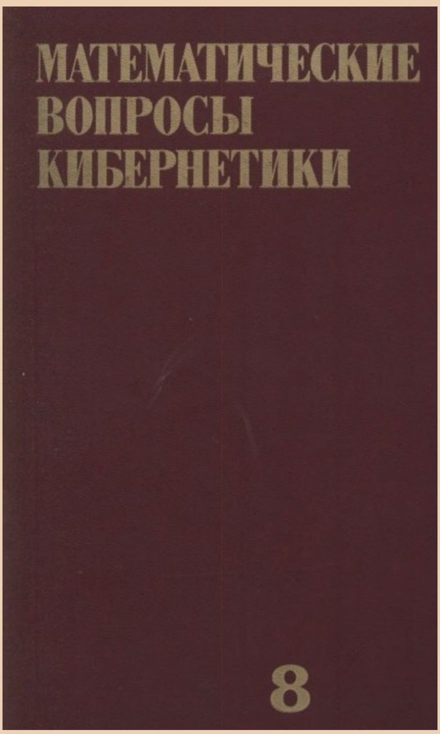


С. С. Марченков

Конечные автоматы и периодические разложения действительных чисел

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Марченков С. С. Конечные автоматы и периодические разложения действительных чисел // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. — М.: Физматлит, 1999. — С. 304–311.
URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=1999-304

КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

С. С. МАРЧЕНКОВ

(МОСКВА)

Когда говорят о действительных числах, обычно подразумевают некоторый единообразный способ их представления. Так, действительное число по Вейерштрассу представляет собой бесконечную десятичную последовательность — десятичное представление (разложение) действительного числа; действительное число по Кантору есть бесконечная сходящаяся последовательность рациональных чисел, которую можно представить также в виде последовательности сумм бесконечного сходящегося ряда с рациональными членами. Определение действительного числа нетрудно дать на основе разложений действительных чисел в цепные дроби, в бесконечные произведения и т. п. Как правило, элементами всех этих представлений (разложений) выступают целые или даже натуральные числа.

В данной заметке мы хотим предложить некоторую общую схему подобных стандартных разложений. В эту схему укладываются известные разложения действительных чисел в систематические дроби, в цепные дроби, в ветвящиеся цепные дроби. Особое внимание мы уделяем периодическим разложениям действительных чисел. Основная идея периодического разложения взята нами из теории конечных автоматов [8, 11], где периодичность выступает в довольно общей форме. Один из отличительных результатов теории конечных автоматов состоит в том, что от бесконечного дерева, описывающего функционирование конечного автомата и представляющего собой обобщение линейных периодических последовательностей, можно конструктивным образом перейти к конечному объекту — диаграмме Мура. Вместо диаграммы Мура в качестве эквивалентного финитного описания конечного автомата можно выбрать также канонические уравнения [11].

Возможность и эффективность подобных переходов от бесконечных («периодических») деревьев к конечным системам уравнений дают основание предполагать, что и применительно к действительным числам «общее» периодическое разложение должно «сворачиваться» в конечную систему уравнений, корнем которой является разлагаемое действительное число. Эта система уравнений во многом более информативна, чем исходное периодическое разложение. Например, по виду системы можно сделать вывод о рациональности / иррациональности, алгебраичности / трансцендентности и других свойствах действительного числа. Обратно, в некоторых случаях действительное число изначально задается в виде корня некоторой системы уравнений и требуется построить эффективное (например, периодическое) разложение этого числа. В этом направлении в пп. 2, 3 мы показываем, как это можно сделать для некоторых алгебраических и трансцендентных чисел. Наконец, общность предлагаемой схемы разложения действительных чисел подтверждается тем, что для всякого действительного числа можно построить его периодическое разложение с помощью подходящего выбора параметров разложения.

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, а через $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Пусть M — некоторое множество действительных чисел. Рассмотрим следующую схему построения разложений чисел из M.

Предполагаем, что каждое число из M изначально имеет некоторое стандартное *представление*. Этим представлением может быть формула, уравнение или система уравнений различного вида, алгоритм приближенного вычисления и т. п. Совокупность представлений всех чисел из M обозначим через R. На множестве R определим алгоритм $\mathscr{A}$ разложения действительных чисел из M. Если $r \in R$, то результатом применения алгоритма $\mathscr{A}$ к представлению r будут две счетно-бесконечные последовательности: целых чисел (которая, собственно, и считается разложением действительного числа, имеющего представление r) и представлений из R. Алгоритм $\mathscr{A}$ задает, вообще говоря, ветвящийся процесс разложения и характеризуется четырьмя параметрами: натуральными числами k, l, функцией F вида $R \to \mathbb{Z}^k \times R^l$ и функцией G вида $\mathbb{Z}^k \times M^l \to M$.

Число k определяет количество элементов разложения, порождаемых на каждом шаге работы алгоритма $\mathscr{A}$, число l задает степень ветвления процесса разложения. Функция F порождает k элементов разложения и l «остатков» разложения; она обеспечивает итеративно-ветвящийся характер разложения. Функция G является в известном смысле обратной к функции F. Она не используется в самом процессе разложения, но устанавливает «обратную связь» между элементами разложения и остатками разложения, с одной стороны, и разлагаемым действительным числом — с другой. Кроме того, функция G применяется для обоснования сходимости разложения, даваемого алгоритмом $\mathscr{A}$, к разлагаемому числу.

Более точно, пусть действительное число α из M имеет представление r,

$$F(r) = (a_1, \ldots, a_k, r_1, \ldots, r_l), \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$, $r_1, \ldots, r_l \in R$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ суть действительные числа из M, которые имеют соответственно представления $r_1, \ldots, r_l$. Тогда

$$G(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l) = \alpha. \tag{2}$$

Процесс разложения действительного числа α, $\alpha \in M$, с помощью алгоритма $\mathscr{A}$ носит итеративный характер и разворачивается следующим образом. Применяя функцию F к представлению r числа α (см. (1)), находим числа $a_1, \ldots, a_k$ и представления $r_1, \ldots, r_l$. Затем применяем функцию F к каждому из представлений $r_1, \ldots, r_l$:

$$F(r_1) = (a_{11}, \ldots, a_{1k}, r_{11}, \ldots, r_{1l}), \quad \ldots, \quad F(r_l) = (a_{l1}, \ldots, a_{lk}, r_{l1}, \ldots, r_{ll}).$$

Вообще, если в процессе работы алгоритма $\mathscr{A}$ уже получено представление $r_{ab\ldots d}$, где $a, b, \ldots, d \in \{1, 2, \ldots, l\}$, то находим далее

$$F(r_{ab\ldots d}) = (a_{ab\ldots d1}, \ldots, a_{ab\ldots dk}, r_{ab\ldots d1}, \ldots, r_{ab\ldots dl}). \tag{3}$$

Последовательность

$$a_1, \ldots, a_k, \quad a_{11}, \ldots, a_{1k}, \quad \ldots, \quad a_{l1}, \ldots, a_{lk}, \quad \ldots, \quad a_{ab\ldots d1}, \ldots, a_{ab\ldots dk}, \quad \ldots, \tag{4}$$

порождаемая алгоритмом $\mathscr{A}$, определяет разложение числа α. Зачастую именно последовательность (4) считают разложением α. Мы также будем придерживаться этого соглашения. Числа $a_1, \ldots, a_k$ мы называем элементами первого порядка разложения (4), числа $a_{11}, \ldots, a_{lk}$ — элементами второго порядка и т. д.

Помимо последовательности (4), в процессе работы алгоритма $\mathscr{A}$ порождается последовательность представлений

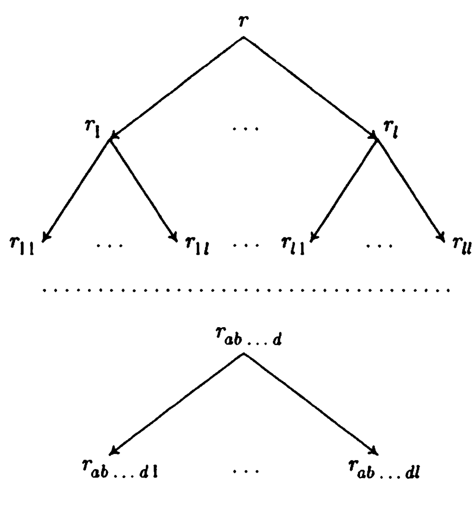
$$r_1, \ldots, r_l, \quad r_{11}, \ldots, r_{1l}, \ \ldots, \ r_{l1}, \ldots, r_{ll}, \quad \ldots, \quad r_{ab\ldots d1}, \ldots, r_{ab\ldots dl}, \quad \ldots \qquad (5)$$

Элементы последовательности (5) задают соответствующие действительные числа из множества M:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \quad \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1l}, \ldots, \alpha_{l1}, \ldots, \alpha_{ll}, \quad \ldots, \quad \alpha_{ab\ldots d1}, \ldots, \alpha_{ab\ldots dl}, \quad \ldots, \qquad (6)$$

которые мы называем *остатками* разложения (4). По аналогии с элементами последовательности (4) числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ носят название остатков первого порядка, числа $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{ll}$ — остатков второго порядка и т. д.

Процесс применения алгоритма $\mathscr{A}$ к представлению r удобно изображать в виде бесконечного ориентированного дерева T_r с корнем и помеченными вершинами (см. рисунок). Корень дерева T_r помечен символом r, все остальные вершины — символами вида $r_{ab\ldots d}$, где $a, b \ldots, d \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Из каждой вершины дерева T_r исходит l ребер. Ребра, исходящие из корня, ведут к вершинам, помеченным символами $r_1, \ldots, r_l$, где элементы $r, r_1, \ldots, r_l$ удовлетворяют равенству (1). Если вершина дерева T_r, отличная от корня, помечена символом $r_{ab\ldots d}$, то l исходящих из нее ребер ведут к вершинам, помеченным символами $r_{ab\ldots d1}, \ldots, r_{ab\ldots dl}$, где элементы $r_{ab\ldots d}, r_{ab\ldots d1}, \ldots, r_{ab\ldots dl}$ определяются равенством (3).



Из приведенных определений вытекает, что алгоритм $\mathscr{A}$, дающий по представлению r числа α его разложение (4), последовательность представлений (5) и последовательность остатков (6), одновременно дает по представлениям (5) разложения соответствующих действительных чисел (6). Следует также отметить, что разложению числа $\alpha_{ab\ldots d}$ в дереве T_r отвечает поддерево с корнем, помеченным символом $r_{ab\ldots d}$.

Итак, алгоритм $\mathscr{A}$ для произвольного числа α из M строит его разложение (4). Чтобы говорить о том, что разложение (4) определяет число α, необходимо условиться о способе, с помощью которого произвольной последовательности вида (4) сопоставляется действительное число, причем разложению (4), построенному алгоритмом $\mathscr{A}$ для действительного числа α, должно отвечать само число α. Обычно этот способ состоит в том, что по конечным начальным фрагментам разложения (4) определяется последовательность «конечных» приближений, которая сходится к числу α. Естественно считать начальными фрагментами разложения (4) фрагменты, состоящие из всех элементов с порядками от первого до некоторого m-го (в дереве T_r такому фрагменту отвечают первые m ярусов). Приближения β_m к числу α, соответствующие названным начальным фрагментам разложения (4), вычисляются с помощью функции G. При этом для фрагмента, состоящего из элементов разложения с порядками от 1-го до m-го, все остатки порядка m считаются нулевыми.

Более точно, фрагменту $(a_1, \ldots, a_k)$ разложения (4) сопоставим приближение $\beta_1 = G(a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)$. Пусть $m \geqslant 2$. Тогда фрагменту

$$(a_1, \ldots, a_k, \; a_{11}, \ldots, a_{lk}, \; \ldots, \; a_{11\ldots 1}, \ldots, a_{l\ldots lk})$$

длины $k(l^m - 1)/(l-1)$ сопоставим приближение β_m, которое вычисляется с помощью функции G согласно следующим рекуррентным формулам. Если $a, \ldots, c$ — произвольные $m-1$ элементов из множества $\{1, 2, \ldots, l\}$, то полагаем

$$\gamma_{a\ldots c} = G(a_{a\ldots c1}, \ldots, a_{a\ldots ck}, 0, \ldots, 0);$$

если последовательность $a\ldots c$ состоит менее чем из $m-1$ элементов множества $\{1, 2, \ldots, l\}$, то полагаем

$$\gamma_{a\ldots c} = G(a_{a\ldots c1}, \ldots, a_{a\ldots ck}, \gamma_{a\ldots c1}, \ldots, \gamma_{a\ldots cl});$$

наконец, полагаем

$$\beta_m = G(a_1, \ldots, a_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_l).$$

Мы говорим, что разложение (4) определяет действительное число α, если последовательность $\beta_1, \beta_2, \ldots$ сходится к α.

Разложение числа α назовем *периодическим*, если последовательность (5) содержит конечное число различных элементов.

Элементы последовательности (4) определяются с помощью функции F через элемент r и элементы последовательности (5), поэтому в случае периодического разложения последовательность (4) также состоит из конечного числа различных элементов. Более того, если $r_{a\ldots c} = r$ или $r_{a\ldots c} = r_{d\ldots f}$, то $(a_{a\ldots c1}, \ldots, a_{a\ldots ck}) = (a_1, \ldots, a_k)$ или $(a_{a\ldots c1}, \ldots, a_{a\ldots ck}) = (a_{d\ldots f1}, \ldots, a_{d\ldots fk})$, соответственно.

Название *периодическое разложение* легко объясняется в случае $l = 1$. Принимая во внимание равенства (1) и (3), видим, что в этом случае обе последовательности, (5) и (4), являются периодическими в обычном смысле (разумеется, возможны предпериоды). При $l \geqslant 2$ о периодичности последовательностей (5) и (4) можно говорить в том же смысле, что и в случае задания конечноавтоматных (ограниченно-детерминированных) функций бесконечными деревьями [8, 11]. Именно, если разложение периодическое и, значит, последовательность (5) состоит из конечного числа различных элементов, то дерево T_r содержит конечное число попарно не изоморфных поддеревьев (при этом учитываются пометки, стоящие на вершинах дерева). Так же, как для ограниченно-детерминированных функций, это обстоятельство позволяет в случае периодического разложения строить конечную систему уравнений, характеризующую и сам процесс разложения, и порождаемые им действительные числа.

Итак, пусть α — действительное число из M, r — представление числа α, $r \in R$, алгоритм $\mathscr{A}$ порождает периодическое разложение числа α с последовательностями элементов разложения (4), представлений (5) и остатков разложения (6). Согласно определению функции G имеет место равенство (2). Выберем из множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ все попарно различные числа, отличные от α. Пусть, например, это будут числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} &G(a_{11}, \ldots, a_{1k}, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1l}) = \alpha_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &G(a_{s1}, \ldots, a_{sk}, \alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sl}) = \alpha_s. \end{aligned} \tag{7}$$

Далее, выберем из множества $\{\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1l}, \; \ldots, \; \alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sl}\}$ все попарно различные числа, отличные от $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$, выпишем для них равенства, аналогичные (7), и т. д. Число α допускает периодическое разложение, поэтому в последовательности (6) содержится лишь конечное число различных элементов. Следовательно, указанный процесс порождения равенств вида (7) оборвется через конечное число шагов. Пусть $\delta_1, \ldots, \delta_t$ — все различные действительные числа, которые содержатся в последовательности (6) с добавленным элементом α. В этих обозначениях полученная система равенств будет иметь вид

$$\begin{gathered} G(a_1^1, \ldots, a_k^1, \delta_1^1, \ldots, \delta_l^1) = \delta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G(a_1^t, \ldots, a_k^t, \delta_1^t, \ldots, \delta_l^t) = \delta_t, \end{gathered} \tag{8}$$

где $a_1^1, \ldots, a_k^t$ — целые числа и $\{\delta_1^1, \ldots, \delta_l^1, \ \ldots, \ \delta_1^t, \ldots, \delta_l^t\} \subseteq \{\delta_1, \ldots, \delta_t\}$. Таким образом, считая $\delta_1, \ldots, \delta_t$ неизвестными, приходим к выводу, что в рассматриваемом случае α есть одно из решений системы уравнений (8). Тем самым установлено следующее утверждение.

Теорема. *Пусть α — действительное число из M, для которого алгоритм A с функцией G дает периодическое разложение. Тогда α есть корень системы уравнений* (8).

Рассмотрим несколько частных случаев доказанной теоремы.

1. Если G — линейная функция с рациональными коэффициентами и система (8) имеет единственное решение $(\delta_1, \ldots, \delta_t)$, то, очевидно, α — также рациональное число.

В качестве примера рассмотрим разложение рационального числа $4/7$ в бесконечную периодическую десятичную дробь: $4/7 = 0{,}(571428)$. Данное разложение можно тривиальным образом получить в результате работы алгоритма $\mathscr{A}$, если положить $M = \{1/7, 2/7, \ldots, 6/7\}$, $k = l = 1$, представлениями чисел из M считать приведенные выше их обозначения, а функции F и G определить естественным образом: если m — натуральное число, $m < 7$, то $F(m/7) = (a, b/7)$, где a — частное, а b — остаток от деления $10m$ на 7. Соответственно $G(a, \alpha) = (a + \alpha) \cdot 10^{-1}$.

Менее привычные периодические разложения будут получаться при $l \geqslant 2$. Отметим, что они существуют при любых натуральных k и l. Правда, при $l \geqslant 2$ имеется произвол в выборе остатков разложения и, как следствие, теряется однозначность разложения, имевшаяся в случае $k = l = 1$. Некоторые новые явления, возникающие при $l \geqslant 2$, проиллюстрируем на примере разложения числа $4/7$ с параметрами $k = 3$, $l = 2$.

Пусть $M = \left\{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right\}$. Как и выше, представлениями чисел из M будем считать приведенные их обозначения. Функцию F определим равенствами

$$F\left(\tfrac{4}{7}\right) = \left(5, 7, 1, \tfrac{1}{7}, \tfrac{2}{7}\right), \quad F\left(\tfrac{1}{7}\right) = \left(1, 4, 2, \tfrac{2}{7}, \tfrac{4}{7}\right), \quad F\left(\tfrac{2}{7}\right) = \left(2, 8, 5, \tfrac{1}{7}, \tfrac{4}{7}\right).$$

Чтобы пояснить идею данного периодического разложения, заметим, что

$$\begin{aligned} 4/7 &= 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + (1/7 + 2/7) \cdot 10^{-3}, \\ 1/7 &= 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + (2/7 + 4/7) \cdot 10^{-3}, \\ 2/7 &= 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + (1/7 + 4/7) \cdot 10^{-3}; \end{aligned}$$

отсюда сразу следует, что для рассматриваемого разложения функция G должна иметь вид

$$G(a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2) = a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot 10^{-3}.$$

Используя явное задание функции G, нетрудно показать, что каждое приближение β_m к числу $4/7$ будет строго меньше $4/7$, причем

$4/7 - \beta_m < 2^{m-1} \cdot 10^{-3m}$. Таким образом, приведенное периодическое разложение числа 4/7 действительно определяет 4/7.

2. Пусть G есть дробно-рациональная функция с рациональными коэффициентами. Будем рассматривать случай, когда система (8) имеет конечное число решений $(\delta_1, \ldots, \delta_t)$. Согласно теории исключения [4, 10] в этом случае каждый из элементов $\delta_1, \ldots, \delta_t$ решения $(\delta_1, \ldots, \delta_t)$ системы (8) является алгебраическим числом.

Периодические разложения алгебраических иррациональностей хорошо иллюстрируются на примере разложения квадратичных иррациональностей в правильные цепные дроби. В силу известной теоремы Лагранжа [3, 9] иррациональные действительные алгебраические числа степени 2 и только они допускают разложения в периодическую правильную цепную дробь, т. е. дробь вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_s + \ldots}}}, \tag{9}$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}$ и последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ периодична. Пусть α есть действительный иррациональный корень квадратного уравнения с дискриминантом D и (9) является разложением числа α в периодическую правильную цепную дробь. Чтобы представить последовательность $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ в качестве результата работы алгоритма $\mathscr{A}$, положим $k = l = 1$, в качестве множества M возьмем $\mathbb{Q}(\sqrt{D}\,)$, а в качестве R — множество всех элементов вида $p_1/q_1 + (p_2/q_2)\sqrt{D}$, где $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$, $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ и дроби p_1/q_1 и p_2/q_2 несократимы (в случаях $p_i = 0$ или $q_j = 1$ необходимо сделать дальнейшие очевидные упрощения). Для придания функциям F и G единообразной формы будем предполагать, что число α удовлетворяет неравенствам $0 < \alpha < 1$ (либо вместо α будем рассматривать число $\alpha - a_0$, где $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$). Тогда $F(r) = (a_1, r_1)$, где $a_1 = \lfloor \alpha^{-1} \rfloor$, а r_1 есть принятое выше обозначение для числа $\alpha^{-1} - \lfloor \alpha^{-1} \rfloor$. Соответственно, $G(a, \alpha) = (a + \alpha)^{-1}$.

Оказывается, что вообще для любой действительной алгебраической иррациональности можно построить периодическое разложение с дробно-рациональной функцией G. При этом для иррациональностей степени 3 и выше необходимо рассматривать обобщения цепных дробей — так называемые ветвящиеся цепные дроби [2, 6, 7]. Именно, пусть α — действительная алгебраическая иррациональность степени $m+1$, $m \geqslant 1$. Положим $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, $\alpha_1 = \alpha - a_0$. Элементы $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1^m$ образуют базис поля $\mathbb{Q}(\alpha)$, поэтому для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, найдутся такие целые числа $a_i, b_i, a_{i1}, \ldots, a_{im}$, что

$$\alpha_1^{-i} = \frac{b_i + a_{i1}\alpha_1 + \ldots + a_{im}\alpha_1^m}{a_i}. \tag{10}$$

Имеем $\alpha = a_0 + \alpha_1 = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1^{-1}} = a_0 + \dfrac{a_1}{b_1 + a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{1m}\alpha_1^m}$. Пользуясь равенствами (10), получаем далее

$$\alpha = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_{11}}{\alpha_1^{-1}} + \ldots + \cfrac{a_{1m}}{\alpha_1^{-m}}} =$$

$$= a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_1 a_{11}}{b_1 + a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{1m}\alpha_1^m} + \ldots + \cfrac{a_m a_{1m}}{b_m + a_{m1}\alpha_1 + \ldots + a_{mm}\alpha_1^m}}.$$

В последнем выражении вновь заменяем $\alpha_1, \ldots, \alpha_1^m$ на $\dfrac{1}{\alpha_1^{-1}}, \ldots, \dfrac{1}{\alpha_1^{-m}}$, применяем равенства (10) и т. д. В результате приходим к периодическому разложению числа α в ветвящуюся цепную дробь:

$$a_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_1a_{11}}{b_1+\cfrac{a_1a_{11}}{b_1+\ldots}+\ldots+\cfrac{a_ma_{1m}}{b_m+\ldots}}+\ldots+\cfrac{a_ma_{1m}}{b_m+\cfrac{a_1a_{m1}}{b_1+\ldots}+\ldots+\cfrac{a_ma_{mm}}{b_m+\ldots}}}. \qquad (11)$$

(Несколько иной подход к построению ветвящихся цепных дробей для алгебраических иррациональностей приводится в книге [2].)

Таким образом, здесь $M=\{\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_1^m\}$, в качестве R можно рассматривать те же выражения $\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_1^m$, $k=m+2$, $l=m$. Как и для обычных цепных дробей, удобно считать, что $0<\alpha<1$. Тогда $\alpha_1=\alpha$ и для любого i, $1\leqslant i\leqslant m$, имеем $F(\alpha^i)=(a_1,\ldots,a_{m+2},\alpha,\ldots,\alpha^m)$, где целые числа $a_1,\ldots,a_{m+2}$ находятся из соотношения $\alpha^{-i}=a_1^{-1}(a_2+a_3\alpha+\ldots+a_{m+2}\alpha^m)$. В соответствии с этим получаем

$$G(a_1,\ldots,a_{m+2},\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\frac{a_1}{a_2+a_3\alpha_1+\ldots+a_{m+2}\alpha_m}.$$

По-видимому, в общем случае вопрос о сходимости ветвящейся цепной дроби (11) к разлагаемому числу α остается открытым. Известно [1, 2, 6], что произвольная (не обязательно периодическая) ветвящаяся цепная дробь с натуральными компонентами сходится. Более того [2, теорема 3.3], если все компоненты ветвящейся цепной дроби, построенной для алгебраической иррациональности α, положительны, то эта дробь сходится к α.

В заключение этого раздела приведем периодическое разложение в ветвящуюся цепную дробь числа $\sqrt[3]{2}$. Полагая $\alpha=\sqrt[3]{2}$, $\alpha_1=\alpha-1$, имеем

$$\alpha_1^{-1}=3+3\alpha_1+\alpha_1^2,\qquad \alpha_1^{-2}=12+10\alpha_1+3\alpha_1^2;$$

поэтому

$$\sqrt[3]{2}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3+\ldots}+\cfrac{1}{12+\ldots}}+\cfrac{1}{12+\cfrac{10}{3+\ldots}+\cfrac{3}{12+\ldots}}}.$$

3. Приведем пример периодического разложения для трансцендентного числа, когда функция G есть суперпозиция сложения, деления, возведения в степень и логарифмирования.

Пусть $\alpha=3^{\sqrt{2}-1}$. Известно (см., например, [5]), что α — трансцендентное число. Нетрудно проверить, что $\sqrt{2}-1$ разлагается в цепную дробь

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}.$$

Следовательно, α есть корень уравнения $3^{1/(2+\log_3 x)}=x$.

В качестве периодического разложения числа α мы хотим взять последовательность $(2,2,\ldots)$. С этой целью возьмем $M=\{3^{\sqrt{2}-1}\}$, $k=l=1$. В качестве представления числа α будем рассматривать формулу $3^{\sqrt{2}-1}$. Тогда можно положить

$$F(r)=(\lfloor(\log_3\alpha)^{-1}\rfloor,3^{\sqrt{2}-1}),\qquad G(a,\alpha)=3^{1/(a+\log_3\alpha)}.$$

Как вытекает из основных определений и примеров в пп. 1–3, вид периодического разложения действительного числа α сильно зависит от выбора множества M, содержащего α, и функций F и G. Мы хотим показать, что в предельном случае всю информацию о числе α можно поместить в параметры M, F и G.

Итак, пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Для простоты изложения будем предполагать, что $0 < \alpha < 1$ и $0{,}a_1 a_2 \ldots$ — десятичное представление числа α. Случай периодических последовательностей $(a_1, a_2, \ldots)$ можно рассмотреть так же, как в п. 1. Предположим поэтому, что последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$ — непериодическая. Пусть $M = \{0{,}a_1 a_2 \ldots; 0{,}a_2 a_3 \ldots; 0{,}a_3 a_4 \ldots; \ldots\}$, $k = l = 1$. В качестве R возьмем множество натуральных чисел. Натуральное число n будем считать представлением действительного числа $0{,}a_n a_{n+1} \ldots$ Определим функции F и G равенствами $F(n) = (0, n+1)$, $G(0, \alpha_1) = (a_n + \alpha_1) \cdot 10^{-1}$, где $\alpha_1 = 0{,}a_{n+1} a_{n+2} \ldots$ Последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$ непериодическая, поэтому данное определение функции G корректно. Таким образом, в рассматриваемом случае разложением числа α (и всех остальных чисел из M) оказывается тривиальная периодическая последовательность $(0, 0, \ldots)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боднар Д. И., Олексив И. Я. О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами // Украин. матем. журнал. — 1976. — Т. 28, № 3. — С. 373–377.
2. Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. — Киев: Наукова думка, 1974.
3. Бухштаб А. А. Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966.
4. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1979.
5. Гельфонд А. О. Избранные труды. — М.: Наука, 1973.
6. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. — М.: Наука, 1983.
7. Скоробогатько В. Я., Дронюк Н. С., Бобик О. І., Пташник Б. Й. Гіллясті ланцюгові дроби // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1967. — Т. 2. — С. 131–133.
8. Трахтенброт Б. А, Барздинь Я. М. Конечные автоматы. — М.: Наука, 1970.
9. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Наука, 1978.
10. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. Т. 1. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1954.
11. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

Поступило в редакцию 29 IX 1998