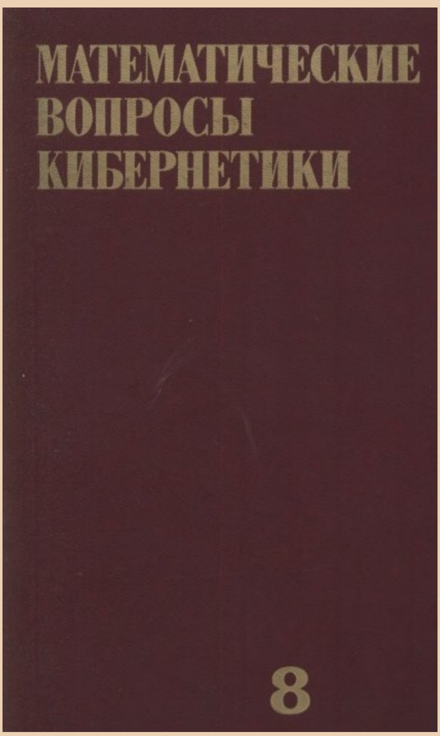
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 8



В. Б. Алексеев

Метод искусственных ограничений для оценки числа дискретных функций

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Алексеев В. Б. Метод искусственных ограничений для оценки числа дискретных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. — М.: Наука, 1999. — С. 123–134.
URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1999-123

МЕТОД ИСКУССТВЕННЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ *)

В. Б. АЛЕКСЕЕВ

(МОСКВА)

Автором в ряде работ были получены асимптотики логарифма для числа дискретных функций от n переменных в разных классах [2, 3, 4], а также для числа некоторых других дискретных объектов [1, 5]. При этом был использован некоторый общий подход, идеи которого восходят к работе Д. Клейтмена [7] о числе монотонных булевых функций. В данной работе будут представлены общие идеи этого подхода, будут получены некоторые результаты в общем виде, а также некоторые конкретные результаты.

Определим сразу один из предполных классов в частичной двузначной логике, для которого ниже мы установим асимптотику логарифма для числа функций от n переменных. Функция от произвольного (конечного) числа переменных называется частичной булевой функцией, если ее аргументы принимают значения в множестве $E_2 = \{0, 1\}$, а сама функция принимает значения в множестве $\{0, 1, *\}$. Множество всех таких функций будем обозначать P_2^*. Через E_2^n будем обозначать множество всех наборов длины n с элементами из E_2.

Определение. Пусть $+$ в дальнейшем обозначает сложение по модулю 2, а для наборов из E_2^n обозначает покоординатное сложение по модулю 2. Пусть 0_n обозначает нулевой вектор длины n. Класс Φ_7 (один из предполных классов в P_2^* [6]) определяется как множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_2^* (n — любое натуральное), удовлетворяющих для любых четырех наборов a, b, c, d из E_2^n условию

$$\begin{gathered}\text{если } a+b+c+d=0_n, \text{ то } f(a)=*, \text{ или } f(b)=*, \text{ или } f(c)=*,\\ \text{или } f(d)=*, \text{ или } f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=0.\end{gathered} \tag{1}$$

Отметим, что этот класс шире, чем класс частичных булевых функций, доопределимых до линейных булевых функций.

Пусть $\Phi_7(n)$ — число функций в классе Φ_7, зависящих от n фиксированных переменных. Легко видеть, что если f принимает только значения 0 и $*$, то $f \in \Phi_7$. Поэтому

$$|\Phi_7(n)| \geqslant 2^{2^n} \quad \text{и} \quad \log_2 |\Phi_7(n)| \geqslant 2^n.$$

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00509) и программы «Университеты России».

© В. Б. Алексеев, 1999

С другой стороны, очевидно

$$|\Phi_7(n)| \leqslant 3^{2^n} \quad \text{и} \quad \log_2 |\Phi_7(n)| \leqslant 2^n \log_2 3.$$

Таким образом, для $\log_2 |\Phi_7(n)|$ мы пока имеем порядок, но не асимптотику.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию. Пусть задана последовательность семейств функций F_n, $n=1,2,\ldots$, где функции из F_n отображают некоторое конечное множество V_n в конечное множество D_n, и требуется достаточно точно оценить сверху $|F_n|$. Мы будем рассматривать классы F_n, которые задаются системой ограничений следующего типа: определенные комбинации значений функции на некоторых точках запрещают некоторые значения в других точках. Например, класс F_n монотонных булевых функций от n переменных можно определить как семейство булевых функций, удовлетворяющих следующему условию: если a и b — два набора переменных, $a<b$ и $f(a)=1$, то $f(b)\neq 0$. С аналогичной ситуацией мы сталкиваемся и для класса Φ_7, однако здесь уже значения на трех наборах могут ограничивать значения на четвертом.

Верхнюю оценку для числа функций в F_n можно получить следующим образом. Упорядочим некоторым образом точки в V_n и будем задавать функции из F_n, просматривая точки в этом порядке. Пусть v — очередная точка в V_n. Тогда значения функции на предыдущих точках могут запрещать некоторые значения для $f(v)$. Если каждый раз число разрешенных значений не превосходит d, то, очевидно, число возможных функций не превосходит $d^{|V_n|}$. Если при задании любой функции из F_n в заданном порядке не более чем t раз возникает ситуация, когда на очередной точке число разрешенных значений не превосходит $q > d$, а в остальных случаях число разрешенных значений не превосходит d, то общее число функций в F_n можно оценить сверху величиной

$$C^t_{|V_n|} \cdot q^t \cdot d^{|V_n|-t}. \tag{2}$$

При этом

$$\log_2 |F_n| \leqslant |V_n| \log_2 d + \log_2 C^t_{|V_n|} + t \log_2(q/d). \tag{3}$$

В случае, если t достаточно мало, то при $n\to\infty$ получаем неравенство

$$\log_2 |F_n| \leqslant |V_n| \log_2 d \cdot (1+o(1)). \tag{4}$$

К сожалению, описанное рассуждение во многих случаях не позволяет получить желаемое d, поскольку обычно в F_n есть хотя бы одна такая функция, что ее значения на каждом начальном отрезке точек из V_n очень слабо ограничивают значения на последующих точках, и из-за этой функции t оказывается недопустимо большим. Так, например, частичная булева функция, тождественно равная $*$, входит в класс Φ_7, и при ее задании в любом порядке на каждом очередном наборе остается 3 разрешенных значения. Поэтому, если в (4) мы пытаемся получить $d=2$, то $t=3^n$, что недопустимо.

Чтобы преодолеть эту трудность, предлагается кроме ограничений на значения функции, задающих рассматриваемый класс, дополнительно вводить искусственные ограничения так, чтобы число возможных значений функции на очередной точке при этих ограничениях всегда не превосходило желаемой величины d. После этого достаточно оценить, сколько раз это искусственное ограничение нарушается при восстановлении произвольной функции из рассматриваемого класса. Если максимальное число нарушений не превосходит t, и число разрешенных значений в произвольной точке не превосходит q, то общее число функций в F_n опять можно оценить сверху величиной (2). При этом опять справедливо (3), и в случае если t достаточно мало, при $n\to\infty$ получаем неравенство (4).

Для иллюстрации этой идеи покажем, как установить асимптотику для $\log_2 |\Phi_7(n)|$.

Теорема 1. *Пусть $\Phi_7(n)$ — число функций от n фиксированных переменных в классе Φ_7. Тогда*

$$2^n \leqslant \log_2 \Phi_7(n) \leqslant 2^n(1 + O(n \cdot 2^{-\frac{n}{2}})$$

при $n \to \infty$, т. е. $\log_2 \Phi_7(n) \sim 2^n$.

Доказательство. Нижняя оценка получена выше. Для получения верхней оценки зафиксируем какой-нибудь порядок $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}$ всех 2^n наборов из E_2^n и будем задавать функции от n переменных из Φ_7, просматривая наборы в этом порядке. Пусть f уже задана на наборах $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$. Так как мы хотим, чтобы f принадлежала Φ_7, то для любых 4 наборов из $a_1, a_2, \ldots, a_i$ должно выполняться условие (1). При этом значение $f(a_i) = 0$, или $f(a_i) = 1$, или оба эти значения могут оказаться запрещенными (значение $f(a_i) = *$ всегда разрешено). Введем теперь следующее искусственное ограничение:

$$\begin{gathered}\text{если для } f(a_i) \text{ не запрещено ни одно из значений } 0, 1, *,\\ \text{то обязательно выбирается } f(a_i) = *, \text{ иначе выбирается}\\ \text{любое разрешенное значение.}\end{gathered} \tag{5}$$

Зафиксируем теперь некоторый натуральный параметр t и разрешим, чтобы наше искусственное ограничение (5) нарушалось при задании f не более чем на t наборах. Тогда общее число функций, построенных указанным способом, не превосходит

$$C_{2^n}^t \cdot 3^t \cdot 2^{2^n - t}.$$

Если при некотором t все функции из Φ_7 от n переменных будут построены, то $\Phi_7(n) \leqslant C_{2^n}^t \cdot 3^t \cdot 2^{2^n - t}$ и

$$\log_2 \Phi_7(n) \leqslant 2^n + t \log_2(3/2) + \log_2 C_{2^n}^t. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь любую функцию f из Φ_7, зависящую от n переменных и просмотрим ее значения в зафиксированном выше порядке наборов. Пусть A — множество наборов a_i, для которых значение $f(a_i)$ противоречит нашему искусственному ограничению (5). Это означает, что значениями функции на предыдущих наборах не запрещены ни 0, ни 1, и $f(a_i) \neq *$. Наша задача — получить достаточно хорошую верхнюю оценку для $|A|$.

Допустим, что в A имеются такие 4 набора a, b, c, d, что $a + b + c + d = 0_n$. Тогда в упорядоченности $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}$ один из них (пусть, например, d) стоит после остальных трех. Так как a, b, c входят в A, то $f(a) \neq *$, $f(b) \neq *$, $f(c) \neq *$ и, следовательно, условие (1) запрещает для $f(d)$ либо 0, либо 1. Но это противоречит тому, что $d \in A$. Таким образом,

$$\begin{gathered}\text{в } A \text{ нет четырех различных наборов } a, b, c, d,\\ \text{таких, что } a + b + c + d = 0_n,\end{gathered} \tag{7}$$

и наша задача сводится просто к следующей экстремальной задаче. Получить достаточно хорошую верхнюю оценку для мощности подмножества A наборов из E_2^n, удовлетворяющих условию (7).

Лемма 1. *Если $A \subseteq E_2^n$ и A удовлетворяет* (7), *то* $|A| \leqslant 2^{\frac{n+1}{2}} + 1$.

Доказательство. *Пусть $|A| = p$. Рассмотрим всевозможные суммы $a + b$ различных наборов из A. Их количество равно $C_p^2 > (p-1)^2/2$.*

Допустим, что $p > 2^{\frac{n+1}{2}}+1$. Тогда $C_p^2 > 2^n$. Следовательно, найдутся две пары (a, b) и (c, d), дающие одинаковые суммы $a+b=c+d$. Тогда $a+b+c+d=0_n$. При этом, если бы, например, было $c=a$, то было бы $d=b$ и получалась бы одна и та же пара. Следовательно, все четыре набора различны, и мы получаем противоречие с (7). Лемма доказана.

Таким образом, в (6) можно взять $t=\lfloor 2^{\frac{n+1}{2}}\rfloor+1$. При этом $t\log_2(3/2) = O(2^{\frac{n}{2}})$ и $\log_2 C_{2^n}^t < tn = O(n2^{\frac{n}{2}})$. Отсюда и из (6) следует, что

$$\log_2 \Phi_7(n) \leqslant 2^n + O(n2^{\frac{n}{2}}) = 2^n(1+O(n\cdot 2^{-\frac{n}{2}})).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим еще один предполный класс Φ_8 в частичной двузначной логике P_2^* (отметим, что для всех предполных классов в P_2^*, кроме Φ_7 и Φ_8, асимптотика логарифма числа функций от n переменных или более точные результаты получаются легко).

Определение. Пусть два набора a и b из E_2^n совпадают в координатах $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}$ и различаются в остальных координатах. Тогда множество всех наборов из E_2^n, совпадающих с a и b в координатах $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}$, называется k-мерной гранью, определяемой наборами a и b. Класс $\Phi_8 \subseteq P_2^*$ определяется как множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_2^* (n — любое натуральное), удовлетворяющих для любых четырех наборов a, b, c, d из E_2^n условию

$$\begin{gathered}\text{если пары наборов } (a, d) \text{ и } (b, c) \text{ определяют одну и ту же}\\ \text{грань, то } f(a)=*, \text{ или } f(b)=*, \text{ или } f(c)=*, \text{ или } f(d)=*,\\ \text{или } f(a)=f(b)=f(c)=f(d), \text{ или } f(a)\neq f(d) \text{ и } f(b)\neq f(c).\end{gathered} \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть $\Phi_8(n)$ — число функций от n фиксированных переменных в классе Φ_8. Тогда*

$$2^n \leqslant \log_2 \Phi_8(n) \leqslant 2^n(1+O(n\cdot(3/4)^{\frac{n}{2}}))$$

при $n\to\infty$, т. е. $\log_2 \Phi_7(n) \sim 2^n$.

Доказательство. Нижняя оценка следует из того, что все функции из P_2^*, принимающие только значения 0 и $*$, принадлежат Φ_8. Для получения верхней оценки можно провести абсолютно такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 1, используя то же искусственное ограничение (5). При этом мы получим для $\Phi_8(n)$ ту же оценку

$$\log_2 \Phi_8(n) \leqslant 2^n + t\log_2(3/2) + \log_2 C_{2^n}^t, \tag{9}$$

а задача сведется к следующей экстремальной задаче: оценить сверху мощность подмножества A наборов из E_2^n, удовлетворяющих условию

$$\begin{gathered}\text{в } A \text{ нет четырех различных наборов } a, b, c, d, \text{ таких, что}\\ \text{пары наборов } (a, d) \text{ и } (b, c) \text{ определяют одну и ту же грань.}\end{gathered} \tag{10}$$

Лемма 2. *Если $A \subseteq E_2^n$ и A удовлетворяет* (10), *то $|A| \leqslant 2\cdot 3^{\frac{n}{2}}$.*

Доказательство. Общее число граней в E_2^n равно 3^n. Пусть $|A|=p$. Допустим, что $p > 2\cdot 3^{\frac{n}{2}}$. Тогда число пар различных элементов из A равно $(p^2-p)/2 > 2\cdot 3^n - 3^{\frac{n}{2}} > 3^n$. Поэтому в A найдутся различные пары (a, d) и (b, c), определяющие одну и ту же грань, что противоречит условию (10). Лемма доказана.

Таким образом, в (9) можно взять $t = \lfloor 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}} \rfloor$. При этом $t \log_2(3/2) = O(3^{\frac{n}{2}})$ и $\log_2 C_{2^n}^t < tn = O(n3^{\frac{n}{2}})$. Отсюда и из (9) следует, что

$$\log_2 \Phi_8(n) \leqslant 2^n + O(n3^{\frac{n}{2}}) = 2^n(1 + O(n(3/4)^{\frac{n}{2}})).$$

Теорема доказана.

Докажем теперь утверждение, обобщающее теоремы 1 и 2. Пусть V_n — конечные множества при всех $n = 1, 2, \ldots$, пусть D — фиксированное конечное множество и рассматриваются функции $f\colon V_n \to D$. Пусть $R_n(y_1, \ldots, y_h)$ — это h-местное отношение на V_n и $R(y_1, \ldots, y_h)$ — это h-местное отношение на D. Пусть $U(R_n, R)$ — это класс всех функций $f\colon V_n \to D$, которые для любых точек $a_1, a_2, \ldots, a_h$ из V_n удовлетворяют импликации

$$R_n(a_1, \ldots, a_h) \Longrightarrow R(f(a_1), \ldots, f(a_h)). \tag{11}$$

Подмножество $W \subseteq V_n$ назовем независимым в V_n относительно R_n, если $R_n(a_1, \ldots, a_h)$ ложно для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_h$ из W. Через $\beta(V_n)$ обозначим максимальную мощность подмножества W из V_n, независимого относительно R_n.

Теорема 3. *Пусть R_n — h-местное отношение на V_n и R — h-местное отношение на D. Пусть в D существует такое подмножество K, что для любого i и для любых $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_h$ из K в K существует не более r элементов b_i, таких, что истинно $R_n(b_1, \ldots, b_h)$, и пусть $|D \backslash K| = m$. Пусть $\beta(V_n) = o(|V_n|)$ при $n \to \infty$. Тогда при $n \to \infty$*

$$|U(R_n, R)| \leqslant (r + m)^{|V_n|(1 + o(1))},$$

если $r + m \geqslant 2$, и

$$\log_2 |U(R_n, R)| \leqslant (1 + o(1)) \cdot \beta(V_n) \cdot \log_2 \frac{|V_n|}{\beta(V_n)},$$

если $r + m = 1$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный порядок элементов из V_n и будем задавать в этом порядке функции так, чтобы они лежали в классе $U(R_n, R)$. Дополнительно наложим следующее искусственное ограничение: если при задании функции f на очередной точке $a \in V_n$ в качестве $f(a)$ можно взять больше чем r значений из K так, что условие (11) пока не будет нигде нарушаться, то в качестве $f(a)$ искусственно разрешаем брать только значения из $D \setminus K$. Пусть при восстановлении любой функции из $U(R_n, R)$ это искусственное ограничение нарушается не более чем t раз. Тогда

$$|U(R_n, R)| \leqslant C_{|V_n|}^t \cdot |D|^t \cdot (r + m)^{|V_n| - t}. \tag{12}$$

Докажем, что можно взять $t = \beta(V_n)$. Допустим, что для функции $f \in U(R_n, R)$ введенное искусственное ограничение нарушается на подмножестве $W \subseteq V_n$ и $|W| > \beta(V_n)$. Тогда из определения $\beta(V_n)$ получаем, что в W существуют такие элементы $a_1, a_2, \ldots, a_h$, что $R_n(a_1, \ldots, a_h)$ истинно. Рассмотрим тот элемент среди $a_1, a_2, \ldots, a_h$, который позже всех встречается в зафиксированном порядке на V_n. Пусть это a_i. Поскольку $R_n(a_1, \ldots, a_h)$ истинно, то для выполнения импликации (11) необходимо, чтобы было истинно $R(f(a_1), \ldots, f(a_h))$. Так как во всех точках $a_1, a_2, \ldots, a_h$ нарушается введенное нами искусственное ограничение, то $f(a_j) \in K$ для всех $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, h$. Но тогда из свойств подмножества K следует, что для $f(a_i)$ можно взять не более r значений из K так, чтобы не нарушалась импликация (11). Это противоречит тому, что значение $f(a_i)$ нарушает наше искусственное ограничение. Таким образом, допущение, что $|W| > \beta(V_n)$, неверно и, следовательно, для любой функции из $U(R_n, R)$ введенное искусственное ограничение нарушается не более $\beta(V_n)$ раз, и в (12) можно взять $t = \beta(V_n)$. Если $r + m \geqslant 2$, то $t = \beta(V_n) = o(|V_n|)$ и

$$\log_2 |U(R_n, R)| \leqslant (1 + o(1)) \cdot |V_n| \cdot \log_2(r + m).$$

Если $r + m = 1$, то

$$\log_2 |U(R_n, R)| \leqslant \log_2 C^t_{|V_n|} + t \log_2 |D|. \tag{13}$$

Известно (легко получить, раскрывая факториалы по формуле Стирлинга), что при $t = o(|V_n|)$

$$\log_2 C^t_{|V_n|} \leqslant (1 + o(1))t \log_2(|V_n|/t).$$

Так как $(|V_n|/t) \to \infty$, второе слагаемое в правой части в (13) бесконечно мало по сравнению с правой частью в последнем неравенстве. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь более общий вариант введения искусственных ограничений. Мы опять имеем последовательность семейств функций F_n, $n = 1, 2, \ldots$, где функции из F_n отображают некоторое конечное множество V_n в конечное множество D_n, причем классы F_n задаются системой ограничений: определенные комбинации значений функции на некоторых точках запрещают некоторые значения в других точках.

Будем разбивать теперь все точки из V_n на некоторое количество p_n групп, и рассмотрим не одно, а некоторое количество β_n разбиений. Для каждого разбиения рассмотрим не одно, а γ_n упорядочений между группами. Для каждого упорядоченного разбиения будем задавать функции из F_n, просматривая группы по порядку. При этом мы опять можем использовать какое-нибудь искусственное ограничение, которое позволяет задавать функцию на очередной группе точек не более чем d_n способами, и разрешим, чтобы это искусственное ограничение нарушалось не более чем на t группах. Тогда если на любых группах число способов задать функцию (при условии, что она уже определена на предыдущих группах) не превосходит q_n, и при данном t все функции из F_n удается построить, то $|F(n)| \leqslant \beta_n \gamma_n C^t_{p_n} q^t_n d^{p_n - t}_n$ и

$$\log_2 |F_n| \leqslant p_n \log_2 d_n + \log_2 \beta_n + \log_2 \gamma_n + \log_2 C^t_{p_n} + t \log_2(q_n/d_n). \tag{14}$$

Если при $n \to \infty$ все слагаемые в правой части в (14) бесконечно малы по сравнению с первым слагаемым, то

$$\log_2 |F_n| \leqslant p_n \log_2 d_n (1 + o(1)). \tag{15}$$

При реализации этого метода основной вопрос — как задать искусственное ограничение так, чтобы для любой функции из F_n нашлось упорядоченное разбиение, при котором число нарушений искусственного ограничения достаточно мало.

Пусть a — любая точка текущей группы. Тогда некоторые значения на a запрещены значениями функции на предыдущих группах. Если мы рассмотрим некоторую комбинацию значений на точках текущей группы, то может оказаться, что значения на точках этой группы, отличных от a, дополнительно запрещают некоторое значение на a. Оказывается, что очень часто срабатывает следующее основное искусственное ограничение:

$$\begin{gathered}\text{значения функции на текущей группе точек не должны}\\ \text{противоречить определению класса } F_n \text{ и, кроме того, не должны}\\ \text{порождать новых ограничений ни в одной точке текущей группы.}\end{gathered} \tag{16}$$

Например, пусть F_n — класс монотонных булевых функций от n переменных, и очередная группа представляет собой цепь наборов $a_1 < < a_2 < \ldots < a_k$. Пусть из уже заданных значений вытекают ограничения $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_{i-1}) = 0$, $f(a_{j+1}) = \ldots = f(a_k) = 1$ и на $a_i, \ldots, a_j$ разрешены оба значения 0 и 1. Тогда описанное выше искусственное ограничение состоит в том, что $f(a_{i+1}) \neq 0$, $f(a_{i+2}) \neq 0$, ..., $f(a_k) \neq 0$, $f(a_i) \neq 1$, $f(a_{i+1}) \neq 1$, ..., $f(a_{k-1}) \neq 1$. Таким образом, если $j - i > 1$, то это искусственное ограничение вообще невыполнимо. Если $j = i + 1$, то искусственное ограничение допускает только один вариант: $f(a_i) = 0$, $f(a_j) = 1$. Если же $j = i$, то возможны два варианта: $f(a_i) = 0$ или $f(a_i) = 1$.

Мы не можем сформулировать теорему относительно основного искусственного ограничения в общем виде ввиду возникающей при этом громоздкости, однако объясним, почему приведенное выше основное искусственное ограничение срабатывает во многих задачах.

Пусть f — любая функция из F_n, отображающая V_n в D_n. Пусть $a \in V_n$ и $f(a) = i \in D_n$. Пусть j — любой элемент из D_n и $j \neq i$. Тогда ограничение $f(a) \neq j$ может порождаться некоторыми комбинациями значений функции f на других точках. Пусть A_{ij} — множество таких точек a из V_n, что $f(a) = i$ и ограничение $f(a) \neq j$ порождается «малым» числом комбинаций значений на других точках (понятие «малым» уточняется в каждом конкретном случае). Остальные точки a, такие, что $f(a) = i$, отнесем к B_{ij}. Рассмотрим все β_n (см. выше) разбиений V_n на группы точек. Поскольку для каждой точки a из A_{ij} имеется «мало» комбинаций точек, значения в которых порождают ограничение $f(a) \neq j$, то при достаточно случайном разбиении V_n на группы будет «малой» вероятность того, что в одну группу с a попадут точки, порождающие ограничение $f(a) \neq j$. Тогда «малой» будет и вероятность того, что хотя бы одна точка a хотя бы для одной пары $i \neq j$ будет удовлетворять условиям

$$\begin{gathered}f(a) = i,\ a \in A_{ij} \text{ и ограничение } f(a) \neq j \text{ порождается}\\ \text{значениями в точках, попавших с } a \text{ в одну группу.}\end{gathered} \tag{17}$$

Поскольку вероятность этого события мала, то найдется разбиение P_f на группы, при котором число таких наборов a «достаточно мало».

Пусть $a \in B_{ij}$, т. е. $f(a) = i$ и имеется «много» комбинаций точек, значения на которых порождают ограничение $f(a) \neq j$. Зафиксируем указанное выше разбиение P_f точек V_n на группы и рассмотрим все γ_n (см. выше) упорядочений этих групп. При достаточно равномерном перемешивании точек, образующих комбинации, порождающие ограничение $f(a) \neq j$, мы получим, что с большой вероятностью хотя бы одна из этих комбинаций окажется на группах, стоящих впереди группы, в которую входит a (поскольку таких комбинаций «много»). Таким образом, «малой» будет вероятность того, что хотя бы для одной точки a и хотя бы для одной пары $i \neq j$ будут выполняться условия

$$\begin{gathered}f(a) = i,\ a \in B_{ij} \text{ и ограничение } f(a) \neq j \text{ не порождается}\\ \text{значениями в точках, лежащих в группах, стоящих}\\ \text{в упорядочении раньше группы, содержащей } a.\end{gathered} \tag{18}$$

Поскольку вероятность этого события мала, то найдется упорядочение O_f, при котором число ситуаций (18) «достаточно мало». Рассмотрим теперь разбиение P_f и его упорядочение O_f и будем восстанавливать значения функции f, просматривая группы в этом порядке. Посмотрим, когда нарушается наше основное искусственное ограничение (16). Пусть на текущей группе это ограничение нарушается. Это означает, что в группе есть такая точка a, что некоторое ограничение $f(a) \neq j$ не порождается значениями на ранее рассмотренных точках, но порождается значениями на точках текущей группы, отличных от a. Пусть $f(a) = i$. Тогда $i \neq j$ и либо $a \in A_{ij}$, либо $a \in B_{ij}$. Таким образом, для a выполняется одно из условий (17) или (18). Но, согласно выбору разбиения P_f и упорядочения O_f, число точек a, для которых выполняется (17) или (18) хотя бы для одной пары $i \neq j$, «достаточно мало». Если это число оценивается сверху целочисленной величиной t_n, то в (17) и (18) достаточно взять $t = t_n$. Если оценку для t_n удается получить достаточно малой при достаточно малых β_n и γ_n, то из (14) будет вытекать требуемое неравенство (15).

Одна из основных проблем в применении описанного метода состоит в доказательстве того, что вероятность события (17) мала. Для этого доказательства надо достаточно точно оценивать сверху мощность множества A_{ij}. По определению в A_{ij} входят точки, значение в которых «слабо» зависит от других точек. Обычно это удается свести к понятию независимости точек в V_n. В конкретных случаях это приводит к экстремальным комбинаторным задачам на множестве V_n, связанным с верхними оценками независимых (в определенном смысле) подмножеств точек в V_n. Иногда эта задача решается достаточно просто (см. леммы 1 и 2), но иногда она составляет основную часть в применении метода искусственных ограничений. Такая ситуация имеет место, например, при рассмотрении монотонных k-значных функций, где основной проблемой является оценка максимальной мощности независимого множества в декартовой степени S^n произвольного частично упорядоченного множества S (см. [2]).

Докажем еще несколько общих утверждений, основанных на применении искусственных ограничений для случая бинарных зависимостей.

Определение. Пусть V, D — конечные множества, s — натуральное число и для каждой пары элементов i, j из D (возможно $j = i$) задан ориентированный граф R_{ij} на множестве вершин V, который мы будем трактовать как бинарное отношение или бинарный предикат. Тогда через $F(V, D, \{R_{ij}\}, s)$ будем обозначать множество всех функций $f\colon V \to D$, удовлетворяющих условию

$$\forall i (\in D) \forall j (\in D) \forall a_1 (\in V) \ldots \forall a_s (\in V) \forall b (\in V) \text{ (если все } a_p \text{ различны, } \forall p R_{ij}(a_p, b) \text{ и } \forall p (f(a_p) = i) \text{, то } f(b) \neq j). \tag{19}$$

Напомним два понятия из теории графов. Пусть $G(V, U)$ — ориентированный граф с множеством вершин V и множеством дуг U. Пусть $V_1 \subseteq V$. Подграфом орграфа G, порожденным множеством V_1, называется орграф $G_1 = (V_1, U_1)$, в котором U_1 состоит в точности из тех дуг графа G, оба конца которых лежат в V_1. Множество вершин $V_1 \subseteq V$ называется независимым в орграфе $G(V, U)$, если подграф, порожденный множеством V_1, пустой, т. е. в G никакие две вершины из V не связаны дугой.

Пусть s — натуральное число. Через L'_s обозначим семейство всех орграфов, в которых в каждую вершину входит не менее s дуг. Через L_s обозначим семейство всех орграфов, в которых нет порожденных подграфов из семейства L'_s.

Лемма 3. *Семейство L_1 — это в точности семейство бесконтурных орграфов.*

Доказательство. Пусть орграф G содержит ориентированный контур. Тогда вершины этого контура порождают подграф из L_1'. Поэтому G не входит в L_1. Если G — бесконтурный орграф, то любой его порожденный подграф бесконтурный и, следовательно, содержит вершину, в которую не входит ни одной дуги. Тогда G входит в L_1. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть задана последовательность семейств функций $F_n = F_n(V_n, D_n, \{R_{ij}^n\}, s_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть для каждого n задан ориентированный граф $H_n(D_n, U_n)$ с множеством вершин D_n и множеством дуг U_n, причем $|U_n| = m_n$ и мощность любого независимого множества вершин в H_n не превосходит целого числа d_n, где $2 \leqslant d_n < |D_n|$. Пусть для некоторой последовательности γ_n выполняются условия:*

1) *для любой пары $(i, j) \in U_n$ любой порожденный ориентированный подграф графа R_{ij}^n, принадлежащий семейству L_{s_n}, имеет не более $\gamma_n |V_n|$ вершин;*

2) *справедливо соотношение*

$$\min\{1, \gamma_n m_n\} = o\left(\frac{\log d_n}{\log(|D_n|/d_n)}\right). \tag{20}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$|F_n| \leqslant d_n^{|V_n|(1 + o(1))}.$$

Доказательство. Зафиксируем некоторый натуральный параметр t, зависящий от n, точное значение которого выберем позднее. Будем считать, что $t \leqslant |V_n|$. Рассмотрим следующий процесс задания функций, отображающих V_n в D_n. Зафиксируем некоторый порядок элементов в V_n и будем задавать функции, следуя этому порядку. Рассмотрим все $C_{|V_n|}^t$ выборок t элементов из множества V_n. Для каждой выборки будем задавать функции следующим образом. Выбранные t элементов будем называть отмеченными. Просматриваем элементы в V_n в соответствии с заданным порядком. Пусть a — очередной элемент. Если a — отмеченный, то в качестве $f(a)$ берем любой элемент из D_n. В противном случае поступаем следующим образом. Значения функции f, заданные на наборах, предшествующих a, могут запрещать на a некоторые значения, в соответствии с условием (19) из определения семейства F_n. Пусть D' — множество тех значений из D, которые еще не запрещены на a. Введем следующее искусственное ограничение. Пусть $D'' = \{i \mid i \in D'$ и не существует такого $j \in D'$, что $(i, j) \in U_n\}$. Очевидно, что если $i \in D''$ и $j \in D''$, то $(i, j) \notin U_n$, т. е. D'' — независимое множество. Поэтому из условия теоремы следует, что $|D''| \leqslant d_n$. Таким образом, множество F_n' функций, построенных для всех выборок t элементов, будет удовлетворять неравенству

$$|F_n'| \leqslant C_{|V_n|}^t \cdot |D_n|^t \cdot d_n^{|V_n| - t}. \tag{21}$$

Подберем теперь t так, чтобы выполнялось $F_n \subseteq F_n'$. Для этого рассмотрим произвольную функцию $f \in F_n$, просмотрим элементы из V_n в заданном выше порядке и оценим, сколько раз значение $f(a)$ выбирается не из множества D'', построенного для этого элемента a.

Пусть выбрано $f(a) \notin D''$. Это означает, что $f(a) = i$ и существует такое j, что j еще не запрещено на a предыдущими значениями функции и $(i, j) \in U_n$. Для каждой пары $(i, j) \in U_n$ пусть A_{ij} — множество элементов a из V_n, для которых указанная ситуация выполняется именно для этой пары (i, j). Тогда при любом t, удовлетворяющем неравенству

$$t \geqslant \sum_{(i, j) \in U_n} |A_{ij}|, \tag{22}$$

функция f будет хотя бы один раз построена в нашем процессе. Оценим $|A_{ij}|$. Рассмотрим подграф G орграфа R_{ij}, порожденный множеством вершин $A_{ij} \subseteq V_n$. Допустим, что G содержит порожденный ориентированный подграф G_1 с множеством вершин $W \subseteq A_{ij}$, в котором в каждую вершину входит $\geqslant s$ дуг. Вершины из W появляются в нашей упорядоченности элементов в некоторой последовательности. Пусть w — последняя вершина из W в этой последовательности. Тогда существуют такие элементы $w_1, w_2, \ldots, w_s$ из W, что (w_i, w) — дуги в G_1 и, следовательно, в R_{ij}, и все элементы $w_1, w_2, \ldots, w_s$ стоят в упорядочении раньше, чем w. Поскольку $W \subseteq A_{ij}$, то $f(w_1) = f(w_2) = \ldots = f(w_s) = i$. Но тогда, согласно определению F_n, значение j запрещено в качестве $f(w)$ предыдущими значениями функции f. Это противоречит тому, что $w \in W \subseteq A_{ij}$. Следовательно, от противного получаем, что G принадлежит семейству L_s. Тогда по условию теоремы имеем $|A_{ij}| \leqslant \gamma_n \cdot |V_n|$. Из (22) получаем, что при

$$t = \min\{|V_n|, \lceil \gamma_n \cdot |V_n| \cdot m_n \rceil\} \qquad (23)$$

любая функция из F_n будет построена хотя бы один раз в описанном выше процессе. Учитывая (21), получаем, что

$$|F_n| \leqslant C^t_{|V_n|} \cdot (|D_n|/d_n)^t \cdot d_n^{|V_n|},$$

где t удовлетворяет (23), откуда (учитывая, что $|D_n|/d_n > 1$)

$$\log_2 |F_n| \leqslant |V_n| \log_2 d_n + \log_2 C^t_{|V_n|} + t \cdot \log_2(|D_n|/d_n). \qquad (24)$$

Покажем, что при условиях теоремы два последних слагаемых малы по сравнению с первым при $n \to \infty$. Имеем из (23) и (20)

$$t = o\left(|V_n| \frac{\log_2 d_n}{\log_2(|D_n|/d_n)}\right), \qquad (25)$$

$$t \log_2(|D_n|/d_n) = o(|V_n| \log_2 d_n). \qquad (26)$$

Покажем, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n выполняется неравенство

$$\log_2 C^t_{|V_n|} < \varepsilon \cdot |V_n| \log_2 d_n. \qquad (27)$$

Разобьем все n на две подпоследовательности. К первой отнесем те n, для которых $\log_2 d_n > 1/\varepsilon$, ко второй — те n, для которых $\log_2 d_n \leqslant 1/\varepsilon$. Тогда для n из первой подпоследовательности имеем

$$\log_2 C^t_{|V_n|} \leqslant |V_n| < \varepsilon \cdot |V_n| \log_2 d_n.$$

Поскольку по условию $|D_n| > d_n$ и d_n — целое, то для n из второй подпоследовательности имеем

$$|D_n| \geqslant d_n + 1, \qquad |D_n|/d_n \geqslant 1 + 1/d_n \geqslant 1 + 2^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

и, следовательно, величина

$$\frac{\log_2 d_n}{\log_2(|D_n|/d_n)}$$

ограничена сверху некоторой константой (зависящей от ε). Тогда из (25) следует, что для второй подпоследовательности $t = o(|V_n|)$, откуда вытекает

$$\log_2 C^t_{|V_n|} = o(|V_n|)$$

и, следовательно, начиная с некоторого n

$$\log_2 C^t_{|V_n|} < \varepsilon \cdot |V_n| \log_2 d_n,$$

поскольку $\log_2 d_n \geqslant 1$. Таким образом, неравенство (27) выполняется для всех n, начиная с некоторого, т. е.

$$\log_2 C^t_{|V_n|} = o(|V_n| \log_2 d_n). \tag{28}$$

Из (24), (26) и (28) имеем

$$|F_n| \leqslant d_n^{|V_n|(1+o(1))}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим два частных случая, когда условия теоремы 4 могут быть сформулированы проще.

Теорема 5. *Пусть задана последовательность семейств функций $F_n = F_n(V_n, D, \{R^n_{ij}\}, s_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, где D не зависит от n. Пусть γ_n — любая последовательность, удовлетворяющая условию $\gamma_n = o(1)$ при $n \to \infty$. Пусть*

$$U_n = \{(i, j) \mid i \in D,\ j \in D \text{ и любой порожденный ориентированный подграф в } R^n_{ij}, \text{ принадлежащий семейству } L_{s_n}, \text{ имеет не более } \gamma_n |V_n| \text{ вершин}\}.$$

Пусть максимальная мощность независимого множества вершин в орграфе $H_n(D, U_n)$ не превосходит d_n и $d_n \geqslant 2$. Тогда при $n \to \infty$

$$|F_n| \leqslant d_n^{|V_n|(1+o(1))}.$$

Доказательство. Если $d_n = |D|$, то

$$|F_n| \leqslant |D|^{|V_n|} = d^{|V_n|}.$$

Рассмотрим те n, для которых $d_n \leqslant |D| - 1$. Тогда существует такая константа C, что

$$\frac{\log_2 d_n}{\log_2(|D|/d_n)} > C.$$

Пусть $m_n = |U_n|$. Тогда $m_n \leqslant |D|^2$. Так как $\gamma_n = o(1)$ при $n \to \infty$, то

$$\gamma_n m_n = o\left(\frac{\log_2 d_n}{\log_2(|D|/d_n)}\right).$$

Поэтому утверждение теоремы 5 следует из теоремы 4.

Рассмотрим еще один важный частный случай, для которого в общем виде удается установить асимптотику логарифма числа функций. Пусть $s_n = 1$ при всех n, а множество графов R^n_{ij} задается следующим образом. Пусть $H_n = (D_n, U_n)$ — ориентированный граф на множестве вершин D_n и R_n — ориентированный граф на множестве вершин V_n. Тогда будем считать, что $R^n_{ij} = R_n$, если $(i, j) \in U_n$, и R^n_{ij} — пустой орграф, если $(i, j) \notin U_n$. В этом случае вместо $F_n(V_n, D_n, \{R^n_{ij}\}, 1)$ будем писать $F_n(V_n, D_n, (H_n, R_n))$.

Пусть G — орграф. Через $\rho(G)$ будем обозначать максимальное число вершин в G, порождающих бесконтурный ориентированный подграф в G, а через $\beta(G)$ будем обозначать число вершинной независимости орграфа G, т. е. максимальное число вершин в G, порождающих пустой подграф.

Теорема 6. *Пусть задана последовательность семейств функций $F_n = F_n(V_n, D_n, (H_n, R_n))$. Пусть $2 \leqslant \beta(H_n) < |D_n|$ и m_n — число дуг в H_n. Если*

$$\min\left\{1, \frac{m_n \cdot \rho(R_n)}{|V_n|}\right\} = o\left(\frac{\log \beta(H_n)}{\log(|D_n|/\beta(H_n))}\right), \tag{29}$$

то при $n \to \infty$

$$\log_2 |F_n| \sim |V_n| \log_2 \beta(H_n).$$

Доказательство. 1. Нижняя оценка. Пусть $P_n \subseteq D_n$, $|P_n| = \beta(H_n)$ и P_n — независимое множество вершин в H_n. Пусть $i \in P_n$ и $j \in P_n$. Так как дуга (i, j) не входит в H_n, то по определению орграф R^n_{ij} является пустым. Это означает, что значения i и j для функций из рассматриваемого семейства не могут влиять друг на друга. Таким образом, любая функция, отображающая V_n в P_n, принадлежит семейству F_n. Отсюда

$$|F_n| \geqslant |P_n|^{|V_n|} = (\beta(H_n))^{|V_n|}.$$

2. Верхняя оценка. Положим $\gamma_n = \rho(R_n)/|V_n|$, $d_n = \beta(H_n)$. Поскольку, согласно лемме 3, L_1 — это семейство бесконтурных орграфов, то получаем, что выполнены все условия теоремы 4. Поэтому при $n \to \infty$

$$|F_n| \leqslant (\beta(H_n))^{|V_n|(1+o(1))}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. *Пусть задана последовательность семейств функций $F_n = F_n(V_n, D, (H, R_n))$, где D и H не зависят от n. Тогда если $2 \leqslant \beta(H) < |D|$ и $\rho(R_n) = o(|V_n|)$, то при $n \to \infty$*

$$\log_2 |F_n| \sim |V_n| \log_2 \beta(H_n).$$

Для доказательства следствия достаточно заметить, что в этом случае m_n и выражение в скобке в правой части в (29) являются константами, и поэтому (29) равносильно условию $\rho(R_n) = o(|V_n|)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. Б. О числе простых базисов в k-значной логике // Дискретный анализ. Вып. 19. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1971. — С. 3–10.
2. Алексеев В. Б. О числе монотонных k-значных функций // Проблемы кибернетики. Вып. 28. — М.: Наука, 1974. — С. 5–24.
3. Алексеев В. Б. О числе функций в классах, задаваемых центральными предикатами // Матем. заметки. — 1985. — Т. 38, Вып. 1. — С. 148–156.
4. Алексеев В. Б. О числе функций в некоторых замкнутых классах частичной k-значной логики // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 1. — С. 32–42.
5. Алексеев В. Б. О числе семейств подмножеств, замкнутых относительно пересечения // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 2. — С. 129–136.
6. Фрейвалд Р. В. Критерий полноты для частичных функций алгебры логики и многозначной логики // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 167. — С. 1249–1250.
7. Kleitman D. On Dedekind's problem: the number of monotone Boolean functions // Proc. of the Amer. Math. Soc. — 1969. — V. 21, № 3. — P. 677–682. [Русский перевод: Клейтмен Д. О проблеме Дедекинда: число монотонных булевых функций // Кибернетич. сб. Новая серия. Вып. 7. — М.: Мир, 1970. — С. 43–52.]

Поступило в редакцию 23 IX 1998