметить, множество Ц($\mathcal{P}$, $J(\boldsymbol{b})$) конечно ввиду ограниченности $J(\boldsymbol{b})$ при любых конечных значениях параметров T, θ, ρ, β решетки $\mathcal{P}$. Кроме того, представляется, что удельные классы цифровых сигналов над одной и той же решеткой $\mathcal{P}$, но с разными центрами при достаточно большом значении β близки по своим мощностным свойствам, т. е. плотности расположения цифровых сигналов по всему пространству $\mathbf{E}^T$ примерно одинаковы (в дальнейшем это будет доказано). В связи с этим плотность будем обозначать, опуская индекс $\boldsymbol{b}$. Таким образом, через $n(\mathcal{P})$ обозначается плотность класса цифровых сигналов в произвольной области пространства $\mathbf{E}^T$.

Удельной энтропией полного класса цифровых сигналов над решеткой $\mathcal{P}$ называется величина $h(\mathcal{P}) = \log n(\mathcal{P})$; удельную энтропию будем обозначать также через $h(T, \theta, \rho, \beta)$, если необходимо подчеркнуть ее зависимость от параметров решетки.

Удельная энтропия характеризует информационные свойства класса всех цифровых сигналов и потому играет фундаментальную роль во всем информационном анализе цифровых сигналов. Практическое значение удельной энтропии определяется тем, что она характеризует влияние параметров решетки $\mathcal{P}$ (т. е. параметров аналого-цифрового преобразователя) на количество информации в цифровых сигналах. Из сказанного следует важность задачи оценки $h(T, \theta, \rho, \beta)$ как базового информационного показателя класса цифровых сигналов.

Ранее оценка удельной энтропии фактически не производилась. В некоторых случаях (когда решетка имеет простейшую структуру) эта задача становится тривиальной. Такая ситуация возможна при $\rho = 1$ (при этом значение θ безразлично; для определенности положим $\theta = 1$); в последнем случае $\Psi = \{0, 1, \ldots, T-1\}$. В силу взаимно однозначного соответствия (по теореме 2) вектора $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi(0), \ldots, \varphi(T-1))$ из $\mathbf{E}^T$ и аналогового сигнала $\varphi(t)$ из A^T цифровой сигнал $\varphi_ц(t)$, $\varphi_ц(t) \in$ Ц($\mathcal{P}$, $J(\boldsymbol{b})$), может принимать любое значение из множества $\mathbb{Z} \cap (\beta(b_t - 1/2), \beta(b_t + 1/2))$

(мощность этого множества равна β) при любых t из $\Psi = \{0, 1, \ldots, T-1\}$ и $\boldsymbol{b} = (b_0, \ldots, b_t, \ldots, b_{T-1})$ из $\mathbf{E}^T$. Поэтому в данном случае $n(\mathcal{P}) = \beta^T$ и, следовательно, $h(T, 1, 1, \beta) = T \log \beta$. Очевидно, что функция $h(T, \theta, \rho, \beta)$ монотонно возрастает относительно всех своих аргументов. Значит, $h(T, \theta, \rho, \beta) \geqslant h(T, 1, 1, \beta)$.

Бытовало мнение, что раз аналоговый сигнал $\varphi(t)$ полностью определяется набором $(\varphi(0), \ldots, \varphi(i), \ldots, \varphi(T-1))$ длины T, то никакое количество значений $\varphi(t)$ при $t \notin \{0, 1, \ldots, T-1\}$ не добавляет информации и в цифровом сигнале $\varphi_{\text{ц}}(t)$. Отсюда следовал практический вывод, что в процессе аналого-цифрового преобразования параметр θ следует устанавливать равным единице, а выбор бо́льших значений не имеет смысла. Однако, как следует из приведенной ниже теоремы 4, это неверно. Теорема 4 дает оценку удельной энтропии $h(T, \theta, \rho, \beta)$, поэтому ее следует рассматривать как основной результат данной работы, касающийся информационных свойств цифровых сигналов.

Теорема 4 (об удельной энтропии). *При растущих параметрах T, θ, ρ, β для величины $h(T, \theta, \rho, \beta)$ справедливы следующие оценки:*

а) если $\log\log T = o(\log(\beta\theta))$, то

$$h(T, \theta, \theta, \beta) \sim T(\log\beta + \log\theta); \tag{10}$$

б) если $\rho \leqslant c\theta/\log T$, где c — некоторая константа, то

$$h(T, \theta, \rho, \beta) \sim T(\log\beta + \log\rho). \tag{11}$$

Из этой теоремы следует, в частности, что на энтропию асимптотически одинаково влияют как плотность квантования β, так и плотность дискретизации θ, т. е. имеет место «симметрия» роли указанных параметров.

По сути теорема 4 представляет собой результат решения комбинаторной задачи об оценке числа цифровых сигналов, порождаемых всевозможными аналоговыми сигналами, вектор-оригиналы которых заключены внутри единичного T-мерного гиперкуба. Методологическая трудность решения данной задачи обусловлена двойственностью природы изучаемых объектов — цифровых сигналов, которые являются элементами дискретного (конечного) множества, но определены на непрерывном множестве векторов в T-мерном евклидовом пространстве.

Доказательству теоремы 4 посвящено дальнейшее изложение, хотя некоторые устанавливаемые при этом факты представляют и самостоятельный интерес. Приблизительная схема доказательства такова. Вначале рассматриваемая задача сводится к нахождению энтропии класса совместных систем линейных неравенств, строки в матрицах коэффициентов которых образуют специальные множества в $\mathbf{E}^{T+1}$. В свою очередь, классы совместных систем линейных неравенств трактуются как классы так называемых линейно-пороговых функций, имеющих области задания в виде вышеуказанных множеств. Заметим, что линейно-пороговые функции представляют собой некоторое обобщение пороговых функций [24, 32]; последние отличаются от линейно-пороговых только частным видом областей своего задания, представляющих собой подмножества вершин единичного $(T+1)$-мерного гиперкуба. Далее устанавливается эквивалентность классов цифровых сигналов специальным подклассам линейно-пороговых функций над так называемыми импульсными множествами. И, наконец, получаются оценки энтропии класса линейно-пороговых функций, эквивалентного удельному классу цифровых сигналов, т. е. доказываются соотношения (10) и (11). При этом существенно используются оценки энтропии классов линейно-пороговых функций, полученные в [3].

§ 3. Представление цифровых сигналов в виде линейно-пороговых функций

В этом параграфе мы покажем, что цифровые сигналы можно интерпретировать как бинарные функции специального вида, заданные в n-мерном пространстве на специальном конечном множестве. Эти функции относятся к подмножеству бинарных функций, представляющему собой класс так называемых линейно-пороговых функций. Представление цифрового сигнала в виде линейно-пороговой функции оказывается удобным при исследовании цифровых сигналов и, в частности, при доказательстве теоремы 4.

В дальнейшем будем рассматривать аналоговые сигналы, удовлетворяющие при всех t амплитудному ограничению вида $|\varphi(t)| < M$, где M — сколь угодно большое (но фиксированное) натуральное число. При этом (ограниченная) квантизация есть множество $\Phi^M = \{y\colon \beta y \in \mathbf{Z} \cap [-\beta M, \beta M]\}$.

Функцию $\alpha(t, y)\colon \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ будем называть *бинарной функцией* над решеткой $\mathcal{P}$ (эта функция задана на узлах решетки и принимает значения 0 или 1). Класс бинарных функций над решеткой $\mathcal{P}$ обозначим $\mathfrak{B}_0(\mathcal{P})$.

Индицирующим классом функций над решеткой $\mathcal{P}$ от области F, $F \subseteq \mathbf{E}^T$, называется множество $\mathfrak{I}(\mathcal{P}, F) = \{\alpha(t, y) \in \mathfrak{B}_0(\mathcal{P})$: существует такая функция $\varphi(t) \in A^T$, что $\boldsymbol{\varphi} \in F$ и

$$\alpha(t, y) = \begin{cases} 0, & y > \varphi(t), \\ 1, & y \leqslant \varphi(t) \end{cases} \qquad (12)$$

для всех $t \in \Psi\}$. Функцию $\alpha(t, y)$, удовлетворяющую условию (12), назовем *индицирующей функцией* для сигнала $\varphi(t)$ из A^T (или для вектора $\boldsymbol{\varphi}$ из $\mathbf{E}^T$). Очевидно, что $\mathfrak{I}(\mathcal{P}, F) \subset \mathfrak{B}_0(\mathcal{P})$.

Легко заметить, что индицирующей функции $\alpha(t, y)$ для сигнала $\varphi(t)$, $\alpha(t, y) \in \mathfrak{I}(\mathcal{P}, F)$, взаимно однозначно соответствует цифровой сигнал $\varphi_ц(t)$ от $\varphi(t)$, $\varphi_ц \in Ц(\mathcal{P}, F)$. Таким образом, между классом цифровых сигналов и классом индицирующих функций, взятых над одной и той же решеткой и от одной и той же области F, существует взаимно однозначное соответствие, т. е. $\mathfrak{I}(\mathcal{P}, F) \sim Ц(\mathcal{P}, F)$.

Соответствие друг другу элементов a и b из разных, но эквивалентных классов будем обозначать в виде $a \leftrightarrow b$.

Пусть $y_\alpha(t) = \max\limits_{y \in \Phi\colon\ \alpha(t, y) = 1} y$, где $t \in \Psi$. Тогда если $\alpha(t, y) \in \mathfrak{I}(\mathcal{P}, F)$, $\varphi_ц(t) \in Ц(\mathcal{P}, F)$ и $\varphi_ц(t) = \beta y_\alpha(t)$ при всех $t \in \Psi$, то $\alpha(t, y) \leftrightarrow \varphi_ц(t)$. Указанное биективное отображение $Ц(\mathcal{P}, F)$ на $\mathfrak{I}(\mathcal{P}, F)$ мы и будем подразумевать в дальнейшем, говоря о соответствии $\varphi_ц(t)$ и $\alpha(t, y)$.

Таким образом, любой цифровой сигнал над решеткой $\mathcal{P}$ можно представить в виде бинарной функции, заданной над $\mathcal{P}$ и являющейся индицирующей для того аналогового сигнала, из которого получен данный цифровой сигнал. Нетрудно заметить, что каждой функции $\alpha(t, y)$ из $\mathfrak{I}(\mathcal{P}, F)$ можно поставить в соответствие некоторую область Ω_α аналоговых сигналов, $\Omega_\alpha \subseteq F \subset \mathbf{E}^T$, для которых индицирующей функцией является $\alpha(t, y)$.

Для аналоговых сигналов и индицирующих функций имеет место

Лемма 2. *Если F — открытая область, $\alpha(t, y) \in \mathfrak{I}(\mathcal{P}, F)$ и $\Omega_\alpha \cap F \neq \varnothing$, то существует вектор-оригинал $\boldsymbol{\varphi}$ из F, для которого выполняются соотношения*

$$\alpha(t, y) = \begin{cases} 0, & y > \varphi(t), \\ 1, & y < \varphi(t), \end{cases} \qquad (13)$$

причем $y \neq \varphi(t)$ при всех $t \in \Psi$, $y \in \Phi$.

Доказательство. Действительно, пусть $\alpha(t, y)$ — индицирующая функция для произвольного сигнала $\varphi^0(t)$ из A^T, для которого $\varphi^0 \in F$. Тогда для всех $t \in \Psi$ выполнены соотношения

$$\alpha(t, y) = \begin{cases} 0, & y > \varphi^0(t), \\ 1, & y \leqslant \varphi^0(t). \end{cases}$$

Пусть $\min\limits_{t\in\Psi}\left(\left(\min\limits_{y\in\Phi:\ y>\varphi^0(t)} y\right) - \varphi^0(t)\right) = \varepsilon$; тогда, очевидно, $\varepsilon > 0$.

Возьмем сигнал вида $a(t) = b\sin\frac{\pi}{T}\left(t + \frac{\rho+1}{2\theta}\right)$, где $b > 0$, а T, θ и ρ — параметры решетки $\mathcal{P}$ (длительность, плотность дискретизации и локальное ограничение). Нетрудно заметить, что $a(t) \in A^T$ и $a(t) > 0$ при $t \in \Psi$. Через $\boldsymbol{s}$ обозначим вектор-оригинал функции $\sin\frac{\pi}{T}\left(t + \frac{\rho+1}{2\theta}\right)$. Тогда вектор-оригинал функции $a(t)$ выражается как $\boldsymbol{a} = b\boldsymbol{s}$, где b — амплитуда функции $a(t)$.

Через b_0 обозначим верхнюю грань значений b, при которых $(\boldsymbol{\varphi}^0 + \boldsymbol{a}) \in F$. Область F по условию открытая, поэтому $b_0 > 0$. Пусть $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^0 + \boldsymbol{a}$ и $b = \min(\varepsilon, b_0)/2$; тогда $\boldsymbol{\varphi} \in F$ и $0 < a(t) < \varepsilon$ при любом $t \in \Psi$. Отсюда следует, что сигнал $\varphi(t) = \varphi^0(t) + a(t)$ обладает следующими свойствами: $\boldsymbol{\varphi} \in F$ и, если $y > \varphi^0(t)$, то $y > \varphi(t)$, а если $y \leqslant \varphi^0(t)$, то $y < \varphi(t)$ (при всех $t \in \Psi$, $y \in \Phi$). Последнее означает, что $\alpha(t, y)$ служит индицирующей функцией и для сигнала $\varphi(t)$, удовлетворяющего требованиям леммы. Лемма доказана.

Пусть A — некоторое конечное множество в $\mathbf{E}^n$, не содержащее нулевого вектора $\mathbf{0}$. Это множество называется *симметричным*, если из условия $\boldsymbol{x} \in A$ следует, что $(-\boldsymbol{x}) \in A$. Симметричное множество разобьем на пары векторов $(\pm\boldsymbol{x}) = \{-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\}$. Множество таких пар обозначим через $A^{(\pm)}$ и назовем *множеством пар над* A. На симметричном множестве A зададим бинарную функцию $\eta(\boldsymbol{x})$, которая на разных векторах любой одной пары $(\pm\boldsymbol{x})$ принимает различные значения (0 и 1), т. е. $\eta(\boldsymbol{x}) = \bar{\eta}(-\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in A$. Множество $\{\eta(\boldsymbol{x})\}$ таких функций назовем классом *симметричных бинарных функций* над множеством A и обозначим $\mathfrak{B}(A)$.

Введем функцию $\operatorname{sg} z = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z > 0. \end{cases}$ Классом линейно-пороговых функций над множеством A с областью структурного ограничения C (или просто с ограничением C), $C \subseteq \mathbf{E}^n$, называется множество $\mathfrak{P}(A, C) = \{\eta(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{B}(A)$: существует такой вектор $\boldsymbol{\xi} \in C$, что $\eta(\boldsymbol{x}) = \operatorname{sg}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\}$. При этом $\mathfrak{P}(A, \mathbf{E}^n)$ будем обозначать через $\mathfrak{P}(A)$. Функция $\operatorname{sg}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})$ называется *линейно-пороговой функцией* с вектором структуры $\boldsymbol{\xi}$; аргументом этой функции является вектор $\boldsymbol{x}$. Непосредственно из определения следует, что если $\eta(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{P}(A, C)$, то существует вектор $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi} \in C$, удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}) > 0 \text{ при всех } \boldsymbol{x} \in A, \text{ для которых } \eta(\boldsymbol{x}) = 1, \\ (\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}) < 0 \text{ при всех } \boldsymbol{x} \in A, \text{ для которых } \eta(\boldsymbol{x}) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что класс линейно-пороговых функций является обобщением известного класса пороговых функций [24], у которых областью определения является множество вершин единичного n-мерного гиперкуба.

Дискретизации $\Psi \subset \mathbf{E}^1$, имеющей длительность T, плотность θ и локальное ограничение ρ, поставим в соответствие так называемое *базовое импульсное множество* $\Delta = \{(\boldsymbol{\delta}^t), (-\boldsymbol{\delta}^t)\colon t \in \Psi\}$, где $\boldsymbol{\delta}^t$ — импульсный вектор. Импульсному вектору $\boldsymbol{\delta}^{t_1}$ отвечает сигнальный импульс $\delta^{t_1}(t)$. Из соотношения (2) и формулы для косинуса разности следует, что

$$\delta^{t_1}(t) = \frac{2}{T}\sum_{k=0}^{T/2-1}\cos\frac{(2k+1)\pi(t_1 - t)}{T}, \qquad \delta^{t_1}(t) \leqslant \frac{2}{T}\left(\cos\frac{\pi(t_1 - t)}{T} + \frac{T}{2} - 1\right).$$

Из этих соотношений получаем, что сигнальный импульс $\delta^{t_1}(t)$ как функция от t обращается в единицу только при $t=t_1+nT$, $n\in\mathbb{Z}$, и строго меньше единицы при остальных значениях t. Поэтому $|\delta^{t_1}(t_1)|\neq|\delta^{t_2}(t_1)|$ при $t_1, t_2\in\Psi$, $t_1\neq t_2$, т. е. векторы $\boldsymbol{\delta}^{t_1}$, $-\boldsymbol{\delta}^{t_1}$, $\boldsymbol{\delta}^{t_2}$ и $-\boldsymbol{\delta}^{t_2}$, которым отвечают сигнальные импульсы $\delta^{t_1}(t)$, $-\delta^{t_1}(t)$, $\delta^{t_2}(t)$ и $-\delta^{t_2}(t)$, попарно различны. В итоге получаем $|\Delta|=2|\Psi|$.

Пусть $\mathbf{E}^{T+1}$ есть такое расширение пространства $\mathbf{E}^T$, что $\mathbf{E}^T\subset\mathbf{E}^{T+1}$ и $\mathbf{E}^T=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{E}^{T+1}\colon (\boldsymbol{e}^T\cdot\boldsymbol{x})=0\}$, где $\boldsymbol{e}^T$ есть $(T+1)$-й вектор естественного базиса $\widetilde{e}=(\boldsymbol{e}^0,\boldsymbol{e}^1,\ldots,\boldsymbol{e}^{T-1},\boldsymbol{e}^T)$ и $\boldsymbol{e}^i\in\mathbf{E}^T$ при $i=0,1,\ldots,T-1$. Параметрами базового импульсного множества являются размерность T, плотность дискретизации θ и локальное ограничение ρ.

Решетке $\mathcal{P}\subset\mathbf{E}^2$, имеющей дискретизацию Ψ, длительность T и квантизацию Φ с плотностью квантования β, поставим в соответствие *полное импульсное множество* $\Lambda=\{(\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T),\ -(\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T)\colon\ t\in\Psi, y\in\Phi\}$. Очевидно, что $\Lambda\subset\mathbf{E}^{T+1}$. Параметрами полного импульсного множества будем считать размерность T, плотность дискретизации θ, локальное ограничение ρ, плотность квантования β и ограничитель M. Если при этом $M=0$, то $\Lambda=\Delta$. Положительным импульсным множеством будем считать $\Lambda^{(+)}=\{\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T\colon\ t\in\Psi,\ y\in\Phi\}$, а отрицательным импульсным множеством назовем $\Lambda^{(-)}=\{-(\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T)\colon\ t\in\Psi,\ y\in\Phi\}$. *Импульсным множеством пар* назовем $\Lambda^{(\pm)}=\{\pm(\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T)\colon\ t\in\Psi,\ y\in\Phi\}$. Таким образом, $\Lambda=\Lambda^{(+)}\cup\Lambda^{(-)}$, и Λ — симметричное конечное множество. Если соответствующие параметры множеств $\mathcal{P}$ и Λ попарно равны, то $\mathcal{P}\sim\Lambda^{(\pm)}$ и, кроме того, классы бинарных функций над ними эквивалентны, т. е. $\mathfrak{B}_0(\mathcal{P})\sim\mathfrak{B}(\Lambda)$. Если при этом $(t,y)\in\mathcal{P}$, то $(t,y)\leftrightarrow(\pm(\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T))$, где $(\pm(\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T))\in\Lambda^{(\pm)}$. Если Ψ и Δ имеют одинаковые параметры, то $\Psi\sim\Delta^{(\pm)}$. Если при этом $t\in\Psi$, то $t\leftrightarrow(\pm\boldsymbol{\delta}^t)$. Тем самым, здесь указаны соответствия между элементами множеств Ψ и Δ.

Соответствие элементов классов бинарных функций установим следующим образом. Пусть $\alpha(t,y)\in\mathfrak{B}_0(\mathcal{P})$, $\eta(\boldsymbol{\lambda})\in\mathfrak{B}(\Lambda)$, что означает $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T$ при $t\in\Psi$ и $y\in\Phi$. Тогда если $\eta(\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T)=\alpha(t,y)$ и $\eta(-(\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T))=\bar{\alpha}(t,y)$ при всех $t\in\Psi$ и $y\in\Phi$, то $\eta(\boldsymbol{\lambda})\leftrightarrow\alpha(t,y)$ (здесь $\eta(\boldsymbol{\lambda})$ и $\alpha(t,y)$ рассматриваются как функции).

Пусть F — некоторая открытая область, $F\subseteq\mathbf{E}^T\subset\mathbf{E}^{T+1}$. *Конусом* в $\mathbf{E}^{T+1}$ над основанием F назовем множество $K(F)=\{\boldsymbol{z}=k(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{e}^T)\colon k\in(0,\infty),\ \boldsymbol{y}\in F\}$, см. [13].

Теорема 5 (эквивалентности). *Пусть F, $F\subseteq\mathbf{E}^T$, есть некоторая открытая область, $\mathcal{P}$ — решетка с длительностью T, $\Lambda\subset\mathbf{E}^{T+1}$ — импульсное множество, имеющее тот же набор параметров, что и решетка $\mathcal{P}$. Тогда класс цифровых сигналов Ц$(\mathcal{P},F)$ и класс линейно-пороговых функций $\mathfrak{P}(\Lambda,K(F))$ эквивалентны и между элементами этих классов существует следующее взаимно однозначное соответствие.*

Для любого цифрового сигнала $\varphi_{\text{ц}}(t)$ из Ц$(\mathcal{P},F)$ существует аналоговый сигнал $\varphi(t)$, для которого $\varphi_{\text{ц}}(t)$ — цифровой сигнал от $\varphi(t)$, $\boldsymbol{\varphi}\in F$ и $\varphi(t)\neq y$ при всех $(t,y)\in\mathcal{P}$. При этом сигналу $\varphi_{\text{ц}}(t)\in$ Ц$(\mathcal{P},F)$ однозначно соответствует линейно-пороговая функция $\eta(\boldsymbol{x})=\mathrm{sg}(\boldsymbol{\varphi}^*\cdot\boldsymbol{x})$ из $\mathfrak{P}(\Lambda,K(F))$ с вектором структуры $\boldsymbol{\varphi}^*=(\varphi(0),\ldots,\varphi(T-1),1)$, где $(\varphi(0),\ldots,\varphi(T-1))=\boldsymbol{\varphi}$.

Произвольной линейно-пороговой функции $\mathrm{sg}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})$ из $\mathfrak{P}(\Lambda,K(F))$ с вектором структуры $\boldsymbol{\xi}=(\xi_0,\ldots,\xi_T)\in K(F)$ однозначно соответствует цифровой сигнал $\varphi_{\text{ц}}(t)$ от аналогового сигнала $\varphi(t)$ с вектор-оригиналом $\boldsymbol{\varphi}=(\xi_0/\xi_T,\ldots,\xi_{T-1}/\xi_T)$.

Доказательство. Пусть $\varphi_ц(t)$ — произвольный цифровой сигнал из $Ц(\mathcal{P}, F)$. Этому цифровому сигналу взаимно однозначно соответствует, как было указано ранее, индицирующая функция $\alpha(t, y)$ из $\mathfrak{I}(\mathcal{P}, F)$. Согласно лемме 2 существует такой вектор-оригинал $\boldsymbol{\varphi}$ из F, что при всех t и y, $t \in \Psi$, $y \in \Phi$, он обладает следующими свойствами:

а) если $\varphi(t) - y < 0$, то $\alpha(t, y) = 0$;

б) если $\varphi(t) - y > 0$, то $\alpha(t, y) = 1$;

в) $y \neq \varphi(t)$.

Это означает, что

$$\alpha(t, y) = \mathrm{sg}(\varphi(t) - y) \tag{14}$$

при всех $t \in \Psi$, $y \in \Phi$. Из условия $\alpha(t, y) \leftrightarrow \varphi_ц(t)$, определения величины $\alpha(t, y)$ и соотношения (13) следует, что $\varphi_ц(t)$ — цифровой сигнал от $\varphi(t)$.

Построим функцию $\eta(\boldsymbol{x})$ из $\mathfrak{P}(\Lambda)$, однозначно соответствующую функции $\alpha(t, y)$:

$$\eta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \alpha(t, y), & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\delta}^t - y\boldsymbol{e}^T, \\ \bar{\alpha}(t, y), & \boldsymbol{x} = -(\boldsymbol{\delta}^t - y\boldsymbol{e}^T), \end{cases} \qquad t \in \Psi, \quad y \in \Phi.$$

Покажем, что $\eta(\boldsymbol{x})$ — требуемая линейно-пороговая функция. В соответствии с теоремой 2 имеем $\varphi(t) = (\boldsymbol{\delta}^t \cdot \boldsymbol{\varphi})$. С учетом этого равенства и соотношения (14) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\delta}^t - y\boldsymbol{e}^T$ получаем

$$\eta(\boldsymbol{x}) = \alpha(t, y) = \mathrm{sg}(\varphi(t) - y) = \mathrm{sg}((\boldsymbol{\delta}^t \cdot \boldsymbol{\varphi}) - y) = \mathrm{sg}(\boldsymbol{\varphi}^* \cdot \boldsymbol{x}),$$

где $\boldsymbol{\varphi}^* = (\varphi(0), \ldots, \varphi(T-1), 1)$. Аналогичным образом при $\boldsymbol{x} = -(\boldsymbol{\delta}^t - y\boldsymbol{e}^T)$ получаем

$$\eta(\boldsymbol{x}) = \bar{\alpha}(t, y) = \overline{\mathrm{sg}}(\varphi(t) - y) = \mathrm{sg}(-((\boldsymbol{\delta}^t \cdot \boldsymbol{\varphi}) - y)) = \mathrm{sg}(-(\boldsymbol{\delta}^t - y\boldsymbol{e}^T) \cdot \boldsymbol{\varphi}^*) = \mathrm{sg}(\boldsymbol{\varphi}^* \cdot \boldsymbol{x}).$$

Таким образом, $\eta(\boldsymbol{x}) = \mathrm{sg}(\boldsymbol{\varphi}^* \cdot \boldsymbol{x})$ при всех $\boldsymbol{x}$ из Λ, т. е. $\eta(\boldsymbol{x})$ — линейно-пороговая функция, а $\boldsymbol{\varphi}^*$ принадлежит $K(F)$, так как $\boldsymbol{\varphi} \in F$. В итоге получаем, что цифровому сигналу $\varphi_ц(t)$ однозначно соответствует указанная в теореме линейно-пороговая функция $\eta(\boldsymbol{x})$ из $\mathfrak{P}(\Lambda, K(F))$.

Рассмотрим теперь обратное соответствие.

Пусть $\eta(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{P}(\Lambda, K(F))$. Это означает, что существует такой вектор структуры $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{T-1}, \xi_T)$ из $K(F)$, что $\eta(\boldsymbol{x}) = \mathrm{sg}(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{x})$ при всех $\boldsymbol{x} \in \Lambda$. Из принадлежности вектора $\boldsymbol{\xi}$ множеству $K(F)$ следует, что $\xi_T > 0$. Поэтому если $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_0/\xi_T, \ldots, \xi_{T-1}/\xi_T, 1)$, то $\boldsymbol{\xi}' \in K(F)$ и $\eta(\boldsymbol{x}) = \mathrm{sg}(\boldsymbol{\xi}' \cdot \boldsymbol{x})$ при всех $\boldsymbol{x} \in \Lambda$.

Пусть $\alpha(t, y)$ — функция из $\mathfrak{B}(\mathcal{P})$, соответствующая функции $\eta(\boldsymbol{x})$. Тогда при любых t и y, $t \in \Psi$, $y \in \Phi$, имеем

$$\alpha(t, y) = \eta(\boldsymbol{\delta}^t - y\boldsymbol{e}^T) = \mathrm{sg}(\xi' \cdot (\boldsymbol{\delta}^t - y\boldsymbol{e}^T)) =$$

$$= \mathrm{sg}\left(\sum_{i=0}^{T-1}\left(\frac{\xi_i}{\xi_T}\delta^t(i)\right) - y\right) = \mathrm{sg}((\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\delta}^t) - y),$$

где $\boldsymbol{\varphi} = (\xi_0/\xi_T, \ldots, \xi_{T-1}/\xi_T) \in F$. По теореме 2 величина $(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\delta}^t)$ есть значение сигнала $\varphi(t)$ из A^T, вектор-оригинал которого есть $\boldsymbol{\varphi}$, поэтому $\alpha(t, y) = \mathrm{sg}(\varphi(t) - y)$ при всех $t \in \Psi$, $y \in \Phi$. В итоге получаем, что линейно-пороговой функции $\eta(\boldsymbol{x})$ однозначно соответствует цифровой сигнал $\varphi_ц(t)$, $\varphi_ц(t) \in Ц(\mathcal{P}, F)$, от указанного аналогового сигнала $\varphi(t)$. Теорема доказана.

Данная теорема устанавливает связь сигналов с линейно-пороговыми функциями, выявляет соответствие между векторами структур линейно-пороговых функций и вектор-оригиналами аналоговых функций, порождающих цифровые сигналы. Эта связь позволяет свести задачу определения удельной энтропии класса цифровых сигналов к соответствующей задаче для специального класса линейно-пороговых функций.

§ 4. Импульсные множества и линейно-пороговые функции над ними

Разобьем множество дискретизации Ψ с длительностью T (T — четное положительное число), плотностью дискретизации θ и локальным ограничением ρ на T подмножеств $\Psi(0), \ldots, \Psi(T-1)$, где $\Psi(i)$ есть i-е подмножество дискретизации, $\Psi(i) = \{t = i + \tau/\theta \colon \tau \in \mathbb{Z} \cap [-\rho/2, \rho/2)\}$. Очевидно, что $\Psi = \bigcup_{i=0}^{T-1} \Psi(i)$ и $|\Psi(i)| = \rho$. При заданных параметрах T, θ, ρ и β базовое импульсное множество Δ, $\Delta \subset \mathbf{E}^T$, и полное импульсное множество Λ, $\Lambda \subset \mathbf{E}^{T+1}$, разобьем соответственно на подмножества $\Delta(0), \ldots, \Delta(T-1)$ и $\Lambda(0), \ldots, \Lambda(T-1)$, где $\Delta(i)$ и $\Lambda(i)$ — это, соответственно, i-е подмножество базового импульсного множества и i-е подмножество полного импульсного множества, $\Delta(i) = \{\boldsymbol{\delta}^t, -\boldsymbol{\delta}^t \colon t \in \Psi(i)\}$, $\Lambda(i) = \{(\boldsymbol{\delta}^t - y\boldsymbol{e}^T), -(\boldsymbol{\delta}^t - y\boldsymbol{e}^T) \colon t \in \Psi(i),\ y \in \Phi\}$. Очевидно, что $\Delta = \bigcup_{i=0}^{T-1} \Delta(i)$ и $\Lambda = \bigcup_{i=0}^{T-1} \Lambda(i)$. Набор подмножеств $\widetilde{\Lambda} = (\Lambda(0), \ldots, \Lambda(T-1))$ назовем *полным импульсным набором*.

Компоненты импульсного вектора $\boldsymbol{\delta}^t = (\delta^t(0), \ldots, \delta^t(T-1))$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ и $t \in \Psi$ удовлетворяют равенству $\delta^t(i) = \dfrac{\sin \pi(t-i)}{T \sin \frac{\pi(t-i)}{T}}$.

Класс линейно-пороговых функций над импульсным множеством Λ с областью структурного ограничения C, $C \subseteq \mathbf{E}^{T+1}$, обозначим через $\mathfrak{P}(\Lambda, C)$; таким образом, $\mathfrak{P}(\Lambda, C) = \{\eta(\boldsymbol{\lambda})$: существует такой вектор $\boldsymbol{\xi} \in C$, что $\eta(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{sg}(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\lambda})$ при всех $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda\}$.

Открытым T-мерным единичным гиперкубом в пространстве $\mathbf{E}^T$ с центром в точке $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} = (b(0), \ldots, b(T-1))$, из $\mathbf{E}^T$, $\mathbf{E}^T \subset \mathbf{E}^{T+1}$, называется множество $J(\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} = (x(0), \ldots, x(T-1)) \colon |x(i) - b(i)| < 1/2$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}\}$. Гиперкуб $J(\boldsymbol{b})$ в пространстве $\mathbf{E}^T$, $\mathbf{E}^T \subset \mathbf{E}^{T+1}$, назовем *гиперквадратом в пространстве* $\mathbf{E}^{T+1}$.

Квадратным конусом с центром в точке $\boldsymbol{b}$ из $\mathbf{E}^T$, $\boldsymbol{b} = (b(0), \ldots, b(T-1))$, называется конус $K(J(\boldsymbol{b}))$. При $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ конус $K(J(\boldsymbol{b}))$ называется *базовым* квадратным конусом и обозначается через K_0.

Введем класс *функций элементарного сдвига* $S_э = \{s \colon \Psi \to \mathbb{R} \cap [-1/2, 1/2)\}$, отображающих Ψ в $\mathbb{R} \cap [-1/2, 1/2)$.

Полным импульсным множеством с элементарным сдвигом $s \in S_э$ назовем множество

$$\Lambda_s = \left\{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{E}^{T+1} \colon \boldsymbol{\lambda} = \left(\boldsymbol{\delta}^t + \frac{s(t)+k}{\beta}\boldsymbol{e}^T\right) \text{ или } \boldsymbol{\lambda} = -\left(\boldsymbol{\delta}^t + \frac{s(t)+k}{\beta}\boldsymbol{e}^T\right),\ t \in \Psi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \quad (15)$$

Теорема 6 (об эквивалентных преобразованиях). *Множеству Λ и квадратному конусу $K(J(\boldsymbol{b}))$ при любом $\boldsymbol{b}$ из $\mathbf{E}^T$, $\mathbf{E}^T \subset \mathbf{E}^{T+1}$, можно поставить в соответствие такую функцию $s(t)$, $s \in S_э$, что $\mathfrak{P}(\Lambda, K(J(\boldsymbol{b}))) \sim \mathfrak{P}(\Lambda_s, K_0)$.*

Доказательство. Для любого фиксированного вектора $\boldsymbol{b}$ из $\mathbf{E}^T \subset \mathbf{E}^{T+1}$ определим функцию $s(t)$:

$$s(t) = \beta(\boldsymbol{\delta}^t \cdot \boldsymbol{b}) - \lfloor \beta(\boldsymbol{\delta}^t \cdot \boldsymbol{b}) + 1/2 \rfloor, \qquad t \in \Psi, \qquad (16)$$

где β — плотность квантования. Из определения видно, что $s \in S_э$.

Пусть $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\delta}^t + (j_t/\beta)\boldsymbol{e}^T$ (случай $\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\delta}^t + (j_t/\beta)\boldsymbol{e}^T$ рассматривается аналогично), где $t \in \Psi$, $j_t \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{E}^T$, $\mathbf{E}^T \subset \mathbf{E}^{T+1}$, и поэтому $\boldsymbol{b} = (b_0, \ldots, b_{T-1}, 0)$.

Тогда вектору $\boldsymbol{\lambda}$ из Λ можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $\boldsymbol{\lambda}^0 = \boldsymbol{\delta}^t + \frac{j_t+\lfloor\beta(\boldsymbol{\delta}^t\cdot\boldsymbol{b})+1/2\rfloor+s(t)}{\beta}\boldsymbol{e}^T$; очевидно, $\boldsymbol{\lambda}^0 \in \Lambda_s$ и по вектору $\boldsymbol{\lambda}^0$ при любых заданных β и $\boldsymbol{b}$ однозначно восстанавливается вектор $\boldsymbol{\lambda}$.

Нормируя по последней компоненте произвольный вектор $\boldsymbol{\xi}'$ из $K(J(\boldsymbol{b}))$, получим некоторый вектор $\boldsymbol{\xi}$ из $K(J(\boldsymbol{b}))$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{T-1}, 1)$; обоим векторам $\boldsymbol{\xi}'$ и $\boldsymbol{\xi}$ отвечает, очевидно, одна и та же линейно-пороговая функция. Представим $\boldsymbol{\xi}$ в виде суммы $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^0 + \boldsymbol{b}$; при этом $\boldsymbol{\xi}^0 \in K_0$ и $\boldsymbol{\xi}^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_{T-1}^0, 1)$. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\xi}^0\cdot\boldsymbol{\lambda}) + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\xi}^0\cdot\boldsymbol{\delta}^t) + j_t/\beta + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\delta}^t) =$$

$$= (\boldsymbol{\xi}^0\cdot\boldsymbol{\delta}^t) + \frac{j_t+\lfloor\beta(\boldsymbol{\delta}^t\cdot\boldsymbol{b})+1/2\rfloor+s(t)}{\beta} = \left(\boldsymbol{\xi}^0\cdot\left(\boldsymbol{\delta}^t + \frac{j_t+\lfloor\beta(\boldsymbol{\delta}^t\cdot\boldsymbol{b})+1/2\rfloor+s(t)}{\beta}\boldsymbol{e}^T\right)\right) = (\boldsymbol{\xi}^0\cdot\boldsymbol{\lambda}^0).$$

Из этих рассуждений следует, что во взаимно однозначное соответствие можно поставить линейно-пороговые функции $\mathrm{sg}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\lambda})$ из $\mathfrak{P}(\Lambda, K(J(\boldsymbol{b})))$ и $\mathrm{sg}(\boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ из $\mathfrak{P}(\Lambda_s, K_0)$. Теорема доказана.

Эта теорема позволяет свести оценки мощности и энтропии классов, имеющих область структурного ограничения в виде квадратного конуса с центром в произвольной точке $\boldsymbol{b}$ из $\mathbf{E}^T$, $\mathbf{E}^T \subset \mathbf{E}^{T+1}$, к соответствующим оценкам классов, имеющих область структурного ограничения в виде базового квадратного конуса K_0 (т. е. конуса с центром в точке $\mathbf{0}$). При этом последние классы берутся над импульсными множествами с некоторыми элементарными сдвигами, определяемыми функциями $s(t)$ из $S_э$.

Пусть Λ_s — полное импульсное множество с параметрами T, θ, ρ, β и элементарным сдвигом $s(t)$ из $S_э$. Пусть $n_p(T, s, \theta, \rho, \beta) \doteq |\mathfrak{P}(\Lambda_s, K_0)|$ — мощность класса линейно-пороговых функций над Λ_s, имеющих область структурного ограничения в виде базового квадратного конуса K_0, а $h_p(T, s, \theta, \rho, \beta) = \log n_p(T, s, \theta, \rho, \beta)$ — удельная энтропия этого класса.

Т е о р е м а 7 (об удельной энтропии класса линейно-пороговых функций). *При растущих T, θ, ρ и β справедливы следующие оценки:*

а) если $\rho \leqslant c\theta/\log T$, где c — некоторая константа, удовлетворяющая неравенству $c \geqslant 1/(20\pi)$, то $h_p(T, s, \theta, \rho, \beta) \sim T(\log\beta + \log\rho)$ при любых $s \in S_э$;

б) если $\log\log T = o(\log\beta\theta)$, то $h_p(T, s, \theta, \theta, \beta) \sim T(\log\beta + \log\theta)$ при любых $s \in S_э$.

Доказательство данной теоремы проводится ниже и заключается в получении соответствующих оценок: нижней и верхней.

А сейчас вернемся к основной теореме 4 (об удельной энтропии цифровых сигналов). По теореме 5 имеем $Ц(\mathcal{P}, J(\boldsymbol{b})) \sim \mathfrak{P}(\Lambda, K(J(\boldsymbol{b})))$, а теорема 6 утверждает, что $\mathfrak{P}(\Lambda, K(J(\boldsymbol{b}))) \sim \mathfrak{P}(\Lambda_s, K_0)$ (в приведенных соотношениях решетка $\mathcal{P}$ и импульсные множества Λ и Λ_s имеют одинаковые соответствующие параметры, а функция s определяется соотношением (16)). В итоге получаем, что $h(T, \theta, \rho, \beta) = h_p(T, s, \theta, \rho, \beta)$, т. е. основная теорема 4 непосредственно следует из теоремы 7.

§ 5. Ограниченные импульсные множества и их свойства

1. Введем некоторые понятия и обозначения (использованные, в частности, и в [3]). Всякое множество, состоящее из векторов, модули которых равны единице, будем называть *нормированным множеством*. Обозначим $\mathrm{nr}\, A = \{\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}| : \boldsymbol{x} \in A \text{ и } |\boldsymbol{x}| \neq 0\}$. Множество A будем называть *квазинормированным*, если $|A| = |\mathrm{nr}\, A|$, и *симметричным*, если из условия $\boldsymbol{a} \in A$ следует $(-\boldsymbol{a}) \in A$. Число всех пар вида $\{-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\}$, где $\pm\boldsymbol{a} \in \mathrm{nr}\, A$, а A — симметричное множество, обозначим через $\operatorname{mac} A$. Очевидно, $\operatorname{mac} A = \operatorname{nr} A/2$, $\mathbf{0} \notin A$, и если A — квазинормированное множество, то $\operatorname{mac} A = |A|/2$. Наименьшая размерность подпространства U, $U \subseteq \mathbf{E}^n$, для которого $A \subseteq U$, называется *размерностью множества* A и обозначается $\dim A$.

Проекцией множества A, $A \subset \mathbf{E}^n$, *по вектору* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, называется множество $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{x}} A = \left\{ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{y} \in A \right\}$, т. е. совокупность проекций всех векторов множества A на гиперплоскость $\mathbf{E}^{n-1}(\boldsymbol{x})$, ортогональную вектору $\boldsymbol{x}$. Имеем $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{x}} A \subset \mathbf{E}^{n-1}(\boldsymbol{x})$, где $\mathbf{E}^{n-1}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{E}^n \colon (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}) = 0\}$ — подпространство в $\mathbf{E}^n$. При $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ полагаем $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{x}} A = \varnothing$ при любом A; если множество A состоит из одного вектора $\boldsymbol{a}$, то проекцию $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{x}} A$ обозначаем $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{a}$.

Сечением множества C, $C \subseteq \mathbf{E}^n$, *по вектору* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, назовем множество $\operatorname{sc}_{\boldsymbol{x}} C = C \cap \mathbf{E}^{n-1}(\boldsymbol{x})$. При $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ полагаем $\operatorname{sc}_{\boldsymbol{x}} C = C$ при любом C.

Пусть A — симметричное множество. Рассмотрим набор $\widetilde{A} = (A(0), \ldots, A(v-1))$, состоящий из симметричных подмножеств $A(k)$, $A(k) \subseteq A$, $k = 0, 1, \ldots, v-1$; $\widetilde{A}$ назовем *набором подмножеств, заданным над множеством* A (или, короче, *набором подмножеств над множеством* A). Числа $\dim A$ и v назовем *размерностью* и *длиной набора* $\widetilde{A}$ и обозначим $\dim \widetilde{A}$ и $\operatorname{lan} \widetilde{A}$ соответственно.

Если A — квазинормированное множество, $A = \bigcup\limits_{k=0}^{v-1} A(k)$, где $A(0), \ldots, A(v-1)$ — равномощные взаимно непересекающиеся симметричные подмножества множества A, то $\widetilde{A}$, $\widetilde{A} = (A(0), \ldots, A(v-1))$, будем называть *правильным набором подмножеств над множеством* A. Число $(\operatorname{mac} A)/v$ назовем *локальной мощностью правильного набора* $\widetilde{A}$ и обозначим $\operatorname{lmac} \widetilde{A}$. Величины $\dim \widetilde{A}$, $\operatorname{lan} \widetilde{A}$ и $\operatorname{lmac} \widetilde{A}$ будем считать *параметрами набора* $\widetilde{A}$. Набор подмножеств $\widetilde{A}$, для которого любая система $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ векторов, $\widetilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}^0, \ldots, \boldsymbol{x}^{v-1})$, где $\boldsymbol{x}^k \in A(k)$ при всех k, $k = 0, 1, \ldots, v-1$, является линейно независимой, назовем *линейно независимым набором подмножеств*.

Пусть $\widetilde{A} = (A(0), \ldots, A(v-1))$ — набор подмножеств над A. Подмножество $A(k)$ разобьем на пары противоположных векторов вида $\{\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x}\}$ и отдельные векторы $\boldsymbol{y}$, для которых $(-\boldsymbol{y}) \notin A(k)$, а затем все пары векторов и отдельные векторы занумеруем (подряд), и множество используемых для этого номеров обозначим P_k. Для каждого номера j, $j \in P_k$, через $\boldsymbol{x}^{k,j}$ обозначим произвольный фиксированный вектор в j-й паре (если j — номер пары), либо отдельный (не входящий в пару) вектор из $A(k)$ с номером j. Пару чисел (k, j) назовем *системой индексов вектора* $\boldsymbol{x}^{k,j}$. Если набор $\widetilde{A}$ — правильный, то пары векторов во всех подмножествах $A(k)$, $k = 0, \ldots, v-1$, будем нумеровать числами из одного и того же множества индексов P правильного набора $\widetilde{A}$, т. е. $P_k = P$ при всех k, $k = 0, 1, \ldots, v-1$.

Определим операцию над компонентами набора $\widetilde{A} = (A(0), \ldots, A(v-1))$, заданного над множеством A. *Свертывающейся (относительно* $\widetilde{A}$*) проекцией первого порядка по индексу* j, $j \in P_{v-1}$, *от вектора* $\boldsymbol{x}^{k,i}$, $i \in P_k$, $0 \leqslant k \leqslant v-2$, и от подмножества $A(k)$ называются вектор $\operatorname{spr}_j^1 \boldsymbol{x}^{k,i} = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{x}^{v-1,j}} \boldsymbol{x}^{k,i}$ и множество $\operatorname{spr}_j^1 A(k) = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{x}^{v-1,j}} A(k)$ соответственно.

Набор $\operatorname{spr}_j^1 \widetilde{A} = (\operatorname{spr}_j^1 A(0), \ldots, \operatorname{spr}_j^1 A(v-2))$ и множество $\operatorname{spr}_j^1 A = \bigcup\limits_{k=0}^{v-2} \operatorname{spr}_j^1 A(k)$ называются *свертывающимися (относительно* $\widetilde{A}$*) проекциями первого порядка по индексу* j, $j \in P_{v-1}$, *от набора* $\widetilde{A}$ *и множества* A соответственно. Имеем $\dim(\operatorname{spr}_j^1 \widetilde{A}) \leqslant \dim \widetilde{A} - 1$, $\operatorname{lan}(\operatorname{spr}_j^1 \widetilde{A}) = \operatorname{lan} \widetilde{A} - 1$; если $\operatorname{spr}_j^1 \widetilde{A}$ — правильный набор, то $\operatorname{lmac}(\operatorname{spr}_j^1 \widetilde{A}) \leqslant \operatorname{lmac} \widetilde{A}$.

Все векторы, входящие в состав вновь полученных объектов, проиндексируем таким образом, чтобы каждому вектору была присвоена та же система индексов, что была приписана тому вектору в исходном объекте, в результате проецирования которого был получен рассматриваемый. Заметим, что, вообще говоря, возможны случаи, когда одному вектору будет приписано несколько систем индексов (это означает, что данный вектор учитывается при индексировании многократно, поскольку последний является проекцией разных исходных векторов). Возможно также, что система индексов окажется приписанной нулевому вектору.

Далее по индукции определим операцию *свертывающейся проекции высшего (q-го) порядка*, $1 \leqslant q \leqslant v-1$, *над компонентами набора* $\widetilde{A} = (A(0), \ldots, A(v-1))$, *заданного над множеством* A. Пусть $\mathfrak{D}$ обозначает любой объект из $\boldsymbol{x}^{k, j_k}$, $A(k)$, $\widetilde{A}$, A при $k = 0, 1, \ldots, v-q$. Пусть, далее, даны свертывающиеся (относительно $\widetilde{A}$) проекции $(q-1)$-го порядка, где $2 \leqslant q \leqslant v-1$, по индексному набору $j_{v-1}, \ldots, j_{v-(q-1)}$, от $\mathfrak{D}$: $\mathrm{spr}^{q-1}_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-(q-1)}} \mathfrak{D}$ при всех значениях $\mathfrak{D}$. Пусть, наконец, $\mathrm{spr}^1_{j_{v-q}} (\mathrm{spr}^{q-1}_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-(q-1)}} \mathfrak{D})$ есть свертывающаяся относительно $\mathrm{spr}^{q-1}_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-(q-1)}} \widetilde{A}$ проекция первого порядка по индексу j_{v-q} от $\mathrm{spr}^{q-1}_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-(q-1)}} \mathfrak{D}$, полученная в соответствии с вышеприведенным определением операции. Тогда *свертывающуюся (относительно* $\widetilde{A}$*) проекцию q-го порядка* по индексному набору $j_{v-1}, \ldots, j_{v-(q-1)}, j_{v-q}$ от $\mathfrak{D}$ обозначим через $\mathrm{spr}^q_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-(q-1)}, j_{v-q}} \mathfrak{D}$ и положим

$$\mathrm{spr}^q_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-(q-1)}, j_{v-q}} \mathfrak{D} = \mathrm{spr}^1_{j_{v-q}} (\mathrm{spr}^{q-1}_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-(q-1)}} \mathfrak{D}).$$

Исходные объекты $\boldsymbol{x}^{k, j_k}$, $A(k)$, $\widetilde{A}$ и A будем считать *свертывающимися проекциями нулевого порядка по произвольному индексу.*

Определим еще один параметр правильного набора подмножеств $\widetilde{A}$.

Пусть правильный набор подмножеств $\widetilde{A} = (A(0), \ldots, A(v-1))$ имеет длину $\mathrm{lan}\, \widetilde{A} = v$, мощность каждого компонентного подмножества равна $\mathrm{lmac}\, \widetilde{A} = \mathrm{mac}\, A(k) = m_0$, $k = 0, \ldots, v-1$, и множество индексов есть P. *Глубиной* этого набора назовем наибольшее значение q, при котором для любого i, $0 \leqslant i \leqslant q$, свертывающаяся относительно $\widetilde{A}$ проекция i-го порядка от $\widetilde{A}$ по любому индексному набору $(j_{v-1}, \ldots, j_{v-i})$, $j_{v-1}, \ldots, j_{v-i} \in P$, есть правильный набор $\widetilde{A}^i = \mathrm{spr}^i_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-i}} \widetilde{A}$ с параметрами $\mathrm{lan}\, \widetilde{A}^i = v - i$ и $\mathrm{lmac}\, \widetilde{A}^i = m_0$. Глубину набора подмножеств $\widetilde{A}$ обозначим $\mathrm{tif}\, \widetilde{A}$.

Введем еще два нужных для дальнейшего изложения понятия.

Сечением p-го порядка области C, $C \subseteq \mathbf{E}^n$, *по системе векторов* $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^p$ назовем множество

$$\mathrm{sc}^p_{\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^p} C = C \cap \mathbf{E}^{n-1}(\boldsymbol{y}^1) \cap \mathbf{E}^{n-1}(\boldsymbol{y}^2) \cap \ldots \cap \mathbf{E}^{n-1}(\boldsymbol{y}^p).$$

Пусть A — симметричное множество векторов из $\mathbf{E}^n$, $\widetilde{A}$ — правильный набор подмножеств над A, $\mathrm{mac}\, A = m$. Пусть C — некоторая непустая область параметрического ограничения, отличная от $\mathbf{E}^n$. Тогда *относительная глубина области параметрического ограничения C по набору* $\widetilde{A}$ есть неотрицательное целое число, которое обозначается ниже через $\mathrm{otf}_{\widetilde{A}}\, C$ и находится следующим образом.

А. Если существует такой вектор $\boldsymbol{x}$ из A, что $\mathrm{sc}^1_{\boldsymbol{x}} C = \varnothing$, то $\mathrm{otf}_{\widetilde{A}}\, C = 0$.

Б. Если условие п. А не выполняется и существуют такие индекс j_{v-1} из P и вектор $\boldsymbol{x}$ из $\mathrm{spr}^1_j A$, что $\mathrm{sc}^2_{\boldsymbol{x}^{v-1, j_{v-1}}, \boldsymbol{x}} C = \varnothing$, то $\mathrm{otf}_{\widetilde{A}}\, C = 1$.

В. Если условия пп. А, Б не выполняются, найдем наибольшее целое число, при котором $\mathrm{sc}^p_{\boldsymbol{x}^{v-1, j_{v-1}}, \ldots, \boldsymbol{x}^{v-p+1, j_{v-p+1}}, \boldsymbol{x}} C \neq 0$ при всех $\boldsymbol{x}$ из $\mathrm{spr}^{p-1}_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-p+1}} A$, всех $\boldsymbol{x}^{v-1, j_{v-1}}$ из $A(v-1)$ и всех $\boldsymbol{x}^{v-i, j_{v-i}}$ из $\mathrm{spr}^{i-1}_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-i+1}} A(v-i)$ для любого i, $i = 2, \ldots, p-1$; положим $\mathrm{otf}_{\widetilde{A}}\, C = p$ (нетрудно видеть, что здесь $p \geqslant 2$).

Для указанных A и C приведем известную нижнюю оценку для мощности класса линейно-пороговых функций над A с областью параметрического ограничения C, см. [3, замечание к теореме 3]. Если $\widetilde{A}$ — правильный набор подмножеств над A, где $\widetilde{A}=(A(0),\ldots,A(v-1))$, $\operatorname{tif} A=q$, $\operatorname{otf}_{\widetilde{A}} C \geqslant q+1$, то

$$|\mathfrak{P}(A,C)| \geqslant (m-qm/v)(m/v)^q. \tag{17}$$

Пусть s, $s\in S_э$, — некоторый элементарный сдвиг, $l=2m/\beta$, где m — некоторое целое положительное число. Тогда *i-м подмножеством ограниченного импульсного множества с элементарным сдвигом s и высотой l* называется множество

$$\Lambda_0(i)=\left\{\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T,\ -(\boldsymbol{\delta}^t-y\boldsymbol{e}^T)\colon t\in\Psi(i),\ y=\frac{s(t)+k}{\beta},\ -\frac{l}{2}\leqslant y\leqslant\frac{l}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\},$$

где $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$, β — плотность квантования, $\Psi(0),\ldots,\Psi(T-1)$ — подмножества дискретизации с длительностью T, плотностью θ и локальным ограничением ρ. Множество $\Lambda_0=\bigcup\limits_{i=0}^{T-1}\Lambda_0(i)$ называется *ограниченным импульсным множеством с элементарным сдвигом s и высотой l*. Набор $\widetilde{\Lambda}_0=(\Lambda_0(0),\ldots,\Lambda_0(T-1))$ назовем (*ограниченным*) *импульсным набором* (*с высотой l*).

Базовое импульсное множество $\Delta=\bigcup\limits_{i=0}^{T-1}\Delta(i)$, набор $\widetilde{\Delta}=(\Delta(0),\ldots$ $\ldots,\Delta(T-1))$, подмножество $\Delta(i)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{E}^T\colon \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\delta}^t$ или $\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{\delta}^t;\ t\in\Psi(i)\}$ с соответствующими параметрами T, θ и ρ будем называть *базами* множества Λ_0, набора $\widetilde{\Lambda}_0$ и подмножества $\Lambda_0(i)$ соответственно. Вектор $\boldsymbol{\delta}^t$ будем называть *базой вектора* $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\delta}^t-\frac{s(t)+k}{\beta}\boldsymbol{e}^T$ $\Bigl($и вектора $(-\boldsymbol{\lambda})=-\Bigl(\boldsymbol{\delta}^t-\frac{s(t)+k}{\beta}\boldsymbol{e}^T\Bigr)\Bigr)$, а пару $(\boldsymbol{\delta}^t,-\boldsymbol{\delta}^t)$ будем называть *базой пары* $(\boldsymbol{\lambda},-\boldsymbol{\lambda})$. С учетом свойств базового импульсного множества Δ и подмножеств $\Delta(i)$ нетрудно заметить, что Λ_0 — квазинормированное множество, а набор $\widetilde{\Lambda}_0$ — правильный набор подмножеств, имеющий размерность $\dim\widetilde{\Lambda}_0$, равную $T+1$, длину $\operatorname{lan}\widetilde{\Lambda}_0=T$, локальную мощность (мощность каждого подмножества) $\operatorname{lmac}\widetilde{\Lambda}_0$ и мощность $\operatorname{mac}\Lambda_0$, причем

$$\beta l\rho\leqslant\operatorname{lmac}\widetilde{\Lambda}_0\leqslant(\beta l+1)\rho,\qquad T\beta l\rho\leqslant\operatorname{mac}\Lambda_0\leqslant T(\beta l+1)\rho.$$

Сформулируем теперь теорему, позволяющую получить нижние оценки для удельной энтропии класса линейно-пороговых функций.

Теорема 8 (о конструкции ограниченного импульсного множества). *Пусть Λ_0, $\Lambda_0\subset\mathbf{E}^{T+1}$, — ограниченное импульсное множество с длительностью дискретизации T, плотностью дискретизации θ, локальным ограничением ρ, плотностью квантования β и высотой l. Пусть $T\geqslant16$, $\rho\leqslant\theta/(20\pi\ln T)$, $l\leqslant3/4$. Тогда при любом элементарном сдвиге s из $S_э$ импульсный набор $\widetilde{\Lambda}_0=(\Lambda_0(0),\ldots,\Lambda_0(T-1))$ имеет глубину $\operatorname{tif}\widetilde{\Lambda}_0\geqslant T-2$, а базовый квадратный конус K_0 имеет относительную глубину по набору $\widetilde{\Lambda}_0$, удовлетворяющую неравенству $\operatorname{otf}_{\widetilde{\Lambda}_0}K_0\geqslant T$.*

Доказательство теоремы 8 проводится ниже, в пп. 2, 3. А сейчас покажем, как из данной теоремы и неравенства (17) получаются нижние оценки в соотношениях теоремы 7.

Действительно, при выполнении вышеуказанных условий для параметров T, θ, ρ, β и l из (17) следует, что

$$|\mathfrak{P}(\Lambda_0,K_0)|\geqslant(T\beta l\rho-(T-2)\beta l\rho)(\beta l\rho)^{T-2}=2(\beta l\rho)^{T-1},$$

и при $l=3/4$ получаем $|\mathfrak{P}(\Lambda_0,K_0)|\geqslant2(3\beta\rho/4)^{T-1}$. Отсюда $\log|\mathfrak{P}(\Lambda_0,K_0)|\gtrsim$ $\gtrsim T(\log\beta+\log\rho)$ (при $\beta\rho\to\infty$, $T\to\infty$). Поскольку $\Lambda_0\subset\Lambda_s$, где Λ_0 —

множество, имеющее ограниченную высоту, а Λ_s — множество, удовлетворяющее соотношению (15) и имеющее неограниченную высоту, имеем $|\mathfrak{P}(\Lambda_s, K_0)| \geqslant |\mathfrak{P}(\Lambda_0, K_0)|$.

Следовательно, $n_p(T, s, \theta, \rho, \beta) \geqslant 2(3\beta\rho/4)^{T-1}$ и $h_p(T, s, \theta, \rho, \beta) \gtrsim T(\log\beta + \log\rho)$, т. е. доказана нижняя оценка для утверждения *а*) теоремы 7. Далее, подставляя максимальное допустимое значение $c\theta/\log T$ параметра ρ, где c — константа, при $\log\log T = o(\log\beta\theta)$ получим нижнюю оценку для утверждения *б*) теоремы 7:

$$h_p(T, s, \theta, \theta, \beta) \gtrsim T(\log\beta + \log(c\theta/\log T)) \sim T(\log\beta + \log\theta).$$

2. Докажем, что импульсный набор Λ_0 есть линейно независимый правильный набор подмножеств. Введем функцию χ^p:

$$\chi^p(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu}{|p-t|}, & 0 < |p-t| \leqslant \dfrac{T}{2}, \\ \dfrac{\nu}{T-|p-t|}, & \dfrac{T}{2} < |p-t| < T, \\ \nu^2, & |p-t| = 0 \text{ или } |p-t| = T, \end{cases}$$

где $\nu = \pi\rho/(2\theta)$, $p, t \in [0, T]$. Вектор $\chi^i = (\chi^i(0), \ldots, \chi^i(k), \ldots, \chi^i(T-1))$, $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, будем называть *характеристическим вектором* или *функцией i-го подмножества базового импульсного множества* Δ (имеющего длительность T, плотность дискретизации θ и локальное ограничение ρ), поскольку компоненты этого вектора, как будет показано ниже, служат верхними оценками модулей соответствующих компонент любого вектора из множества $\Delta(i)$. В дальнейшем $\delta^p(k)$ будем обозначать также через δ^p_k, а $\chi^p(k)$ — через χ^p_k.

Докажем, что для любого вектора $\delta^{i+\tau/\theta} = (\delta^{i+\tau/\theta}(0), \ldots, \delta^{i+\tau/\theta}(T-1))$ при $-\rho/2 \leqslant \tau \leqslant \rho/2$, $\rho/\theta \leqslant 1/(12\pi\ln T)$, $T \geqslant 16$ выполняются соотношения

$$\begin{cases} 0 \leqslant 1 - |\delta^{i+\tau/\theta}_i| \leqslant \chi^i_i, \\ |\delta^{i+\tau/\theta}_k| \leqslant \chi^i_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, T-1, \quad k \neq i. \end{cases} \tag{18}$$

При $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in [0, \pi/2]$ имеем $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \leqslant \sin\alpha + \sin\beta$, поэтому при $|\tau| \leqslant \rho/2$ и указанных ограничениях на параметры T, θ и ρ получаем $\sin(\pi|\tau|/\theta) \leqslant T\sin(\pi|\tau|/(T\theta))$ и $|\delta^{i+\tau/\theta}(i)| = \dfrac{\sin(\pi\tau/\theta)}{T\sin(\pi\tau/(T\theta))} \leqslant 1$. С учетом оценки $\sin x \geqslant x - x^3/6$, справедливой при $x \geqslant 0$, имеем $\delta^{i+\tau/\theta}(i) = \dfrac{\sin(\pi\tau/\theta)}{T\sin(\pi\tau/(T\theta))} \geqslant \dfrac{\pi\tau/\theta - (1/6)(\pi\tau/\theta)^3}{\pi\tau/\theta} \geqslant 1 - \dfrac{\pi^2\tau^2}{6\theta^2}$.

Из полученных верхней и нижней оценок для $\delta^{i+\tau/\theta}(i)$ следует первое из неравенств (18): $|1 - |\delta^{i+\tau/\theta}_i|| \leqslant \dfrac{\pi^2\rho^2}{4\theta^2} = \nu^2 = \chi^i_i$.

Пусть теперь $i \neq k$. Тогда из соотношений $1 \leqslant |i-k| \leqslant T-1$, $T \geqslant 16$ и $\rho/\theta \leqslant \frac{1}{12\pi\ln T}$ получаем $\ln T \geqslant \ln 16 > 2{,}77$, $\frac{\pi}{T} < \frac{1}{5}$, $\frac{\tau}{\theta} \leqslant \frac{\rho}{2\theta} \leqslant \frac{1}{100}$ и $\cos\frac{\pi\tau}{T\theta} \geqslant \frac{99}{100}$, $\left|\sin\frac{\pi\tau}{T\theta}\right| \leqslant \frac{\pi}{100T}$, $\left|\sin\frac{(i-k)\pi}{T}\right| \geqslant \sin\frac{\pi}{T} \geqslant \frac{\pi}{T} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{T}\right)^3 \geqslant \frac{149}{150}\frac{\pi}{T}$ (использованы неравенства $\cos x \geqslant 1 - x^2/2$ и $x \geqslant \sin x \geqslant x - x^3/6$, $x \geqslant 0$). С учетом приведенных оценок имеем

$$\left|\sin\frac{\pi}{T}\left(i-k+\frac{\tau}{\theta}\right)\right| = \left|\sin\frac{(i-k)\pi}{T}\cos\frac{\pi\tau}{T\theta} + \cos\frac{(i-k)\pi}{T}\sin\frac{\pi\tau}{T\theta}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left(\cos\frac{\pi\tau}{T\theta} - \left|\frac{\sin\frac{\pi\tau}{T\theta}}{\sin\frac{(i-k)\pi}{T}}\right|\right)\left|\sin\frac{(i-k)\pi}{T}\right| \geqslant \left(\frac{99}{100} - \frac{\frac{\pi}{100T}}{\frac{149}{150}\frac{\pi}{T}}\right)\left|\sin\frac{(i-k)\pi}{T}\right| > \frac{9}{10}\left|\sin\frac{(i-k)\pi}{T}\right|,$$

$$|\delta^{i+\tau/\theta}_k| = \left|\frac{\sin\pi\left(i+\frac{\tau}{\theta}-k\right)}{T\sin\frac{\pi}{T}\left(i+\frac{\tau}{\theta}-k\right)}\right| \leqslant \frac{\frac{10}{9}\frac{\pi|\tau|}{\theta}}{T\left|\sin\frac{(i-k)\pi}{T}\right|}.$$

Далее, $\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; поэтому $\left|\sin \frac{(i-k)\pi}{T}\right| \geqslant \left|\frac{2(i-k)}{T}\right|$ при $|i-k| \leqslant \frac{T}{2}$ и $\left|\sin \frac{(i-k)\pi}{T}\right| \geqslant \frac{2(T-|i-k|)}{T}$ при $\frac{T}{2} \leqslant |i-k| < T$. Отсюда и из последней оценки для $|\delta_k^{i+\tau/\theta}|$ получаем $|\delta_k^{i+\tau/\theta}| \leqslant \frac{\pi\rho}{2\theta}\frac{1}{|i-k|} = \frac{\nu}{|i-k|} = \chi_k^i$ при $|i-k| \leqslant \frac{T}{2}$ и $|\delta_k^{i+\tau/\theta}| \leqslant \frac{\pi\rho}{2\theta}\frac{1}{(T-|i-k|)} = \frac{\nu}{T-|i-k|} = \chi_k^i$ при $\frac{T}{2} \leqslant |i-k| < T$.

Таким образом, все неравенства (18) доказаны.

Из определения характеристической функции $\chi^i(k)$ легко заметить, что она обладает свойствами симметричности и периодичности (при $i, k \in \{0, 1, \ldots, T\}$): $\chi_k^i = \chi_i^k = \chi_{|k-i|}^0 = \chi_{T-|k-i|}^0$.

Лемма 3. *Характеристические векторы удовлетворяют следующим соотношениям*:

а) $(\boldsymbol{\chi}^i \cdot \boldsymbol{\chi}^i) = (\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^0)$, $(\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^0) \leqslant 4\nu^2 + \nu^4$;

б) если $T \geqslant 16$, $\nu \leqslant 1/4$, $|i-j| = k \geqslant 1$, *то* $(\boldsymbol{\chi}^i \cdot \boldsymbol{\chi}^j) = (\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^k) \leqslant 4\nu^2(\ln k + 1)/k$ *при* $k \leqslant T/2$ *и* $(\boldsymbol{\chi}^i \cdot \boldsymbol{\chi}^j) = (\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^k) \leqslant 4\nu^2(\ln(T-k)+1)/(T-k)$ *при* $T/2 \leqslant k \leqslant T-1$.

Доказательство. Равенства $(\boldsymbol{\chi}^i \cdot \boldsymbol{\chi}^i) = (\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^0)$ и $(\boldsymbol{\chi}^i \cdot \boldsymbol{\chi}^j) = (\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^{|i-j|})$ вытекают из определения характеристической функции и ее свойств симметричности и периодичности. Например, второе равенство, в котором без ограничения общности считаем $i > j \geqslant 1$, можно вывести так:

$$(\boldsymbol{\chi}^i \cdot \boldsymbol{\chi}^j) = \sum_{k=0}^{j} \chi_k^i \chi_k^j + \sum_{k=j+1}^{i} \chi_k^i \chi_k^j + \sum_{k=i+1}^{T-1} \chi_k^i \chi_k^j =$$
$$= \sum_{k=0}^{j} \chi_{i-k}^0 \chi_{i-k}^{i-j} + \sum_{k=j+1}^{i} \chi_{i-k}^0 \chi_{i-k}^{i-j} + \sum_{k=i+1}^{T-1} \chi_{k-i}^0 \chi_j^k = \sum_{l=i-j}^{i} \chi_l^0 \chi_l^{i-j} + \sum_{l=0}^{i-j-1} \chi_l^0 \chi_l^{i-j} + \sum_{m=1}^{T-1-i} \chi_m^0 \chi_j^{m+i}.$$

Последнее слагаемое в полученной сумме преобразуем следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{T-1-i} \chi_m^0 \chi_j^{m+i} = \sum_{m=1}^{T-1-i} \chi_m^0 \chi_{m+i}^j = \sum_{m=1}^{T-1-i} \chi_{T-m}^0 \chi_{m+i}^j = \sum_{l=i+1}^{T-1} \chi_l^0 \chi_{T-l+i-j}^0 = \sum_{l=i+1}^{T-1} \chi_l^0 \chi_{l-i+j}^0 = \sum_{l=i+1}^{T-1} \chi_l^0 \chi_l^{i-j}.$$

В итоге получаем требуемое соотношение $(\boldsymbol{\chi}^i \cdot \boldsymbol{\chi}^j) = (\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^{i-j})$.

Оценим величину $(\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^0)$:

$$|\boldsymbol{\chi}^0|^2 = \sum_{k=0}^{T-1} (\chi_k^0)^2 = \nu^4 + 2\sum_{k=1}^{T/2} (\chi_k^0)^2 - (\chi_{T/2}^0)^2 = \nu^4 - \frac{4\nu^2}{T^2} + 2\nu^2 \sum_{k=1}^{T/2} \frac{1}{k^2} < 4\nu^2 + \nu^4.$$

Перейдем к оценке $(\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^k)$ при $k \neq 0$. Из определения и свойств симметричности и периодичности функции $\chi^i(t)$ следует, что

$$(\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^k) = \sum_{i=0}^{T-1} \chi_i^0 \chi_i^k = \sum_{i=0}^{T-1} \chi_{T-i}^0 \chi_{T-i}^{T-k} = \sum_{j=T}^{1} \chi_j^0 \chi_j^{T-k} = \sum_{j=0}^{T-1} \chi_j^0 \chi_j^{T-k} = (\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^{T-k});$$

поэтому оценку величины $(\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^k)$ достаточно сделать для $k = 1, \ldots, T/2$. Имеем $(\boldsymbol{\chi}^0 \cdot \boldsymbol{\chi}^k) = \sum_{i=0}^{k} \chi_i^0 \chi_i^k + \sum_{i=k+1}^{T/2} \chi_i^0 \chi_i^k + \sum_{i=T/2+1}^{T/2+k} \chi_i^0 \chi_i^k + \sum_{i=T/2+k+1}^{T-1} \chi_i^0 \chi_i^k$; суммы в правой части этого равенства обозначим соответственно через $a_1(k)$, $a_2(k)$, $a_3(k)$ и $a_4(k)$ и оценим отдельно.

Функция $f(t) = 1/t$ при $t > 0$ выпукла вниз, поэтому при натуральных i имеем $\frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{dt}{t}$. Складывая эти неравенства для $i = m, m+1, \ldots, n$, получаем

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i} \leqslant \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \ln\left(m - \frac{1}{2}\right). \qquad (19)$$

При натуральных m и n почти очевидна оценка

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i} \geqslant \ln(n+1) - \ln m. \tag{20}$$

Используя эти неравенства, получим оценки для $a_1(k), \ldots, a_4(k)$.

1. Из определения функции $\chi^p(t)$ получаем $a_1(1) = 2\nu^3$. При $k \geqslant 2$ имеем $a_1(k) = \frac{2\nu^3}{k} + \nu^2 \sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i(k-i)}$. Используя (19), получаем

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i(k-i)} = \sum_{i=1}^{k-i} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{k-i}\right) = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i} \leqslant \frac{2}{k}\left(\ln\left(k - \frac{1}{2}\right) + \ln 2\right),$$

откуда $a_1(k) \leqslant \frac{2\nu^3}{k} + \frac{2\nu^2}{k}\left(\ln\left(k - \frac{1}{2}\right) + \ln 2\right)$.

2. При $k = T/2$ выполнено равенство $a_2(k) = 0$. При $k \leqslant T/2 - 1$ имеем $a_2(k) = \nu^2 \sum\limits_{i=k+1}^{T/2} \frac{1}{i(i-k)}$. С учетом (19) и (20) получаем

$$a_2(k) = \frac{\nu^2}{k} \sum_{i=k+1}^{T/2} \left(\frac{1}{i-k} - \frac{1}{i}\right) = \frac{\nu^2}{k}\left(\sum_{i=1}^{T/2-k}\frac{1}{i} - \sum_{i=k+1}^{T/2}\frac{1}{i}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\nu^2}{k}\left(\ln\left(\frac{T}{2} - k + \frac{1}{2}\right) + \ln 2 - \left(\ln\frac{T+2}{2} - \ln(k+1)\right)\right) = \frac{\nu^2}{k}\ln\frac{2(T-2k+1)(k+1)}{T+2}.$$

3. При $k \leqslant T/2 - 1$ с учетом (19) получаем

$$a_3(k) \leqslant \nu^2 \sum_{i=T/2+1}^{T/2+k} \frac{1}{(T-i)(i-k)} = \frac{\nu^2}{T-k} \sum_{i=T/2+1}^{T/2+k}\left(\frac{1}{T-i} + \frac{1}{i-k}\right) =$$

$$= \frac{\nu^2}{T-k}\left(\sum_{i=T/2-k}^{T/2-1}\frac{1}{i} + \sum_{i=T/2+1-k}^{T/2}\frac{1}{i}\right) \leqslant \frac{\nu^2}{T-k}\left(\ln\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{T}{2} - k - \frac{1}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \ln\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{T}{2} - k + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\nu^2}{T-k}\ln\frac{(T-1)(T+1)}{(T-2k-1)(T-2k+1)}.$$

Если же $k = T/2$, то $a_3(k) = a_3(T/2) = a_3(T/2 - 1)$, поскольку верхний предел суммирования в определении суммы $a_3(k)$ не превосходит $T-1$.

4. Если $k \in \{T/2 - 1, T/2\}$, то $a_4(k) = 0$. Если же $k \leqslant T/2 - 2$, то с учетом (19) и (20) получаем

$$a_4(k) = \nu^2 \sum_{i=T/2+k+1}^{T-1} \frac{1}{(T-i)(T+k-i)} =$$

$$= \frac{\nu^2}{k} \sum_{i=T/2+k+1}^{T-1}\left(\frac{1}{T-i} - \frac{1}{T+k-i}\right) = \frac{\nu^2}{k}\left(\sum_{i=1}^{T/2-k-1}\frac{1}{i} - \sum_{i=k+1}^{T/2-1}\frac{1}{i}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\nu^2}{k}\left(\ln\left(\frac{T}{2} - k - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 - \ln\frac{T}{2} + \ln(k+1)\right) = \frac{\nu^2}{k}\ln\frac{2(T-2k-1)(k+1)}{T}.$$

В целом при $1 < k < T/2$ имеем

$$(\chi^0 \cdot \chi^k) \leqslant \frac{2\nu^3}{k} + \frac{2\nu^2}{k}\ln(2k-1) + \frac{\nu^2}{k}\ln\frac{2(T-2k+1)(k+1)}{T+2} + $$
$$+ \frac{\nu^2}{T-k}\ln\frac{(T+1)(T-1)}{(T-2k-1)(T-2k+1)} + \frac{\nu^2}{k}\ln\frac{2(T-2k-1)(k+1)}{T} =$$
$$= \frac{\nu^2}{k}\Big(2\nu + \ln\frac{(2k-1)^2(T-2k+1)(k+1)^2 2^2(T-2k-1)}{T(T+2)} +$$
$$+ \frac{k}{T-k}\ln\frac{(T+1)(T-1)}{(T-2k-1)(T-2k+1)}\Big).$$

Отсюда с учетом того, что $k/(T-k) \leqslant 1$ при $1 < k < T/2$, получаем

$$(\chi^0 \cdot \chi^k) \leqslant (\nu^2/k)\big(2\nu + 2\ln(2(2k-1)(k+1))\big). \qquad (21)$$

Если $k \geqslant 3$, то $(2k-1)(k+1) \leqslant 5k^2/2$, и из (21) следует, что $(\chi^0 \cdot \chi^k) \leqslant$ $\leqslant (\nu^2/k)(2\nu + 2\ln 5 + 4\ln k) < (\nu^2/k)(4 + 4\ln k)$, поскольку $2\nu + 2\ln 5 < 4$ при $\nu \leqslant 1/4$.

Неравенство $(\chi^0 \cdot \chi^k) \leqslant (4\nu^2/k)(1 + \ln k)$ при $k = 2$ и $\nu \leqslant 1/4$ следует из (21), поскольку $2\nu + 2\ln 18 < 4 + 4\ln 2$.

Пусть $k = 1$. Тогда при $T \geqslant 16$ и $\nu \leqslant 1/4$ получим

$$(\chi^0 \cdot \chi^1) = \sum_{i=1}^{4} a_i(1) \leqslant 2\nu^3 + \nu^2\ln\frac{2^2(T-1)}{T+2} + \frac{\nu^2}{T-1}\ln\frac{(T-1)(T+1)}{(T-3)(T-1)} +$$
$$+ \nu^2\ln\frac{2^2(T-3)}{T} \leqslant \nu^2(2\nu + \ln 16) < 4\nu^2,$$

т. е. $(\chi^0 \cdot \chi^1) \leqslant (4\nu^2/k)(1 + \ln k)$ при $k = 1$.

Пусть, наконец, $k = T/2$. При $T \geqslant 16$ и $\nu \leqslant 1/4$ получим

$$(\chi^0 \cdot \chi^1) = \sum_{i=1}^{4} a_i(T/2) \leqslant \frac{4\nu^3}{T} + \frac{4\nu^2}{T}\ln(T-1) +$$
$$+ \frac{2\nu^2}{T}\ln\frac{(T-1)(T+1)}{3} \leqslant \frac{8\nu^2}{T}\ln T < \frac{4\nu^2}{T/2}(\ln(T/2) + 1).$$

Следовательно, и при $k = T/2$ имеем $(\chi^0 \cdot \chi^k) \leqslant (4\nu^2/k)(\ln T + 1)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если* $\rho \leqslant \frac{\theta}{3\pi u \ln T}$, *где* $u > 1$, $T \geqslant 16$, *то* $(\chi^i \cdot \chi^p) \leqslant \frac{1-\nu^2}{u}\chi_p^i$ *при всех* i, $i \neq p$. (*Здесь, как и ранее,* $\nu = \pi\rho/(2\theta)$; $i, p \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.)

Доказательство. Из леммы 3 следует, что если $0 < |i-p| \leqslant$ $\leqslant T/2$, то

$$(\chi^i \cdot \chi^p) \leqslant \frac{4\nu^2}{|i-p|}(\ln|i-p| + 1) = \chi_p^i \cdot 4\nu(\ln|i-p| + 1) \leqslant \chi_p^i \cdot 4\nu\Big(\ln\frac{T}{2} + 1\Big),$$

а если $T/2 \leqslant |i-p| < T$, то

$$(\chi^i \cdot \chi^p) \leqslant \chi_p^i \cdot 4\nu(\ln(T - |i-p|) + 1) \leqslant \chi_p^i \cdot 4\nu\Big(\ln\frac{T}{2} + 1\Big).$$

С учетом условий леммы имеем $\nu < \frac{1}{6u\ln T}$, $\ln T > 2$, $\nu < \frac{1}{12}$, и потому

$$(\chi^i \cdot \chi^p) \leqslant 4\frac{\ln(T/2) + 1}{6u\ln T}\chi_p^i = \frac{2}{3}\frac{\ln T + 1 - \ln 2}{u\ln T}\chi_p^i < \frac{2}{3u}(1 + 1/2 - 1/4)\chi_p^i = \frac{5}{6u}\chi_p^i.$$

С другой стороны, из условий леммы получаем $1 - \nu^2 \geqslant 1 - \frac{1}{36u^2\ln^2 T} \geqslant$ $\geqslant 1 - \frac{1}{36\ln^2 16} > 1 - \frac{1}{36\cdot 4} > \frac{5}{6}$. В итоге из последних неравенств следует, что $(\chi^i \cdot \chi^p) \leqslant \frac{1-\nu^2}{u}\chi_p^i$. Лемма доказана.

Пусть теперь $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$,

$$\Psi_1(i) = \left\{t = i + \tfrac{\tau}{\theta}:\ -\tfrac{\rho}{2} \leqslant \tau \leqslant \tfrac{\rho}{2}\right\}, \qquad \Delta_1(i) = \{\delta^t,\ -\delta^t:\ t \in \Psi_1(i)\},$$

$$\Lambda_1(i) = \left\{\delta^t - ye^T,\ -(\delta^t - ye^T):\ t \in \Psi_1(i),\ y = \tfrac{s(t)+k}{\beta},\ -\tfrac{l}{2} \leqslant y \leqslant \tfrac{l}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\};$$

обратим внимание на то, что здесь у параметра τ возможны любые значения из отрезка $[-\rho/2, \rho/2]$, тогда как при определении величин $\Delta(i)$ и $\Lambda_0(i)$ допускались только целочисленные значения τ из интервала $[-\rho/2, \rho/2)$, а потому $\Delta(i) \subset \Delta_1(i)$ и $\Lambda_0(i) \subset \Lambda_1(i)$. Через $\delta_1^{(i)}$ и $\lambda_1^{(i)}$ обозначим произвольные фиксированные векторы из множеств $\Delta_1(i)$ и $\Lambda_1(i)$ соответственно.

Определим индуктивно последовательность векторов $\gamma^{(i,0)}, \gamma^{(i,1)}, \ldots$ $\ldots, \gamma^{(i,j)}, \ldots$

Базис индукции: $\gamma^{(i,0)} = \delta_1^{(i)}$.

Индуктивный переход ($j=1,2,3,\ldots$): $\gamma^{(i,j)} = \gamma^{(i,j-1)} - \sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{T-1} c_{i,k}^{j-1}\delta_1^{(k)}$, где $c_{i,k}^{j-1} = \gamma_k^{(i,j-1)}/\delta_{1,k}^{(k)}$.

Здесь $\delta_{1,k}^{(i)}$ и $\gamma_k^{(i,j-1)}$ суть k-е компоненты векторов $\delta_1^{(i)}$ и $\gamma^{(i,j-1)}$ соответственно. Из данного определения видно, что при любых $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ и $j = 1, 2, 3, \ldots$ векторы $\gamma^{(i,j)}$ являются линейными комбинациями векторов $\delta_1^{(0)}, \ldots, \delta_1^{(T-1)}$.

Лемма 5. *Если параметры T, θ и ρ, множества $\Delta_1 = \bigcup\limits_{i=0}^{T-1} \Delta_1(i)$ удовлетворяют условиям $\rho \leqslant \dfrac{\theta}{12\pi \ln T}$ и $T \geqslant 16$, то при $i \neq p$ имеем* $|\gamma_p^{(i,j)}| \leqslant 2^{-j}\chi_p^i$.

Доказательство проведем индукцией по j.

Базис индукции. При $j=0$ из определения величин $\gamma^{(i,0)}$ и неравенств (18) получаем $\gamma_p^{(i,0)} = |\delta_{1,p}^{(i)}| \leqslant \chi_p^i = 2^0\chi_p^i$.

Индуктивный переход. Пусть утверждение леммы верно при $j = r$. По условию $i \neq p$, поэтому $\gamma_p^{(i,r+1)} = \gamma_p^{(i,r)} - \dfrac{\gamma_p^{(i,r)}}{\delta_{1,p}^{(p)}}\delta_{1,p}^{(p)} - \sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i,p}}^{T-1} \dfrac{\gamma_k^{(i,r)}}{\delta_{1,k}^{(k)}}\delta_{1,p}^{(k)}$.

Отсюда $\gamma_p^{(i,r+1)} = -\sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i,p}}^{T-1} \dfrac{\gamma_k^{(i,r)}}{\delta_{1,k}^{(k)}}\delta_{1,p}^{(k)}$ и $|\gamma_p^{(i,r+1)}| \leqslant \sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i,p}}^{T-1} \dfrac{|\gamma_k^{(i,r)}|\cdot|\delta_{1,p}^{(k)}|}{|\delta_{1,k}^{(k)}|}$.

Для любого $\delta_1^{(k)}$, $\delta_1^{(k)} \in \Delta_1(k)$, согласно (18) выполняется неравенство $1/|\delta_{1,k}^{(k)}| < 1/(1-\nu^2)$, поэтому с учетом (18) получаем

$$|\gamma_p^{(i,r+1)}| \leqslant \frac{1}{1-\nu^2}\sum_{\substack{k=0\\k\neq i,p}}^{T-1} |\gamma_k^{(i,r)}|\cdot|\delta_{1,p}^{(k)}| \leqslant \frac{1}{1-\nu^2}\sum_{\substack{k=0\\k\neq i,p}}^{T-1} |\gamma_k^{(i,r)}|\chi_p^k.$$

Пользуясь индуктивным предположением и леммой 4, получаем

$$|\gamma_p^{(i,r+1)}| \leqslant \frac{1}{1-\nu^2}\sum_{\substack{k=0\\k\neq i,p}}^{T-1} 2^{-r}\chi_k^i\chi_p^k \leqslant \frac{2^{-r}}{1-\nu^2}(\chi^i\cdot\chi^p) \leqslant 2^{-(r+1)}\chi_p^i.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если $\rho \leqslant \theta/(12\pi \ln T)$, $T \geqslant 16$, то $|1 - \gamma_i^{(i,j)}| \leqslant 10\nu^2$ при любом $j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.*

Доказательство. Из определения вектора $\gamma^{(i,j)}$ имеем $\gamma_i^{(i,j)} = $ $= \gamma_i^{(i,j-1)} - \sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{T-1} \dfrac{\gamma_k^{(i,j-1)}}{\delta_{1,k}^{(k)}}\delta_{1,i}^{(k)}$. Применяя последовательно эту формулу для выражения значений $\gamma_i^{(i,j-1)}, \gamma_i^{(i,j-2)}, \ldots, \gamma_i^{(i,1)}$ и учитывая, что $\gamma_i^{(i,0)} = \delta_{1,i}^{(i)}$, получаем $\gamma_i^{(i,j)} = \delta_{1,i}^{(i)} - \sum_{r=0}^{j-1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{T-1} \frac{\gamma_k^{(i,r)}}{\delta_{1,k}^{(k)}}\delta_{1,i}^{(k)}$. Отсюда с учетом (18) и вытекающего из (18) неравенства $1/|\delta_{1,k}^{(k)}| \leqslant 1/(1-\nu^2)$ следует

$$|1-\gamma_i^{(i,j)}| \leqslant 1-\delta_{1,i}^{(i)} + \left|\sum_{r=0}^{j-1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{T-1} \frac{\gamma_k^{(i,r)}}{\delta_{1,k}^{(k)}}\delta_{1,i}^{(k)}\right| \leqslant \nu^2 + \frac{1}{1-\nu^2}\sum_{r=0}^{j-1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{T-1} |\gamma_k^{(i,r)}|\cdot|\delta_{1,i}^{(k)}|.$$

При $i \neq k$ из (18) следует $|\delta_{1,i}^{(k)}| \leqslant \chi_i^k$, а из леммы 5 получаем $|\gamma_k^{(i,r)}| \leqslant \leqslant 2^{-r}\chi_k^i$, поэтому

$$|1-\gamma_i^{(i,j)}| \leqslant \nu^2 + \frac{1}{1-\nu^2}\sum_{r=0}^{j-1} 2^{-r}\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{T-1}\chi_k^i\chi_i^k \leqslant \nu^2 + \frac{1}{1-\nu^2}\sum_{r=0}^{j-1}2^{-r}(\boldsymbol{\chi}^i\cdot\boldsymbol{\chi}^i).$$

Из последнего неравенства и леммы 3 с учетом условий доказываемой леммы получаем $|1-\gamma_i^{(i,j)}| < \nu^2 + 2(4\nu^2+\nu^4)/(1-\nu^2) < 10\nu^2$. Лемма доказана.

Пусть $\widetilde{e} = (\boldsymbol{e}^0, \ldots, \boldsymbol{e}^{T-1}, \boldsymbol{e}^T)$ — естественный базис пространства $\mathbf{E}^{T+1}$, а $\mathbf{E}^T$ — подпространство в $\mathbf{E}^{T+1}$, имеющее вид $\mathbf{E}^T = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}^{T+1}: (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}^T) = 0\}$. Тогда набор векторов $\widetilde{e}' = (\boldsymbol{e}^0, \ldots, \boldsymbol{e}^{T-1})$ есть естественный базис подпространства $\mathbf{E}^T$. Очевидно, что $\Delta_1(i) = \mathrm{pr}_{e^T}\Lambda_1(i)$.

Лемма 7. *Пусть $\Lambda_1 \subset \mathbf{E}^{T+1}$ — множество векторов с набором параметров $(T, \theta, \rho, \beta, l)$ и функцией элементарного сдвига $s(t)$. Тогда при $\rho \leqslant \theta/(12\pi \ln T)$, $T \geqslant 16$ и $s(t) \in S_9$ набор $\widetilde{\Lambda}_1 = (\Lambda_1(0), \ldots, \Lambda_1(T-1))$ над множеством Λ_1 и набор $\widetilde{\Delta}_1 = (\Delta_1(0), \ldots, \Delta_1(T-1))$ являются линейно независимыми наборами.*

Доказательство. Покажем вначале, что $\widetilde{\Delta}_1 = (\Delta_1(0), \ldots, \Delta_1(T-1))$ — линейно независимый набор. Для этого достаточно показать, что любой вектор естественного базиса $\widetilde{e}' = (\boldsymbol{e}^0, \ldots, \boldsymbol{e}^{T-1})$ можно выразить линейной комбинацией любой системы векторов $\widetilde{\delta}_1 = (\boldsymbol{\delta}_1^{(0)}, \ldots, \boldsymbol{\delta}_1^{(T-1)})$, где $\boldsymbol{\delta}_1^{(k)} \in \Delta_1(k)$ для всех $k \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$; другими словами, достаточно показать, что при любом i, $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, существуют действительные числа c_k^i, удовлетворяющие равенству $\boldsymbol{e}^i = \sum_{k=0}^{T-1} c_k^i \boldsymbol{\delta}_1^{(k)}$. При этом система $\widetilde{\delta}_1$ оказывается эквивалентной системе $\widetilde{e}'$, а поскольку $\widetilde{e}'$ — линейно независимая система, то и система $\widetilde{\delta}_1$ линейно независима.

Из леммы 5 при $p \neq i$ получаем

$$0 \leqslant \lim_{j\to\infty} |\gamma_p^{(i,j)}| \leqslant \lim_{j\to\infty} 2^{-j}\chi_p^i. \tag{22}$$

Из леммы 6 следует, что $|1-|\gamma_i^{(i,j)}|| \leqslant 10\nu^2$ и

$$1 - 10\nu^2 \leqslant |\gamma_i^{(i,j)}| \leqslant 1 + 10\nu^2, \tag{23}$$

т. е. $|\gamma_i^{(i,j)}| > 0$ при $j = 0, 1, 2, \ldots$ Из соотношений (22) и (23) следует, что либо $\lim_{j\to\infty} \frac{\boldsymbol{\gamma}^{(i,j)}}{|\gamma_i^{(i,j)}|} = \boldsymbol{e}^i$, либо $\lim_{j\to\infty} \frac{\boldsymbol{\gamma}^{(i,j)}}{|\gamma_i^{(i,j)}|} = -\boldsymbol{e}^i$ (при любом $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$). Вектор $\boldsymbol{\gamma}^{(i,j)}$ есть линейная комбинация векторов системы $\widetilde{\delta}_1$, а вектор $\boldsymbol{e}^i$

есть линейная комбинация векторов $\gamma^{(i,j)}$, где $j=0,1,2,\ldots$, поэтому вектор e^i при любом i, $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$, выражается в виде линейной комбинации векторов системы $\widetilde{\delta}_1$. Следовательно, $\widetilde{\delta}_1$ — линейно независимая система векторов.

Из линейной независимости набора $\widetilde{\Delta}_1$ и равенства $\Delta_1(i)=\mathrm{pr}_{e^T}\Delta_1(i)$, $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$, следует, что любая система векторов вида $\mathrm{pr}_{e^T}\widetilde{\lambda}_1 = (\mathrm{pr}_{e^T}\boldsymbol{\lambda}_1^{(0)},\ldots,\mathrm{pr}_{e^T}\boldsymbol{\lambda}_1^{(T-1)})$, где $\boldsymbol{\lambda}_1^{(i)}\in\Lambda_1(i)$ при любом i, $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$, является линейно независимой. Отсюда следует, что и система $\widetilde{\Lambda}_1$ линейно независима. Лемма доказана.

3. Перейдем теперь к доказательству того, что свертывающиеся проекции порядка $q\leqslant T-2$ любых двух различных векторов из одного и того же подмножества $\Lambda_0(i)$, где $i=0,1,\ldots,T-1$, не составляющие одну пару, не коллинеарны. Это доказательство сводится к ряду лемм; одни из них раскрывают свойства проекций высокого порядка, другие дают достаточный признак кусочной неколлинеарности годографа векторов, а третьи выявляют признак неколлинеарности у базового импульсного множества.

Системы векторов $\widetilde{\delta}=(\boldsymbol{\delta}^{(0)},\ldots,\boldsymbol{\delta}^{(T-1)})$ и $\widetilde{\lambda}=(\boldsymbol{\lambda}^{(0)},\ldots,\boldsymbol{\lambda}^{(T-1)})$, составленные из произвольных элементов соответствующих подмножеств наборов $\widetilde{\Delta}=(\Delta(0),\ldots,\Delta(T-1))$ и $\widetilde{\Lambda}_0=(\Lambda_0(0),\ldots,\Lambda_0(T-1))$, будем называть *представительными выборками* наборов $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\Lambda}_0$ соответственно.

Лемма 8. *Пусть Λ_0 — ограниченное импульсное множество, $\Lambda_0\subset\mathbb{E}^{T+1}$, и пусть $\widetilde{\Lambda}_0$ — импульсный набор над Λ_0, $\widetilde{\Lambda}_0=(\Lambda_0(0),\ldots,\Lambda_0(T-1))$. Пусть, далее, $\widetilde{\lambda}=(\boldsymbol{\lambda}^{(0)},\ldots,\boldsymbol{\lambda}^{(T-1)})$ — представительная выборка набора $\widetilde{\Lambda}_0$, а $e^T=(0,\ldots,0,1)$ есть $(T+1)$-й вектор естественного базиса $\widetilde{e}$ пространства $\mathbb{E}^{T+1}$. Тогда если базой набора $\widetilde{\Lambda}_0$ служит набор $\widetilde{\Delta}=(\Delta(0),\ldots,\Delta(T-1))$, являющийся линейно независимым набором подмножеств, то $\widetilde{\lambda}'=(\boldsymbol{\lambda}^{(0)},\ldots,\boldsymbol{\lambda}^{(T-1)},e^T)$ — линейно независимая система векторов пространства $\mathbb{E}^{T+1}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такой набор чисел $(c_0,\ldots,c_T)$, среди которых хотя бы одно не равно нулю, что $c_Te^T+\sum\limits_{i=0}^{T-1}c_i\boldsymbol{\lambda}^{(i)}=0$. По условию $e^T\neq0$, поэтому случай $c_0=\ldots=c_{T-1}=0$, $c_T\neq0$ исключается и хотя бы одно из чисел $c_0,\ldots,c_{T-1}$ должно быть отличным от нуля; будем считать, что $c_k\neq0$. Тогда существуют такие $c_i'\in\mathbb{R}$, что $\boldsymbol{\delta}^{(k)}+\sum\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{T-1}c_i'\boldsymbol{\delta}^{(i)}+c_T'e^T$, где $\widetilde{\delta}=(\boldsymbol{\delta}^{(0)},\ldots,\boldsymbol{\delta}^{(T-1)})$ — представительная выборка набора $\widetilde{\Delta}$ (напомним, что любой вектор $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$ из $\Lambda_0(i)$ при всех $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$ выражается в виде $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}=\boldsymbol{\delta}^{(i)}+y_ie^T$, $y_i\in\mathbb{R}$). Коэффициент c_T' не может быть равен нулю, так как в противном случае $\sum\limits_{i=0}^{T-1}c_i'\boldsymbol{\delta}^{(i)}=0$, и $c_k'=1$ при $k\in\{0,\ldots,T-1\}$, что означает линейную зависимость системы $(\boldsymbol{\delta}^{(0)},\ldots,\boldsymbol{\delta}^{(T-1)})$, а это противоречит условию линейной независимости базы $\widetilde{\Delta}$. Следовательно, существуют такие коэффициенты $c_0'',\ldots,c_{T-1}''\in\mathbb{R}$, что $e^T=\sum\limits_{i=0}^{T-1}c_i''\boldsymbol{\delta}^{(i)}$. Отсюда следует, что $(e^T\cdot e^T)=\sum\limits_{i=0}^{T-1}c_i''(\boldsymbol{\delta}^{(i)}\cdot e^T)$. Но $\boldsymbol{\delta}^{(i)}\in\mathbb{E}^T$ и $\mathbb{E}^T=\{\boldsymbol{x}\colon(\boldsymbol{x}\cdot e^T)=0\}$, поэтому $(\boldsymbol{\delta}^{(i)}\cdot e^T)=0$ при всех $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$. С другой стороны, $(e^T\cdot e^T)=1$, т. е. мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть* $\widetilde{\Lambda}_0$, $\widetilde{\Lambda}_0=(\Lambda_0(0),\ldots,\Lambda_0(T-1))$, *— ограниченный импульсный набор, имеющий базу* $\widetilde{\Delta}=(\Delta(0),\ldots,\Delta(T-1))$, *где* $\Lambda_0(i)\subset\mathbf{E}^{T+1}$ *и* $\Delta(i)\subset\mathbf{E}^T$ *при всех* $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$, $\mathbf{E}^T=\{\boldsymbol{x}\colon(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}^T)=0\}$, $\boldsymbol{e}^T$ *есть* $(T+1)$*-й вектор естественного базиса пространства* $\mathbf{E}^{T+1}$. *Тогда если* $\widetilde{\Delta}$ *— линейно независимый набор, то свертывающаяся относительно* $\widetilde{\Lambda}_0$ *проекция обладает свойством* $\mathrm{spr}^q_{j_{T-1},\ldots,j_{T-q}}\,\boldsymbol{e}^T\neq 0$ *при всех* $q\in\{1,\ldots,T-2\}$, *где* $j_{T-1},\ldots,j_{T-q}$ *— набор индексов векторов из* $\Lambda_0(T-1),\ldots,\Lambda_0(T-q)$ *соответственно.*

Доказательство. Имеем $\mathrm{spr}^q_{j_{T-1},\ldots,j_{T-q}}\,\boldsymbol{e}^T=\boldsymbol{e}^T+\sum\limits_{i=T-1}^{T-q}c_i\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)}$, где $c_i\in\mathbb{R}$ при всех $i\in\{T-q,T-q+1,\ldots,T-1\}$. Предположим противное, т. е. пусть $\mathrm{spr}^q_{j_{T-1},\ldots,j_{T-q}}\,\boldsymbol{e}^T=0$. Тогда $\boldsymbol{e}^T+\sum\limits_{i=T-1}^{T-q}c_i\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)}=0$. Следовательно, система $\widetilde{\lambda}'=(\boldsymbol{\lambda}^{(0)},\ldots,\boldsymbol{\lambda}^{(T-1)},\boldsymbol{e}^T)$ линейно зависима. А этого в силу леммы 8 быть не может. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть* $\widetilde{A}=(A(0),\ldots,(v-1))$ *— произвольный линейно независимый набор подмножеств, заданных в пространстве* $\mathbf{E}^n$, *и пусть* $p\in\{1,\ldots,v-1\}$, $\boldsymbol{\lambda}\in\bigcup\limits_{i=0}^{v-1-p}A(i)$, $\boldsymbol{\lambda}^{(v-1,j_{v-1})}\in A(v-1)$, $\ldots$, $\boldsymbol{\lambda}^{(v-p,j_{v-p})}\in A(v-p)$, *где* $j_{v-1},\ldots,j_{v-p}$ *— индексы, определяющие векторы внутри подмножеств* $A(v-1),\ldots,A(v-p)$ *соответственно. Тогда существует только один вектор* $\boldsymbol{\beta}$ *из* $\mathbf{E}^n$, *представимый в виде линейной комбинации* $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\lambda}+\sum\limits_{i=v-1}^{v-p}c_i\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)}$, *где* $c_i\in\mathbb{R}$ *при всех* $i\in\{v-p,\ldots,v-1\}$, *и удовлетворяющий при этом системе из* p *уравнений* $(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)})=0$, *которые составлены для всех значений* $i\in\{v-p,\ldots,v-1\}$. *При этом указанный вектор* $\boldsymbol{\beta}$ *удовлетворяет соотношению* $\boldsymbol{\beta}=\mathrm{spr}^p_{j_{v-1},\ldots,j_{v-p}}\,\boldsymbol{\lambda}$.

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости утверждения о единственности вектора $\boldsymbol{\beta}$. Предположим, что условиям леммы удовлетворяют два вектора, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\beta}'$; обозначим $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'$. Тогда $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)})=0$ при всех $i\in\{v-p,\ldots,v-1\}$ и, кроме того, $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=v-1}^{v-p}c_i'\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)}$, где $c_i'\in\mathbb{R}$ при $i\in\{v-p,\ldots,v-1\}$, т. е. $\boldsymbol{\alpha}$ есть линейная комбинация системы из p векторов $\widetilde{\lambda}^p=(\boldsymbol{\lambda}^{(v-1,j_{v-1})},\ldots,\boldsymbol{\lambda}^{(v-p,j_{v-p})})$. Система $\widetilde{\lambda}_p$ линейно независима по условию, поэтому ее линейная оболочка образует некоторое p-мерное пространство $\mathbf{E}^p$, являющееся подпространством в $\mathbf{E}^n$. Это означает, что $\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)}\in\mathbf{E}^p$ при $i\in\{v-p,\ldots,v-1\}$ и $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{E}^p$, так как $\boldsymbol{\alpha}$ — линейная комбинация векторов системы $\widetilde{\lambda}^p$. Система уравнений $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)})=0$, где $i=v-p,\ldots,v-1$, однородна относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{\alpha}$ и состоит из p уравнений, составленных для p линейно независимых векторов, поэтому она имеет единственное решение $\boldsymbol{\alpha}=0$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'=\mathbf{0}$ и, значит, $\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\beta}$.

Возьмем теперь вектор $\boldsymbol{\beta}=\mathrm{spr}^p_{j_{v-1},\ldots,j_{v-p}}\,\boldsymbol{\lambda}$. В силу определения свертывающейся проекции существуют такие коэффициенты $c_{v-1},\ldots,c_{v-p}\in\mathbb{R}$, что $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\lambda}+\sum\limits_{i=v-p}^{v-1}c_i\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)}$. С другой стороны, из того же определения следует, что $(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)})=0$ при всех $i\in\{v-p,\ldots,v-1\}$. Таким образом, указанный вектор $\boldsymbol{\beta}$ — искомый. Лемма доказана.

Пусть $\widetilde{A}=(A(0),\ldots,A(v-1))$ — набор подмножеств в $\mathbf{E}^n$, $n\geqslant v$; пусть, далее, $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$ — произвольный вектор в $A(i)$, т. е. $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}\in A(i)$, $i\in\{0,1,\ldots,v-1\}$. Набор подмножеств вида $\widetilde{\lambda}^{(\pm)}=((\pm\boldsymbol{\lambda}^{(0)}),\ldots,(\pm\boldsymbol{\lambda}^{(v-1)}))$ будем называть *симметричной представительной выборкой набора* $\widetilde{A}$.

Пусть $\boldsymbol{\mu}\in\mathbf{E}^n$. Набор вида $\widetilde{\lambda}^{(\pm),i}=((\pm\boldsymbol{\lambda}^{(0)}),\ldots,(\pm\boldsymbol{\lambda}^{(i-1)}),\ (\pm\boldsymbol{\mu}),\ (\pm\boldsymbol{\lambda}^{(i)}),\ldots,(\pm\boldsymbol{\lambda}^{(v-1)}))$ назовем *расширением* (в окрестности i по вектору $\boldsymbol{\mu}$) симметричной представительной выборки $\widetilde{\lambda}^{(\pm)}$. Длина $\operatorname{lan}(\widetilde{\lambda}^{(\pm),i})$ этого набора равна $v+1$. Очевидно, что если $\widetilde{A}$ — линейно независимый набор, то и любая симметричная представительная выборка набора $\widetilde{A}$ — также линейно независимый набор подмножеств (симметричных пар).

Лемма 11. *Пусть $\widetilde{\Lambda}_0$ — импульсный набор над ограниченным импульсным множеством $\Lambda_0\subset\mathbf{E}^{T+1}$, $\widetilde{\Lambda}_0=(\Lambda_0(0),\ldots,\Lambda_0(T-1))$. Пусть $\widetilde{\Delta}$ — база набора $\widetilde{\Lambda}_0$, $\widetilde{\Delta}=(\Delta(0),\ldots,\Delta(T-1))$. Пусть Δ — база импульсного множества Λ_0, $\Delta\subset\mathbf{E}^T\subset\mathbf{E}^{T+1}$, и при этом $\widetilde{\Delta}$ — линейно независимый набор.*

Пусть $\widetilde{\lambda}^{(\pm)}=((\pm\boldsymbol{\lambda}^{(0,j_0)}),\ldots,(\pm\boldsymbol{\lambda}^{(T-1,j_{T-1})}))$ — любая симметричная представительная выборка набора $\widetilde{\Lambda}_0$ (здесь, как и ранее, j_i — номер, присвоенный вектору $\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)}$ внутри группы $\Lambda_0(i)$, $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$), $\widetilde{\delta}^{(\pm)}=((\pm\boldsymbol{\delta}^{(0)}),\ldots,(\pm\boldsymbol{\delta}^{(T-1)}))$ — база набора $\widetilde{\lambda}^{(\pm)}$, представляющая собой некоторую симметричную представительную выборку набора $\widetilde{\Delta}$, т. е. $\boldsymbol{\delta}^{(i)}\in\Delta(i)$, $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$.

Пусть вектор $\boldsymbol{\delta}^{(i)}$, входящий в i-е подмножество набора $\widetilde{\delta}^{(\pm)}$, имеет номер q_i в i-м подмножестве $\Delta(i)$, которому $\boldsymbol{\delta}^{(i)}$ принадлежит, т. е. $\widetilde{\delta}^{(\pm)}=((\pm\boldsymbol{\delta}^{(0,q_0)}),\ldots,(\pm\boldsymbol{\delta}^{(T-1,q_{T-1})}))$. Пусть, наконец, $\widetilde{\lambda}^{(\pm),T-p}=((\pm\boldsymbol{\lambda}^{(0,j_0)}),\ldots,(\pm\boldsymbol{\lambda}^{(T-p-1,j_{T-p-1})}),\ (\pm\boldsymbol{\lambda}^{(T,j_T)}),\ (\pm\boldsymbol{\lambda}^{(T-p,j_{T-p})}),\ldots$ $\ldots,(\pm\boldsymbol{\lambda}^{(T-1,j_{T-1})}))$ — расширение выборки $\widetilde{\lambda}^{(\pm)}$ в окрестности $(T-p)$ по вектору $\boldsymbol{\lambda}^{(T,j_T)}$, и при этом $\boldsymbol{\lambda}^{(T,j_T)}=\boldsymbol{e}^T$, где $\boldsymbol{e}^T$ есть $(T+1)$-й вектор естественного базиса пространства $\mathbf{E}^{T+1}$.

Тогда свертывающиеся проекции относительно наборов $\widetilde{\lambda}^{(\pm),T-p}$ и $\widetilde{\delta}^{(\pm)}$ при любых $i\in\{0,1,\ldots,T-p-1\}$ и $p\in\{1,2,\ldots,T-1\}$ обладают свойством $\operatorname{spr}^{p+1}_{j_{T-1},\ldots,j_{T-p},j_T}\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)}=\operatorname{spr}^{p}_{q_{T-1},\ldots,q_{T-p}}\boldsymbol{\delta}^{(i,q_i)}$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{spr}^{p+1}_{j_{T-1},\ldots,j_{T-p},j_T}\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)}=\boldsymbol{\beta}'$. По лемме 8 набор $\widetilde{\lambda}^{(\pm),T-p}$ — линейно независимый. Из леммы 10 следует, что $\boldsymbol{\beta}'$ есть единственное решение системы уравнений

$$\left\{\begin{aligned}&(\boldsymbol{\beta}'\cdot\boldsymbol{\lambda}^{(r,j_r)})=0, \qquad r=T-p,\ldots,T,\\&\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\lambda}^{(i,j_i)}+\sum_{r=T-p}^{T}c'_r\boldsymbol{\lambda}^{(r,j_r)},\end{aligned}\right.$$

где c'_r — некоторые заранее не известные действительные числа, $r\in\{T-p,\ldots,T\}$. С учетом принятых обозначений эту систему можно представить в следующем виде:

$$\left\{\begin{aligned}&(\boldsymbol{\beta}'\cdot\boldsymbol{e}^T)=0,\\&(\boldsymbol{\beta}'\cdot\boldsymbol{\delta}^{(r,q_r)})+y_r(\boldsymbol{\beta}'\cdot\boldsymbol{e}^T)=0, \qquad r=T-p,\ldots,T-1,\\&\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\delta}^{(i,q_i)}+y_i\boldsymbol{e}^T+c'_T\boldsymbol{e}^T+\sum_{r=T-p}^{T-1}c'_r(\boldsymbol{\delta}^{(r,q_r)}+y_r\boldsymbol{e}^T).\end{aligned}\right.$$

Последняя система, как нетрудно заметить, эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{e}^T) = 0, \\ (\boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\delta}^{(r, q_r)}) = 0, \qquad r = T - p, \ldots, T - 1, \\ \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\delta}^{(i, q_i)} + c_T^0 \boldsymbol{e}^T + \sum\limits_{r = T - p}^{T - 1} c_r' \boldsymbol{\delta}^{(r, q_r)}, \end{cases}$$

где $c_T^0 = y_i + c_T' + \sum\limits_{r = T - p}^{T - 1} c_r' y_r$. Из равенства $(\boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{e}^T) = 0$ следует, что $\boldsymbol{\beta}' \in \mathbf{E}^T$ $(\mathbf{E}^T = \{\boldsymbol{x}\colon (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^T) = 0\})$, поэтому $c_T^0 = 0$. Следовательно, последняя система уравнений эквивалентна такой:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{e}^T) = 0, \\ (\boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\delta}^{(r, q_r)}) = 0, \qquad r = T - p, \ldots, T - 1, \\ \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\delta}^{(i, q_i)} + \sum\limits_{r = T - p}^{T - 1} c_r' \boldsymbol{\delta}^{(r, q_r)}. \end{cases} \tag{24}$$

С другой стороны, также на основании леммы 10 получаем, что $\boldsymbol{\beta}'' = \operatorname{spr}^p_{q_{T-1}, \ldots, q_{T-p}} \boldsymbol{\delta}^{(i, q_i)}$ есть единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\beta}'' \cdot \boldsymbol{\delta}^{(r, q_r)}) = 0, \qquad r = T - p, \ldots, T - 1, \\ \boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\delta}^{(i, q_i)} + \sum\limits_{r = T - p}^{T - 1} c_r'' \boldsymbol{\delta}^{(r, q_r)}, \end{cases} \tag{25}$$

где c_r'' — некоторые заранее не известные действительные числа, $r \in \{T - p, \ldots, T - 1\}$.

В системах (24) и (25) векторы $\boldsymbol{\beta}'$ и $\boldsymbol{\beta}''$ однозначно определяются совокупностями коэффициентов c_r' и c_r'' соответственно, $r \in \{T - p, \ldots, T - 1\}$. Поэтому неизвестными в указанных системах можно считать данные коэффициенты. При этом каждая из систем имеет единственное решение. С учетом того, что $\boldsymbol{\delta}^{(r, q_r)} \in \Delta$, $\Delta \subset \mathbf{E}^T$ и, следовательно, $(\boldsymbol{\beta}'' \cdot \boldsymbol{e}^T) = 0$, замечаем эквивалентность систем (24) и (25).

Следовательно $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}''$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть Λ_0 — ограниченное импульсное множество, $\Lambda_0 \subset \mathbf{E}^{T+1}$. Пусть $\widetilde{\Lambda}_0$ — импульсный набор над множеством Λ_0, $\widetilde{\Lambda}_0 = (\Lambda_0(0), \ldots, \Lambda_0(T - 1))$. Пусть $\widetilde{\Delta}$ — линейно независимый набор, являющийся базой набора $\widetilde{\Lambda}_0$, $\widetilde{\Delta} = (\Delta(0), \ldots, \Delta(T - 1))$. Тогда для того чтобы набор $\widetilde{\Lambda}_0$ имел глубину p, $p \leqslant T - 2$, достаточно, чтобы глубина его базы $\widetilde{\Delta}$ также была равна p.*

Доказательство. По условию набор $\widetilde{\Delta}$ линейно независимый. Тогда согласно лемме 8 и набор $\widetilde{\Lambda}_0$ будет также линейно независимым.

Любой линейно независимый набор $\widetilde{A} = (A(0), \ldots, A(v - 1))$ обладает следующим свойством (оно обосновано при доказательстве леммы 3 в [3]): чтобы он имел глубину не менее q, необходимо и достаточно, чтобы для любого i, $i = 1, 2, \ldots, q$, любого индексного набора $(j_{v-1}, \ldots, j_{v-i})$, где $j_{v-1}, \ldots, j_{v-i} \in P$, любого $\sigma \in \{-1, 1\}$ и любых k, $k = 0, 1, \ldots, v - (i + 1)$, и $j_k' \neq j_k''$ выполнялось неравенство

$$\operatorname{nr}(\operatorname{spr}^i_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-i}} \boldsymbol{x}^{k, j_k'}) \neq \sigma \operatorname{nr}(\operatorname{spr}^i_{j_{v-1}, \ldots, j_{v-i}} \boldsymbol{x}^{k, j_k''}).$$

В нашем случае с учетом линейной независимости набора $\widetilde{\Lambda}_0$ и указанного свойства достаточно показать, что свертывающиеся относительно $\widetilde{\Lambda}_0$

проекции порядка p любых двух различных векторов из одного и того же подмножества $\Lambda_0(i)$, не составляющих одну пару, не коллинеарны.

Возможны два случая.

1. Пусть векторы $\boldsymbol{\lambda}'$ и $\boldsymbol{\lambda}''$ из $\Lambda_0(i)$, $\boldsymbol{\lambda}' \neq \boldsymbol{\lambda}''$, имеют одну и ту же базу, равную вектору $\boldsymbol{\delta}$ из $\Delta(i)$. В этом случае в силу определения импульсного множества имеем $\boldsymbol{\lambda}' - \boldsymbol{\lambda}'' = y\boldsymbol{e}^T$, где $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Свертывающаяся проекция разности двух векторов, очевидно, равна разности свертывающихся проекций этих векторов, поэтому из леммы 9 следует, что свертывающиеся проекции векторов $\boldsymbol{\lambda}'$ и $\boldsymbol{\lambda}''$ любого порядка, не превышающего $T-2$, не равны друг другу, так как свертывающаяся проекция вектора $\boldsymbol{e}^T$ не равна нулю.

Пусть вектор $\boldsymbol{\lambda}'$ и все те векторы, по которым берется свертывающаяся проекция вектора $\boldsymbol{\lambda}'$, входят в некоторую симметричную представительную выборку $\widetilde{\lambda}_1^{(\pm)}$ набора $\widetilde{\Lambda}_0$. Пусть $\widetilde{\delta}^{(\pm)} = ((\pm\boldsymbol{\delta}^{(0)}), \ldots, (\pm\boldsymbol{\delta}^{(T-1)}))$ — база набора $\widetilde{\lambda}_1^{(\pm)}$, а $\widetilde{\lambda}_1^{(\pm), T-p}$ — расширение выборки $\widetilde{\lambda}_1^{(\pm)}$ в окрестности $(T-p)$ по вектору $\boldsymbol{e}^T$. Обозначим через $\boldsymbol{\beta}'$ и $\boldsymbol{\alpha}$ свертывающиеся относительно наборов $\widetilde{\lambda}_1^{(\pm)}$ и $\widetilde{\delta}^{(\pm)}$ проекции векторов $\boldsymbol{\lambda}'$ и $\boldsymbol{\delta}$ порядка не более p. (Отметим, что $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{E}^T$, т. е. $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{e}^T) = 0$.) Из леммы 11 следует, что $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\alpha} + c'\boldsymbol{e}^T$, $c' \in \mathbb{R}$. Аналогичным образом для вектора $\boldsymbol{\beta}''$, являющегося соответствующей свертывающейся проекцией вектора $\boldsymbol{\lambda}''$, получаем, что $\boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\alpha} + c''\boldsymbol{e}^T$, $c'' \in \mathbb{R}$. Глубина базы $\widetilde{\Delta}$ равна p, поэтому $\boldsymbol{\alpha}$ — ненулевой вектор. В итоге имеем: $c' \neq c''$; $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$; $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{E}^T$; $\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\beta}'' \in \mathbf{E}^{T+1}$. Последние соотношения, очевидно, означают, что векторы $\boldsymbol{\beta}'$ и $\boldsymbol{\beta}''$ не коллинеарны.

2. Пусть векторы $\boldsymbol{\lambda}'$ и $\boldsymbol{\lambda}''$ из $\Lambda_0(i)$ имеют разные базы, равные векторам $\boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'' \in \Delta(i)$ соответственно, причем $\boldsymbol{\delta}' \neq -\boldsymbol{\delta}''$.

Возьмем симметричную представительную выборку $\widetilde{\lambda}_1^{(\pm)}$ набора $\widetilde{\Lambda}_0$, содержащую вектор $\boldsymbol{\lambda}'$ и все те векторы, по которым берется свертывающаяся проекция вектора $\boldsymbol{\lambda}'$. Пусть $\widetilde{\delta}_1^{(\pm)} = ((\pm\boldsymbol{\delta}^{(0)}), \ldots, (\pm\boldsymbol{\delta}^{(T-1)}))$ — база набора $\widetilde{\lambda}_1^{(\pm)}$, а $\widetilde{\lambda}_1^{(\pm), T-p}$ — расширение выборки $\widetilde{\lambda}_1^{(\pm)}$ в окрестности $(T-p)$ по вектору $\boldsymbol{e}^T$. Обозначим через $\boldsymbol{\beta}'$ и $\boldsymbol{\alpha}'$ свертывающиеся относительно наборов $\widetilde{\lambda}_1^{(\pm)}$ и $\widetilde{\delta}_1^{(\pm)}$ соответственно проекции векторов $\boldsymbol{\lambda}'$ и $\boldsymbol{\delta}'$ порядка не более p. (Отметим, что $\boldsymbol{\alpha}' \in \mathbf{E}^T$.) Из леммы 11 следует, что $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\alpha}' + c'\boldsymbol{e}^T$, $c' \in \mathbb{R}$. Аналогичным образом для вектора $\boldsymbol{\beta}''$, являющегося соответствующей свертывающейся проекцией вектора $\boldsymbol{\lambda}''$, получаем, что $\boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\alpha}'' + c''\boldsymbol{e}^T$, где $c'' \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\alpha}'' \in \mathbf{E}^T$. База Δ — линейно независимый набор глубины p, а векторы $\boldsymbol{\delta}'$ и $\boldsymbol{\delta}''$ различны, поэтому из упоминавшегося выше свойства линейно независимых наборов следует, что векторы $\boldsymbol{\alpha}'$ и $\boldsymbol{\alpha}''$ не коллинеарны. Но в таком случае не коллинеарны, очевидно, и векторы $\boldsymbol{\beta}'$ и $\boldsymbol{\beta}''$. Лемма доказана.

Рассмотрим всюду непрерывную и гладкую векторную функцию $\boldsymbol{\lambda}(t)$ вида $\lambda\colon \mathbf{E}^1 \to \mathbf{E}^n$, где $n \geqslant 2$. Множество (геометрическое место) значений функции при всех $t \in [a, b]$ называется *годографом в диапазоне* $[a, b]$. Годограф обозначим через $\lambda([a, b])$.

Годограф функции $\boldsymbol{\lambda}(t)/|\boldsymbol{\lambda}(t)|$ при $|\boldsymbol{\lambda}(t)| \neq 0$, $t \in [a, b]$ называется *нормированным* годографом.

Годограф $\lambda([a, b])$ называется *однозначным* в диапазоне $[a, b]$, если при любых различных t_1, t_2 из $[a, b]$ имеет место неравенство $\boldsymbol{\lambda}(t_1) \neq \boldsymbol{\lambda}(t_2)$; если при этом еще и $\boldsymbol{\lambda}(t_1) \neq -\boldsymbol{\lambda}(t_2)$, то такой годограф называется *сильно однозначным*. Если нормированный годограф некоторой функции $\boldsymbol{\lambda}(t)$ сильно однозначен в диапазоне $[a, b]$, будем говорить, что годограф функции $\boldsymbol{\lambda}(t)$ *абсолютно однозначен* в этом диапазоне.

Лемма 13. *Для того чтобы гладкая в* $[a, b]$ *вектор-функция* $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_0(t), \ldots, \lambda_{n-1}(t))$ *имела абсолютно однозначный в диапазоне* $[a, b]$ *годограф, достаточно, чтобы существовала пара компо-*

нент $\lambda_i(t)$ *и* $\lambda_j(t)$, *вектор-функции* $\lambda(t)$, $i<j$, *для которой при всех* $t\in[a, b]$ *выполняется одна из двух систем неравенств*.

$$\begin{cases} \lambda_i(t)\frac{d\lambda_j(t)}{dt}-\lambda_j(t)\frac{d\lambda_i(t)}{dt}>0, \\ \lambda_i(t)>0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_i(t)\frac{d\lambda_j(t)}{dt}-\lambda_j(t)\frac{d\lambda_i(t)}{dt}<0. \\ \lambda_i(t)>0. \end{cases}$$

Доказательство проведем от противного. По условию для любого t из $[a, b]$ выполняется строгое неравенство $\lambda_i(t)>0$. Тогда при любых t_1, t_2 из $[a, b]$ имеем $\frac{\lambda(t_1)}{|\lambda(t_1)|}\neq-\frac{\lambda(t_2)}{|\lambda(t_2)|}$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда при некоторых t_1, t_2 из $[a, b]$, удовлетворяющих условию $t_1<t_2$, выполняется равенство $\frac{\lambda(t_1)}{|\lambda(t_1)|}=\frac{\lambda(t_2)}{|\lambda(t_2)|}$. Из этого равенства следует, что векторы $\lambda(t_1)$ и $\lambda(t_2)$ коллинеарны и направлены в одну сторону, поэтому существует такое $k\in(0,\infty)$, что $\lambda(t_1)=k\lambda(t_2)$. Отсюда получаем

$$\begin{cases} \lambda_i(t_1)=k\lambda_i(t_2), \\ \lambda_j(t_1)=k\lambda_j(t_2). \end{cases}$$

В данном случае $k\neq 0$, поэтому $\lambda_j(t_1)/\lambda_i(t_1)=\lambda_j(t_2)/\lambda_i(t_2)$. Функция $\lambda(t)$ гладкая, причем $\lambda_i(t)>0$ при всех t из $[a, b]$, поэтому функция $\lambda_j(t)/\lambda_i(t)$ на отрезке $[a, b]$ также гладкая. К этой функции применима теорема Ролля, согласно которой существует такое t' из $(t_1, t_2)\subset[a, b]$, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_j(t)}{\lambda_i(t)}\right)\Big|_{t=t'}=0$. По условию леммы $|\lambda_i(t)|\neq 0$, а значит, и $(\lambda_i(t))^2\neq 0$ при всех t из $[a, b]$. Поэтому

$$\left(\lambda_j(t)\frac{d\lambda_i(t)}{dt}-\lambda_i(t)\frac{d\lambda_j(t)}{dt}\right)\Big|_{t=t'}=0.$$

Тем самым мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Пусть $\Delta^{(+)}(i)=\{\delta^t\colon t\in\Psi(i)\}$. Все векторы в $\Delta(i)$ попарно различны (ранее было показано, что $|\Delta|=2|\Psi|$), поэтому $\Delta^{(+)}(i)\subset\Delta(i)$ при любом $i\in\{0, 1, \ldots, T-1\}$. Рассмотрим вектор-функцию от аргумента τ, имеющую вид $\delta^{i+\tau}=(\delta^{i+\tau}(0), \ldots, \delta^{i+\tau}(T-1))$, $\delta^{i+\tau}\in\mathbb{E}^T$, где $i\in\{0, 1, \ldots, T-1\}$, $\tau\in\mathbb{R}$, $\delta^{i+\tau}(k)=\frac{\sin\pi(i+\tau-k)}{T\sin\frac{\pi(i+\tau-k)}{T}}$. Нетрудно заметить (с учетом, например, соотношения (2)), что $\delta^{i+\tau}$ — гладкая вектор-функция от τ.

Обозначим годограф функции $\delta^{i+\tau}$ при $\tau\in\left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right]$ через $\delta^i\left(\left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)$. Очевидно, что $\Delta^+(i)\subset\delta^i\left(\left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)$, $\Delta^{(+)}\subset\bigcup_{i=0}^{T-1}\delta^i\left(\left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)$, где $\Delta^{(+)}=\bigcup_{i=0}^{T-1}\Delta^{(+)}(i)$. Будем говорить, что $\delta^i\left(\left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)$ — *годограф над* i*-м подмножеством базового импульсного множества* Δ. При этом множество $\Delta^{(+)}(i)$ составляет такое подмножество годографа $\delta^i\left(\left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)$, которое состоит из конечного числа векторов $\delta^{i+\tau}$ при всех $\tau=k/\theta$, где $k\in[-\rho/2, \rho/2]\cap\mathbb{Z}$. Из теоремы о системе импульсов (согласно которой $|\delta^{i+\tau}|=1$) следует, что $\delta^i\left(\left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)$ — нормированный годограф.

Набор подмножеств $\tilde{\delta}\left(\left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)=\left(\delta^0\left(\left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right]\right), \ldots, \delta^{T-1}\left(\left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)\right)$ назовем *набором годографов* над базой $\tilde{\Delta}$; заметим, что этот набор не является симметричным. Для сокращения записей введем обозначения $\Gamma(i)=\delta^i\left(\left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)$, $i\in\{0, 1, \ldots, T-1\}$; $\Gamma=\bigcup_{i=0}^{T-1}\Gamma(i)$; $\tilde{\Gamma}=(\Gamma(0), \ldots, \Gamma(T-1))$.

Присвоим каждому вектору δ из $\Gamma(i)$ параметр j_i, являющийся действительным числом, удовлетворяющим соотношению $\delta = \delta^{i+j_i/\theta}$. Рассмотрим элементы множества Γ и свертывающиеся относительно $\widetilde{\Gamma}$ проекции.

Введем обозначение $\zeta^{(q),t} = \mathrm{spr}^q_{j_{T-1},\ldots,j_{T-q}} \delta^t$, где $\delta^t \in \Gamma(i)$, $t \in \left[i - \frac{\rho}{2\theta}, i + \frac{\rho}{2\theta}\right]$, $i \in \{0, 1, \ldots, T-q-1\}$. В естественном базисе $\widetilde{e}$ пространства $\mathbf{E}^T$ вектор $\zeta^{(q),t}$ выражается через свои компоненты в виде набора $\zeta^{(q),t} = (\zeta_0^{(q),t}, \ldots, \zeta_{T-1}^{(q),t})$. Вектор $\zeta^{(q),t}$ и годограф $\zeta^{(q)}\left(\left[i - \frac{\rho}{2\theta}, i + \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)$ называются *свертывающимися относительно набора* $\widetilde{\Gamma}$ *проекциями q-го порядка по параметрическому набору* $j_{T-1}, \ldots, j_{T-q}$ от вектора $\delta^t \in \Gamma(i)$ и годографа $\Gamma(i)$ соответственно. Пусть $\delta^t \in \Gamma(i)$. Тогда через $\delta^t_{\text{осн}}$ обозначим компоненту δ^t_i этого вектора и назовем ее *основной* компонентой; здесь $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. Для любого вектора δ^t при $t \in \left[i - \frac{\rho}{2\theta}, i + \frac{\rho}{2\theta}\right]$ и $\rho < \theta$ имеем $0 < \delta^t_{\text{осн}} = \max\limits_{k \in \{0, 1, \ldots, T-1\}} \delta^t_k$. Обозначим

$$\delta^t_{\text{сос}} = \begin{cases} \delta^t_{i-1}, & i \in \{1, \ldots, T-1\}, \\ \delta^t_{i+1}, & i = 0; \end{cases}$$

здесь, как и прежде, $\delta^t \in \Gamma(i)$. Компоненту $\delta^t_{\text{сос}}$ назовем *соседней* с основной компонентой $\delta^t_{\text{осн}}$ вектора δ^t, поскольку $\delta^t_{\text{сос}}$ располагается рядом с $\delta^t_{\text{осн}}$ (слева или справа).

Обозначим основную и соседнюю компоненты вектора $\zeta^{(q),t}$ свертывающейся проекции q-го порядка от δ^t, $\delta^t \in \Gamma(i)$, следующим образом:

$$\zeta^{(q),t}_{\text{осн}} = \zeta^{(q),t}_i, \qquad \zeta^{(q),t}_{\text{сос}} = \begin{cases} \zeta^{(q),t}_{i-1}, & i \in \{1, \ldots, T-q-1\}, \\ \zeta^{(q),t}_{i+1}, & i = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что вектор-функции δ^t и $\zeta^{(q),t}$ от аргумента t являются гладкими вектор-функциями при всех $t \in [i - \rho/(2\theta), i + \rho/(2\theta)]$, а их компоненты $\delta^t_{\text{осн}}$, $\delta^t_{\text{сос}}$, $\zeta^{(q),t}_{\text{осн}}$ и $\zeta^{(q),t}_{\text{сос}}$ — также гладкие функции.

Лемма 14. *Пусть* $\widetilde{\Lambda}_0$ *— ограниченный импульсный набор,* $\rho/\theta \leqslant \leqslant \frac{1}{12\pi \ln T}$, $T \geqslant 16$, $\widetilde{\Gamma} = (\Gamma(0), \ldots, \Gamma(T-1))$ *— набор годографов над базой* $\widetilde{\Delta}$ *набора* $\widetilde{\Lambda}_0$. *Тогда для того чтобы набор* $\widetilde{\Lambda}_0$ *имел глубину* q, $q \leqslant T-2$, *достаточно выполнения для любого* p, $p \leqslant q$, *системы соотношений*

$$\left|\zeta^{(p),t}_{\text{осн}} \frac{d}{dt}\zeta^{(p),t}_{\text{сос}}\right| - \left|\zeta^{(p),t}_{\text{сос}} \frac{d}{dt}\zeta^{(p),t}_{\text{осн}}\right| > 0, \qquad \zeta^{(p),t}_{\text{осн}} > 0, \qquad \left|\frac{d}{dt}\zeta^{(p),t}_{\text{сос}}\right| > 0 \tag{26}$$

при всех t, i *и* $\zeta^{(p),t}$, *где* $t \in \left[i - \frac{\rho}{2\theta}, i + \frac{\rho}{2\theta}\right]$, $i \in \{0, 1, \ldots, T-p-1\}$, *а* $\zeta^{(p),t}$ *— свертывающиеся относительно* $\widetilde{\Gamma} = (\Gamma(0), \ldots, \Gamma(T-1))$ *проекции p-го порядка от вектора* δ^t *из* $\Gamma(i)$ *по любому набору* $j_{T-1}, \ldots, j_{T-p}$ *параметров, присвоенных векторам из подмножеств* $\Gamma(T-1), \ldots, \Gamma(T-p)$ *соответственно.*

Доказательство. В соответствии с определением свертывающейся проекции будем считать, что $\zeta^{(0),t} = \delta^t$. Вектор $\zeta^{(p),t}$, являющийся свертывающейся проекцией p-го порядка, $p \in \{1, \ldots, T-2\}$, от вектора δ^t из $\Gamma(i)$, $i \in \{0, 1, \ldots, T-p-1\}$, следующим образом выражается через вектор $\zeta^{(p-1),t}$, являющийся свертывающейся проекцией $(p-1)$-го порядка также от вектора δ^t по параметрическому набору $j_{T-1}, \ldots, j_{T-(p-1)}$:

$$\zeta^{(p),t} = \zeta^{(p-1),t} - \frac{(\zeta^{(p-1),t} \cdot \zeta^{(p-1),t})}{|\zeta^{(p-1),j}|^2}\zeta^{(p-1),j}, \tag{27}$$

где $j = j_{T-p}$, $\zeta^{(p-1),j}$ есть свертывающаяся проекция $(p-1)$-го порядка от вектора δ^j из $\Gamma(T-p)$. Из леммы 6 следует, что $\widetilde{\Gamma}$ — линейно независимый набор, ибо $\widetilde{\Gamma} \subset \widetilde{\Delta}_1$. Поэтому в силу определения свертывающейся проекции имеем $\zeta^{(k),t} \neq 0$ при любых k и t, $k \in \{1, \ldots, T-2\}$, $t \in [i - \rho/(2\theta), i + \rho/(2\theta)]$. Следовательно, $\zeta^{(p-1),t} \neq 0$.

Из последнего соотношения, равенства (27) и того факта, что δ^t — гладкая функция, по индукции заключаем, что $\zeta^{(p),t}$ — также гладкая вектор-функция при всех $t \in \left[i - \frac{\rho}{2\theta}, i + \frac{\rho}{2\theta}\right]$. Поэтому из неравенства $\left|\frac{d}{dt}\zeta^{(p),t}_{\text{coc}}\right| > 0$ (при всех допустимых t) следует, что $\frac{d}{dt}\zeta^{(p),t}_{\text{coc}}$ либо при всех t положительно, либо при всех t отрицательно. Поэтому при выполнении соотношений (26) выполняются условия леммы 13, согласно которой годограф $\zeta^{(q)}\left(\left[i - \frac{\rho}{2\theta}, i + \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)$ — абсолютно однозначный.

С другой стороны, $\operatorname{spr}^p_{j_{T-1},\ldots,j_{T-p}} \Delta^{(+)}(i) \subset \zeta^{(p)}\left(\left[i - \frac{\rho}{2\theta}, i + \frac{\rho}{2\theta}\right]\right)$. А это означает, что любые два вектора из $\operatorname{spr}^p_{j_{T-1},\ldots,j_{T-p}} \widetilde{\Delta}$, не составляющие одну симметричную пару, не коллинеарны при всех $p \in \{1, \ldots, q\}$. Отсюда следует (с учетом свойства линейно независимых наборов, упоминавшегося при доказательстве леммы 12), что $\widetilde{\Delta}$ имеет глубину q. Но в таком случае из леммы 12 заключаем, что и набор $\widetilde{\Lambda}_0$ имеет глубину q. Лемма 14 доказана.

Оценим теперь величины $\zeta^{(p),t}_{\text{осн}}$ и $\zeta^{(p),t}_{\text{coc}}$, а также их производные по t. При получении оценок будет использовано следующее утверждение.

Лемма 15. *Если* $\rho \leqslant \frac{\theta}{12\pi \ln T}$, $T \geqslant 16$, $k \neq r$, $k, r \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, $|t_1| \leqslant \frac{\rho}{\theta}$, $|t_2| \leqslant \frac{\rho}{\theta}$, *то* $|(\delta^{k+t_1} \cdot \delta^{r+t_2})| \leqslant 2\chi^r_k$ *и* $|(\delta^{k+t_1} \cdot \delta^{r+t_2})| \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\delta}^\nu$ — система импульсных векторов, $\widetilde{\delta}^\nu = (\delta^{0+\nu}, \ldots, \delta^{k+\nu}, \ldots, \delta^{T-1+\nu})$. Из теоремы 3 следует, что $\widetilde{\delta}^\nu$ — ортонормированный базис при любом ν из $\mathbb{R}$; система $\widetilde{\delta}^0$ совпадает при этом с естественным базисом $\widetilde{e}$ — это следует из соотношений (5) и (9). Значит, $|\delta^{k+\nu}| = 1$, а потому $|(\delta^{k+t_1} \cdot \delta^{r+t_2})| \leqslant 1$.

Рассмотрим функцию $\delta^p(t)$. Согласно (4) имеем $\delta^p(t) \in A^T$. Вектор-оригинал этой функции, представленный в базисе $\widetilde{\delta}^\nu$, есть $(\delta^p(0 + \nu), \ldots, \delta^p(T-1+\nu))$, см. заключительную часть § 1. Поскольку $\delta^p(k+\nu) = \delta^{p-\nu}(k)$, вектор-оригинал функции $\delta^p(t)$ в базисе $\widetilde{\delta}^\nu$ равен $\delta^{p-\nu}$.

Поэтому векторы δ^{k+t_1} и δ^{r+t_2} в базисе $\widetilde{\delta}^{t_1}$ будут иметь соответственно вид δ^k и $\delta^{r+t_2-t_1}$. Используя также теорему 2, получаем $(\delta^{k+t_1} \cdot \delta^{r+t_2}) = (\delta^k \cdot \delta^{r+t_2-t_1}) = \delta^{r+t_2-t_1}(k)$. По условию $|t_1|, |t_2| \leqslant \rho/\theta$, поэтому $|t_2 - t_1| \leqslant 2\rho/\theta$. Но при $|t_2 - t_1|/2 \leqslant \rho/\theta \leqslant 1/(12\pi \ln T)$ и $k \neq r$, как нетрудно убедиться, для сигнального импульса выполняется неравенство $2\delta^{r+(t_2-t_1)/2}(k) \geqslant \delta^{r+t_2-t_1}(k)$, а из (18) следует, что $|\delta^{r+(t_2-t_1)/2}(k)| \leqslant \chi^r_k$. В итоге получаем $|(\delta^{k+t_1} \cdot \delta^{r+t_2})| = |\delta^{r+t_2-t_1}(k)| \leqslant 2\chi^k_r$. Лемма 15 доказана.

Определим индуктивно последовательность вспомогательных вектор-функций для заданного набора параметров $j_{T-1}, \ldots, j_{T-p}$ (эти параметры присвоены соответственно векторам из подмножеств $\Gamma(T-1), \ldots, \Gamma(T-p)$, где $p \in \{1, \ldots, T-2\}$ и из каждого подмножества берется по одному вектору) и для заданного $i \in \{0, 1, \ldots, T-p-1\}$.

Базис индукции: $\eta^{(0),i+t} = \delta^{i+t}$, где $t \in \left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right)$; поэтому $\delta^{i+t} \in \Gamma(i)$.

Индуктивный переход: $\eta^{(s),i+t} = \eta^{(s-1),i+t} - \sum\limits_{k=T-1}^{T-p} a^{(s-1)}_{t,k} \delta^{k+j_k/\theta}$, где $s \in \mathbb{N}$, $a^{(s-1)}_{t,k} = (\eta^{(s-1),i+t} \cdot \delta^{k+j_k/\theta})$ и $j_k \in [-\rho/2, \rho/2]$.

Непосредственно из определения видно, что $\eta^{(s),i+t}$ есть линейная комбинация из $p+1$ векторов δ^{i+t} и $\delta^{k+j_k/\theta}$, $k\in\{T-p,\ldots,T-1\}$.

Лемма 16. *Если* $\rho\leqslant\theta/(12\pi\ln T)$, $T\geqslant16$, $r\in\{T-p,\ldots,T-1\}$, $t\in[-\rho/(2\theta),\rho/(2\theta))$, *то* $|(\eta^{(s),i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})|\leqslant2^{-s+1}\chi_r^i$.

Доказательство. По определению вектора $\eta^{(s),i+t}$ при $r\in\{T-p,\ldots,T-1\}$ имеем

$$(\eta^{(s),i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})=(\eta^{(s-1),i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})-(\eta^{(s-1),i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})(\delta^{r+j_r/\theta}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})-$$
$$-\sum_{\substack{k=T-1\\k\neq r}}^{T-p}(\eta^{(s-1),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})(\delta^{k+j_k/\theta}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})=-\sum_{\substack{k=T-p\\k\neq r}}^{T-1}(\eta^{(s-1),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})(\delta^{k+j_k/\theta}\cdot\delta^{r+j_r/\theta}).$$

Отсюда и из леммы 15 получаем

$$|(\eta^{(s),i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})|\leqslant2\sum_{\substack{k=T-p\\k\neq r}}^{T-1}|(\eta^{(s-1),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})|\chi_k^r.$$

Далее доказательство проведем по индукции.

Базис индукции. Пусть $s=0$. В этом случае воспользуемся леммой 15 и получим $|(\eta^{(0),i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})|=|(\delta^{i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})|\leqslant2\chi_r^i$.

Индуктивный переход. Пусть $(\eta^{(s),i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})\leqslant2^{-s+1}\chi_r^i$ при всех $s\leqslant q-1$. Кроме того, имеем $|(\eta^{(q),i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})|\leqslant2\sum_{k=T-p}^{T-1}|(\eta^{(q-1),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})|\chi_k^r$. Далее воспользуемся индуктивным предположением и леммой 4 (условие $\rho\leqslant\frac{\theta}{12\pi\ln T}$ доказываемой леммы можно представить в виде $\rho\leqslant\frac{\theta}{3\pi u\ln T}$, где $u=4$) и получим $|(\eta^{(q),i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})|\leqslant2^{-q+3}\sum_{k=T-p}^{T-1}\chi_k^i\chi_k^r\leqslant2^{-q+3}\sum_{k=0}^{T-1}\chi_k^i\chi_k^r\leqslant$ $\leqslant2^{-q+3}\chi_r^i/4=2^{-q+1}\chi_r^i$. Лемма доказана.

Лемма 17. *Если* $\rho\leqslant\frac{\theta}{12\pi\ln T}$, $T\geqslant16$, $i\in\{0,1,\ldots,T-p-1\}$, $t\in\left[-\frac{\rho}{2\theta},\frac{\rho}{2\theta}\right)$, *то* $\lim\limits_{s\to\infty}\eta^{(s),i+t}=\zeta^{(p),i+t}$ *при любом* $p\in\{0,1,\ldots,T-2\}$.

Доказательство. Введем обозначение $\eta^{i+t}=\lim\limits_{s\to\infty}\eta^{(s),i+t}$. Из леммы 16 следует, что $(\eta^{i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})=0$ при всех $r\in\{T-p,\ldots,T-1\}$. С другой стороны, из определения вектора $\eta^{(s),i+t}$ вытекает, что он является линейной комбинацией векторов δ^{i+t} и $\delta^{k+j_k/\theta}$ при $k=\{T-p,\ldots,T-1\}$. При $\rho\leqslant\theta/(12\pi\ln T)$, $T\geqslant16$ набор $\widetilde{\Delta}$ — линейно независимый (согласно лемме 6), и $\delta^{k+j_k/\theta}\in\Delta(k\cdot)$ при всех $k\in\{T-p,\ldots,T-1\}$ и при $k=i$, поэтому удовлетворяются условия леммы 10, из которой следует, что η^{i+t} есть свертывающаяся относительно $\widetilde{\Delta}$ проекция p-го порядка по параметрам $j_{T-1},\ldots,j_{T-p}$ от вектора δ^{i+t}. Лемма доказана.

Лемма 18. *Если* $\rho\leqslant\frac{\theta}{12\pi\ln T}$, $t\in\left[-\frac{\rho}{2\theta},\frac{\rho}{2\theta}\right)$, $T\geqslant16$, $p\leqslant T-2$, $i\in\{0,1,\ldots,T-p-1\}$, *то*

$$\zeta_{\text{осн}}^{(p),i+t}\geqslant1-\frac{1}{25\ln^2T},\qquad|\zeta_{\text{сос}}^{(p),i+t}|\leqslant\frac{1}{18\ln T}.$$

Доказательство. Вначале получим оценки для $|\delta_{\text{осн}}^{i+t}-\zeta_{\text{осн}}^{(p),i+t}|$ и $|\delta_{\text{сос}}^{i+t}-\zeta_{\text{сос}}^{(p),i+t}|$. В силу леммы 17 имеем $\eta^{i+t}=\eta^{(\infty),i+t}=\zeta^{(p),i+t}$. Учитывая определение вектора $\eta^{(s),i+t}$, получим

$$|\delta_j^{i+t}-\zeta_j^{(p),i+t}|=\left|\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=T-p}^{T-1}(\eta^{(s),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})\delta_j^{k+j_k/\theta}\right|.$$

Из леммы 16 для всех $k \in \{T-p, \ldots, T-1\}$ имеем $|(\eta^{(s),\,i+t} \cdot \delta^{k+j_k/\theta})| \leqslant 2^{-s+1}\chi_k^i$. Поэтому для $j \leqslant T-p-1$ (откуда $j \neq k$), учитывая соотношение (18), получим

$$|\delta_j^{i+t} - \zeta_j^{(p),\,i+t}| \leqslant 2\sum_{s=0}^{\infty} 2^{-s} \sum_{k=T-p}^{T-1} \chi_k^i \,|\delta^{k+j_k/\theta}| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{s=0}^{\infty} 2^{-s} \sum_{k=T-p}^{T-1} \chi_k^i \chi_k^j \leqslant 2(\chi^i \cdot \chi^j) \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-s} \leqslant 4(\chi^i \cdot \chi^j).$$

Отсюда для $j \in \{i-1, i, i+1\} \cap \{0, 1, \ldots, T-p-1\}$ с учетом леммы 3 получаем

$$|\delta_j^{i+t} - \zeta_j^{(p),\,i+t}| \leqslant 20\nu^2. \tag{28}$$

Из соотношений (18) следует, что $|\delta_{\text{осн}}^{i+t}| = |\delta_i^{i+t}| \geqslant 1 - \nu^2$ и $|\delta_{\text{сос}}^{i+t}| \leqslant \nu$ — ведь $\delta_{\text{сос}}^{0+t} = \delta_1^{0+t}$ и $\delta_{\text{сос}}^{i+t} = \delta_{i-1}^{i+t}$ при $i \geqslant 1$, поэтому последняя оценка для $|\delta_{\text{сос}}^{i+t}|$ корректна. Далее, из неравенства (28), последних соотношений, условий леммы $\rho \leqslant \frac{\theta}{12\pi \ln T}$ $\left(\text{откуда следует } \nu \leqslant \frac{1}{24 \ln T}\right)$ и $t \in \left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right)$ получаем $\delta_i^{i+t} > 0$ и $\zeta_{\text{осн}}^{(p),\,i+t} = \zeta_i^{(p),\,i+t} \geqslant 1 - 21\nu^2 \geqslant 1 - \frac{1}{25 \ln^2 T}$, $|\zeta_{\text{сос}}^{(p),\,i+t}| \leqslant \nu + 20\nu^2 \leqslant \frac{1}{18 \ln T}$.

Лемма доказана.

Л е м м а 19. *Если* $\rho \leqslant \frac{\theta}{20\pi \ln T}$, $T \geqslant 16$, $p \leqslant T-2$, $i \in \{0, 1, \ldots, T-p-1\}$, $t \in \left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right)$, *то* $\left|\frac{d}{dt}\zeta_{\text{осн}}^{(p),\,i+t}\right| \leqslant 0{,}21$, $\left|\frac{d}{dt}\zeta_{\text{сос}}^{(p),\,i+t}\right| \geqslant 0{,}31$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной вектор-функции λ^t от t введем обозначение $\dot{\lambda}^t = \frac{d}{dt}\lambda^t$. Оценим величину производной

$$\dot{\delta}_j^{i+t} = \frac{d}{dt} \frac{\sin \pi(i-j+t)}{T \sin \frac{\pi(i-j+t)}{T}} = (-1)^{i-j} \frac{\pi}{T} \left(\frac{\cos \pi t}{\sin \frac{\pi(i-j+t)}{T}} - \frac{\sin \pi t \cos \frac{\pi(i-j+t)}{T}}{T \sin^2 \frac{\pi(i-j+t)}{T}} \right)$$

при этом будем использовать ограничение $|t| < 1/200$, следующее из условий леммы, и докажем неравенства

$$0 \leqslant |\dot{\delta}_i^{i+t}| \leqslant \chi_i^i \frac{\theta}{\rho}, \qquad \frac{1}{\pi}\chi_j^i \frac{\theta}{\rho} \leqslant |\dot{\delta}_j^{i+t}| < \frac{4}{3}\chi_j^i \frac{\theta}{\rho}, \quad i \neq j. \tag{29}$$

При $0 < |i-j| \leqslant T/2$ имеем

$$|\dot{\delta}_j^{i+t}| \leqslant \frac{\pi}{T} \left(\left| \frac{\cos \pi t}{\sin \frac{\pi(i-j+t)}{T}} \right| + \left| \frac{\sin \pi t \cos \frac{\pi(i-j+t)}{T}}{T \sin^2 \frac{\pi(i-j+t)}{T}} \right| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{t} \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi(|i-j| - |t|)}{T}} + \frac{\pi |t|}{T \sin^2 \frac{\pi(|i-j| - |t|)}{T}} \right)$$

С учетом того, что при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ имеет место неравенство

$$\sin \alpha \geqslant (2/\pi)\alpha \tag{30}$$

(справедливое в силу выпуклости вверх функции $\sin x$), получаем

$$|\dot{\delta}_j^{i+t}| \leqslant \frac{\pi}{T} \left(\frac{T}{2|i-j| - |t|} + \frac{\pi T |t|}{4(|i-j| - |t|)^2} \right) \leqslant \frac{2\pi}{3|i-j|} \left(\frac{3}{4(1-|t|)} + \frac{3\pi |i-j|\,|t|}{8(|i-j|^2 - 2|i-j|\,|t|)} \right).$$

Из последнего неравенства при $|i-j| \geqslant 1$ и $t < \frac{1}{200}$ следует $|\dot{\delta}_j^{i+t}| < \frac{2\pi}{3|i-j|}$.

При $\frac{T}{2} \leqslant |i-j| < T$ имеем $\left|\sin\frac{\pi(i-j+t)}{T}\right| \geqslant \sin\frac{\pi(|i-j|+|t|)}{T} = \sin\frac{\pi(T-|i-j|-|t|)}{T}$ и с использованием неравенства (30) получаем (аналогично тому, как делалось выше) $|\dot\delta_j^{i+t}| < \frac{2\pi}{3(T-|i-j|)}$.

Из последних двух оценок для $|\dot\delta_j^{i+t}|$ и определения функции χ_j^i получаем верхнюю оценку из (29) при $i \neq j$.

В качестве нижней оценки для $|\dot\delta_j^{i+t}|$ имеем (из выражения для $\dot\delta_j^{i+t}$)

$$|\dot\delta_j^{i+t}| \geqslant \frac{\pi}{T}\left|\frac{\cos\pi t}{\sin\frac{\pi(i-j+t)}{T}} - \frac{\sin\pi t\cos\frac{\pi(i-j+t)}{T}}{T\sin^2\frac{\pi(i-j+t)}{T}}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\pi}{T\left|\sin\frac{\pi(i-j+t)}{T}\right|}\left|\cos\pi t - \frac{\sin\pi t\cos\frac{\pi(i-j+t)}{T}}{T\sin\frac{\pi(i-j+t)}{T}}\right|. \quad (31)$$

Из оценки $1 \geqslant \cos\alpha \geqslant 1-\alpha^2/2$ и ограничения $|t| < 1/200$ получаем

$$1 - 1/4000 < \cos\pi t \leqslant 1. \quad (32)$$

Используя элементарные тригонометрические соотношения и неравенство (30), при $0 < |i-j| \leqslant T/2$ получаем

$$\left|\frac{\sin\pi t\cos\frac{\pi(i-j+t)}{T}}{T\sin\frac{\pi(i-j+t)}{T}}\right| \leqslant \frac{\frac{\pi}{200}}{T\sin\frac{\pi(|i-j|-|t|)}{T}} \leqslant \frac{\pi}{400(|i-j|-|t|)} < \frac{\pi}{400\left(1-\frac{1}{200}\right)} < \frac{1}{100};$$

$$\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi(i-j+t)}{T}\right|} \geqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi(|i-j|+|t|)}{T}} \geqslant \frac{1}{\frac{\pi|i-j|}{T}\left(1+\frac{1}{200}\right)} = \frac{200}{201}\frac{T}{\pi|i-j|}. \quad (33)$$

С учетом оценок (31)–(33) при $0 < |i-j| \leqslant T/2$ получаем

$$|\dot\delta_j^{i+t}| \geqslant \frac{\pi}{T}\frac{200}{201}\frac{T}{\pi|i-j|}\left(1 - \frac{1}{4000} - \frac{1}{100}\right) > \frac{1}{2|i-j|}.$$

Аналогичным образом при $T/2 \leqslant |i-j| < T$ с учетом соотношения

$$\sin\frac{\pi(i-j+t)}{T} = \sin\frac{\pi(T-(i-j)-t)}{T}$$

выводим оценку $|\dot\delta_j^{i+t}| \geqslant \frac{1}{2(T-|i-j|)}$. Из последних двух оценок для $|\dot\delta_j^{i+t}|$ получаем нижнюю оценку в (29) при $i \neq j$.

При оценке $|\dot\delta_i^{i+t}|$ воспользуемся получающимся из (3) соотношением $\frac{\sin\pi t}{T\sin(\pi t/T)} = \frac{2}{T}\sum_{k=0}^{T/2-1}\cos\frac{\pi(2k+1)t}{T}$, согласно которому при $|t| \leqslant \frac{\rho}{2\theta} < \frac{1}{200}$ имеем

$$|\dot\delta_j^{i+t}| = \left|\frac{d}{dt}\frac{\sin\pi t}{T\sin(\pi t/T)}\right| = \left|\frac{2}{T}\sum_{k=0}^{T/2-1}\frac{\pi(2k+1)}{T}\sin\frac{\pi(2k+1)t}{T}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi^2|t|}{T^3}\sum_{k=0}^{T/2-1}(2k+1) \leqslant \frac{\pi^2\rho}{T^3\theta}\int_0^{T/2}(2k+1)^2dk = \frac{\pi^2\rho}{T^3\theta}\left(\frac{T^3}{6}+\frac{T^2}{2}+\frac{T}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi^2\rho}{\theta}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{32}+\frac{1}{512}\right) < \frac{\pi^2\rho}{4\theta} = \chi_i^i\frac{\theta}{\rho}.$$

Соотношения (29) доказаны.

Далее оценим величину $(\dot{\eta}^{(s),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})$ при $k\in\{T-p,\ldots,T-1\}$. Покажем индукцией по s, что при $k\neq i$ выполнено неравенство

$$|(\dot{\eta}^{(s),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})|\leqslant 2^{-s}(8/5)(\theta/\rho)\chi_k^i. \qquad (34)$$

Базис индукции. При $s=0$ из соотношений (18), (29) и леммы 4 (с учетом того, что $u=20/3$) имеем

$$|(\dot{\eta}^{(0),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})|=|(\dot{\delta}^{i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})|\leqslant\sum_{j=0}^{T-1}|(\dot{\delta}_j^{i+t}\cdot\delta_j^{k+j_k/\theta})|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{3}\frac{\theta}{\rho}\sum_{j=0}^{T-1}\chi_j^i|\delta_j^{k+j_k/\theta}|\leqslant\frac{4}{3}\frac{\theta}{\rho}\left(\chi_k^i+\sum_{j=0}^{T-1}\chi_j^i\chi_j^k\right)=\frac{4}{3}\frac{\theta}{\rho}(\chi_k^i+(\chi^i\cdot\chi^k))\leqslant\frac{8}{3}\frac{\theta}{\rho}\chi_k^i.$$

Индуктивный переход. Пусть $(\dot{\eta}^{(s),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})\leqslant 2^{-s}\frac{8}{5}\frac{\theta}{\rho}\chi_k^i$ при всех $s\in\{0,1,\ldots,q-1\}$. Учитывая, что $(\delta^{k+j_k/\theta}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})=1$, получаем

$$(\dot{\eta}^{(q),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})=(\dot{\eta}^{(q-1),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})-(\dot{\eta}^{(q-1),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})-$$

$$-\sum_{\substack{r=T-p\\ r\neq k}}^{T-1}(\dot{\eta}^{(q-1),i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})(\delta^{r+j_r/\theta}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})=-\sum_{\substack{r=T-p\\ r\neq k}}^{T-1}(\dot{\eta}^{(q-1),i+t}\cdot\delta^{r+j_r/\theta})(\delta^{r+j_r/\theta}\cdot\delta^{k+j_k/\theta}).$$

Отсюда, а также из индуктивного предположения (с учетом того, что $i\in\{0,1,\ldots,T-p-1\}$), определения вектора χ^j, лемм 15 и 4 (с учетом того, что $u\geqslant 4$) имеем

$$|(\dot{\eta}^{(q),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})|\leqslant\sum_{\substack{r=T-p\\ r\neq k}}^{T-1}2^{-(q-1)}\frac{8}{5}\frac{\theta}{\rho}\chi_r^i\cdot 2\cdot\chi_r^k\leqslant 2^{-(q-1)}\frac{16}{5}\frac{\theta}{\rho}\sum_{r=0}^{T-1}\chi_r^i\chi_r^k\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-(q-1)}\frac{16}{5}\frac{\theta}{\rho}(\chi^i\cdot\chi^k)\leqslant 2^{-q}\frac{8}{5}\frac{\theta}{\rho}\chi_k^i.$$

Таким образом, неравенство (34) доказано.

Возьмем теперь ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty}A_s(t)$, где $A_s(t)=\sum\limits_{k=T-p}^{T-1}(\eta^{(s),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})\delta_r^{k+j_k/\theta}$; с учетом оценки из леммы 16 легко заметить, что данный ряд сходится, а ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty}\dot{A}_s(t)$, как нетрудно заметить с учетом оценки (34), сходится равномерно по t в рассматриваемом интервале изменения t. Поэтому на основании леммы 17 и определения вектор-функции $\eta^{(s),i+t}$ можно записать

$$\dot{\zeta}_r^{(p),i+t}=\dot{\delta}_r^{i+t}-\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=T-p}^{T-1}(\dot{\eta}^{(s),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})\delta_r^{k+j_k/\theta}, \qquad (35)$$

где $p\in\{1,\ldots,T-2\}$, $r\in\{i-1,i,i+1\}\cap\{0,1,\ldots,T-p-1\}$ и

$$\eta^{(s),i+t}=\eta^{(s-1),i+t}-\sum_{k=T-p}^{T-1}(\eta^{(s-1),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})\delta^{k+j_k/\theta},$$
$$\eta^{(0),i+t}=\delta^{i+t}.$$

Оценим величину $\dot{\zeta}^{(p),i+t}$. Из (35) имеем

$$|\dot{\zeta}_r^{(p),i+t}-\dot{\delta}_r^{i+t}|\leqslant\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=T-p}^{T-1}|(\dot{\eta}^{(s),i+t}\cdot\delta^{k+j_k/\theta})\delta_r^{k+j_k/\theta}|,$$

где $r \in \{i-1, i, i+1\} \cap \{0, 1, \ldots, T-p-1\}$. Используя неравенство (34), соотношение (18) (с учетом того, что в последнем неравенстве $r \neq k$), получим

$$|\dot\zeta_r^{(p), i+t} - \dot\delta_r^{i+t}| \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-s} \cdot \frac{8}{5}\frac{\theta}{\rho} \sum_{k=0}^{T-1} (\chi_k^i \cdot \chi_k^r) \leqslant \frac{16}{5}\frac{\theta}{\rho}(\chi^i \cdot \chi^r).$$

Далее, из соотношения $r \in \{i-1, i, i+1\}$, леммы 3 и условия данной леммы (из которого следует, что $\nu \leqslant 1/110$) следует, что

$$|\dot\zeta_r^{(p), i+t} - \dot\delta_r^{i+t}| \leqslant \frac{8\pi}{5}\frac{(\chi^i \cdot \chi^r)}{\nu} \leqslant \frac{8\pi}{5}(4\nu + \nu^3) < 0{,}19. \tag{36}$$

Из (29) при $|r-i| = 1$ следует неравенство $|\dot\delta_r^{i+t}| \geqslant 1/2$, а при $r = i$ имеем $|\dot\delta_r^{i+t}| \leqslant \pi/(60 \ln T) \leqslant 0{,}02$ (напомним, что $T \geqslant 16$).

Из (36), последних соотношений и условий доказываемой леммы вытекают неравенства $|\dot\zeta_{\text{осн}}^{(p), i+t}| \leqslant 0{,}19 + 0{,}02 = 0{,}21$ и $|\dot\zeta_{\text{сос}}^{(p), i+t}| \geqslant 0{,}5 - 0{,}19 = 0{,}31$.

Лемма доказана.

Лемма 20. *Пусть Λ_0, $\Lambda_0 \subset \mathbf{E}^{T+1}$, — ограниченное импульсное множество, имеющее параметры T, θ, ρ, причем $\rho \leqslant \theta/(20\pi \ln T)$, $T \geqslant 16$. Тогда при любом элементарном сдвиге $s \in S_э$ глубина* $\operatorname{tif} \widetilde\Lambda_0$ *импульсного набора $\widetilde\Lambda_0 = (\Lambda_0(0), \ldots, \Lambda_0(T-1))$ над Λ_0 равна $T-2$.*

Доказательство. Из леммы 7 следует, что при $\rho \leqslant \frac{\theta}{12\pi \ln T}$ и $T \geqslant 16$ набор $\widetilde\Lambda_0$ линейно независим при любом сдвиге $s \in S_э$. При выполнении условий данной леммы из лемм 18 и 19 получаем, что $\dot\zeta_{\text{осн}}^{(p), i+t} > 0$ и $|\dot\zeta_{\text{сос}}^{(p), i+t}| > 0$ при всех $t \in \left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right)$. Поэтому согласно лемме 14 достаточным условием того, что набор $\widetilde\Lambda_0$ имеет глубину $T-2$, является неравенство

$$|\zeta_{\text{осн}}^{(p), i+t} \dot\zeta_{\text{сос}}^{(p), i+t}| - |\zeta_{\text{сос}}^{(p), i+t} \dot\zeta_{\text{осн}}^{(p), i+t}| > 0$$

при всех $t \in \left[-\frac{\rho}{2\theta}, \frac{\rho}{2\theta}\right)$, $i \in \{0, 1, \ldots, T-p-1\}$, $p \in \{1, \ldots, T-2\}$. Подставляя сюда соответствующие оценки из лемм 18 и 19 и учитывая, что из $T \geqslant 16$ следует $\ln T > 2$, получим

$$|\zeta_{\text{осн}}^{(p), i+t}| \cdot |\dot\zeta_{\text{сос}}^{(p), i+t}| - |\zeta_{\text{сос}}^{(p), i+t}| \cdot |\dot\zeta_{\text{осн}}^{(p), i+t}| \geqslant 0{,}31\left(1 - \frac{1}{25 \cdot 4}\right) - \frac{0{,}21}{18 \cdot 2} > 0$$

для всех $p \in \{1, \ldots, T-2\}$. Лемма доказана.

Найдем теперь значение $\operatorname{otf}_{\widetilde\Lambda_0} K_0$ — относительную глубину области параметрического ограничения K_0, представляющего собой базовый квадратный конус K_0, по набору $\widetilde\Lambda_0$.

Пусть задана линейно независимая система $\widetilde\eta = (\eta^0, \ldots, \eta^{T-1})$ векторов в $\mathbf{E}^T$, $\mathbf{E}^T \subset \mathbf{E}^{T+1}$; при этом $\widetilde e = (e^0, \ldots, e^{T-1}, e^T)$ — естественный базис пространства $\mathbf{E}^{T+1}$ и $\mathbf{E}^T = \{x \in \mathbf{E}^{T+1}\colon (e^T \cdot x) = 0\}$. *Ромбом над системой $\widetilde\eta$ с шириной r* называется множество $P_r(\widetilde\eta) = \{x \in \mathbf{E}^T\colon -r/2 < (\eta^i \cdot x) < r/2,\ i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}\}$. *Ромбическим конусом над системой $\widetilde\eta$ с шириной основания r* называется множество

$$K(P_r(\widetilde\eta)) = \{x \in \mathbf{E}^{T+1}\colon x = k(z + e^T),\ z \in P_r(\widetilde\eta),\ k \in (0, \infty)\};$$

множество $P_r(\widetilde\eta)$ называется *основанием конуса* $K(P_r(\widetilde\eta))$. Нетрудно заметить, что этот конус есть множество решений x системы неравенств

$$\begin{cases} (x \cdot (\eta^i - (r/2)e^T)) < 0, \\ (x \cdot (-\eta^i - (r/2)e^T)) < 0, \end{cases} \qquad i = 0, 1, \ldots, T-1,$$

и что если $\widetilde\eta' = (-\eta^0, \ldots, -\eta^{T-1})$, то $P_r(\widetilde\eta') = P_r(\widetilde\eta)$ и $K(P_r(\widetilde\eta')) = K(P_r(\widetilde\eta))$.

Пусть $\widetilde{\Lambda}_0$ — набор подмножеств над ограниченным импульсным множеством (импульсный набор), $\widetilde{\Lambda}_0=(\Lambda_0(0),\ldots,\Lambda_0(T-1))$, параметрами которого являются T, θ, ρ, β, l и s, $s\in S_s$, причем база $\widetilde{\Delta}=(\Delta(0),\ldots,\Delta(T-1))$ набора $\widetilde{\Lambda}_0$ является линейно независимым набором.

Семейством ромбических конусов над набором $\widetilde{\Delta}$ *с шириной основания* r называется множество

$$\mathfrak{K}(\widetilde{\Delta})=\{K(P_r(\widetilde{\eta})):\ \widetilde{\eta}=(\eta^0,\ldots,\eta^{T-1}),\ \eta^i\in\Delta(i),\ i\in\{0,1,\ldots,T-1\}\}.$$

Пусть дана представительная выборка набора $\widetilde{\Delta}$, имеющая вид $\widetilde{\delta}=(\delta^{0+t_0},\ldots,\delta^{i+t_i},\ldots,\delta^{T-1+t_{T-1}})$, где $\delta^{i+t_i}\in\Delta(i)\subset\mathbb{E}^T$, $\delta^{i+t_i}=(\delta^{i+t_i}(0),\ldots\ldots,\delta^{i+t_i}(T-1))$, $\delta^{i+t_i}(j)=\dfrac{\sin\pi(j-(i+t_i))}{T\sin\dfrac{\pi(j-(i+t_i))}{T}}$, $t_i=\frac{j_i}{\theta}$, $j_i\in\left[-\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2}\right)\cap\mathbb{N}$.

Элементарным поднабором набора $\widetilde{\Lambda}_0$ по выборке $\widetilde{\delta}=(\delta^{0+t_0},\ldots\ldots,\delta^{T-1+t_{T-1}})$ называется набор $\widetilde{\Lambda}_э=(\Lambda_э(0),\ldots,\Lambda_э(T-1))$, в котором

$$\Lambda_э(i)=\left\{+(\delta^{i+t_i}+ye^T),\ -(\delta^{i+t_i}+ye^T)\in\Lambda_0(i):\ y=\frac{s(t_i)+k}{\beta},\ y\in\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]\cap\mathbb{Z}\right\}$$

при всех $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$.

Лемма 21. *Пусть* $\widetilde{\Lambda}_0$ *— набор над ограниченным импульсным множеством* Λ_0, $\Lambda_0\subset\mathbb{E}^{T+1}$, *с высотой* l, *а* $\widetilde{\Lambda}_э$ *— элементарный поднабор набора* $\widetilde{\Lambda}_0$ *по произвольной выборке* $\widetilde{\delta}=(\delta^{0+t_0},\ldots,\delta^{T-1+t_{T-1}})$. *Тогда если база* $\widetilde{\Delta}$ *набора* $\widetilde{\Lambda}_0$ *— линейно независимый набор, то* $\mathrm{sc}^T_{\lambda^{T-1},\ldots,\lambda^0}K(P_{l_0}(\widetilde{\delta}))\neq\varnothing$ *при всех* λ^i *из* $\Lambda_э(i)$, *где* $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$ *и* $l_0=l+\varepsilon$; ε *— достаточно малое положительное число.*

Доказательство. Пусть X, $X\subset\mathbb{E}^{T+1}$, — множество решений системы уравнений

$$(x\cdot\lambda^i)=0,\qquad i\in\{0,1,\ldots,T-1\};\tag{37}$$

в таком случае из определения сечения следует

$$\mathrm{sc}^T_{\lambda^{T-1},\ldots,\lambda^0}K(P_{l_0}(\widetilde{\delta}))=X\cap K(P_{l_0}(\widetilde{\delta})).\tag{38}$$

Очевидно, что $X\neq\varnothing$, и если $a\in X$, то $ka\in X$ при любом $k\in\mathbb{R}$. Кроме того, у ненулевого вектора $a=(a_0,\ldots,a_{T-1},a_T)$ из X последняя компонента тоже ненулевая, так как в противном случае вектор a, являющийся решением системы (37), был бы также решением системы $(a\cdot\delta^{i+t_i})=0$, $i=0,1,\ldots,T-1$, где $\delta^{i+t_i}\in\Delta(i)$, которая в силу линейной независимости базы $\widetilde{\Delta}$ имеет только нулевое решение, что противоречит условию $a\neq 0$.

Таким образом, можно утверждать, что среди решений системы уравнений (37) имеется вектор $b=(b_0,\ldots,b_{T-1},1)$. Пусть $b'=(b_0,\ldots,b_{T-1},0)$. Очевидно, что $b'\in\mathbb{E}^T$, $\mathbb{E}^T\subset\mathbb{E}^{T+1}$. Любой вектор λ^i из $\Lambda_э(i)$ можно представить в виде $\lambda^i=\delta^{i+t_i}+ye^T$ или $\lambda^i=-(\delta^{i+t_i}+ye^T)$, поэтому $(b\cdot\lambda^i)=(b'\cdot\delta^{i+t_i})+y=0$ или $(b'\cdot\delta^{i+t_i})=-y$ при всех $i\in\{0,1,\ldots,T-1\}$. При этом $-\frac{l_0}{2}<y<\frac{l_0}{2}$, где $l_0=l+\varepsilon$, l — высота импульсного множества, ε — положительное число, достаточно малое в том смысле, что одновременно выполнены условия $-\frac{l_0}{2}<y<\frac{l_0}{2}$, $y=\frac{s(t_i)+k}{\beta}$, $k\in\mathbb{Z}$, $y\in\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$. Отсюда $-\frac{l_0}{2}<(b'\cdot\delta^{i+t_i})<\frac{l_0}{2}$, т. е. $b'\in P_{l_0}(\widetilde{\delta})$. Но в таком случае $b=b'+e^T$

и $b \in K(P_{l_0}(\widetilde{\delta}))$, т. е. $X \cap K(P_{l_0}(\widetilde{\delta})) \neq \varnothing$, и в силу (38) можно считать, что лемма доказана.

Лемма 22. *Для того чтобы область C параметрического ограничения, $C \subset \mathbb{E}^{T+1}$, имела относительную глубину T по линейно независимому набору $\widetilde{\Lambda}_0 = (\Lambda_0(0), \ldots, \Lambda_0(T-1))$, достаточно, чтобы выполнялось условие $C \supseteq \bigcup\limits_{K(P_{l_0}(\widetilde{\delta})) \in \mathfrak{K}_{l_0}(\widetilde{\Delta})} K(P_{l_0}(\widetilde{\delta}))$, где $l_0 = l + \varepsilon$, l — высота множества Λ_0, ε — достаточно малое положительное число, $\widetilde{\Delta} = (\Delta(0), \ldots, \Delta(T-1))$ — база набора $\widetilde{\Lambda}_0$, $\widetilde{\delta} = (\boldsymbol{\delta}^{0+t_0}, \ldots, \boldsymbol{\delta}^{T-1, t_{T-1}})$, $\boldsymbol{\delta}^{i+t_i} \in \Delta(i)$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное сечение вида $\mathrm{sc}^T_{\lambda^{T-1}, \ldots, \lambda^0} C$, где $(\boldsymbol{\lambda}^0, \ldots, \boldsymbol{\lambda}^{T-1}) = \widetilde{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda}^i \in \Lambda_0(i)$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. Существует такой элементарный поднабор $\widetilde{\Lambda}_э = (\Lambda_э(0), \ldots, \Lambda_э(T-1))$ набора $\widetilde{\Lambda}_0$, что $\boldsymbol{\lambda}^i \in \Lambda_э$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. Пусть $\widetilde{\Delta}_э$ — база набора $\widetilde{\Lambda}_э$ и $\boldsymbol{\delta}^{i+t_i} \in \Delta_э(i)$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. По лемме 22 имеем $\mathrm{sc}^T_{\lambda^{T-1}, \ldots, \lambda^0} K(P_{l_0}(\widetilde{\delta})) \neq \varnothing$. Поскольку $K(P_{l_0}(\widetilde{\delta})) \subseteq C$, то $\mathrm{sc}^T_{\lambda^{T-1}, \ldots, \lambda^0} C \neq \varnothing$. Этого достаточно, чтобы выполнялось равенство $\mathrm{otf}_{\widetilde{\Lambda}_0} C = T$ (см. определение относительной глубины), поскольку из условия $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}^T(\boldsymbol{\lambda}^i)$ следует, что $\mathrm{pr}_{\lambda^i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Лемма доказана.

Лемма 23. *Пусть $\widetilde{\Lambda}_0$ — ограниченный импульсный набор, $\widetilde{\Lambda}_0 = (\Lambda_0(0), \ldots, \Lambda_0(T-1))$, $\widetilde{\Delta}$ — его база, а T, θ, ρ, β и l — параметры ограниченного импульсного множества $\Lambda_0 = \bigcup\limits_{i=0}^{T-1} \Lambda_0(i)$. Пусть, далее, $\widetilde{\delta} = (\boldsymbol{\delta}^{0+t_0}, \ldots, \boldsymbol{\delta}^{T-1+t_{T-1}})$ — произвольная представительная выборка набора $\widetilde{\Delta}$, $K(P_{l_0}(\widetilde{\delta}))$ — ромбический конус, K_0 — базовый квадратный конус, т. е. $K_0 = K(P_1(\widetilde{e}^T))$, где $\widetilde{e}^T$ — естественный базис пространства $\mathbb{E}^T$. Тогда если $\rho \leqslant \frac{\theta}{12\pi \ln T}$, $T \geqslant 16$, $l = \frac{3}{4}$, то $K(P_{l_0}(\widetilde{\delta})) \subset K_0$, где $l_0 = l + \varepsilon$, а ε — достаточно малое положительное число.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a} \in K(P_{l_0}(\widetilde{\delta}))$, где $\widetilde{\delta} = (\boldsymbol{\delta}^{0+t_0}, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{\delta}^{T-1+t_{T-1}})$. Тогда существует такое положительное число k, при котором вектор $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ представляется в виде $\boldsymbol{b} = (b_0, \ldots, b_{T-1}, 1)$, причем $\boldsymbol{b} \in K(P_{l_0}(\widetilde{\delta}))$. Пусть $\boldsymbol{b}' = (b_0, \ldots, b_{T-1}, 0)$. Тогда если $\widetilde{e} = (\boldsymbol{e}^0, \ldots, \boldsymbol{e}^{T-1}, \boldsymbol{e}^T)$ — естественный базис пространства $\mathbb{E}^{T+1}$ и $\mathbb{E}^T = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}^{T+1}\colon (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^T) = 0\}$, то $\boldsymbol{b}'$ принадлежит $\mathbb{E}^T \subset \mathbb{E}^{T+1}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{e}^T$ и $\boldsymbol{b} \in \mathbb{E}^{T+1}$. Кроме того, $\boldsymbol{\delta}^{i+t_i} \in \mathbb{E}^T$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.

Рассмотрим значение $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\lambda}^i)$, где $\boldsymbol{\lambda}^i = \boldsymbol{\delta}^{i+t_i} - (l_0/2)\boldsymbol{e}^T$ или $\boldsymbol{\lambda}^i = -\boldsymbol{\delta}^{i+t_i} - (l_0/2)\boldsymbol{e}^T$. Из определения ромбического конуса имеем $-l_0/2 < (\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{\delta}^{i+t_i}) < l_0/2$. Это значит, что найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$, при котором $|(\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{\delta}^{i+t_i})| < (l_0 - \varepsilon)/2 = l/2 \leqslant 3/8$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.

Вектор $\boldsymbol{\delta}^{i+t_i}$ представим в виде разложения $\boldsymbol{\delta}^{i+t_i} = (\boldsymbol{\mu}^i + \boldsymbol{e}^i)$, где $\boldsymbol{\mu}^i = (\boldsymbol{\delta}^{i+t_i} - \boldsymbol{e}^i)$ и $\mu^i_i = \delta^{i+t_i}_i - 1$. Из последних неравенств и соотношений (18) с учетом того, что в условиях доказываемой леммы $\delta^{i+t_i}_i > 0$, т. е. $\delta^{i+t_i}_i = |\delta^{i+t_i}_i|$, получаем $|(\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{e}^i)| \leqslant |(\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{\delta}^{i+t_i})| + |(\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{\mu}^i)| < 3/8 + |(\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{\mu}^i)| \leqslant 3/8 + \sum\limits_{k=0}^{T-1} |b'_k| \chi^i_k$. С учетом того, что $|(\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{e}^i)| = |b'_i|$, отсюда получаем

$$|b'_i| - \sum_{k=0}^{T-1} |b'_k| \chi^i_k \leqslant \frac{3}{8}, \qquad i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}. \tag{39}$$

Покажем, что $|b'_i| < 1/2$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. Предположим противное: пусть $|b'_i| = \max\limits_k |b'_k| = r \geqslant 1/2$. Тогда

$$|b'_i| - \sum_{k=0}^{T-1} |b'_k| \chi_k^i \geqslant r\left(1 - \sum_{k=0}^{T-1} \chi_k^i\right). \tag{40}$$

Оценим величину $\sum\limits_{k=0}^{T-1} \chi_k^i$. С учетом определения функции χ_k^i нетрудно убедиться, что имеет место равенство $\sum\limits_{k=0}^{T-1} \chi_k^i = \sum\limits_{k=0}^{T-1} \chi_k^0$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{T-1} \chi_k^i = \sum_{k=0}^{T-1} \chi_k^0 = \nu^2 + \nu\left(\sum_{k=1}^{T/2} \frac{1}{k} + \sum_{k=T/2+1}^{T-1} \frac{1}{T-k}\right) = \nu^2 + 2\nu\left(\left(\sum_{k=1}^{T/2} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{T}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \nu^2 + 2\nu\left(\int_1^{T/2} \frac{dx}{x} + 1 - \frac{1}{T}\right) = \nu^2 + 2\nu(\ln T - \ln 2 + 1).$$

По условиям леммы $\nu = \frac{\pi}{2}\frac{\rho}{\theta} \leqslant \frac{1}{24 \ln T}$ и $T \geqslant 16$, поэтому

$$\sum_{k=0}^{T-1} \chi_k^i < \left(\frac{1}{24 \ln T}\right)^2 + \frac{1}{12 \ln T}(\ln T - \ln 2 + 1).$$

Из последнего неравенства вытекает (как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, поскольку $\ln 16 > 2{,}7$ и $\ln 2 > 0{,}69$) оценка $\sum\limits_{k=0}^{T-1} \chi_k^i \leqslant 0{,}1$. С учетом этой оценки из (40) следует, что $|b'_i| - \sum\limits_{k=0}^{T-1} |b'_k|\, \chi_k^i \geqslant 0{,}9r \geqslant 0{,}45$, а это противоречит неравенству (39).

Следовательно, $|b'_i| < 1/2$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. А это означает, что $\boldsymbol{b}' \in J(\boldsymbol{0})$ и $\boldsymbol{b} \in K_0$; но в таком случае и $\boldsymbol{a}$ принадлежит K_0. Лемма доказана.

Л е м м а 24. *Если ограниченный импульсный набор Λ_0 имеет параметры T, θ, ρ, β, l, удовлетворяющие условиям $\rho \leqslant \theta/(12\pi \ln T)$, $T \geqslant 16$, $l = 3/4$, то относительная глубина (по набору $\widetilde{\Lambda}_0$) базового квадратного конуса удовлетворяет неравенству* $\operatorname{otf}_{\widetilde{\Lambda}_0} K_0 \geqslant T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 23 следует, что

$$K_0 \supset \bigcup_{K(P_{l_0}(\widetilde{\delta})) \in \mathfrak{K}_{l_0}(\widetilde{\Delta})} K(P_{l_0}(\widetilde{\delta}));$$

здесь $\widetilde{\Delta} = (\Delta(0), \ldots, \Delta(T-1))$ — база набора $\widetilde{\Lambda}_0$, $\widetilde{\delta} = (\delta^{0+t_0}, \ldots, \delta^{i+t_i}, \ldots$ $\ldots, \delta^{T-1+t_{T-1}})$, $\delta^{i+t_i} \in \Delta(i)$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, $l_0 = l + \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число. Согласно лемме 22, это — достаточное условие для выполнения равенства $\operatorname{otf}_{\widetilde{\Lambda}_0} K_0 = T$. Лемма 24 доказана.

Утверждение теоремы 8 (о конструкции импульсного множества с ограниченной высотой) следует из лемм 20 и 24.

§ 6. Верхняя оценка удельной энтропии

Пусть K_0 — базовый квадратный конус, $K_0 \subset \mathbb{E}^{T+1}$; $\mathfrak{P}(\Lambda, K_0)$ — класс линейно-пороговых функций над импульсным множеством Λ с областью структурного ограничения K_0 (здесь Λ — прежнее, см. § 3); $n_p(T, s, \theta, \rho, \beta) = |\mathfrak{P}(\Lambda, K_0)|$ и $h_p(T, s, \theta, \rho, \beta) = \log n_p(T, s, \theta, \rho, \beta)$ — мощность и удельная энтропия данного класса линейно-пороговых функций.

Теорема 9 (о верхней оценке удельной энтропии класса линейно-пороговых функций). *При растущих параметрах T, θ, и ρ справедливы следующие оценки:*

а) если $\rho \leqslant c\theta/\log T$, где c — некоторая константа, то $h_p(T, s, \theta, \rho, \beta) \lesssim T(\log\beta + \log\rho)$ при любых s;

б) если $\log\log T = o(\log\beta\theta)$, то $h_p(T, s, \theta, \theta, \beta) \lesssim T(\log\beta + \log\theta)$.

Данная теорема дает верхние оценки величины h_p из соотношений теоремы 7.

Доказательство этой теоремы о верхней оценке основывается на дифференциальном свойстве функции мощности классов линейно-пороговых функций [3], верхней оценке полной энтропии [3] и некоторых свойствах сигнального импульса.

Помимо множества Λ, здесь мы будем рассматривать импульсные множества Λ_M и Λ_0. Множество Λ_M, $\Lambda_M \subset \mathbf{E}^{T+1}$, имеет длительность T, плотность дискретизации θ, локальное ограничение ρ, плотность квантования β, функцию элементарного сдвига s из S_s, у которой область определения есть дискретизация Ψ с параметрами T, θ и ρ, а область значений — интервал $[-1/2, 1/2)$. Будем полагать, что Λ_M имеет в качестве ограничительного параметра — высоты — любое достаточно большое положительное число M. Множество Λ_M определяется соотношением

$$\Lambda_M = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{E}^{T+1}\colon \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\delta}^t - y\mathbf{e}^T \text{ или } \boldsymbol{\lambda} = -(\boldsymbol{\delta}^t - y\mathbf{e}^T),$$
$$y = (s(t)+k)/\beta,\ y \in [M, M],\ t \in \Psi,\ k \in \mathbb{Z}\};$$

здесь $\boldsymbol{\delta}^t = (\delta^t(0), \ldots, \delta^t(T-1), 0)$ из $\mathbf{E}^T$ — импульсный вектор, где $\delta^t(j) = \dfrac{\sin\pi(t-j)}{T\sin\dfrac{\pi(t-j)}{T}}$ — сигнальный импульс; $\widetilde{e} = (\mathbf{e}^0, \ldots, \mathbf{e}^{T-1}, \mathbf{e}^T)$ — естественный базис пространства $\mathbf{E}^{T+1}$; $\mathbf{E}^T = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}^{T+1}\colon (\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{e}^T) = 0\}$. Ограниченное импульсное множество Λ_0 имеет высоту l, т. е.

$$\Lambda_0 = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{E}^{T+1}\colon \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\delta}^t - y\mathbf{e}^T \text{ или } \boldsymbol{\lambda} = -(\boldsymbol{\delta}^t - y\mathbf{e}^T),$$
$$y = (s(t)+k)/\beta,\ y \in [-l/2, l/2],\ t \in \Psi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Будем считать, что $M \gg l$, а потому $\Lambda_0 \subset \Lambda_M$. Мощность класса $\mathfrak{P}(A, C)$ линейно-пороговых функций над множеством A с областью структурного ограничения C, $C \subseteq \mathbf{E}^n$, будем обозначать через $N(A, C)$.

Пусть дано множество K, $K \subset \mathbf{E}^{T+1}$, удовлетворяющее соотношениям $\Lambda_0 \subseteq K \subset \Lambda_M$. Пусть $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_M \setminus K$. Пусть, наконец, $K' = K \cup \{\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{\lambda}\}$ (очевидно, что $\Lambda_0 \subset K' \subseteq \Lambda_M$) и $\nu = \min(1, \pi\rho/(2\theta))$.

Лемма 25. *Если высота l ограниченного импульсного множества Λ_0 удовлетворяет неравенству $l \geqslant 1 + \nu(3 + 0{,}7\log T)$, то $N(\operatorname{nr}\operatorname{pr}_\lambda' K, \operatorname{sc}_\lambda K_0) = 0$.*

Доказательство. Покажем, что если $\boldsymbol{\lambda} \in (\Lambda_M \setminus \Lambda_0)$, $l \geqslant 1 + \nu(3 + 0{,}7\log T)$, то $\operatorname{sc}_\lambda K_0 = \varnothing$. Пусть $X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}^{T+1}\colon (\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}) = 0\}$. Тогда $\operatorname{sc}_\lambda K_0 = X \cap K_0$. Пусть $X_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_{T-1}, x_T) \in X\colon x_T = 1\}$, $K_1 = \{(x_0, \ldots, x_{T-1}, x_T) \in K_0\colon x_T = 1\}$. Тогда, как нетрудно заметить, $X \cap K_0 = \varnothing$ в том и только том случае, когда $X_1 \cap K_1 = \varnothing$.

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{b} = (b_0, \ldots, b_{T-1}, 1) \in X_1$; для него выполняется равенство $(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{b}) = 0$. В данном случае $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_M$, т. е. либо $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\delta}^t - y\mathbf{e}^T$, либо $\boldsymbol{\lambda} = -(\boldsymbol{\delta}^t - y\mathbf{e}^T)$. Вместе с тем $\boldsymbol{\lambda} \notin \Lambda_0$, поэтому $|y| > l/2$.

Пусть $\boldsymbol{b}' = (b_0, \ldots, b_{T-1}, 0)$; тогда $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' + \mathbf{e}^T$ и $|(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{b})| = |((\boldsymbol{b}' + \mathbf{e}^T)\cdot(\boldsymbol{\delta}^t - y\mathbf{e}^T))|$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{b}' \in \mathbf{E}^T$, обладает свойством $(\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{\delta}^t) = y$, откуда $\left|\sum\limits_{k=0}^{T-1} b_k\delta_k^t\right| = |y|$.

Пусть $r = \max_k |b_k|$; тогда $\left|\sum_{k=0}^{T-1} b_k \delta_k^t\right| \leqslant r \sum_{k=0}^{T-1} |\delta_k^t|$. Отсюда получаем

$$\max_k |b_k| = r \geqslant |y| \Big/ \sum_{k=0}^{T-1} |\delta_k^t|. \qquad (41)$$

Обозначим $\sum_{k=0}^{T-1} |\delta_k^t|$ через u. Учитывая, что $t \in \Psi$, имеем $t = i + a$, где $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, $a = \frac{\tau}{\theta}$, $\tau \in \left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$ и $\rho \leqslant \theta$; поэтому $u \leqslant \sum_{k=0}^{T-1} |\delta_k^{i+a}|$, где $-1/2 \leqslant a < 1/2$. Из определения функции δ_k^{i+a} и ее периодичности, а также неравенства $|\delta_0^a| \leqslant 1$, которое следует из (2), получаем

$$u \leqslant \sum_{k=0}^{T-1} |\delta_{k-i}^a| = |\delta_0^a| + \sum_{k=0}^{i-1} |\delta_{k-i}^a| + \sum_{k=i+1}^{T-1} |\delta_{k-i}^a| \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \sum_{k=0}^{i-1} |\delta_{k-i+T}^a| + \sum_{k=1}^{T-i+1} |\delta_k^a| = 1 + \sum_{k=T-i}^{T-1} |\delta_k^a| + \sum_{k=1}^{T-i-1} |\delta_k^a| = 1 + \sum_{k=1}^{T-1} |\delta_k^a|.$$

Из неравенств $\frac{2}{\pi}|\alpha| \leqslant |\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, верных при $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2}$, и $|\sin\alpha| \leqslant 1$ получаем, что $|\delta_k^a| \leqslant \dfrac{\pi a}{T\left|\sin\frac{\pi(k-a)}{T}\right|} \leqslant \dfrac{\nu}{T\left|\sin\frac{\pi(k-a)}{T}\right|} \leqslant \dfrac{\nu}{2\left(k-\frac{1}{2}\right)}$ при $k \in \left\{1, \ldots, \frac{T}{2}\right\}$, и $|\delta_k^a| \leqslant \frac{\nu}{2(T-k-1/2)}$ при $k \in \left\{\frac{T}{2}, \frac{T}{2}+1, \ldots, T-1\right\}$. Поэтому

$$u \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{T/2} \frac{\nu}{k-1/2} \leqslant 1 + \nu\left(2 + \int_{1/2}^{(T-1)/2} \frac{dx}{x}\right) = 1 + \nu\left(2 + \ln x\Big|_{1/2}^{(T-1)/2}\right) <$$
$$< 1 + \nu(2 + \ln T) < 1 + \nu(2 + 0{,}7\log T).$$

Подставляя эту оценку в (41) и учитывая, что $|y| > l/2 \geqslant 1 + \nu(3 + 0{,}7\log T)/2$, получим $\max_k |b_k| > 1/2$.

С другой стороны, по определению базового квадратного конуса K_0 любой вектор $\boldsymbol{a} = (a_0, \ldots, a_{T-1}, 1)$ из K_1 таков, что $|a_i| < 1/2$ при всех $i \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. Следовательно, $\boldsymbol{b} \notin K_1$, а поскольку $\boldsymbol{b}$ — произвольный вектор в X_1, то $K_1 \cap X_1 = \varnothing$. Это означает, что $\mathrm{sc}_\lambda K_0 = \varnothing$. Но в таком случае из определения функции мощности следует, что если $\mathrm{sc}_\lambda K_0 = \varnothing$, то $N(\mathrm{nr}\,\mathrm{pr}_\lambda \Lambda', \mathrm{sc}_\lambda K_0) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 26. *Если высота l ограниченного импульсного множества Λ_0 удовлетворяет неравенству $l \geqslant 1 + \nu(3 + 0{,}7\log T)$, то $N(\Lambda_0, K_0) = N(\Lambda_M, K_0)$, где Λ_M — импульсное множество, имеющее достаточно большую высоту M, $\Lambda_0 \subset \Lambda_M \subset \mathbf{E}^{T+1}$, K_0 — базовый квадратный конус, $K_0 \subset \mathbf{E}^{T+1}$, $\nu = \min(1, \pi\rho/(2\theta))$.*

Доказательство. Пусть $\Lambda_0 \subseteq \Lambda' \subset \Lambda_M$ и $\Lambda'' = \Lambda' \cup \{\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{\lambda}\}$, $\boldsymbol{\lambda} \in (\Lambda_M \setminus \Lambda')$. Тогда в силу дифференциального свойства функции мощности классов линейно-пороговых функций [3, следствие из теоремы 2] можно записать: $N(\Lambda'', K_0) = N(\Lambda', K_0) + N(\mathrm{nr}\,\mathrm{pr}_\lambda \Lambda', \mathrm{sc}_\lambda K_0)$. Отсюда и из леммы 25 следует равенство $N(\Lambda'', K_0) = N(\Lambda', K_0)$. Поскольку Λ' — произвольное множество, обладающее свойством $\Lambda_0 \subseteq \Lambda' \subset \Lambda_M$, по индукции заключаем, что $N(\Lambda_0, K_0) = N(\Lambda_M, K_0)$. Лемма 26 доказана.

Из этой леммы извлекаем

Следствие. *Имеет место равенство $N(\Lambda_0, K_0) = N(\Lambda, K_0)$.*

Семейством (n, m)-множеств [3] условимся считать множество

$$\mathfrak{A}_{n,m} = \{A\colon A \text{ — симметричное множество, } \dim A \leqslant n,\ \mathrm{mac}\,A \leqslant m\}.$$

Класс $\mathfrak{P}(A, C)$ при $C = \mathbf{E}^n$ обозначим через $\mathfrak{P}(A)$, а его мощность — через $N(A)$. *Функцией максимальной мощности* называется величина $N(n, m) = \max_{A \in \mathfrak{A}_{n,m}} N(A)$; для нее известна (см. [3, соотношение (7)]) верхняя оценка

$$\log N(n, m) \leqslant (n-1) \log \frac{m}{n-1} + O(n). \tag{42}$$

Лемма 27. *Если* $\log\log T = o(\log \beta\theta)$, *то* $h_p(T, s, \theta, \theta, \beta) \lesssim T(\log \beta + \log \theta)$ *при любых* s *из* S_s *и растущих параметрах* T, β *и* θ.

Доказательство. Мощность $\operatorname{mac} \Lambda_0$ множества Λ_0 при значении высоты $l = 4 + 0{,}7 \log T$ и при $\rho = \theta$ удовлетворяет соотношению $\operatorname{mac} \Lambda_0 \lesssim T\beta\theta(4 + 0{,}7 \log T) \sim 0{,}7 T\beta\theta \log T$. Кроме того, размерность $\dim \Lambda_0$ этого множества равна $T + 1$. Воспользовавшись оценкой (42) и учитывая, что $N(\Lambda_0, K_0) \leqslant N(\dim \Lambda_0, \operatorname{mac} \Lambda_0)$, получим

$$\log N(\Lambda_0, K_0) \lesssim T \log \frac{0{,}7 T\beta\theta \log T}{T} + O(T) \sim T(\log \beta + \log \theta + \log\log T).$$

Отсюда с учетом условия $\log\log T = o(\log \beta\theta)$ и следствия из леммы 26 получаем $h_p(T, s, \theta, \theta, \beta) = \log N(\Lambda_0, K_0) \lesssim T(\log \beta + \log \theta)$. Лемма 27 доказана.

Лемма 28. *Если* $\rho \leqslant c\theta / \log T$, *где* c *— константа, то* $h_p(T, s, \theta, \rho, \beta) \lesssim T(\log \beta + \log \rho)$ *при любых* $s \in S_s$ *и растущих параметрах* T *и* β.

Доказательство. Очевидно, что при $\rho \leqslant c\theta / \log T$ получаем $\nu = \pi\rho/(2\theta) = o(1)$. При $l = 1 + \nu(3 + 0{,}7 \log T)$ имеем $\operatorname{mac} \Lambda_0 \lesssim T\beta\rho(1 + c'\rho/\theta + c''\rho/\theta \log T)$, где c' и c'' — константы. Учитывая условия леммы, получаем $\operatorname{mac} \Lambda_0 \lesssim c''' T\beta\rho$, где c''' — константа. При этом $\dim \Lambda_0 = T + 1$. Из оценки (42) и следствия из леммы 26 получаем

$$h_p(T, s, \theta, \rho, \beta) = \log N(\Lambda_0, K_0) \lesssim T \log(c''' \rho\beta) + O(T) \sim T(\log \beta + \log \rho).$$

Лемма 28 доказана.

Утверждение теоремы 9 следует из последних двух лемм.

Доказательство теоремы 4 (об удельной энтропии цифровых сигналов) — основного результата данной работы — полностью завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский С. В. Устройство для акустической диагностики механизмов // Авторское свидетельство № 537264.
2. Архангельский С. В. Информационные свойства цифровых сигналов // IX Всесоюзн. конф. по теории кодирования и передачи информации / Тез. докл. — Одесса, 1988. — С. 10–13.
3. Архангельский С. В. Мощностные свойства классов совместных систем линейных неравенств // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. — М.: Наука, 1992. — С. 48–64.
4. Архангельский С. В., Андрофагин А. Н. и др. Автоматизированная система исследования акустических процессов и ее применение в анализе речевых сигналов // Автоматическое распознавание слуховых образов. Материалы Всесоюзной школы-семинара АРСО-13. Ч. I. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. — С. 117–118.
5. Архангельский С. В., Засов В. А, Особенности первичной обработки сигналов при виброакустическом диагностировании зарождающихся дефектов // Проблемы вибродиагностики машин и приборов. Материалы Всесоюзного научного совещания (Иваново, сентябрь 1985). — М.: Инмаш АН СССР, 1985. — С. 33–34.
6. Архангельский С. В., Засов В. А., Локтев Н. А. Исследовательская автоматизированная система для виброакустической диагностики узлов подвижного состава // Техническая диагностика. Материалы 5-го Всесоюзного совещания (Суздаль, ноябрь — декабрь 1982). — М.: ИПУ, 1982. — С. 17–20.
7. Архангельский С. В., Шафоростов Ю. И. и др. Устройство для сбора и обработки статистической информации // Авторское свидетельство № 943742.

8. Бахтиаров Г. Д., Дикий С. Л. Аналого-цифровые преобразователи // Зарубежная радиоэлектроника. — 1975. — № 1. — С. 52–90.
9. Гитис Э. И., Пискулов Е. А. Аналого-цифровые преобразователи. — М.: Энергоиздат, 1981.
10. Гнатек Ю. Р. Справочник по цифроаналоговым и аналого-цифровым преобразователям. — М.: Радио и связь, 1982.
11. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов. Справочник. — М.: Радио и связь, 1985.
12. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977.
13. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981.
14. Еременко Ю. И. Особенности восприятия полифонических сигналов читающих устройств прямой перекодировки // М., 1985. — Деп. в ЦНТИ «Информсвязь» 13.03.1985. — Р 591 СВ–85.
15. Колмогоров А. Н. О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, № 3. — С. 385–388.
16. Колмогоров А. Н. Теория передачи информации // Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства (15–20 октября 1956, пленарное заседание). — М.: АН СССР, 1957. — С. 66–69.
17. Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. — 1965. — Т. 1, вып. 1. — С. 3–14. [См. в кн.: Колмогоров А. Н. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987. — С. 213–223.]
18. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
19. Котельников В. А. Материалы к 1-му Всесоюзному съезду по вопросам реконструкции связи. — М.: Изд. редакции управления связи РККА, 1933.
20. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. — М., Л.: Госэнергоиздат, 1956.
21. Красильников Н. Н. Теория передачи и восприятия изображения. — М.: Радио и связь, 1986.
22. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. В 2 т. — М.: Мир, 1983.
23. Маркюс Ж. Дискретизация и квантование. — М.: Энергия, 1969.
24. Нечипорук Э. И. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 11. — М.: Наука, 1964. — С. 49–62.
25. Оппенгейм Э. (ред.). Применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1980.
26. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978.
27. Рабинер Л., Шафер В. Цифровая обработка речевых сигналов. — М.: Радио и связь, 1981.
28. Смолов В. Б. (ред.). Микроэлектронные цифроаналоговые и аналого-цифровые преобразователи информации. — Л.: Энергия, 1976.
29. Тузов Г. И. (ред.). Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами. — М.: Радио и связь, 1985.
30. Харкевич А. А. Спектры и анализ. — М.: Физматлит, 1962.
31. Demartini C., Serra A., Valenzano A. Parallel cellular structures for linear preductive coding // Int. J. Mini- and Microcomput. — 1983. — V. 5, № 3. — P. 44–47.
32. Muroga S. The principle of majority decision logical elements and the complexity of their circuits // Intern. Conf. on Inform. Processing. — Paris, 1959.

Поступило в редакцию 16 IX 1997