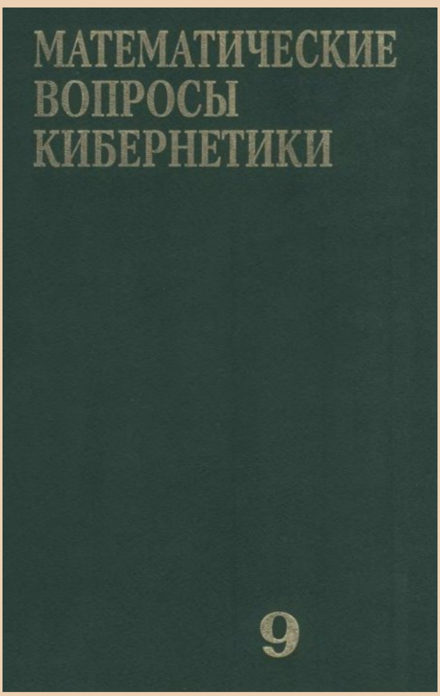

М. Ю. Мошков

Диагностика константных неисправностей схем из функциональных элементов

ДИАГНОСТИКА КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЕЙ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ *)

М. Ю. МОШКОВ

(НИЖНИЙ НОВГОРОД)

В работе изучается глубина условных тестов для диагностики константных неисправностей схем из функциональных элементов, а также исследуется сложность алгоритмов построения таких условных тестов. Большая часть результатов работы была опубликована без доказательств в материалах конференций [6, 7, 27].

Работа состоит из пяти параграфов. В § 1 определяются понятия схемы из функциональных элементов, набора константных неисправностей на входах элементов схемы, задачи диагностики неисправностей схемы и условного теста. Изучаемые неисправности состоят в появлении булевых констант на некоторых входах элементов схемы. Задача диагностики заключается в распознавании функции, которую реализует схема, содержащая некоторый набор константных неисправностей из заданного множества наборов. В качестве алгоритмов решения задачи диагностики используются условные тесты. Каждая проверка, выполняемая условным тестом, включает в себя подачу на входы схемы набора из нулей и единиц и наблюдение значения на выходе схемы. Мерой сложности условного теста служит его глубина — максимальное число выполняемых проверок.

Пусть B — непустое конечное множество булевых функций (базис) и $\mathcal{S}(B)$ — множество схем из функциональных элементов в базисе B, имеющих один выход. Для схемы $S \in \mathcal{S}(B)$ обозначим $L(S)$ число элементов в схеме S и $h(S)$ — минимальную глубину условного теста, решающего задачу диагностики схемы S относительно множества всевозможных наборов константных неисправностей на входах элементов схемы.

В § 2 изучается глубина условных тестов, решающих задачу диагностики схем относительно множества всевозможных наборов константных неисправностей на входах элементов. С этой целью рассматриваются две функции шенноновского типа h_B и H_B.

Функция h_B характеризует сложность алгоритмов диагностики неисправностей для произвольных схем в базисе B и определяется следующим образом:

$$h_B(n) = \max\{h(S)\colon\ S \in \mathcal{S}(B),\, L(S) \leqslant n\}.$$

Базис B называется примитивным, если он состоит только из дизъюнкций $x_1 \vee \ldots \vee x_n$ и, возможно, констант, или только из конъюнкций $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ и, возможно, констант, или только из линейных функций.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00820) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проекты A0110 и A0047).

Показано, что $h_B(n) = O(n)$ для примитивного базиса B и $\log_2 h_B(n) = \Omega(n^{1/2})$ для базиса B, не являющегося примитивным.

Здесь и далее равенство $g(n) = O(f(n))$ означает, что существуют положительные константы c и n_0 такие, что для всех целых $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $g(n) \leqslant cf(n)$. Равенство $g(n) = \Omega(f(n))$ означает, что существуют положительные константы c и n_0 такие, что для всех целых $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $g(n) \geqslant cf(n)$.

В отличие от функции h_B, функция H_B характеризует сложность алгоритмов диагностики не произвольных, а наилучших с точки зрения решения задачи диагностики схем, реализующих булевы функции, заданные формулами над B. Пусть $\Phi(B)$ — множество формул над B. Для формулы $\varphi \in \Phi(B)$ обозначим $L(\varphi)$ число функциональных символов в φ и $H(\varphi) = \min h(S)$, где минимум берется по всевозможным схемам из функциональных элементов S (не обязательно в базисе B), которые реализуют ту же функцию, что и формула φ. Функция H_B определяется следующим образом:

$$H_B(n) = \max\{H(\varphi)\colon \varphi \in \Phi(B), L(\varphi) \leqslant n\}.$$

Показано, что если базис B является примитивным, то $H_B(n) = O(n)$, а если базис B не является примитивным, то $\log_2 H_B(n) = \Omega(n^c)$ для некоторой положительной константы c, зависящей только от B.

В § 3 исследуется следующая проблема: по произвольной схеме из функциональных элементов S в базисе B и произвольному множеству W наборов константных неисправностей на входах элементов S требуется построить условный тест, решающий задачу диагностики S относительно неисправностей из W. Отметим, что существует условный тест, который решает задачу диагностики схемы S относительно неисправностей из W и для которого число вершин не превосходит $2|W|$. Показано, что для примитивного базиса B существует алгоритм решения рассматриваемой проблемы, имеющий полиномиальную временную сложность, а для базиса B, не являющегося примитивным, рассматриваемая проблема является NP-трудной.

В § 4 изучается глубина условных тестов, решающих задачу диагностики бесповторных схем относительно множества всевозможных наборов константных неисправностей на входах элементов. Схема из функциональных элементов называется бесповторной, если из каждой ее вершины выходит не более одной дуги. Обозначим $\mathscr{S}^1(B)$ множество бесповторных схем из функциональных элементов в базисе B, имеющих один выход. Рассматривается функция h_B^1, которая определяется следующим образом:

$$h_B^1(n) = \max\{h(S)\colon S \in \mathscr{S}^1(B), L(S) \leqslant n\}.$$

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется квазимонотонной, если существуют монотонная булева функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ и такие числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$, что $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$, где $x^\sigma = x$, если $\sigma = 1$, и $x^\sigma = \neg x$, если $\sigma = 0$. Базис B называется квазипримитивным, если он состоит только из линейных функций, или только из квазимонотонных функций.

Показано, что если B — квазипримитивный базис, то $h_B^1(n) = O(n)$, а если базис B не является квазипримитивным, то $\log_2 h_B^1(n) = \Omega(n)$. Отметим, что условные тесты, о которых идет речь в оценках для квазипримитивных базисов, имеют эффективное описание функционирования.

В § 5 рассматривается подход к синтезу схем и эффективной диагностике их неисправностей, основанный на результатах, полученных для бесповторных схем.

Две функции называются равными, если одна из них может быть получена из другой с помощью операций введения и удаления несущественной переменной. Используя результаты работы [16], можно показать, что для любого базиса B_1 существует квазипримитивный базис B_2, обладающий следующими свойствами:

а) множество функций, реализуемых схемами в базисе B_2, совпадает с множеством функций, реализуемых схемами в базисе B_1;

б) существует такой полином p, что для любой формулы $\varphi_1 \in \Phi(B_1)$ существует формула $\varphi_2 \in \Phi(B_2)$, которая реализует функцию, равную функции, реализуемой формулой φ_1, и для которой $L(\varphi_2) \leqslant p(L(\varphi_1))$.

Рассматриваемый подход к синтезу схем и диагностике их неисправностей заключается в следующем. По произвольной формуле $\varphi_1 \in \Phi(B_1)$, реализующей некоторую функцию f, $f \notin \{0, 1\}$, строится формула $\varphi_2 \in \Phi(B_2)$, реализующая функцию, равную функции f, и удовлетворяющая неравенству $L(\varphi_2) \leqslant p(L(\varphi_1))$. Далее по формуле φ_2 строится схема S в базисе B_2, которая реализует функцию f и удовлетворяет следующим условиям: $L(S) = L(\varphi_2)$; из любой вершины схемы S, не являющейся входом, выходит не более одной дуги. Кроме обычного рабочего режима у схемы S имеется также диагностический режим, при котором входы схемы S «расщепляются» и она превращается в бесповторную схему $\widetilde{S}$. Для схемы $\widetilde{S}$ справедливо неравенство $h(\widetilde{S}) \leqslant cp(L(\varphi_1))$, где c — константа, зависящая только от базиса B_2.

Контроль и диагностика неисправностей — одно из направлений математической кибернетики, берущее начало с работ [17, 25, 26]. К настоящему времени опубликовано значительное число статей, в которых изучаются как устройства с памятью, так и устройства без памяти. Обзор результатов и обширная библиография содержатся в [23].

Сложность алгоритмов диагностики константных неисправностей схем из функциональных элементов изучалась многими авторами. При этом в основном исследовались безусловные тесты и рассматривалась зависимость сложности алгоритмов диагностики от числа входов схемы [11–15]. Упомянем работы, наиболее близкие по постановке к тематике статьи.

В работах [18–22, 30, 31] для схем в произвольном конечном базисе и различных типов неисправностей (не только константных) исследована зависимость минимальной глубины условного теста, диагностирующего неисправности схемы, от суммарного числа входов и элементов в схеме.

Из результатов работ [1, 3] непосредственно следует оценка $h_B^1(n) = O(n)$ для произвольного базиса B, обладающего следующим свойством: каждая функция из B реализуется некоторой бесповторной схемой в базисе $\{x \wedge y, x \vee y, \neg x\}$. Указанная оценка справедлива не только для условных, но и для безусловных тестов. Однако, как следует из леммы 11 работы [5], уже для бесповторных схем в базисе $\{(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_5) \vee (x_4 \wedge x_3 \wedge x_2) \vee (x_4 \wedge x_5)\}$ минимальная мощность безусловного теста, диагностирующего константные неисправности на входах элементов, с ростом числа элементов в схеме в худшем случае растет экспоненциально.

Отметим также работы [9, 28, 29], посвященные дальнейшему развитию рассматриваемого подхода к синтезу и диагностике схем.

§ 1. Основные понятия

В этом параграфе определяются понятия схемы из функциональных элементов, множества наборов константных неисправностей на входах элементов схемы, задачи диагностики неисправностей схемы и условного теста.

Далее будут использоваться следующие обозначения: $E_2 = \{0, 1\}$, $E_3 = \{0, 1, 2\}$, $[F]$ — замыкание множества булевых функций F относительно операций суперпозиции, а также введения и удаления несущественной переменной.

1.1. Схемы из функциональных элементов. *Базисом* будем называть произвольное непустое конечное множество булевых функций. Пусть B — некоторый базис.

Схема из функциональных элементов в базисе B (схема в базисе B) — помеченный конечный ориентированный граф без ориентированных циклов и, возможно, с кратными дугами, который имеет вершины трех типов: входы, функциональные элементы и выходы.

В вершину типа *вход* дуги не входят, каждому входу приписана переменная, различным входам приписаны различные переменные. В схеме имеется по крайней мере один вход.

Каждой вершине типа *функциональный элемент* приписана функция из множества B. Пусть v — вершина типа функциональный элемент, и ей приписана функция g, зависящая от t переменных. Если $t = 0$ (этот случай имеет место, когда g есть одна из констант 0 или 1), то в вершину v дуги не входят. Если $t > 0$, то в вершину v входят ровно t дуг, и этим дугам приписаны числа $1, \ldots, t$ соответственно. В схеме присутствует хотя бы один функциональный элемент.

В вершину типа *выход* входит ровно одна дуга, выходящая из некоторого функционального элемента. Вершине типа выход ничего не приписано, из вершины типа выход дуги не выходят. Мы будем рассматривать только такие схемы, у которых есть ровно один выход.

Пусть S — схема в базисе B, имеющая n входов, которым приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$. Сопоставим каждой вершине v схемы S булеву функцию f_v, зависящую от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если v — вход схемы, и вершине v приписана переменная x_i, то $f_v = x_i$. Если v — функциональный элемент, в который не входят дуги и которому приписана константа $c \in E_2$, то $f_v = c$. Пусть v — функциональный элемент, которому приписана функция g, зависящая от t, $t > 0$, переменных. Пусть для $i = 1, \ldots, t$ в вершину v входит дуга d_i, которой приписано число i и которая выходит из вершины v_i. Тогда $f_v = g(f_{v_1}, \ldots, f_{v_t})$. Если v — выход схемы S, в который входит дуга, выходящая из вершины u, то $f_v = f_u$. Функцию, сопоставленную выходу схемы S, обозначим f_S. Будем говорить, что *схема S реализует функцию f_S*.

Обозначим $L(S)$ число функциональных элементов в схеме S. Величина $L(S)$ характеризует сложность схемы S.

Обозначим $\mathcal{S}(B)$ множество всевозможных схем в базисе B. Пусть $\mathcal{F}(B) = \{f_S \colon S \in \mathcal{S}(B)\}$. Можно показать, что $\mathcal{F}(B) = [B] \setminus \{0, 1\}$.

Отметим, что определение схемы из функциональных элементов как помеченного конечного ориентированного графа без ориентированных циклов приводится в работах [4, 10].

1.2. Наборы константных неисправностей на входах элементов схемы. Пусть S — схема в базисе B. Дуги, входящие в функциональные элементы схемы S, будем называть *входами элементов* или *элементными входами*. Пусть в схеме S имеется m входов элементов. Схему S будем называть *вырожденной*, если $m = 0$, и *невырожденной*, если $m > 0$. Пусть S — невырожденная схема. Далее нам будет удобно считать, что элементные входы схемы S перенумерованы числами от 1 до m, т. е. каждая дуга, входящая в функциональный элемент, помимо приписанного ей числа, относящегося к данному элементу, имеет еще и порядковый номер в схеме.

Мы будем рассматривать неисправности схемы S, состоящие в появлении булевых констант на некоторых входах элементов. Каждая такая неисправность задается *набором константных неисправностей на входах элементов схемы* S — произвольным набором вида $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in E_3^m$. Если $w_i = 2$, то i-й элементный вход в схеме S исправен. Если $w_i \neq 2$, то i-й элементный вход в схеме S неисправен и на нем реализуется константа w_i.

Определим схему $S(\bar{w})$ в базисе $B \cup \{0, 1\}$, которую будем интерпретировать как результат воздействия набора неисправностей $\bar{w}$ на схему S. Просмотрим все входы элементов схемы S. Пусть $i \in \{1, \ldots, m\}$. Если $w_i = 2$, то оставляем i-й элементный вход без изменения. Пусть $w_i \neq 2$ и пусть i-й элементный вход — дуга d, выходящая из вершины v_1 и входящая в вершину v_2. Добавим к схеме S новый функциональный элемент $v(w_i)$, которому припишем константу w_i. Отсоединим дугу d от вершины v_1 и присоединим ее к вершине $v(w_i)$.

Далее будут рассматриваться только такие множества W, $W \subseteq E_3^m$, наборов константных неисправностей на входах элементов схемы S, которые содержат набор $(2, \ldots, 2)$. Обозначим $\mathcal{S}(S, W) = \{S(\bar{w}) \colon \bar{w} \in W\}$. Отметим, что $S((2, \ldots, 2)) = S$.

1.3. Задача диагностики неисправностей схемы. Пусть S — невырожденная схема в базисе B с n входами, которым приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$, и m входами элементов, и пусть W — некоторое множество наборов константных неисправностей на входах элементов схемы S. *Задача диагностики схемы S относительно неисправностей из множества W* заключается в следующем: по произвольной схеме $S' \in \mathcal{S}(S, W)$ требуется распознать функцию, реализуемую схемой S'. Решением этой задачи для схемы S' является некоторая формула, которая реализует функцию, равную $f_{S'}$. В § 3, когда речь пойдет об алгоритмах построения условных тестов, будем предполагать, что решением задачи является некоторый набор $\bar{w} \in W$, такой, что $f_{S'} = f_{S(\bar{w})}$. Обозначим $z(S, W)$ задачу диагностики схемы S относительно неисправностей из множества W.

Далее часто будет рассматриваться множество E_3^m всевозможных наборов константных неисправностей на входах элементов схемы S. Обозначим $z(S) = z(S, E_3^m)$.

1.4. Условные тесты. Для решения задачи $z(S, W)$ мы будем использовать условные тесты, каждая проверка которых состоит в подаче на входы схемы $S' \in \mathcal{S}(S, W)$ некоторого набора из множества E_2^n и наблюдении значения на выходе схемы S'.

Условный тест над схемой S — конечное ориентированное дерево с корнем, в котором каждой концевой вершине приписана некоторая булева функция, зависящая от переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и заданная формулой или набором неисправностей на входах элементов схемы S (результат работы условного теста); каждой вершине, не являющейся концевой (такие вершины будем называть рабочими), приписан набор из E_2^n; из каждой рабочей вершины выходят ровно две дуги, которым приписаны числа 0 и 1 соответственно (значения проверки, при которых переход осуществляется по соответствующим дугам).

Пусть Γ — условный тест над схемой S. *Полный путь* в Γ — произвольная последовательность $\xi = v_1, d_1, \ldots, v_t, d_t, v_{t+1}$ вершин и дуг Γ, такая, что v_1 — корень, v_{t+1} — концевая вершина, и для $i = 1, \ldots, t$ дуга d_i выходит из вершины v_i и входит в вершину v_{i+1}. Число t называется *длиной* пути ξ. (Если путь ξ содержит ровно одну вершину, то $t = 0$.) Определим понятие полного пути, *соответствующего* схеме $S' \in \mathcal{S}(S, W)$. Если $t = 0$, то полный путь ξ соответствует схеме S'. Пусть $t > 0$ и пусть для $i = 1, \ldots, t$ вершине v_i приписан набор $\bar{\sigma}_i$, а дуге d_i приписано число δ_i из E_2. Полный путь ξ соответствует схеме S' в том и только в том случае, когда $f_{S'}(\bar{\sigma}_i) = \delta_i$

для $i = 1, \ldots, t$. Ясно, что для любой схемы $S' \in \mathscr{S}(S, W)$ в условном тесте Г существует ровно один полный путь, который соответствует схеме S'. Работа условного теста Г для схемы S' заканчивается в концевой вершине этого пути.

Будем говорить, что условный тест Г над схемой S *решает* задачу $z(S, W)$, если для любой схемы $S' \in \mathscr{S}(S, W)$ концевой вершине полного пути в Г, соответствующего схеме S', приписано обозначение функции $f_{S'}$.

В качестве меры сложности мы будем рассматривать *глубину* условного теста — максимальную длину полного пути в нем. Обозначим $h(\Gamma)$ глубину условного теста Г. Обозначим $h(S)$ минимальную глубину условного теста, решающего задачу $z(S)$ — задачу диагностики схемы S относительно неисправностей из E_3^m. Если S — вырожденная схема, то положим $h(S) = 0$.

Пример 1.1. Обозначим S схему из функциональных элементов,

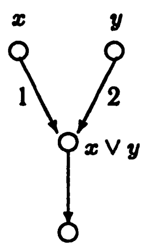

Рис. 1.1

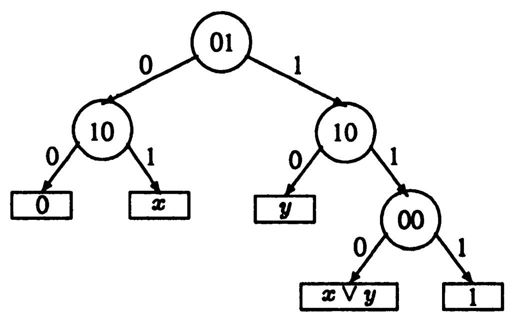

Рис. 1.2

изображенную на рис. 1.1. Обозначим Г условный тест над схемой S, изображенный на рис. 1.2. Нетрудно заметить, что условный тест Г решает задачу $z(S)$, и $h(\Gamma) = 3$. Можно показать, что $h(S) = 3$.

§ 2. Сложность алгоритмов диагностики

В этом параграфе рассматриваются два направления исследования глубины условных тестов для диагностики произвольных наборов константных неисправностей на входах элементов схем: изучение сложности алгоритмов диагностики произвольных схем в произвольном базисе B и изучение сложности алгоритмов диагностики наилучших (с точки зрения решения задачи диагностики) схем, реализующих булевы функции, заданные формулами над B.

2.1. Оценки сложности алгоритмов диагностики. Пусть B — некоторый базис. Первое направление исследования связано с изучением сложности алгоритмов диагностики неисправностей для произвольных схем в базисе B. С этой целью мы рассмотрим функцию h_B, которая для схем S из $\mathscr{S}(B)$ характеризует зависимость величины $h(S)$ от величины $L(S)$ в худшем случае и определяется следующим образом:

$$h_B(n) = \max\{h(S) \colon S \in \mathscr{S}(B), L(S) \leqslant n\}$$

для любого натурального n. Напомним, что $\mathscr{S}(B)$ — множество всевозможных схем из функциональных элементов в базисе B, $h(S)$ — минимальная глубина условного теста, решающего задачу диагностики схемы S относительно множества всевозможных наборов константных неисправностей на входах элементов, и $L(S)$ — число функциональных элементов в схеме S. Далее будет показано (см. лемму 2.4), что значение $h_B(n)$ определено для любого натурального n.

Базис B будем называть *примитивным*, если он состоит только из дизъюнкций $x_1 \vee \ldots \vee x_n$ и, возможно, констант, или только из конъюнкций $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ и, возможно, констант, или только из линейных функций.

Теорема 2.1. *Для произвольного базиса B выполняются следующие утверждения*:

а) *если базис B является примитивным, то $h_B(n) = O(n)$*;

б) *если базис B не является примитивным, то $\log_2 h_B(n) = \Omega(n^{1/2})$*.

В отличие от первого, второе направление исследования связано с изучением алгоритмов диагностики не произвольных, а наилучших с точки зрения решения задачи диагностики схем, реализующих булевы функции, заданные формулами над B. Пусть $\Phi(B)$ — множество всевозможных формул над B и $\varphi \in \Phi(B)$. Обозначим $L(\varphi)$ число функциональных символов в формуле φ. Пусть φ реализует функцию, не принадлежащую множеству $\{0, 1\}$. Обозначим $\mathcal{S}_\varphi$ множество всевозможных схем из функциональных элементов (в произвольных базисах), реализующих ту же функцию, что и формула φ. Положим $H(\varphi) = \min\{h(S)\colon S \in \mathcal{S}_\varphi\}$. Если φ реализует функцию, принадлежащую множеству $\{0, 1\}$, то положим $H(\varphi) = 0$. Мы изучим поведение функции H_B, которая для формул φ из $\Phi(B)$ характеризует зависимость величины $H(\varphi)$ от величины $L(\varphi)$ в худшем случае и определяется следующим образом:

$$H_B(n) = \max\{H(\varphi)\colon \varphi \in \Phi(B), L(\varphi) \leqslant n\}$$

для любого натурального n. Далее будет показано (см. лемму 2.4), что значение $H_B(n)$ определено для любого натурального n.

Теорема 2.2. *Для произвольного базиса B справедливы следующие утверждения*:

а) *если базис B является примитивным, то $H_B(n) = O(n)$*;

б) *если базис B не является примитивным, то существует такая константа $c > 0$, что $\log_2 H_B(n) = \Omega(n^c)$*.

2.2. Вспомогательные утверждения. Приведем три утверждения, которые используются в этом и последующих параграфах.

Лемма 2.1. *Пусть B — базис, S — схема в базисе B с n входами и $m > 0$ входами элементов, $\bar{w}_0, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_r$ — такие наборы из E_3^m, что $f_{S(\bar{w}_0)} \neq f_{S(\bar{w}_i)}$ для $i = 1, \ldots, r$, и p — минимальная мощность множества наборов из E_2^n, на котором функция $f_{S(\bar{w}_0)}$ отлична от всех функций $f_{S(\bar{w}_1)}, \ldots, f_{S(\bar{w}_r)}$. Тогда $h(S) \geqslant p$.*

Доказательство. Пусть Γ — условный тест, который решает задачу $z(S)$ и для которого $h(\Gamma) = h(S)$. Рассмотрим полный путь ξ в Γ, который соответствует схеме $S(\bar{w}_0)$. Ясно, что на множестве наборов, приписанных рабочим вершинам пути ξ, функция $f_{S(\bar{w}_0)}$ отлична от всех функций $f_{S(\bar{w}_1)}, \ldots, f_{S(\bar{w}_r)}$. Поэтому длина пути ξ не меньше p. Следовательно, $h(\Gamma) \geqslant p$ и $h(S) \geqslant p$. Лемма доказана.

Следующее утверждение является простым следствием одного из результатов работы [16].

Лемма 2.2. *Пусть B_1 и B_2 — такие базисы, что $[B_1] \subseteq [B_2]$. Тогда существуют константы $c_1, c_2 \geqslant 1$, обладающие следующим свойством: для любой формулы φ_1 над B_1 существует формула φ_2 над B_2, которая реализует функцию, равную функции, реализуемой формулой φ_1, и для которой $L(\varphi_2) \leqslant c_1(L(\varphi_1))^{c_2}$.*

Доказательство. Пусть φ — формула над некоторым базисом. Обозначим $\Lambda(\varphi)$ число символов переменных и констант в формуле φ. В работе [16] доказано, что существуют такие константы $d_1, d_2 \geqslant 1$, что для любой формулы φ_1 над B_1 существует формула φ_2 над B_2, которая реализует функцию, равную функции, реализуемой формулой φ_1, и для которой $\Lambda(\varphi_2) \leqslant d_1(\Lambda(\varphi_1))^{d_2}$.

Пусть φ_1 — формула над B_1. Обозначим φ_2 формулу над B_2, удовлетворяющую следующим условиям:

(а) φ_2 реализует функцию, которая равна функции, реализуемой формулой φ_1;

(б) $\Lambda(\varphi_2) \leqslant d_1(\Lambda(\varphi_1))^{d_2}$;

(в) φ_2 имеет минимальное число функциональных символов среди всех формул над B_2, удовлетворяющих условиям (а) и (б).

Формулу φ_2 можно естественным образом представить в виде конечного ориентированного дерева с корнем D, вершинам которого приписаны символы переменных и функций. Обозначим Λ_0 число вершин в D, которым приписаны символы переменных или констант. Пусть Λ_1 — число вершин в D, которым приписаны символы одноместных функций. Обозначим Λ_2 число вершин в D, которым приписаны символы функций, зависящих от двух или более переменных. Ясно, что число концевых вершин в дереве D равно Λ_0. Нетрудно показать, что $\Lambda_0 + \Lambda_2 \leqslant 2\Lambda_0$ (см., например, [8, лемма 2.4.4]) и, следовательно, $\Lambda_2 \leqslant \Lambda_0$. Поскольку формула φ_2 удовлетворяет условию (в), то в дереве D не существует трех подряд стоящих вершин, которые соединены дугами и которым приписаны символы одноместных функций. Используя этот факт, нетрудно показать, что $\Lambda_1 \leqslant 2(\Lambda_0 + \Lambda_2) \leqslant 4\Lambda_0$. Ясно, что $\Lambda(\varphi_2) = \Lambda_0$ и $L(\varphi_2) \leqslant \Lambda_0 + \Lambda_1 + \Lambda_2$. Поэтому $L(\varphi_2) \leqslant 6\Lambda_0 = 6\Lambda(\varphi_2)$. Обозначим p максимальное число переменных у функции из B_1. Ясно, что $\Lambda(\varphi_1) \leqslant (p+1)L(\varphi_1)$. Учитывая, что φ_2 удовлетворяет условию (б), получаем, что $L(\varphi_2) \leqslant 6\Lambda(\varphi_2) \leqslant 6d_1(\Lambda(\varphi_1))^{d_2} \leqslant 6d_1((p+1)L(\varphi_1))^{d_2} = 6d_1(p+1)^{d_2}(L(\varphi_1))^{d_2}$. Положим $c_1 = 6d_1(p+1)^{d_2}$ и $c_2 = d_2$. Тогда $L(\varphi_2) \leqslant c_1(L(\varphi_1))^{c_2}$. Поскольку φ_1 — произвольная формула над B_1, утверждение леммы выполняется. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть B — базис, не являющийся примитивным. Тогда в множестве $[B]$ существуют такие функции $\psi_1(x, y, z)$ и $\psi_2(x, y, z)$, что $\psi_1(x, y, 1) = x \vee y$ и $\psi_2(x, y, 0) = x \wedge y$.*

Доказательство. Из результатов работы [24] следует, что выполняется по крайней мере одно из включений $F_2^\infty \subseteq [B]$, $D_2 \subseteq [B]$, $F_6^\infty \subseteq [B]$, где $F_2^\infty = [\{x \vee (y \wedge z)\}]$, $D_2 = [\{(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)\}]$, $F_6^\infty = [\{x \wedge (y \vee z)\}]$. Если $F_2^\infty \subseteq [B]$, то в качестве функций ψ_1 и ψ_2 можно взять функции $x \vee (y \wedge z)$ и $z \vee (x \wedge y)$. Если $D_2 \subseteq [B]$, то в качестве функций ψ_1 и ψ_2 можно взять одну и ту же функцию $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$. Если $F_6^\infty \subseteq [B]$, то в качестве функций ψ_1 и ψ_2 можно взять функции $z \wedge (x \vee y)$ и $x \wedge (y \vee z)$. Лемма доказана.

2.3. Доказательства теорем 2.1 и 2.2. Следующее утверждение характеризует соотношение функций h_B и H_B.

Лемма 2.4. *Пусть B — базис. Тогда для любого натурального n значения $h_B(n)$ и $H_B(n)$ определены, и выполняется неравенство $H_B(n) \leqslant h_B(n)$.*

Доказательство. Ясно, что $\{S\colon S \in \mathscr{S}(B), L(S) \leqslant n\}$ — непустое множество. Обозначим p максимальное число переменных у функции из B. Пусть S — схема в базисе B, такая, что $L(S) \leqslant n$. Предположим, что S — невырожденная схема. Ясно, что число входов схемы S, которые соединены дугами с функциональными элементами, не превосходит pn. Используя этот факт, нетрудно показать, что $h(S) \leqslant 2^{pn}$. Если S — вырожденная схема, то $h(S) = 0$, т. е. $h(S) < 2^{pn}$. Учитывая, что S — произвольная схема в базисе B с $L(S) \leqslant n$, получаем, что значение $h_B(n)$ определено.

Ясно, что $\{\varphi\colon\ \varphi \in \Phi(B), L(\varphi) \leqslant n\}$ — непустое множество. Пусть $\varphi \in \Phi(B)$ и $L(\varphi) \leqslant n$. Если формула φ реализует функцию, принадлежащую множеству $\{0, 1\}$, то $H(\varphi) = 0 \leqslant h_B(n)$. Пусть φ реализует функцию, не принадлежащую множеству $\{0, 1\}$. По формуле φ нетрудно построить схему S в базисе B, которая реализует ту же функцию, что и формула φ, и для которой $L(S) = L(\varphi) \leqslant n$. Ясно, что $H(\varphi) \leqslant h(S) \leqslant h_B(n)$. Поскольку φ — произвольная формула над B, для которой $L(\varphi) \leqslant n$, получаем, что значение $H_B(n)$ определено и выполняется неравенство $H_B(n) \leqslant h_B(n)$. Лемма доказана.

Изучим поведение функции h_B для произвольного примитивного базиса B.

Лемма 2.5. *Пусть B — примитивный базис. Тогда $h_B(n) = O(n)$.*

Доказательство. Так как B — примитивный базис, то $[B] \subseteq S_6$, или $[B] \subseteq P_6$, или $[B] \subseteq L_1$, где $S_6 = [\{x \vee y, 0, 1\}]$, $P_6 = [\{x \wedge y, 0, 1\}]$ и $L_1 = [\{x + y \pmod 2), 1\}]$.

Рассмотрим случай $[B] \subseteq L_1$. Пусть n — натуральное число и S — схема из $\mathscr{S}(B)$ с $L(S) \leqslant n$. Предположим, что S — невырожденная схема. Пусть в схеме S имеется ровно r входов, которым приписаны переменные $x_1, \ldots, x_r$. Обозначим m число входов элементов в схеме S. Пусть ровно t входов схемы S соединены дугами с функциональными элементами, и пусть этим входам приписаны переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$. (Возможно, что $t = 0$.) Нетрудно показать, что любая схема S' из $\mathscr{S}(S, E_3^m)$ реализует функцию, которую можно задать формулой вида $(d_1 \wedge x_1) + \ldots + (d_r \wedge x_r) + d_0 \pmod 2$, где $d_j \in E_2$, $0 \leqslant j \leqslant r$. Ясно, что $d_j = 0$ для любого $j \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{i_1, \ldots, i_t\}$.

Опишем функционирование условного теста, решающего задачу $z(S)$ — задачу диагностики схемы S относительно неисправностей из множества E_3^m. Пусть $S' \in \mathscr{S}(S, E_3^m)$. Подадим на входы схемы S' набор, состоящий из нулей. На выходе схемы S' получим значение d_0. Для каждого $j \in \{1, \ldots, t\}$ подадим на входы схемы S' некоторый набор. Пусть $j \in \{1, \ldots, t\}$. Подадим единицу на вход схемы S', которому приписана переменная x_{i_j}, а на остальные входы схемы подадим нули. На выходе схемы получим значение $d_{i_j} + d_0 \pmod 2$. Таким образом, после подачи на входы схемы S' рассмотренных $t+1$ наборов мы по значениям выхода можем определить коэффициенты $d_1, \ldots, d_r, d_0$ у формулы $(d_1 \wedge x_1) + \ldots + (d_r \wedge x_r) + d_0 \pmod 2$, реализующей ту же функцию, что и схема S'. Таким образом, рассматриваемый условный тест решает задачу $z(S)$, и глубина этого условного теста не превосходит $t+1$. Следовательно, $h(S) \leqslant t+1$. Обозначим p максимальное число переменных у функции из B. Ясно, что $t \leqslant pn$. Положим $c_1 = p+1$. Тогда $h(S) \leqslant c_1 n$. Если S — вырожденная схема, то $h(S) = 0 < c_1 n$. Учитывая, что S — произвольная схема в базисе B, для которой $L(S) \leqslant n$, получаем, что $h_B(n) \leqslant c_1 n$. Поэтому $h_B(n) = O(n)$.

Случаи $[B] \subseteq S_6$ и $[B] \subseteq P_6$ рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Исследуем поведение функций h_B и H_B для произвольного базиса B, не являющегося примитивным.

Лемма 2.6. *Пусть B — базис, не являющийся примитивным. Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) $\log_2 h_B(n) = \Omega(n^{1/2})$;

б) *существует такая константа $c > 0$, что* $\log_2 H_B(n) = \Omega(n^c)$.

Доказательство. Используя лемму 2.3, получаем, что существуют функции $\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z) \in [B]$ такие, что $\psi_1(x, y, 1) = x \vee y$ и $\psi_2(x, y, 0) = x \wedge y$. Обозначим $B_1 = \{\psi_1, \psi_2\}$. Пусть r — натуральное число. Нетрудно показать, что существует формула φ_r над B_1, которая обладает следующими свойствами: φ_r реализует функцию $g_r = g_r(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots$

$\ldots, y_r, z_1, \ldots, z_r, t_1, \ldots, t_r, u_0, u_1)$, такую, что

$$g_r(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_r, t_1, \ldots, t_r, 0, 1) =$$
$$= \bigvee_{j=1}^{r} ((x_1 \vee y_1) \wedge \ldots \wedge (x_{j-1} \vee y_{j-1}) \wedge (x_j \wedge y_j) \wedge (x_{j+1} \vee y_{j+1}) \wedge \ldots \wedge (x_r \vee y_r)) \vee$$
$$\vee \bigwedge_{i=1}^{r} ((x_i \wedge z_i) \vee (y_i \wedge t_i))$$

и выполняется неравенство $L(\varphi_r) \leqslant 6r^2$.

Пусть S — схема из функциональных элементов в произвольном базисе, реализующая функцию, равную функции g_r. Покажем, что $h(S) \geqslant 2^r$. Пусть в схеме S имеется ровно m входов. Нетрудно показать, что переменные $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_r, t_1, \ldots, t_r$ являются существенными переменными функции g_r. Поэтому в схеме S имеются входы, которым приписаны эти переменные. Если переменная u_i, $i \in \{0, 1\}$, является существенной переменной функции g_r, то в S имеется вход, которому приписана эта переменная. Таким образом, схема S реализует функцию $f_S(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_r, t_1, \ldots, t_r, \ldots)$, зависящую от $m \geqslant 4r$ переменных и равную функции g_r. Пусть $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{2r}) \in E_2^{2r}$. Определим набор константных неисправностей $w(\bar{\sigma})$ на входах элементов схемы S. Для $i = 1, \ldots, r$ на всех входах элементов, присоединенных к входу z_i схемы S, реализуется константа σ_i. Для $i = 1, \ldots, r$ на всех входах элементов, присоединенных к входу t_i схемы S, реализуется константа σ_{r+i}. Для $i = 0, 1$ на всех входах элементов, присоединенных к входу u_i схемы S (если такой вход имеется), реализуется константа i. Остальные входы элементов схемы S исправны. Обозначим $f_{\bar{\sigma}}$ функцию, реализуемую схемой $S(w(\bar{\sigma}))$. Ясно, что функция $f_{\bar{\sigma}}$ получается из функции f_S подстановкой констант $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2r}$ вместо переменных $z_1, \ldots, z_r, t_1, \ldots, t_r$ и константы i вместо переменной u_i (если в схеме S есть вход u_i), $i = 0, 1$. Обозначим Σ множество всевозможных наборов $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{2r}) \in E_2^{2r}$, таких, что $\sigma_i + \sigma_{r+i} = 1$ для $i = 1, \ldots, r$. Обозначим $\bar{0}$ набор $(0, \ldots, 0)$ из E_2^{2r}. Пусть $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{2r}) \in \Sigma$. Нетрудно показать, что функции $f_{\bar{0}}$ и $f_{\bar{\sigma}}$ различаются на тех и только тех наборах $(\delta_1, \ldots, \delta_m) \in E_2^m$, у которых $\delta_1 = \sigma_1, \ldots, \delta_{2r} = \sigma_{2r}$. Ясно, что $|\Sigma| = 2^r$. Поэтому минимальная мощность множества наборов из E_2^m, на котором функция $f_{\bar{0}}$ отлична от всех функций $f_{\bar{\sigma}}$, $\bar{\sigma} \in \Sigma$, равна 2^r. Используя лемму 2.1, получаем, что $h(S) \geqslant 2^r$.

а) Используя включение $B_1 \subset [B]$, нетрудно показать, что существует константа $d_1 \geqslant 1$, обладающая следующим свойством: для любого натурального r существует схема S_r в базисе B, которая реализует функцию g_r и для которой $L(S_r) \leqslant d_1 r^2$. Положим $c_1 = 4d_1$. Пусть $n \geqslant c_1$. Обозначим $r = \lfloor (n/d_1)^{1/2} \rfloor$. Нетрудно показать, что $L(S_r) \leqslant d_1 r^2 \leqslant n$ и $h(S_r) \geqslant 2^r = 2^{\lfloor (n/d_1)^{1/2} \rfloor} \geqslant 2^{n^{1/2}/c_1}$. Следовательно, $h_B(n) \geqslant 2^{n^{1/2}/c_1}$ и $\log_2 h_B(n) = \Omega(n^{1/2})$.

б) Ясно, что $[B_1] \subseteq [B]$. Используя лемму 2.2, получаем, что существуют константы $d_2, d_3 \geqslant 1$, обладающие следующим свойством: для любого $r \geqslant 1$ существует формула π_r над B, которая реализует функцию, равную функции g_r, и для которой $L(\pi_r) \leqslant d_2 r^{d_3}$. Положим $c_2 = 2^{d_3} d_2$ и $c = 1/d_3$. Пусть $n \geqslant c_2$. Обозначим $r = \lfloor (n/d_2)^{1/d_3} \rfloor$. Нетрудно показать, что $L(\pi_r) \leqslant d_2 r^{d_3} \leqslant n$ и $H(\pi_r) \geqslant 2^r = 2^{\lfloor (n/d_2)^{1/d_3} \rfloor} \geqslant 2^{n^c/c_2}$. Следовательно, $H_B(n) \geqslant 2^{n^c/c_2}$ и $\log_2 H_B(n) = \Omega(n^c)$. Лемма доказана.

Утверждение теоремы 2.1 следует из лемм 2.5 и 2.6.

Утверждение теоремы 2.2 следует из лемм 2.4, 2.5 и 2.6.

§ 3. Сложность построения алгоритмов диагностики

В этом параграфе изучается сложность алгоритмов решения следующей проблемы: по произвольной невырожденной схеме S в базисе B и произвольному множеству W наборов константных неисправностей на входах элементов S требуется построить условный тест, решающий задачу диагностики S относительно неисправностей из W. При этом предполагается, что концевым вершинам условного теста приписаны наборы из множества W, т. е. решением задачи диагностики для произвольной схемы $S' \in \mathscr{S}(S, W)$ является некоторый набор $\tilde{w} \in W$, такой, что $f_{S'} = f_{S(\tilde{w})}$.

3.1. Сложность построения условных тестов для диагностики неисправностей. Базис B будем называть *вырожденным*, если $B \subseteq \{0, 1\}$, и *невырожденным* в противном случае. Пусть B — невырожденный базис. Определим алгоритмическую проблему $\mathrm{Con}(B)$.

Проблема $\mathrm{Con}(B)$: по невырожденной схеме из функциональных элементов S в базисе B и множеству W наборов константных неисправностей на входах элементов S требуется построить условный тест Г, решающий задачу $z(S, W)$.

Используя лемму 2.4.4 из [8], нетрудно показать, что существует условный тест, который решает задачу $z(S, W)$ и имеет не более $2|W|$ вершин.

Теорема 3.1. *Пусть B — невырожденный базис. Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) *если B — примитивный базис, то существует алгоритм решения проблемы* $\mathrm{Con}(B)$, *имеющий полиномиальную временную сложность*;

б) *если базис B не является примитивным, то проблема* $\mathrm{Con}(B)$ *является NP-трудной.*

3.2. Доказательство теоремы 3.1. Изучим сложность решения проблемы $\mathrm{Con}(B)$ для произвольного невырожденного примитивного базиса B.

Лемма 3.1. *Пусть B — невырожденный примитивный базис. Тогда существует алгоритм решения проблемы* $\mathrm{Con}(B)$, *имеющий полиномиальную временную сложность.*

Доказательство. Так как B — примитивный базис, то $[B] \subseteq S_6$, или $[B] \subseteq P_6$, или $[B] \subseteq L_1$.

Рассмотрим случай $[B] \subseteq S_6$. Пусть S — схема в базисе B с n входами, которым приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$, и W — некоторое множество наборов константных неисправностей на входах элементов схемы S. Нетрудно показать, что любая схема $S' \in \mathscr{S}(S, W)$ реализует функцию, которую можно задать формулой вида

$$(c_1 \wedge x_1) \vee \ldots \vee (c_n \wedge x_n) \vee c_0, \tag{3.1}$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_2$. Обозначим $\bar{\delta}_0$ набор из E_2^n, заполненный нулями, и для $i = 1, \ldots, n$ обозначим $\bar{\delta}_i$ набор из E_2^n, в котором имеется ровно одна единица, стоящая в i-м разряде. Нетрудно заметить, что значений функции $f_{S'}$ на наборах $\bar{\delta}_0, \bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_n$ достаточно для определения коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_n$ в формуле (3.1), реализующей функцию $f_{S'}$. Действительно, $f_{S'}(\bar{\delta}_0) = c_0$. Если $c_0 = 1$, то $f_{S'} \equiv 1$ и можно положить $c_1 = \ldots = c_n = 1$. Если $c_0 = 0$, то $f_{S'}(\bar{\delta}_i) = c_i$ для $i = 1, \ldots, n$.

Покажем, что существует алгоритм решения проблемы $\mathrm{Con}(B)$, имеющий полиномиальную временную сложность. Опишем функционирование этого алгоритма для схемы S и множества наборов неисправностей W. Моделируя работу схемы $S(\tilde{w})$ на наборе $\bar{\delta}_i$ для каждого $\tilde{w} \in W$ и $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, мы за полиномиальное время построим таблицу T с $n+1$ столбцами и $|W|$ строками, удовлетворяющую следующим условиям:

а) столбцам таблицы приписаны наборы $\bar{\delta}_0, \bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_n$ соответственно;

б) строкам таблицы приписаны попарно различные наборы из множества W;

в) на пересечении строки, помеченной набором $\bar{w}$, и столбца, помеченного набором $\bar{\delta}_i$, стоит число $f_{s(\bar{w})}(\bar{\delta}_i)$.

Две строки таблицы T будем называть *однотипными*, если они различаются только приписанными им наборами из W. В противном случае строки будем называть *неоднотипными*.

Построение условного теста начинается с дерева, состоящего из одной вершины v, которой приписана таблица T. Если все строки таблицы T являются однотипными, то вместо таблицы T припишем вершине v набор из W, сопоставленный одной из строк таблицы T. Работа алгоритма закончена. Пусть в таблице T имеются неоднотипные строки. Выберем некоторый столбец таблицы T, в котором имеются как нули, так и единицы. Вместо таблицы T припишем вершине v набор из E_2^n, сопоставленный этому столбцу. Добавим к дереву вершины v_0, v_1 и дуги d_0, d_1. Для $i = 0, 1$ дуга d_i выходит из вершины v и входит в вершину v_i. Дуге d_i приписано число i, а вершине v_i приписана подтаблица T_i таблицы T, состоящая из тех и только тех строк T, которые на пересечении с выбранным столбцом имеют число i. Далее алгоритм работает поочередно с вершинами v_0 и v_1 так же, как и с вершиной v, и т. д. Работа алгоритма закончится, когда всем концевым вершинам строящегося дерева будут приписаны наборы из W.

Нетрудно показать, что построенный условный тест решает задачу $z(S, W)$ и содержит не более $2|W|$ вершин. Нетрудно заметить, что рассматриваемый алгоритм имеет полиномиальную временную сложность.

Случаи $[B] \subseteq P_6$ и $[B] \subseteq L_1$ рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Изучим сложность решения проблемы $\mathrm{Con}(B)$ для произвольного невырожденного базиса B, не являющегося примитивным.

Л е м м а 3.2. *Пусть B — невырожденный базис, не являющийся примитивным. Тогда проблема* $\mathrm{Con}(B)$ *является NP-трудной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя лемму 2.3, нетрудно показать, что существуют схемы S_1 и S_2 в базисе B, которые реализуют функции $\psi_1(x, y, z)$ и $\psi_2(x, y, z)$ такие, что $\psi_1(x, y, 1) = x \vee y$ и $\psi_2(x, y, 0) = x \wedge y$.

Покажем, что к проблеме $\mathrm{Con}(B)$ полиномиально сводится NP-полная задача «вершинное покрытие» [2]. *Неориентированным графом без петель и кратных ребер* называется пара $G = (V, R)$, где V — непустое конечное множество и R — некоторое множество двухэлементных подмножеств множества V. Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы множества R — *ребрами* графа G. Пусть $W \subseteq V$. Множество W называется *вершинным покрытием графа* G, если оно удовлетворяет следующим условиям:

а) если $W = \varnothing$, то $R = \varnothing$;

б) если $R \neq \varnothing$, то для любого ребра $\{v_i, v_j\} \in R$ справедливо соотношение $v_i \in W$ или соотношение $v_j \in W$.

Обозначим $cv(G)$ мощность минимального (по мощности) вершинного покрытия графа G. В задаче «вершинное покрытие» по неориентированному графу без петель и кратных ребер G и целому неотрицательному числу m требуется установить, выполняется ли неравенство $cv(G) \leqslant m$. Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и $R = \{\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \ldots, \{v_{i_t}, v_{j_t}\}\}$. Если $m \geqslant n$, то неравенство $cv(G) \leqslant m$ выполняется. Если $m = 0$, то неравенство $cv(G) \leqslant m$ выполняется тогда и только тогда, когда $R = \varnothing$. Предположим, что $0 < m < n$. Рассмотрим булеву функцию $\psi_G(x_1, \ldots, x_n) = (x_{i_1} \vee x_{j_1}) \wedge \ldots \wedge (x_{i_t} \vee x_{j_t})$. Ясно, что неравенство $cv(G) \leqslant m$ выполняется тогда и только тогда, когда функция ψ_G принимает значение 1 на некотором наборе из E_2^n, содержащем не более m единиц. Определим функцию ψ_n^{m+1}: $E_2^n \to E_2$ следующим образом: $\psi_n^{m+1}(x_1, \ldots, x_n) = 1$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant m+1$.

Используя схемы S_1 и S_2, нетрудно за полиномиальное время построить схему S в базисе B с n входами и два набора $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ константных неисправностей на входах элементов схемы S такие, что схема $S(\bar{w}_1)$ реализует функцию $\psi_n^{m+1}(x_1, \ldots, x_n)$, а схема $S(\bar{w}_2)$ реализует функцию $\psi_G(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi_n^{m+1}(x_1, \ldots, x_n)$. Ясно, что $f_{S(\bar{w}_1)} \neq f_{S(\bar{w}_2)}$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство $cv(G) \leqslant m$. Обозначим $W = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, (2, \ldots, 2)\}$. Применим алгоритм решения проблемы $\mathrm{Con}(B)$, имеющий полиномиальную временную сложность, к схеме S и множеству W. В результате получим условный тест Γ, решающий задачу $z(S, W)$. Построим схемы $S(\bar{w}_1)$ и $S(\bar{w}_2)$ и применим к ним условный тест Γ. Результат работы условного теста Γ на схемах $S(\bar{w}_1)$ и $S(\bar{w}_2)$ будет различен в том и только в том случае, когда неравенство $cv(G) \leqslant m$ выполняется. Отметим, что построение схем $S(\bar{w}_1)$ и $S(\bar{w}_2)$ и применение к ним условного теста Γ требуют полиномиальных временных затрат.

Таким образом, существует полиномиальное сведение задачи «вершинное покрытие» к проблеме $\mathrm{Con}(B)$. Следовательно, проблема $\mathrm{Con}(B)$ является NP-трудной. Лемма доказана.

Утверждение теоремы 3.1 следует из лемм 3.1 и 3.2.

§ 4. Диагностика неисправностей бесповторных схем

Результаты, приведенные в § 2 (теорема 2.1), показывают, что только примитивные базисы B являются приемлемыми с точки зрения решения задачи диагностики произвольных наборов константных неисправностей на входах элементов произвольных схем в базисе B. Расширить множество таких базисов можно за счет существенного сужения класса рассматриваемых схем. В этом параграфе изучается сложность условных тестов для диагностики константных неисправностей бесповторных схем.

4.1. Оценки сложности алгоритмов диагностики неисправностей бесповторных схем. Пусть B — базис. Схема из функциональных элементов S в базисе B называется *бесповторной*, если из любой вершины схемы S выходит не более одной дуги. Обозначим $\mathcal{S}^1(B)$ множество всевозможных бесповторных схем в базисе B. В этом параграфе изучается поведение функции h_B^1, которая для схем S из $\mathcal{S}^1(B)$ характеризует зависимость величины $h(S)$ от величины $L(S)$ в худшем случае и определяется следующим образом:

$$h_B^1(n) = \max\{h(S)\colon S \in \mathcal{S}^1(B), L(S) \leqslant n\}$$

для любого натурального числа n. Ясно, что значение $h_B^1(n)$ определено для любого натурального n.

Булеву функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *квазимонотонной*, если существует монотонная булева функция $q(x_1, \ldots, x_n)$ и числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in E_2$ такие, что $g(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$. Напомним, что $x^\sigma = x$, если $\sigma = 1$, и $x^\sigma = \neg x$, если $\sigma = 0$. По определению, константы 0 и 1 являются квазимонотонными функциями.

Базис B будем называть *квазипримитивным*, если он состоит только из линейных функций или только из квазимонотонных функций.

Класс квазипримитивных базисов весьма обширен: в следующем параграфе мы покажем, что для любого базиса B_1 существует квазипримитивный базис B_2, такой, что $[B_1]=[B_2]$.

Теорема 4.1. *Пусть B — базис. Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) *если базис B является квазипримитивным, то $h_B^1(n)=O(n)$*;

б) *если базис B не является квазипримитивным, то $\log_2 h_B^1(n)= =\Omega(n)$*.

4.2. Квазипримитивные базисы. В этом разделе изучается поведение функции h_B^1 для произвольного квазипримитивного базиса B. Следующее утверждение характеризует схемы в базисе, состоящем из квазимонотонных функций.

Лемма 4.1. *Пусть B — невырожденный базис, состоящий из квазимонотонных функций, и S — бесповторная схема в базисе B с n входами и $m>0$ входами элементов. Тогда существуют такие наборы $\bar{\sigma}_0$ и $\bar{\sigma}_1$ из E_2^n, что для любой схемы $S'\in\mathscr{S}(S,E_3^m)$, если $f_{S'}\not\equiv\mathrm{const}$, то $f_{S'}(\bar{\sigma}_0)=0$ и $f_{S'}(\bar{\sigma}_1)=1$.*

Доказательство. Утверждение леммы докажем индукцией по параметру $t=L(S)$. Рассмотрим произвольную невырожденную схему $S\in\mathscr{S}^1(B)$, для которой $L(S)=1$. Пусть схема S имеет n входов, которым приписаны переменные $x_1,\ldots,x_n$, и пусть единственному функциональному элементу v схемы S приписана функция g, зависящая от m переменных. Предположим, для определенности, что входы элемента v соединены с входами схемы S, которым приписаны переменные $x_1,\ldots,x_m$. Так как g — квазимонотонная функция, то существует монотонная функция q, зависящая от m переменных, и числа $\delta_1,\ldots,\delta_m\in E_2$ такие, что $g(x_1,\ldots,x_m)=q(x_1^{\delta_1},\ldots,x_m^{\delta_m})$. Определим два набора $\bar{\sigma}_0$ и $\bar{\sigma}_1$ из E_2^n следующим образом: $\bar{\sigma}_0=(\neg\delta_1,\ldots,\neg\delta_m,0,\ldots,0)$ и $\bar{\sigma}_1=(\delta_1,\ldots,\delta_m,0,\ldots,0)$. Пусть $S'\in\mathscr{S}(S,E_3^m)$. Ясно, что функцию, равную функции $f_{S'}$, можно получить из функции $g(x_1,\ldots,x_m)$ подстановкой констант из E_2 вместо некоторых переменных. Учитывая, что q — монотонная функция, нетрудно показать, что либо $f_{S'}\equiv\mathrm{const}$, либо $f_{S'}(\bar{\sigma}_0)=0$ и $f_{S'}(\bar{\sigma}_1)=1$. Таким образом, при $t=1$ утверждение леммы выполняется.

Предположим, что утверждение леммы справедливо для некоторого $t\geqslant 1$. Покажем, что оно выполняется и для $t+1$. Пусть $S\in\mathscr{S}^1(B)$, $L(S)=t+1$, в схеме S имеется $m>0$ входов элементов, и выход схемы S соединен дугой с элементом v, которому приписана функция g. Если $g\in\{0,1\}$, то $f_{S'}\equiv\mathrm{const}$ для любой схемы $S'\in\mathscr{S}(S,E_3^m)$ и, следовательно, утверждение леммы выполняется для схемы S. Пусть $g\notin\{0,1\}$ и в элемент v входят дуги $d_1,\ldots,d_r$, выходящие из вершин $v_1,\ldots,v_r$ соответственно. Для $i=1,\ldots,r$ пусть S_i — подсхема схемы S, состоящая из тех вершин и дуг схемы S, через каждую из которых проходит некоторый ориентированный путь, заканчивающийся в вершине v_i. Пусть $i\in\{1,\ldots,r\}$. Если подсхема S_i не содержит входов схемы S, то для любой схемы $S'\in\mathscr{S}(S,E_3^m)$ на i-м входе элемента v реализуется некоторая константа. Если в подсхеме S_i нет функциональных элементов, то она состоит из одного входа схемы S. Пусть подсхема S_i содержит хотя бы один вход схемы S и хотя бы один функциональный элемент. Добавим к подсхеме S_i вершину u и дугу d, выходящую из вершины v_i и входящую в вершину u. Обозначим полученный граф G_i. Ясно, что G_i — невырожденная схема из $\mathscr{S}^1(B)$ и $L(G_i)\leqslant t$. По предположению индукции для схемы G_i существуют наборы $\bar{\sigma}_0^i$ и $\bar{\sigma}_1^i$, удовлетворяющие условию леммы. Так как g — квазимонотонная функция, то существуют монотонная функция $q(x_1,\ldots,x_r)$ и числа $\delta_1,\ldots,\delta_r\in E_2$ такие, что $g(x_1,\ldots,x_r)=q(x_1^{\delta_1},\ldots,x_r^{\delta_r})$. Определим набор $\bar{\sigma}_0$

значений входов схемы S. Пусть $i \in \{1, \ldots, r\}$. Если подсхема S_i состоит из одного входа схемы S, то подадим на этот вход число $\neg\delta_i$. Пусть подсхема S_i содержит хотя бы один вход схемы S и хотя бы один функциональный элемент. Тогда на входы схемы S, принадлежащие подсхеме S_i, подаем набор $\bar{\sigma}_0^i$, если $\delta_i = 1$, и набор $\bar{\sigma}_1^i$, если $\delta_i = 0$. На входы схемы S, не принадлежащие ни одной из подсхем S_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$, подаем нули. Определим набор $\bar{\sigma}_1$ значений входов схемы S. Пусть $i \in \{1, \ldots, r\}$. Если подсхема S_i состоит из одного входа схемы S, то подадим на этот вход число δ_i. Пусть подсхема S_i содержит хотя бы один вход схемы S и хотя бы один функциональный элемент. Тогда на входы схемы S, принадлежащие подсхеме S_i, подаем набор $\bar{\sigma}_0^i$, если $\delta_i = 0$, и набор $\bar{\sigma}_1^i$, если $\delta_i = 1$. На входы схемы S, не принадлежащие ни одной из подсхем S_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$, подаем нули. Пусть $S' \in \mathscr{S}(S, E_3^m)$ и пусть, для определенности, для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ на i-м входе элемента v реализуется функция, равная константе γ_i, и для каждого $i \in \{p+1, \ldots, r\}$ на i-м входе элемента v реализуется функция, не равная константе. Тогда $f_{S'}(\bar{\sigma}_0) = q(\gamma_1^{\delta_1}, \ldots, \gamma_p^{\delta_p}, 0, \ldots, 0)$ и $f_{S'}(\bar{\sigma}_1) = q(\gamma_1^{\delta_1}, \ldots, \gamma_p^{\delta_p}, 1, \ldots, 1)$. Поскольку q — монотонная функция, то либо $f_{S'} \equiv \mathrm{const}$, либо $f_{S'}(\bar{\sigma}_0) = 0$ и $f_{S'}(\bar{\sigma}_1) = 1$. Таким образом, утверждение леммы справедливо и для $t+1$. Лемма доказана.

Исследуем поведение функции h_B^1 для произвольного квазипримитивного базиса B.

Лемма 4.2. *Пусть B — квазипримитивный базис. Тогда $h_B^1(n) = O(n)$.*

Доказательство. Пусть все функции из B являются линейными функциями. Тогда базис B является примитивным базисом. Используя теорему 2.1, получаем, что $h_B(n) = O(n)$. Ясно, что для любого натурального n справедливо неравенство $h_B^1(n) \leqslant h_B(n)$. Следовательно, $h_B^1(n) = O(n)$.

Пусть все функции из B являются квазимонотонными функциями. Если B — вырожденный базис, то все функции из B являются линейными функциями, и для базиса B утверждение леммы выполняется. Предположим теперь, что базис B не является вырожденным. Пусть g — функция из B, зависящая от $r > 0$ переменных, и S_g — бесповторная схема в базисе B с r входами, которым приписаны переменные $x_1, \ldots, x_r$, и одним функциональным элементом, которому приписана функция g. Для $i = 1, \ldots, r$ пусть i-й вход элемента присоединен к входу схемы, которому приписана переменная x_i. Нетрудно показать, что существует условный тест Γ_g, который решает задачу $z(S_g)$ и результатом работы которого для любой схемы $S' \in \mathscr{S}(S_g, E_3^r)$ являются:

а) формула φ, реализующая функцию, равную $f_{S'}$, и имеющая вид $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, где $\alpha_i = x_i$, если x_i — существенная переменная функции $f_{S'}$, и α_i — некоторая константа из E_2, если x_i не является существенной переменной функции $f_{S'}$;

б) для каждой существенной переменной x_i функции $f_{S'}$ — набор $(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_r) \in E_2^{r-1}$, такой, что

$$f_{S'}(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 0, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_r) \neq f_{S'}(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 1, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_r).$$

Пусть $c = \max\{h(\Gamma_g)\colon g \in B \setminus \{0, 1\}\}$. Положим $c_1 = \max\{1, c\}$. Индукцией по параметру $t = L(S)$ докажем, что для любой невырожденной бесповторной схемы S в базисе B существует условный тест Γ, который решает задачу $z(S)$ и для которого $h(\Gamma) \leqslant c_1 L(S)$. При этом, если в схеме S имеется m входов элементов, то результатом работы Γ для любой схемы $S' \in \mathscr{S}(S, E_3^m)$ является формула, реализующая функцию, равную функции $f_{S'}$. Пусть $S \in \mathcal{S}^1(B)$, $L(S)=1$, единственному функциональному элементу схемы S приписана функция g, зависящая от r переменных, и i-й вход элемента соединен с входом схемы S, которому приписана переменная x_{j_i}, $i=1,\ldots,r$. Для решения задачи $z(S)$ будем использовать условный тест Γ_g, модифицированный следующим образом: наборы, генерируемые условным тестом Γ_g, подаются на входы схемы S, соединенные с функциональным элементом, а на остальные входы схемы S подаются нули. В каждой формуле, приписанной концевой вершине условного теста Γ_g, переменные $x_1,\ldots,x_r$ заменяются на переменные $x_{j_1},\ldots,x_{j_r}$ соответственно. Нетрудно показать, что модифицированный таким образом условный тест Γ_g решает задачу $z(S)$. Глубина этого условного теста не превосходит c_1. Следовательно, при $t=1$ рассматриваемое утверждение выполняется.

Предположим, что рассматриваемое утверждение справедливо для некоторого $t \geqslant 1$. Покажем, что оно выполняется и для $t+1$. Пусть $S \in \mathcal{S}^1(B)$, $L(S)=t+1$, в схеме S имеется $m>0$ входов элементов, и выход схемы S соединен дугой с элементом v, которому приписана функция g. Пусть $g \in \{0,1\}$. Тогда $f_{S'} \equiv g$ для любой схемы $S' \in \mathcal{S}(S, E_3^m)$. Обозначим Γ условный тест, состоящий из одной вершины, которой приписана формула g. Ясно, что Γ решает задачу $z(S)$ и $h(\Gamma)=0<c_1L(S)$. Поэтому для схемы S рассматриваемое утверждение выполняется. Предположим теперь, что $g \notin \{0,1\}$ и в элемент v входят дуги $d_1,\ldots,d_r$, выходящие из вершин $v_1,\ldots,v_r$ соответственно. Для $i=1,\ldots,r$ пусть S_i — подсхема схемы S, состоящая из тех вершин и дуг схемы S, через каждую из которых проходит некоторый ориентированный путь, заканчивающийся в вершине v_i. Пусть $i \in \{1,\ldots,r\}$. Если подсхема S_i не содержит входов схемы S, то для любой схемы $S' \in \mathcal{S}(S, E_3^m)$ на i-м входе элемента v реализуется некоторая константа. Если в подсхеме S_i нет функциональных элементов, то она состоит из одного входа схемы S. Пусть подсхема S_i содержит хотя бы один вход схемы S и хотя бы один функциональный элемент. Добавим к подсхеме S_i вершину u и дугу d, выходящую из вершины v_i и входящую в вершину u. Обозначим полученный граф G_i. Ясно, что G_i — невырожденная схема из $\mathcal{S}^1(B)$, для которой $L(G_i) \leqslant t$. Пусть в G_i имеется m_i входов элементов. По предположению индукции существует условный тест Γ_i, который решает задачу $z(G_i)$ и для которого $h(\Gamma_i) \leqslant c_1 L(G_i)$. Используя лемму 4.1, получаем, что существуют входные наборы $\bar{\sigma}_0^i$ и $\bar{\sigma}_1^i$ схемы G_i такие, что для любой схемы $G' \in \mathcal{S}(G_i, E_3^{m_i})$, если $f_{G'} \not\equiv \mathrm{const}$, то $f_{G'}(\bar{\sigma}_0^i)=0$ и $f_{G'}(\bar{\sigma}_1^i)=1$.

Опишем функционирование условного теста Γ, решающего задачу $z(S)$. Пусть $S' \in \mathcal{S}(S, E_3^m)$. Сначала условный тест Γ некоторым образом моделирует работу условного теста Γ_g. При этом диагностируется элемент v. Пусть условный тест Γ_g генерирует набор $(\delta_1,\ldots,\delta_r)$. Пусть $i \in \{1,\ldots,r\}$. Если подсхема S_i состоит из одного входа схемы S, то на этот вход подается число δ_i. Пусть подсхема S_i содержит хотя бы один вход схемы S и хотя бы один функциональный элемент. Тогда на входы схемы S', принадлежащие подсхеме S_i, подается набор $\bar{\sigma}_0^i$, если $\delta_i=0$, и набор $\bar{\sigma}_1^i$, если $\delta_i=1$. На входы схемы S', не принадлежащие ни одной из подсхем S_i, $i \in \{1,\ldots,r\}$, подаются нули. Пусть результат работы условного теста Γ_g — формула $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$. Пусть, для определенности, $\alpha_i=x_i$ для $i=1,\ldots,q$, и α_i — константа из E_2 для $i=q+1,\ldots,r$. Предположим, что для $i=1,\ldots,p$ подсхема S_i содержит хотя бы один вход схемы S и хотя бы один функциональный элемент, а для $i=p+1,\ldots,q$ подсхема S_i состоит из одного входа схемы S, которому приписана переменная x_{l_i}.

Далее условный тест Γ последовательно моделирует работу условных тестов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$. При этом диагностируются подсхемы $S_1, \ldots, S_p$. Пусть $i \in \{1, \ldots, p\}$. Опишем функционирование условного теста Γ при моделировании условного теста Γ_i. Пусть $(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_r)$ — набор, построенный условным тестом Γ_g для существенной переменной x_i функции $g'(x_1, \ldots, x_r) = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Для этого набора $g'(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 0, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_r) \neq g'(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 1, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_r)$. Пусть $j \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{i\}$. Если подсхема S_j состоит из одного входа схемы S, то на этот вход подается число β_j. Пусть подсхема S_j содержит хотя бы один вход схемы S и хотя бы один функциональный элемент. На входы схемы S', принадлежащие подсхеме S_j, подается набор $\tilde{\sigma}_0^j$, если $\beta_j = 0$, и набор $\tilde{\sigma}_1^j$, если $\beta_j = 1$. На входы схемы S', принадлежащие подсхеме S_i, подаются наборы, которые генерирует условный тест Γ_i. На входы схемы S', не принадлежащие ни одной из подсхем S_j, $j \in \{1, \ldots, r\}$, подаются нули. Если $g'(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 0, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_r) = 1$, то значение выхода схемы S' инвертируется перед использованием его условным тестом Γ_i. Пусть результат работы условного теста Γ_i — формула φ_i.

После того, как условный тест Γ, моделируя функционирование условных тестов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$, построит формулы $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, работа условного теста Γ заканчивается. В результате будет получена формула $g(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, x_{l_{p+1}}, \ldots, x_{l_q}, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_r)$. Можно показать, что эта формула реализует функцию, равную функции $f_{S'}$. Обозначим I множество всевозможных $i \in \{1, \ldots, r\}$, таких, что подсхема S_i содержит хотя бы один вход схемы S и хотя бы один функциональный элемент. Ясно, что $h(\Gamma) \leqslant h(\Gamma_g) + \sum_{i \in I} h(\Gamma_i) \leqslant c_1 + c_1 \sum_{i \in I} L(G_i) \leqslant c_1 L(S)$. Таким образом, рассматриваемое утверждение справедливо и для $t+1$.

Пусть n — натуральное число, $S \in \mathscr{S}^1(B)$ и $L(S) \leqslant n$. Если S — вырожденная схема, то $h(S) = 0 < c_1 n$. Если S — невырожденная схема, то $h(S) \leqslant c_1 L(S) \leqslant c_1 n$. Следовательно, $h_B^1(n) \leqslant c_1 n$ и $h_B^1(n) = O(n)$. Лемма доказана.

4.3. Базисы, не являющиеся квазипримитивными. В этом разделе изучается поведение функции h_B^1 для произвольного базиса B, не являющегося квазипримитивным. В конце раздела приводится доказательство теоремы 4.1.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4.3. *Пусть B — базис, не являющийся квазипримитивным. Тогда существуют бесповторная схема $S_\neg$ в базисе B и наборы $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2$ константных неисправностей на входах элементов схемы $S_\neg$ такие, что схема $S_\neg(\tilde{w}_1)$ реализует функцию, равную функции x, а схема $S_\neg(\tilde{w}_2)$ реализует функцию, равную функции $\neg x$.*

Доказательство. Так как базис B не является квазипримитивным, то существует функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in B$, не являющаяся квазимонотонной. Покажем, что существуют число $i \in \{1, \ldots, n\}$ и два набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n)$ из E_2^{n-1} такие, что

$$
\begin{gathered}
g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = 0, \\
g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = 1, \\
g(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 0, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n) = 1, \\
g(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 1, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n) = 0.
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

Предположим противное. В этом случае для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует такое число $\sigma_i \in E_2$, что для любого набора $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots$

$\ldots, \gamma_n) \in E_2^{n-1}$ выполняется неравенство $g(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \sigma_i, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n) \geqslant g(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \neg\sigma_i, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n)$. Тогда, как нетрудно показать, функция $g(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ является монотонной функцией. Отсюда следует, что функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ является квазимонотонной функцией, а этого не может быть. Таким образом, для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и некоторых наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n)$ из E_2^{n-1} справедливы равенства (4.1). Используя эти равенства, нетрудно построить бесповторную схему $S_\neg$ в базисе B, содержащую один элемент, которому приписана функция g, и наборы $\bar{w}_1$ и $\bar{w}_2$ константных неисправностей на входах этого элемента такие, что схема $S_\neg(\bar{w}_1)$ реализует функцию, равную функции x, а схема $S_\neg(\bar{w}_2)$ реализует функцию, равную функции $\neg x$. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 11 из [24].

Лемма 4.4. *Пусть B — базис, не являющийся квазипримитивным. Тогда существуют бесповторная схема $S_\wedge$ в базисе B и набор $\bar{w}$ константных неисправностей на входах элементов схемы $S_\wedge$ такие, что схема $S_\wedge(\bar{w})$ реализует функцию, равную функции $x \wedge y$.*

Доказательство. Базис B не является квазипримитивным. Поэтому существует функция $q(x_1, \ldots, x_n) \in B$, не являющаяся линейной. Хорошо известно (см. [24, теорема 6 и замечание к ней]), что функция q единственным образом представима в виде полинома Жегалкина:

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\{i_1, \ldots, i_t\} \subseteq \{1, \ldots, n\}} a_{i_1 \ldots i_t} \cdot x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_t} \pmod 2,$$

где $\cdot$ — обычная операция умножения и $a_{i_1 \ldots i_t} \in E_2$, $\{i_1, \ldots, i_t\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Так как функция q является нелинейной функцией, то в полиноме Жегалкина функции q найдется слагаемое, содержащее не менее двух переменных. Без ограничения общности можно считать, что среди этих переменных присутствуют x_1 и x_2. Тогда можно преобразовать рассматриваемый полином и представить функцию q в следующем виде:

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot q_1(x_3, \ldots, x_n) + x_1 \cdot q_2(x_3, \ldots, x_n) + \\ + x_2 \cdot q_3(x_3, \ldots, x_n) + q_4(x_3, \ldots, x_n) \pmod 2,$$

где в силу единственности полинома Жегалкина $q_1(x_3, \ldots, x_n) \not\equiv 0$. Пусть $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ — такие числа из E_2, что $q_1(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 1$. Тогда $\chi(x_1, x_2) = q(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = x_1 \cdot x_2 + \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 + \gamma \pmod 2$, где $\alpha, \beta, \gamma \in E_2$. Рассмотрим функцию $\psi(x_1, x_2) = \chi(x_1 + \beta \pmod 2, x_2 + \alpha \pmod 2) + \gamma + \alpha \cdot \beta \pmod 2$. Нетрудно заметить, что $\psi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 = x_1 \wedge x_2$. Обозначим $\sigma_1 = \neg\beta$, $\sigma_2 = \neg\alpha$ и $\sigma_3 = \neg(\gamma + \alpha \cdot \beta \pmod 2)$. Тогда

$$(q(x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \alpha_3, \ldots, \alpha_n))^{\sigma_3} = x_1 \wedge x_2. \tag{4.2}$$

Из леммы 4.3 следует, что существуют схема $S_\neg \in \mathcal{S}^1(B)$ и набор $\bar{u}$ константных неисправностей на входах элементов схемы $S_\neg$ такие, что схема $S_\neg(\bar{u})$ реализует функцию, равную функции $\neg x$. Равенство (4.2) показывает, что, используя функцию q и схему $S_\neg$, мы можем построить бесповторную схему $S_\wedge$ в базисе B и набор $\bar{w}$ константных неисправностей на входах элементов схемы $S_\wedge$ такие, что схема $S_\wedge(\bar{w})$ реализует функцию, равную функции $x \wedge y$. Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть B — базис, не являющийся квазипримитивным. Тогда* $\log_2 h_B^1(n) = \Omega(n)$.

Доказательство. Используя лемму 4.3, получаем, что существуют схема $S_\neg \in \mathcal{S}^1(B)$ и наборы $\bar{w}_1$ и $\bar{w}_2$ константных неисправностей на входах элементов схемы $S_\neg$ такие, что схема $S_\neg(\bar{w}_1)$ реализует функцию, равную функции x, а схема $S_\neg(\bar{w}_2)$ реализует функцию, равную функции $\neg x$. Используя лемму 4.4, получаем, что существуют схема $S_\wedge \in \mathcal{S}^1(B)$ и набор $\bar{w}$ константных неисправностей на входах элементов схемы $S_\wedge$ такие, что схема $S_\wedge(\bar{w})$ реализует функцию, равную функции $x \wedge y$.

Используя схемы $S_\neg$ и $S_\wedge$, нетрудно для любого $r \geqslant 1$ построить бесповторную схему S_r в базисе B, обладающую следующими свойствами:

а) для любого $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in E_2^r$ существует набор $u(\bar{\sigma})$ константных неисправностей на входах элементов схемы S_r, такой, что схема $S_r(u(\bar{\sigma}))$ реализует функцию, равную функции $x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_r^{\sigma_r}$;

б) существует такой набор $\bar{v}$ константных неисправностей на входах элементов схемы S_r, что схема $S_r(\bar{v})$ реализует функцию, равную функции 0;

в) $L(S_r) \leqslant dr$, где $d = L(S_\neg) + L(S_\wedge)$.

Покажем, что $h(S_r) \geqslant 2^r$. Пусть в схеме S_r имеется ровно m входов, и этим входам приписаны переменные $x_1, \ldots, x_m$. Обозначим f функцию, реализуемую схемой $S_r(\bar{v})$, и для любого набора $\bar{\sigma} \in E_2^r$ обозначим $f_{\bar{\sigma}}$ функцию, реализуемую схемой $S_r(u(\bar{\sigma}))$. Пусть $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in E_2^r$. Нетрудно показать, что функции f и $f_{\bar{\sigma}}$ различаются на тех и только тех наборах $(\delta_1, \ldots, \delta_m) \in E_2^m$, у которых $\delta_1 = \sigma_1, \ldots, \delta_r = \sigma_r$. Поэтому минимальная мощность множества наборов из E_2^m, на котором функция f отлична от всех функций $f_{\bar{\sigma}}$, $\bar{\sigma} \in E_2^r$, равна 2^r. Используя лемму 2.1, получаем, что $h(S_r) \geqslant 2^r$.

Положим $c_1 = 2d$. Пусть $n \geqslant c_1$. Обозначим $r = \lfloor n/d \rfloor$. Нетрудно показать, что $L(S_r) \leqslant dr \leqslant n$ и $h(S_r) \geqslant 2^r = 2^{\lfloor n/d \rfloor} \geqslant 2^{n/c_1}$. Следовательно, $h_B^1(n) \geqslant 2^{n/c_1}$ и $\log_2 h_B^1(n) = \Omega(n)$. Лемма доказана.

Утверждение теоремы 4.1 следует из лемм 4.2 и 4.5.

§ 5. Подход к синтезу схем и диагностике их неисправностей

В этом параграфе изучается следующая проблема: по произвольной формуле φ над базисом B_1 требуется построить схему S в базисе B_2, которая реализует ту же функцию, что и φ, и для которой задача диагностики произвольных наборов константных неисправностей на входах элементов решается за полиномиальное относительно величины $L(\varphi)$ время. Из результатов § 2 следует, что при использовании обычных проверок эта проблема имеет решение только для примитивных базисов B_1. При этом в качестве базиса B_2 можно взять базис B_1. Мы рассмотрим подход к решению данной проблемы для произвольного базиса B_1, основанный на использовании при диагностике неисправностей расширенного множества проверок. Предполагается, что входы схемы S можно «расщеплять» и подавать свое входное значение на каждый вход элемента, присоединенный к входу схемы. При этом в качестве базиса B_2 можно взять произвольный квазипримитивный базис, такой, что $[B_1] = [B_2]$.

5.1. Описание подхода. Приведем сначала несколько соображений, лежащих в основе рассматриваемого подхода.

Пусть B_1 — базис. Ниже будет доказано (теорема 5.1), что существует квазипримитивный базис B_2, такой, что $[B_1] = [B_2]$. Мы не будем обсуждать вопрос о способах построения по базису B_1 базиса B_2.

Используя лемму 2.2, получаем, что существуют константы $c_1, c_2 \geqslant 1$, обладающие следующим свойством: для любой формулы φ_1 над B_1 существует формула φ_2 над B_2, которая реализует функцию, равную функции, реализуемой формулой φ_1, и для которой $L(\varphi_2) \leqslant c_1(L(\varphi_1))^{c_2}$. Мы не будем рассматривать методы построения по формуле φ_1 формулы φ_2.

Из теоремы 4.1 следует, что существует такая константа $c_3 \geqslant 1$, что для любой невырожденной бесповторной схемы S в базисе B_2 существует условный тест Γ_S, который решает задачу $z(S)$ и для которого $h(\Gamma_S) \leqslant c_3 L(S)$. Для базиса B_2, состоящего из линейных функций, описание функционирования условного теста Γ_S содержится в доказательстве леммы 2.5. Для невырожденного базиса B_2, состоящего из квазимонотонных функций, описание функционирования условного теста Γ_S содержится в доказательствах лемм 4.1 и 4.2. Несложный анализ доказательств этих лемм показывает, что существует алгоритм $\mathscr{A}(B_2)$, который по произвольной схеме $S \in \mathscr{S}^1(B_2)$ за полиномиальное относительно величины $L(S)$ время моделирует функционирование условного теста Γ_S.

Рассматриваемый подход к синтезу схем и диагностике их неисправностей заключается в следующем. По произвольной формуле φ_1 над B_1, реализующей некоторую функцию g, $g \notin \{0, 1\}$, строится формула φ_2 над B_2, которая реализует функцию, равную функции g, и для которой $L(\varphi_2) \leqslant c_1(L(\varphi_1))^{c_2}$. По формуле φ_2 естественным образом строится схема S в базисе B_2, которая обладает следующими свойствами:

а) схема S реализует функцию g;

б) $L(S) = L(\varphi_2) \leqslant c_1(L(\varphi_1))^{c_2}$;

в) в схеме S из любой вершины, не являющейся входом, выходит не более одной дуги.

Интерес представляет только тот случай, когда схема S является невырожденной. Пусть в схеме S имеется n входов, которым приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$, и пусть в схеме S имеется $m > 0$ входов элементов. Кроме обычного рабочего режима у схемы S есть также диагностический режим, при котором входы схемы S «расщепляются» и она превращается в бесповторную схему $\widetilde{S}$. Для $i = 1, \ldots, n$, если из входа x_i схемы S выходят $r > 1$ дуг $d_1, \ldots, d_r$, то в схеме $\widetilde{S}$ вход x_i заменяется на r входов $x_i^1, \ldots, x_i^r$, из которых выходят дуги $d_1, \ldots, d_r$ соответственно. Ясно, что схема $\widetilde{S}$ также имеет m входов элементов, и любой схеме $S' \in \mathscr{S}(S, E_3^m)$ соответствует схема $\widetilde{S}' \in \mathscr{S}(\widetilde{S}, E_3^m)$, полученная из схемы S' «расщеплением» входов. Для решения задачи $z(\widetilde{S})$ будем использовать условный тест $\Gamma_{\widetilde{S}}$, моделируемый алгоритмом $\mathscr{A}(B_2)$. Пусть под влиянием неисправностей схема S трансформировалась в схему $S' \in \mathscr{S}(S, E_3^m)$. Дерево решений $\Gamma_{\widetilde{S}}$ применяется к схеме $\widetilde{S}'$. Пусть результат работы условного теста $\Gamma_{\widetilde{S}}$ — формула $\widetilde{\psi}$, реализующая функцию, равную функции $f_{\widetilde{S}'}$. Для $i = 1, \ldots, n$, если вход x_i схемы S был в схеме $\widetilde{S}$ заменен на входы $x_i^1, \ldots, x_i^r$, то в формуле $\widetilde{\psi}$ подставим переменную x_i вместо переменных $x_i^1, \ldots, x_i^r$. В результате получим формулу ψ, которая реализует функцию, равную функции $f_{S'}$. Поскольку $L(\widetilde{S}) = L(S) \leqslant c_1(L(\varphi_1))^{c_2}$ и $h(\Gamma_{\widetilde{S}}) \leqslant c_3 L(\widetilde{S})$, то алгоритм $\mathscr{A}(B_2)$ моделирует функционирование условного теста $\Gamma_{\widetilde{S}}$ при решении задачи $z(\widetilde{S})$ за полиномиальное относительно величины $L(\varphi_1)$ время.

Отметим одну важную особенность получающихся в результате работы условного теста $\Gamma_{\widetilde{S}}$ формул. Пусть $S', S'' \in \mathscr{S}(S, E_3^m)$. Если схемы S' и S'' реализуют различные функции, то в результате работы условного теста $\Gamma_{\widetilde{S}}$ и последующей замены переменных будут получены различные формулы ψ' и ψ'', реализующие функции, равные функциям $f_{S'}$ и $f_{S''}$. Однако, если схемы S' и S'' реализуют одинаковые функции, то в результате работы условного теста $\Gamma_{\widetilde{S}}$ и последующей замены переменных могут быть получены не одинаковые, а различные формулы ψ' и ψ'', так как функции, реализуемые схемами $\widetilde{S}'$ и $\widetilde{S}''$, могут различаться. Ясно, что при этом формулы ψ' и ψ'' реализуют равные функции.

5.2. Класс квазипримитивных базисов. Докажем утверждение, характеризующее класс квазипримитивных базисов.

Теорема 5.1. *Для любого базиса B_1 существует квазипримитивный базис B_2, такой, что $[B_1]=[B_2]$.*

Доказательство. Напомним, что класс булевых функций U называется замкнутым, если $U=[U]$. В работе [24] на с. 104–111 для каждого замкнутого класса булевых функций U приведен пример такого базиса B_U, что $U=[B_U]$. Нетрудно заметить, что для всех классов U, за исключением классов C_2, C_3 и C_4, базис B_U является квазипримитивным. Обозначим $B'_{C_2}=\{x\wedge y, x\vee\neg y\}$, $B'_{C_3}=\{x\vee y, x\wedge\neg y\}$ и $B'_{C_4}=\{x\vee y, x\wedge y, x\vee(y\wedge\neg z)\}$. Из леммы 18 работы [24] следует, что $C_2=[B'_{C_2}]$ и $C_3=[B'_{C_3}]$. Из леммы 17 работы [24] следует, что для любой немонотонной α-функции g выполняется равенство $C_4=[\{x\vee y, x\wedge y, g\}]$. Напомним, что булева функция f называется α-функцией, если для любого $t\in E_2$ выполняется равенство $f(t,\ldots,t)=t$. Нетрудно показать, что функция $x\vee(y\wedge\neg z)$ является немонотонной α-функцией. Следовательно, $C_4=[B'_{C_4}]$. Ясно, что базисы B'_{C_2}, B'_{C_3} и B'_{C_4} являются квазипримитивными базисами. Таким образом, для любого замкнутого класса булевых функций U существует квазипримитивный базис B, такой, что $U=[B]$.

Пусть B_1 — базис. Обозначим $U=[B_1]$. По доказанному выше, для замкнутого класса U существует квазипримитивный базис B_2, такой, что $U=[B_2]$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдман Р. С., Чипулис В. П. Диагностика бесповторных комбинационных схем // Дискретный анализ. Вып. 14. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1969. — С. 3–15.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.
3. Каравай М. Ф. Диагноз древовидных схем произвольного базиса // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 1. — С. 173–181.
4. Карпова Н. А. Схема из функциональных элементов // Математическая энциклопедия. Т. 5. — М.: Советская энциклопедия, 1985. — С. 301–303.
5. Мадатян Х. А. Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 103–118.
6. Мошков М. Ю. Условные тесты для диагностики константных неисправностей СФЭ // Тез. докл. VIII Всесоюзн. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». Ч. 2. — Горький, 1988. — С. 50.
7. Мошков М. Ю. О сложности алгоритмов построения тестов для диагностики константных неисправностей входов схем из функциональных элементов // Тез. докл. XI Всесоюзн. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». Ч. I(1). — Волгоград, 1990. — С. 81.
8. Мошков М. Ю. Деревья решений. Теория и приложения. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1994.
9. Мошкова А. М. Диагностика «сохраняющих» неисправностей схем из функциональных элементов // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 2. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1998. — С. 204–213.
10. Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций. — М.: Наука, 1991.
11. Носков В. Н. Диагностические тесты для входов логических устройств // Дискретный анализ. Вып. 26. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1974. — С. 72–83.
12. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 3. — С. 71–76.
13. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
14. Редькин Н. П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 1992. — № 5. — С. 43–46.

15. Соловьев Н. А. Тесты (теория, построение, применение). — Новосибирск: Наука, 1978.
16. Угольников А. Б. О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // Матем. заметки. — 1987. — Т. 42, № 4. — С. 603–612.
17. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля электрических схем // Тр. МИАН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.
18. Шевченко В. И. О сложности диагностики одного типа неисправностей схем из функциональных элементов с помощью условных тестов // Комбинаторно-алгебраические и вероятностные методы в прикладной математике. — Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1988. — С. 86–97.
19. Шевченко В. И. О сложности диагностики неисправностей типа "⊕" схем из функциональных элементов // Комбинаторно-алгебраические и вероятностные методы дискретного анализа. — Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1989. — С. 129–140.
20. Шевченко В. И. О сложности диагностики неисправностей типов "0", "1", "&" и "∨" схем из функциональных элементов // Комбинаторно-алгебраические и вероятностные методы и их применение. — Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1990. — С. 125–150.
21. Шевченко В. И. О глубине условных тестов для диагностики неисправностей в схемах из функциональных элементов // Вестник ВВО АТН РФ. — 1995. — № 1. — С. 77–86.
22. Шевченко В. И. О сложности условных тестов для диагностики неисправностей схем из функциональных элементов // Интеллектуальные системы. — 1996. — Т. 1, №№ 1–4. — С. 247–251.
23. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.
24. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
25. Яблонский С. В., Чегис И. А. О тестах для электрических схем // Успехи матем. наук. — 1955. — Т. 10, № 4. — С. 182–184.
26. Moore E. F. Gedanken-experiments on sequential machines // In Automata Studies. — Princeton Univ. Press, 1956. — P. 129–153.
27. Moshkov M. Ju. Diagnosis of constant faults of circuits // Proc. of the Fourth International Workshop on Rough Sets, Fuzzy Sets and Machine Discovery (Tokyo, Japan, 1996). — Tokyo, 1996. — P. 325–327.
28. Moshkov M. Ju., Moshkova A. M. Optimal bases for some closed classes of Boolean functions // Proc. of the Fifth European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing (Aachen, Germany, 1997). — Aachen, 1997. — P. 1643–1647.
29. Moshkova A. M. On diagnosis of retaining faults in circuits // Proc. of the First International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing (Warsaw, Poland, 1998). — Lecture Notes in Artificial Intelligence. V. 1424. — Springer-Verlag, 1998 — P. 513–516.
30. Shevtchenko V. I. On the depth of decision trees for diagnosing faults in circuits // Proc. of the Third International Workshop on Rough Sets and Soft Computing (San Jose, USA, 1994). — San Jose, 1994. — P. 594–601.
31. Shevtchenko V. I. On the depth of decision trees for diagnosing of nonelementary faults in circuits // Proc. of the First International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing (Warsaw, Poland, 1998). — Lecture Notes in Artificial Intelligence. V. 1424. — Springer-Verlag, 1998. — P. 517–520.

Поступило в редакцию 20 VII 1999