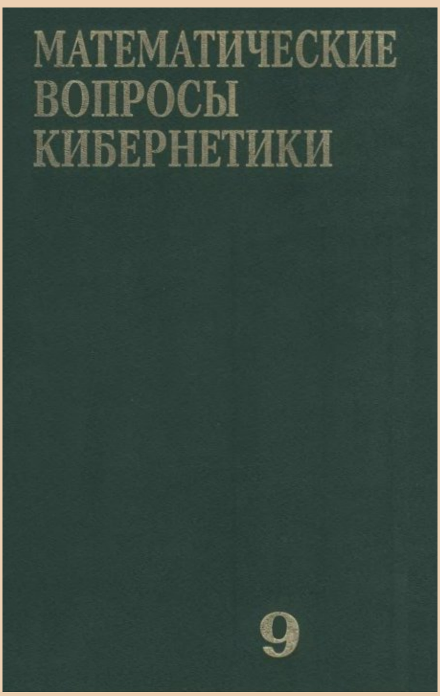

Ю. И. Янов

Модальные логики и арифметика. I

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ И АРИФМЕТИКА. I *)

Ю. И. ЯНОВ
(МОСКВА)

Создание математической логики было вызвано необходимостью построения не только аппарата доказательств, но и универсального математического языка. Таким языком в конечном счете явился язык классической логики предикатов. Этот язык, безусловно, обладает рядом важных достоинств, однако, поиски и изучение других языков не только не прекратились, но в последнее время существенно расширились, в основном в области модальных логик, представляющих собой расширение классических (как правило) логик дополнительными операциями. При этом наибольший интерес представляют пропозициональные логики как более доступные для изучения и, к тому же, в большинстве рассмотренных вариантов, разрешимые. Вопрос о том, каковы выразительные возможности таких логик, находится, можно сказать, в начальной стадии разработки. Одним из характерных результатов в этом направлении является доказательство того, что в так называемой логике Гёделя–Лёба выразим предикат доказуемости в арифметике. Здесь, правда, следует сделать существенную оговорку в отношении понятия выразимости. На самом деле, речь идет не о конкретных предикатах доказуемости, а о классе предикатов, обладающих некоторыми, но далеко не всеми свойствами предикатов доказуемости, благодаря чему в этот класс попадают предикаты, не имеющие никакого отношения к доказуемости. Тем не менее подобные результаты представляют интерес в связи с вопросом о выразительных возможностях пропозициональных языков. В данной работе предлагается обобщенный подход к описанию арифметических предикатов (выразимых в арифметике) в пропозициональных полимодальных логиках. Рассматривается и обратная проблема построения арифметических моделей для модальных логик.

1. Некоторые известные результаты

Как известно, в формальной арифметике $\mathcal{A}$ выразим предикат Док$(y, x) =$ «y есть геделев номер доказательства формулы с гёделевым номером x». Предикат Дк$(x) = \exists y$Док(y, x) называется предикатом доказуемости (в арифметике). Этот предикат обладает некоторыми очевидными свойствами, например, Дк$(\ulcorner A \to B \urcorner) \to ($Дк$(\ulcorner A \urcorner) \to$ Дк$(\ulcorner B \urcorner))$, Дк$(\ulcorner A \urcorner) \to$ Дк$(\ulcorner$Дк$((\ulcorner A \urcorner)\urcorner)$ и др. (Здесь и далее $\ulcorner A \urcorner$ обозначает гёделев номер формулы A в какой-либо фиксированной гёделевской нумерации.) Эти и другие свойства можно записать модальными формулами, в которых роль предиката доказуемости будет играть модальный оператор $\Box$. Принято

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00986).

считать, что предикат доказуемости описывает следующая модальная логика G — так называемая логика Гёделя–Лёба [2]. Её аксиомами, кроме тавтологий классического исчисления высказываний, являются:

A1. $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$,

A2. $\Box P \to \Box\Box P$,

A3. $\Box(\Box P \to P) \to \Box P$.

Правила вывода: modus ponens (MP) и П1 $P \vdash \Box P$. Эта логика непротиворечива и семантически полна в классе моделей Крипке с конечными древовидными шкалами. Соответствие между оператором $\Box$ и предикатом доказуемости в арифметике устанавливаются с помощью определенных *переводов* f модальных формул в арифметические. Эти переводы должны удовлетворять следующим условиям. Если p — пропозициональная переменная, то p^f — произвольная арифметическая формула; $(P \to Q)^f = P^f \to Q^f$, $(\neg P)^f = \neg P^f$, $(\Box P)^f = \text{Дк}(\ulcorner P^f \urcorner)$, где $\text{Дк}(x)$ — *предикат доказуемости* (на самом деле — формула, его представляющая) в арифметике $\mathscr{A}$ или ее непротиворечивом расширении.

Логика G арифметически корректна в том смысле, что все переводы выводимых в G формул выводимы в арифметике [4]. Кроме того, логика G *арифметически полна* в том смысле, что любая модальная формула, все переводы которой выводимы в арифметике, выводимы в G [6]. Последняя теорема имеет следующее усиление [1]: существует перевод f_0 такой, что для любой модальной формулы P если перевод P^{f_0} выводим в арифметике, то формула P выводима в G.

Отметим, что существует логика G', которая аналогичным образом представляет предикат истинности $W(x)$ в стандартной модели арифметики [6]. (На самом деле речь идет об одном свойстве этого предиката: для любой арифметической формулы A: $\mathscr{A} \vdash W(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$.)

2. p-свойства арифметических предикатов и модальные представления

Мы будем предполагать, что для языков всех рассматриваемых в работе теорий зафиксирована единая гёделевская нумерация.

Ниже мы определим понятие p-свойства (пропозиционального свойства) и его конкретизации в теории $\mathscr{T}$, являющейся непротиворечивым расширением арифметики $\mathscr{A}$. Термин «предикат» будем использовать как для предикатов, так и для представляющих их формул. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — пропозициональные переменные, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — специальные символы соответственно арности $n_1, \ldots, n_m$. Множество $\varphi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_m\}$ будем называть (предикатной) сигнатурой.

р-свойствами в сигнатуре φ назовем следующие выражения.

C1. Всякая пропозициональная переменная является p-свойством первого типа.

C2. Если $Y_1, Y_2, \ldots$ — p-свойства первого типа, то $\neg Y_1$, $Y_1 \to Y_2$, $\Phi_i(Y_1, \ldots, Y_{n_i})$, $i = 1, \ldots, m$, — p-свойства первого типа.

C3. Если $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{k+1}$ — p-свойства первого типа, то выражение $Y_1, \ldots, Y_k \vdash Y_{k+1}$ — p-свойство второго типа.

C4. p-свойство — это p-свойство первого или второго типа.

В дальнейшем p-свойства будем называть просто свойствами.

Пусть Y — свойство в сигнатуре $\varphi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_m\}$, содержащее пропозициональные переменные из множества $\{p_1, \ldots, p_k\}$ и только их, и пусть $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_m$ — формулы в языке теории $\mathscr{T}$, причем такие, что количество свободных переменных в формуле B_i совпадает с арностью символа Φ_i, $i = 1, \ldots, m$. Определим *конкретизацию* $\overline{Y}$ *свойства* Y *для преди-*

катов $B_1, \ldots, B_m$ *на формулах* $A_1, \ldots, A_m$ индукцией по конструкции Y. Одновременно мы показываем, что всякая конкретизация свойства первого типа есть формула в языке теории $\mathcal{T}$. (Ниже слова «в языке теории $\mathcal{T}$» мы опускаем.)

К1. Если Y — пропозициональная переменная p_i, то $\overline{Y} = A_i$. Ясно, что в этом случае $\overline{Y}$ — формула.

К2. Пусть $Y_1, \ldots, Y_{n_i}$ — свойства первого типа, и пусть определены и являются формулами $\overline{Y_1}, \ldots, \overline{Y_{n_i}}$. Если $Y = \neg Y_1$, то $\overline{Y} = \neg \overline{Y_1}$. Если $Y = Y_1 \to \to Y_2$, то $\overline{Y} = \overline{Y_1} \to \overline{Y_2}$. Если $Y = \Phi_i(Y_1, \ldots, Y_{n_i})$, то $\overline{Y} = B_i(\ulcorner \overline{Y_1} \urcorner, \ldots, \ulcorner \overline{Y_{n_i}} \urcorner)$. Легко видеть, что во всех случаях $\overline{Y}$ — формула.

К3. Если Y — свойство второго типа: $Y_1, \ldots, Y_k \vdash Y_{k+1}$, то $\overline{Y}$ есть $\overline{Y_1}, \ldots, \overline{Y_k} \vdash \overline{Y_{k+1}}$.

Набор предикатов (формул) $B_1, \ldots, B_m$ *обладает в теории* $\mathcal{T}$ *свойством* Y *первого типа на формулах* $A_1, \ldots, A_n$, если $\mathcal{T} \vdash \overline{Y}$, где $\overline{Y}$ — конкретизация свойства Y для предикатов $B_1, \ldots, B_m$ на формулах $A_1, \ldots, A_n$. Набор предикатов $B_1, \ldots, B_m$ *обладает свойством* Y, если он обладает свойством Y на любых формулах $A_1, \ldots, A_n$. Если Y есть $Y_1, \ldots, Y_k \vdash Y_{k+1}$ (свойство второго типа), то набор предикатов обладает свойством Y, если на всяком множестве формул $A_1, \ldots, A_n$, на котором набор $B_1, \ldots, B_m$ обладает свойствами $Y_1, \ldots, Y_k$, он обладает свойством Y_{k+1}.

Будем говорить, что множество $\mathfrak{S}$ свойств *реализуется в теории* $\mathcal{T}$ набором предикатов (формул, представляющих эти предикаты) $B_1, \ldots, B_m$, а также — что эти предикаты *реализуют* множество $\mathfrak{S}$, если $B_1, \ldots, B_m$ обладают в $\mathcal{T}$ всеми свойствами из $\mathfrak{S}$. Множество $\mathfrak{S}$ свойств *реализуемо* в $\mathcal{T}$, если существует набор $B_1, \ldots, B_m$, которым $\mathfrak{S}$ реализуется в $\mathcal{T}$. В этом случае набор $B_1, \ldots, B_m$ будем называть *реализацией* множества $\mathfrak{S}$. Множество $\mathfrak{S}$ свойств назовем *совместимым*, если оно реализуемо в какой-либо непротиворечивой теории $\mathcal{T}$.

Всякое свойство Y первого типа в сигнатуре $\varphi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ можно рассматривать как пропозициональную модальную формулу с модальными операциями $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$. Свойство $Y_1, \ldots, Y_k \vdash Y_{k+1}$ второго типа порождает соответствующее правило вывода. Таким образом, если к произвольному множеству $\mathfrak{S}$ свойств добавить пропозициональные тавтологии и правило MP, то мы получим пропозициональную модальную логику, которую обозначим $M\mathfrak{S}$ и которую будем называть модальным аналогом множества $\mathfrak{S}$. Если $Y \in \mathfrak{S}$, то MY будет обозначать модальную формулу (или правило) — модальный аналог свойства Y, в котором специальные символы рассматриваются, как модальные операции. (При этом мы допускаем обозначения специальных символов любыми другими знаками.) Если набор предикатов (формул) $B_1, \ldots, B_m$ обладает в теории $\mathcal{T}$ свойствами из $\mathfrak{S}$, то модальную логику $M\mathfrak{S}$ будем называть *модальным представлением* предикатов $B_1, \ldots, B_m$. Множество $\mathfrak{S}$ свойств будем называть *непротиворечивым*, если непротиворечива логика $M\mathfrak{S}$. Например, предикат доказуемости Дк(x) в арифметике обладает следующими свойствами $Y_1, \ldots, Y_5$:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \Phi(p \to q) \to (\Phi(p) \to \Phi(q)),\\
Y_2 &= \Phi(p) \to \Phi(\Phi(p)),\\
Y_3 &= \Phi(\Phi(p) \to p) \to \Phi(p),\\
Y_4 &= p \vdash \Phi(p),\\
Y_5 &= \Phi(p) \vdash p.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что множество свойств $\mathfrak{S}_{1-4} = \{Y_1, \ldots, Y_4\}$ порождает логику G Гёделя–Лёба. Свойство Y_5 порождает правило П2: $\Box P \vdash P$. Заметим, что свойствами $Y_1, \ldots, Y_4$ обладает тождественно истинный предикат, но свойством Y_5 он не обладает, из чего можно заключить, что логики G и $M\{Y_1, \ldots, Y_5\}$ различны. Последняя логика изучалась А. В. Кузнецовым и А. Ю. Муравицким [3] под названием «исчисление Д».

Нас интересуют возможности модальных представлений арифметических предикатов конечно-аксиоматизируемыми модальными логиками. Этот вопрос мы свели к характеризации предикатов конечнми множествами свойств. В связи с этим прежде всего возникают следующие вопросы.

В1. Всегда ли совместимое множество свойств порождает непротиворечивую модальную логику?

В2. Верно ли, что если логика $M\mathfrak{S}$ непротиворечива, то множество $\mathfrak{S}$ совместимо?

В3. Верен ли аналог теоремы Артемова: для всякого множества $\mathfrak{S}$ свойств и для всякого множества предикатов существует такой набор формул, что если эти предикаты обладают свойствами из $\mathfrak{S}$ на этом наборе, то они обладают свойствами из $\mathfrak{S}$ на любом наборе формул?

Этот вопрос можно поставить в усиленной форме.

В3'. Верно ли, что для всякого множества $\mathfrak{S}$ свойств существует такой набор формул, что всякое множество предикатов, обладающее свойствами из $\mathfrak{S}$ на этом наборе, обладает ими на любом наборе?

Ниже мы продолжим этот список, но сначала мы дадим ответы на первые два вопроса.

Замечание. Поскольку логика $M\mathfrak{S}$ содержит полное пропозициональное исчисление, то мы можем (и будем) считать, что всякое множество $\mathfrak{S}$ свойств не содержит свойств первого типа, являющихся пропозициональными формулами, ибо непротиворечивое множество может содержать только тавтологичные пропозициональные свойства.

Теорема 2.1. *Модальный аналог совместимого множества свойств непротиворечив.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — реализуемое в теории $\mathcal{T}$ множество свойств. Если $Y(p_1, \ldots, p_n)$ — свойство первого типа из $\mathfrak{S}$, то для любых формул $A_1, \ldots, A_n$ $\mathcal{T} \vdash \overline{Y}(A_1, \ldots, A_n)$, где $\overline{Y}(A_1, \ldots, A_n)$ — конкретизация свойства Y для соответствующих предикатов на формулах $A_1, \ldots, A_n$. Если $Y(p_1, \ldots, p_n)$ — свойство второго типа: $Y_1, \ldots, Y_k \vdash Y_{k+1}$, то для любого множества формул $A_1, \ldots, A_n$ такого, что $\mathcal{T} \vdash \overline{Y_1}(A_1, \ldots, A_n), \ldots, \overline{Y_k}(A_1, \ldots, A_n)$ также и $\mathcal{T} \vdash \overline{Y_{k+1}}(A_1, \ldots, A_n)$, т. е. правило $\overline{Y_1}, \ldots, \overline{Y_k} \vdash \overline{Y_{k+1}}$ является допустимым в $\mathcal{T}$. Таким образом,

$$\text{замыкание множества } \overline{\mathfrak{S}} = \{\overline{Y}\colon Y \in \mathfrak{S}\} \text{ относительно правил из } \overline{\mathfrak{S}}$$
$$\text{и логических правил является подтеорией теории } \mathcal{T} \text{ и, следовательно,}$$
$$\text{непротиворечиво.} \tag{1}$$

Предположим теперь, что модальный аналог $M\mathfrak{S}$ является противоречивым, т. е. существует модальная формула P такая, что $M\mathfrak{S} \vdash P$ и $M\mathfrak{S} \vdash \neg P$. Ясно, что все формулы и правила вывода модального аналога $M\mathfrak{S}$ являются свойствами (быть может с точностью до обозначений модальных операций). Рассмотрим конкретизацию всех формул, входящих в выводы формул P и $\neg P$ в $M\mathfrak{S}$. Очевидно, что все они принадлежат замыканию $\overline{\mathfrak{S}}$, которое является подтеорией теории $\mathcal{T}$. Это, в частности, относится к формулам P и $\neg P$. Из определения конкретизации следует, что $\overline{\neg P} = \neg \overline{P}$. Таким образом, мы получили противоречие с (1), что и доказывает теорему.

Если $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ — теории, то обозначим через $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ замыкание $[\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2]$ суммы $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ относительно объединения правил вывода теорий $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ и логических правил. Если $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — множества формул без правил вывода, то $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ обозначает логическое замыкание множества $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, что также обозначим $[\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2]$.

Далее для упрощения выкладок мы будем использовать в некоторых случаях формульные переменные $A_1^0, A_2^0, \ldots$ (Вместо этого можно было бы расширить язык арифметики или логики пропозициональными переменными или 0-арными предикатными символами, но нам удобнее иметь дело с формульными переменными.) Отметим, что формульные переменные мы считаем включенными в общую гёделевскую нумерацию. Пусть $Y = Y(p_1, \ldots, p_k, \Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ — свойство в сигнатуре $\varphi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_m\}$. Определим для него *обобщенную конкретизацию* $\overline{Y^0}$ для формул $\Phi_1(\overline{x_1}), \ldots, \Phi_m(\overline{x_m})$ (здесь $\overline{x_i}$ обозначает набор переменных $x_1, \ldots, x_{n_i}$, длина которого равна арности Φ_i, $i = 1, \ldots, m$), на формульных переменных $A_1^0, \ldots, A_k^0$ в соответствии с правилами К1, К2, К3 с той разницей, что различные пропозициональные переменные замещаются различными формульными переменными. Если $\mathfrak{S}$ — множество свойств в сигнатуре φ, то обозначим $\overline{\mathfrak{S}^0} = \{\overline{Y^0}\colon Y \in \mathfrak{S}\}$.

Пусть задана теория $\mathcal{T}$ и множество $\mathfrak{S}$ свойств в сигнатуре $\varphi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_m\}$, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ не принадлежат языку теории $\mathcal{T}$. Расширим язык теории $\mathcal{T}$ (но не саму теорию) формулами $\Phi_1(\overline{x_1}), \ldots, \Phi_m(\overline{x_m})$. Для всякого свойства Y в сигнатуре φ определена конкретизация $\overline{Y}$ *для* формул $\Phi_1(\overline{x_1}), \ldots, \Phi_m(\overline{x_m})$ *на* любых формулах расширенного языка теории $\mathcal{T}$. Обозначим: $\overline{\mathfrak{S}} = \{\overline{Y}\colon Y \in \mathfrak{S}\}$. Отметим, что в отличие от введенного ранее понятия конкретизации свойств для формул теории $\mathcal{T}$, в данном случае рассматривается конкретизация для формул, языку теории $\mathcal{T}$ не принадлежащих (хотя само понятие связано с теорией $\mathcal{T}$, поскольку конкретизации рассматриваются на формулах в расширении языка теории $\mathcal{T}$). Из дальнейшего будет ясен смысл этого варианта. Заметим также, что если множество $\overline{\mathfrak{S}}$ определено только относительно некоторой теории $\mathcal{T}$, то множество $\overline{\mathfrak{S}^0}$ не зависит от какой-либо теории и состоит из формул и правил в языке, содержащем логические операции, сигнатурные символы из φ и формульные переменные $A_1^0, A_2^0, \ldots$. Поэтому в тех случаях, когда мы сопоставляем $\overline{\mathfrak{S}^0}$ и $\overline{\mathfrak{S}}$, мы расширяем язык $\overline{\mathfrak{S}^0}$ формулами теории $\mathcal{T}$ относительно которой рассматривается $\overline{\mathfrak{S}}$. Замыкания $[\overline{\mathfrak{S}^0}]$ и $[\overline{\mathfrak{S}}]$ мы будем рассматривать как аксиоматизированные теории, правилами вывода которых являются логические правила и правила, соответствующие свойствам второго типа.

Обозначим $\mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}^0} = \mathcal{T} + \overline{\mathfrak{S}^0}$, $\mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}} = \mathcal{T} + \overline{\mathfrak{S}}$. Очевидно, что

$$\mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}^0} \supseteq \mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}}. \tag{2}$$

(Действительно, в числе правил вывода в $\mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}^0}$ имеется подстановка произвольных формул в расширенном языке теории $\mathcal{T}$ вместо формульных переменных.)

Лемма 2.1. *Теория $\mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}^0}$ непротиворечива $\Leftrightarrow$ теория $\mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}}$ непротиворечива.*

Доказательство. В сторону $\Rightarrow$ утверждение непосредственно следует из (2). Обратно, пусть $\mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}^0}$ противоречива, покажем, что тогда и $\mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}}$ — противоречива. Пусть $\mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}^0} \vdash A \,\&\, \neg A$. Очевидно, что если в выводе $A \,\&\, \neg A$ из $\mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}^0}$ согласованно заменить все формульные переменные формулами в расширенном языке, то мы получим вывод из $\mathcal{T}\overline{\mathfrak{S}}$ формулы $A' \,\&\, \neg A'$, где A' — формула в расширенном языке, полученная из A такой заменой.

Лемма 2.2. $M\mathfrak{S} \vdash MY \Leftrightarrow \overline{\mathfrak{S}^0} \vdash \overline{Y^0}$.

Действительно, между $M\mathfrak{S}$ и $\overline{\mathfrak{S}^0}$ имеется 1-1-соответствие $MY \xleftrightarrow{1-1} \overline{Y^0}$, и для каждого вывода $MY_1, \ldots, MY_n$ из $M\mathfrak{S}$ соответствующая последовательность $\overline{Y_1^0}, \ldots, \overline{Y_n^0}$ является выводом из $\overline{\mathfrak{S}^0}$, и обратно, откуда и вытекает лемма.

Следствие 2.1. *Логика $M\mathfrak{S}$ непротиворечива тогда и только тогда, когда множество $\overline{\mathfrak{S}^0}$ непротиворечиво.*

Лемма 2.3. *$\overline{\mathfrak{S}^0}$ непротиворечиво $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathfrak{S}}$ — непротиворечиво.*

Доказательство. Если рассматривать конкретизации из $[\overline{\mathfrak{S}^0}]$ на формулах в расширении языка теории $\mathcal{T}$ не только символами из φ, но и формульными переменными, то $\overline{\mathfrak{S}^0}$ будет расширением теории $[\overline{\mathfrak{S}}]$ формулами, содержащими формульные переменные. Однако, все такие формулы переходят в формулы теории $[\overline{\mathfrak{S}}]$ при любой замене формульных переменных формулами в расширении языка теории $\mathcal{T}$, т. е. это расширение консервативно, откуда и следует лемма.

Рассмотрим теперь вопрос В2. Ответ на него зависит от того, какие теории $\mathcal{T}$ мы рассматриваем. Если допускать теории более узкие, чем арифметика, то ответ будет положительный. Действительно, если взять в качестве теории $\mathcal{T}$ чистое исчисление предикатов $\mathfrak{L}$, то теория $\mathfrak{L}\overline{\mathfrak{S}}$, во-первых, непротиворечива в силу лемм 2.2 и 2.3 и, во-вторых, в ней реализуется множество $\mathfrak{S}$.

Если же в качестве $\mathcal{T}$ рассматривать только расширения арифметики, то ответ на вопрос В2 дает

Теорема 2.2. *Какова бы ни была непротиворечивая теория $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{A}$, существует непротворечивое множество $\mathfrak{S}$ свойств, нереализуемое в теории $\mathcal{T}$.*

Доказательство. Рассмотрим свойства Y_1–Y_4 в сигнатуре $\varphi = \{\Phi^{(1)}\}$:

$$Y_1 = \Phi(p \to q) \to (\Phi(p) \to \Phi(q)), \qquad Y_2 = \Phi(p) \to \Phi(\Phi(p)),$$
$$Y_3 = \Phi(\Phi(p) \to p) \to \Phi(p), \qquad Y_4 = p \vdash \Phi(p).$$

Покажем, что Y_3 не является следствием остальных свойств, т. е. $M\{Y_1, Y_2, Y_4\} \nvdash MY_3$. Действительно, при $\Phi(p) = p$ свойства Y_1 и Y_2 становятся пропозициональными тавтологиями, а правила MP и Y_4 сохраняют тавтологичность. В то же время, при $\Phi(p) = p$ $Y_3 = p$, что и означает невыводимость Y_3 из остальных свойств. Таким образом, множество свойств $\mathfrak{S} = \{Y_1, Y_2, \neg Y_3, Y_4\}$ непротиворечиво. Но в любом расширении $\mathcal{T}$ арифметики всякий предикат (формула), обладающий свойствами Y_1, Y_2, Y_4, в силу теоремы Лёба [5] обладает и свойством Y_3, и следовательно, множество $\mathfrak{S}$ нереализуемо в $\mathcal{T}$.

3. Арифметические модели модальных логик

Взаимоотношения между модальными логиками и арифметикой можно изучать с различных позиций. До сих пор мы рассматривали модальные логики как средство описания арифметических предикатов. Но можно посмотреть на них иначе: арфметические теории и их модели можно рассматривать как вид моделей для соответствующих модальных логик. Действительно, стандартную модель теории $\mathcal{T}$, в которой реализуемо множество свойств $\mathfrak{S}$, можно считать моделью логики $M\mathfrak{S}$. (Саму теорию $\mathcal{T}$ также можно считать моделью логики $M\mathfrak{S}$ и такой подход мы тоже рассмотрим.)

Если $\mathfrak{S}$ — множество свойств, то обозначим: $[\mathfrak{S}]=\{Y\colon M\mathfrak{S}\vdash MY\}$. Множество свойств назовем *замкнутым*, если $\mathfrak{S}=[\mathfrak{S}]$.

Если $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — формулы в языке теории $\mathcal{T}$, то обозначим: $\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T})=\{Y\colon$ формулы $B_1, \ldots, B_m$ обладают в теории $\mathcal{T}$ свойством $Y\}$. Здесь $\overline{B}$ обозначает набор формул $B_1, \ldots, B_m$.

Очевидны следующие утверждения.

(1) *Множество* $\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T})$ *замкнуто.*

(2) *Для всякой реализации* $\overline{B}$ *множества* $\mathfrak{S}$ *в теории* $\mathcal{T}$

$$\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T}).$$

Реализацию $B_1, \ldots, B_m$ множества свойств $\mathfrak{S}$ в теории $\mathcal{T}$ назовем *точной*, а множество $\mathfrak{S}$ — *полным* для $B_1, \ldots, B_m$, если $[\mathfrak{S}]=\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T})$.

Множество свойств $\mathfrak{S}$ в сигнатуре φ назовем *синтаксически полным*, если оно непротиворечиво и для любого свойства Y первого типа в сигнатуре φ, либо $Y\in[\mathfrak{S}]$, либо $\neg Y\in[\mathfrak{S}]$. Аналогично определяется синтаксическая полнота для модальных логик.

Рассмотрим сначала следующие два вопроса.

В4. Для всякого ли набора $\overline{B}=B_1, \ldots, B_m$ арифметических формул существует теория $\mathcal{T}$, для которой множество $\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T})$ синтаксически полное?

В5. Для всякого ли совместимого множества свойств существует точная реализация в какой-либо теории?

Положительный ответ на вопрос В4 дает

Теорема 3.1. *Для всякого набора* $\overline{B}=B_1, \ldots, B_m$ *формул в языке арифметики* $\mathcal{A}$ *существует теория* $\mathcal{T}$, *для которой множество* $\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T})$ *синтаксически полное.*

Доказательство. Пусть φ — сигнатура, соответствующая набору $\overline{B}$ (т. е. арности специальных символов равны количеству свободных переменных в формулах $B_1, \ldots, B_m$), и пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ — всевозможные свойства первого типа в сигнатуре φ. Обозначим: $\mathfrak{S}_0=\varnothing$, $\mathcal{T}_0=\mathcal{A}$. Будем считать, что язык арифметики $\mathcal{A}$ содержит формульные переменные. Пусть определены $\mathfrak{S}_n$ и $\mathcal{T}_n$. Тогда полагаем: $\mathfrak{S}_{n+1}=\mathfrak{S}_n\cup\{\neg Y_{n+1}\}$, $\mathcal{T}_{n+1}=\mathcal{T}_n+\neg\overline{Y^0_{n+1}}$, если $\mathcal{T}_n\nvdash\overline{Y^0_{n+1}}$; в противном случае $\mathfrak{S}_{n+1}=\mathfrak{S}_n\cup\{Y_{n+1}\}$ и $\mathcal{T}_{n+1}=\mathcal{T}_n$. Обозначим: $\mathfrak{S}=\bigcup\limits_n\mathfrak{S}_n$, $\mathcal{T}=\mathcal{A}\overline{\mathfrak{S}^0}$. Покажем, что теория $\mathcal{T}$ непротиворечива. Теория $\mathcal{T}_0=\mathcal{A}$ непротиворечива. Пусть $\mathcal{T}_n$ непротиворечива и пусть $\mathcal{T}_{n+1}\neq\mathcal{T}_n$. Тогда $\mathcal{T}_{n+1}=\mathcal{T}_n+\neg\overline{Y^0_{n+1}}$. Поскольку $\mathcal{T}_n\nvdash\overline{Y^0_{n+1}}$, то расширение $\mathcal{T}_{n+1}=\mathcal{T}_n+\neg\overline{Y^0_{n+1}}$ непротиворечиво. По принципу компактности тогда $\mathcal{T}$ непротиворечиво. Ясно, что в $\mathcal{T}$ набор $\overline{B}$ является реализацией множества $\mathfrak{S}$. Покажем, что множество $\mathfrak{S}$ синтаксически полное. Действительно, для всякого свойства Y сигнатуры φ, либо $\overline{Y^0}$, либо $\neg\overline{Y^0}$ принадлежит (выводимо в) теории $\mathcal{T}$ и потому либо $Y\in\mathfrak{S}$, либо $\neg Y\in\mathfrak{S}$. Так как любое свойство, реализуемое в $\mathcal{T}$ набором $\overline{B}$, принадлежит $\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T})$, то $\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T})\supseteq\mathfrak{S}$. В силу синтаксической полноты множества $\mathfrak{S}$ множество $\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T})$ синтаксически полное.

Поскольку всякая реализация синтаксически полного множества свойств точная, то из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.1. *Для любой сигнатуры* φ *существуют множества свойств, имеющие точные реализации в подходящих теориях.*

На вопрос В5 для расширений $\mathcal{T}$ арифметики нетрудно получить отрицательный ответ. Так же, как в доказательстве теоремы 2.2, можно показать, что существуют совместимое множество свойств $\mathfrak{S}$ и невыводимое из него свойство Y такие, что всякая реализация $\overline{B}$ множества $\mathfrak{S}$ в теории $\mathcal{T}$ такова, что $\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T}) \supseteq \mathfrak{S} \cup \{Y\}$, т. е. для множества $\mathfrak{S}$ не существует точной реализации в $\mathcal{T}$.

Заключим первую часть работы вопросом В6, являющимся в некотором смысле обратным вопросу В5.

В6. Всегда ли для набора $\overline{B}$ формул теории $\mathcal{T}$, представляющих рекурсивные предикаты, существует рекурсивное (рекурсивно перечислимое) полное множество $\mathfrak{S}$ свойств, т. е. такое, что $\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T}) = [\mathfrak{S}]$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артёмов С. Н. Арифметически полные модальные теории // Семиотика и информатика. Вып. 14. — М.: ВИНИТИ, 1979–1980. — С. 115–133.
2. Артёмов С. Н. О модальных логиках, аксиоматизирующих доказуемость // Изв. АН СССР. Сер. математическая. — 1985. — Т.49, № 6. — С. 1123–1154.
3. Кузнецов А. В., Муравицкий А. Ю. Логика доказуемости // IV Всесоюзная конференция по математической логке. Тезисы докладов. — Кишинев, 1976. — С. 73.
4. Boolos G., Jeffrey R. C. Computability and logic. — Cambrige University Press, 1989. [Русский перевод: Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. — М.: Мир, 1994.]
5. Löb M. Y. Solution of a problem of Leon Henkin // JSL — 1955. — V. 20. — P. 115–118.
6. Solovay R. M. Probability interpretations of modal logic // Israel J. Math. — 1976. — V. 25. — P. 287–304.

Поступило в редакцию 5 VIII 2000