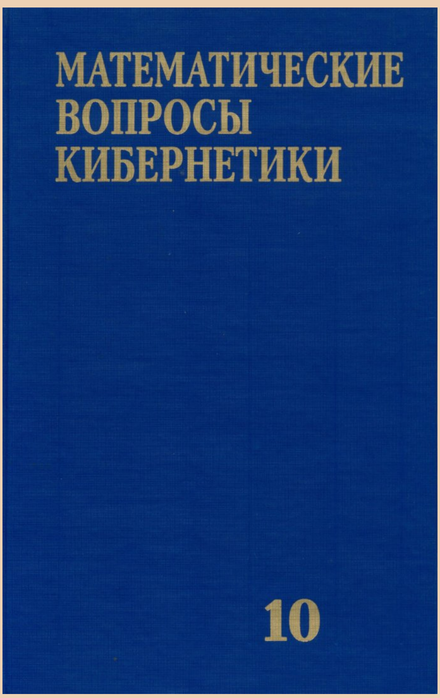

В. И. Шевченко

О сложности диагностики неэлементарных замыканий в схемах из функциональных элементов

О СЛОЖНОСТИ ДИАГНОСТИКИ НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗАМЫКАНИЙ В СХЕМАХ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*)

В. И. ШЕВЧЕНКО

(НИЖНИЙ НОВГОРОД)

Проблемы контроля и диагностики неисправностей управляющих систем составляют одно из основных направлений развития математической кибернетики. Начало этому направлению (математической теории контроля) было положено в работах С. В. Яблонского и И. А. Чегис [5, 6], где на примере контактных схем и схем из функциональных элементов описаны основные задачи контроля и диагностики управляющих систем и способы их решения.

Большинство работ по математической теории контроля посвящены: а) изучению сложности задач контроля и диагностики управляющих систем; б) разработке алгоритмов контроля и диагностики управляющих систем; в) синтезу управляющих систем, для которых задачи контроля и диагностики имеют достаточно простое решение.

В настоящей работе изучается временная сложность алгоритмов диагностики схем из функциональных элементов в зависимости от числа входов в схеме. Возможные неисправности в схемах представляют собой различные комбинации $\wedge$- и $\vee$-замыканий между собой и в совокупности или с константными неисправностями, или с неисправностями типа «отрицание». Для диагностики таких неисправностей используются деревья решений [3, 4] (условные тесты [5, 6]). В этом случае на входы диагностируемой схемы подается некоторая последовательность входных наборов, в которой выбор каждого последующего набора зависит от реакции схемы на предыдущие. Показано, что для диагностики произвольно заданной схемы с n, $n \geqslant 4$, входами в зависимости от типа элементов в схеме и вида неисправностей нужно подать самое меньшее $\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} + \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1}$ входных наборов, а самое большее — 2^n.

§ 1. Основные определения и результаты

Понятие *схемы из функцинальных элементов* считаем известным (см., например, [2]). Напомним только, что схемы строятся из функциональных элементов, каждый из которых принадлежит некоторому конечному множеству B — базису для схем (схемному базису или просто базису), а все схемы, элементы которых принадлежат B, есть схемы в базисе B [2]. Предполагается, что каждая схема в работе имеет хотя бы один функциональный элемент и ровно один выход, которым является выход одного из функциональных элементов схемы (т. е. вход схемы не может быть и ее выходом).

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00948).

Схему S с n, $n \geqslant 1$, входами иногда будем обозначать через S_n.

Входы схемы и выходы ее функциональных элементов иногда будем называть *вершинами*. У вершины, являющейся выходом схемы, ставится метка, например, * [2].

Будем говорить, что некоторая вершина v_1 схемы S *соединена* с вершиной v_2, если в S существует последовательность элементов $b_1, \ldots, b_t$ такая, что некоторый вход элемента b_1 соединен с вершиной v_1, выход элемента b_t является вершиной v_2 и при $t \geqslant 2$ и для $i = 2, \ldots, t$ некоторый вход элемента b_i соединен с выходом элемента b_{i-1}. Если вершина v_1 является выходом некоторого элемента e_1, а вершина v_2 — выходом некоторого элемента e_2, то иногда будем говорить, что элемент e_1 *соединен* с элементом e_2.

Некоторую совокупность функциональных элементов Γ схемы S вместе с их соединениями между собой будем называть *подсхемой* схемы S, если в этой совокупности найдется элемент b, с которым соединены все остальные элементы Γ. *Выходом подсхемы* Γ будем считать выход элемента b, а *входами подсхемы* Γ будем называть вершины схемы S, ни одна из которых не является выходом элемента из Γ и к каждой из которых присоединен хотя бы один вход элемента из Γ. Любой элемент схемы S является ее подсхемой. Если Γ содержит все элементы схемы S, то Γ иногда будем называть *максимальной подсхемой* схемы S. Будем говорить, что подсхемы Γ_1 и Γ_2 схемы S *не пересекаются*, если они не содержат общих функциональных элементов (при этом некоторые входы у них могут быть общими). Пусть входами подсхемы Γ являются вершины $v_1, \ldots, v_t$ схемы S. Тогда будем говорить, что подсхема Γ *вычисляет* функцию g от t переменных, если при подаче на входы $v_1, \ldots, v_t$ произвольного двоичного набора $(\delta_1, \ldots, \delta_t)$ на выходе Γ получаем значение функции $g(\delta_1, \ldots, \delta_t)$.

1.1. Определение возможных неисправностей в схеме. Неисправности в схеме определяются путем введения («встраивания») в нее последовательности элементов из некоторого конечного множества функциональных элементов P — *базиса неисправностей*.

Введение любого функционального элемента e, имеющего $t > 0$ входов, в произвольную схему S может быть осуществлено одним из следующих способов.

(C1) Возьмем в схеме S некоторую последовательность вершин $\bar{v} = v_1, \ldots, v_t$, не содержащую выхода S, и присоединим входы $1, \ldots, t$ элемента e к вершинам $v_1, \ldots, v_t$ соответственно. Полученную схему обозначим через U'.

(C2) Возьмем в схеме S некоторую последовательность вершин $\bar{v} = v_1, \ldots, v_t$, содержащую выход схемы S, присоединим входы $1, \ldots, t$ элемента e к вершинам $v_1, \ldots, v_t$ соответственно, выход элемента e пометим как выход схемы, а прежнюю метку удалим. Полученную схему обозначим через U''.

(C3) Возьмем в схеме S некоторый функциональный элемент b, имеющий $\tau > 0$ входов, и последовательность вершин $\bar{v} = v_1, \ldots, v_t$, обладающую следующими свойствами: а) ни выход элемента b, ни выход схемы S не содержатся в $\bar{v}$; б) к одной из вершин $\bar{v}$ присоединен i-й вход элемента b $(1 \leqslant i \leqslant \tau)$; в) элемент b не соединен ни с одним функциональным элементом, выход которого содержится в $\bar{v}$. Присоединим входы $1, \ldots, t$ элемента e к вершинам $v_1, \ldots, v_t$ соответственно, а i-й вход элемента b отсоединим от вершины из $\bar{v}$ и присоединим его к выходу e. Полученную схему обозначим через U'''.

О схемах U', U'' и U''' будем говорить, что они *получены из схемы S путем введения элемента e*.

Заметим, что в определениях (C1), (C2) и (C3) в последовательности $\bar{v}$ некоторые вершины могут повторяться.

Введение функционального элемента e, не имеющего входов (т. е. реализующего константу 0 или 1), в схему S может быть осуществлено одним из следующих способов.

(С4) Добавим к схеме S элемент e. Полученную схему обозначим через Γ'.

(С5) Пусть b — некоторый элемент схемы S, имеющий хотя бы один вход, и v — вершина схемы S, к которой присоединен один из входов элемента b. Добавим к схеме S элемент e, отсоединим от вершины v вход элемента b и присоединим его к выходу e. Полученную схему обозначим через Γ''.

(С6) Добавим к схеме S элемент e, пометим выход элемента e как выход схемы, а прежнюю метку удалим. Полученную схему обозначим через Γ'''.

О схемах Γ', Γ'' и Γ''' будем говорить, что они *получены из схемы S путем введения элемента e*.

Отметим, что каждая из схем U', U'', U''', Γ', Γ'' и Γ''' имеет один выход, как и схема S, и в каждой из них число входов то же самое, что и в схеме S.

Определим теперь множество схем $H_P(S)$.

1) $S \in H_P(S)$.

2) Пусть $U \in H_P(S)$. Тогда любая схема, которая может быть получена из U путем введения некоторого элемента из P, также принадлежит $H_P(S)$.

Никаких других схем $H_P(S)$ не содержит.

Множество всех различных функций, реализуемых схемами из $H_P(S)$, будем обозначать через $F_P(S)$.

В дальнейшем иногда функциональные элементы и вершины исходной схемы S в схемах из $H_P(S)$ будем называть соответственно *s-элементами* и *s-вершинами*, а функциональные элементы базиса неисправностей P и их выходы, которые встраивались в схему S при определении схем из $H_P(S)$, будем называть *p-элементами* и *p-вершинами* соответственно; p-элементы в схемах из $H_P(S)$ будем называть иногда *P-неисправностями.*

Заметим, что предложенная модель неисправностей в схемах из функциональных элементов включает в себя такие хорошо известные типы неисправностей как константные, неисправности типа отрицание, $\wedge$- и $\vee$-замыкания и всевозможные их комбинации.

Замечание 1. В настоящей работе в качестве базисов неисправностей P рассматриваются такие конечные множества функциональных элементов, в которых все элементы реализуют булевы функции, существенно зависящие от всех своих переменных, и в каждый базис входит: а) хотя бы один элемент, реализующий функцию, отличную от дизъюнкции и константы, б) хотя бы один элемент, реализующий функцию, отличную от конъюнкции и константы, в) хотя бы один элемент, реализующий функцию, отличную от линейной булевой функции.

1.2. Задача диагностики, деревья решений. Множество различных булевых функций, реализуемых схемами из $H_P(S)$, обозначим через $F_P(S) = \{f_1, \ldots, f_m\}$. Тогда разобьем множество схем $H_P(S)$ на классы эквивалентности $H_P^1(S), H_P^2(S), \ldots, H_P^m(S)$ такие, что все схемы, принадлежащие i-му классу, $1 \leqslant i \leqslant m$, реализуют одну и ту же функцию f_i.

Задача диагностики P-неисправностей схемы S состоит в следующем. Известно, что заданная схема U принадлежит $H_P(S)$, требуется определить, к какому из m классов эквивалентности принадлежит схема U.

В дальнейшем иногда задачу диагностики P-неисправностей схемы S будем обозначать парой $\langle S, H_P(S)\rangle$.

Для решения этой задачи используются деревья решений (условные тесты).

Пусть схема S имеет n входов. Тогда *дерево решений* Y *для диагностики* P-*неисправностей схемы* S_n (*дерево решений* Y *для* $\langle S_n, H_P(S_n)\rangle$) представляет собой конечное ориентированное корневое дерево, в котором каждой вершине, не являющейся концевой, приписан двоичный набор из $\{0, 1\}^n$, каждой концевой вершине — некоторая функция из множества $F_P(S_n) = \{f_1, \ldots, f_m\}$. Из каждой вершины, не являющейся концевой, исходят ровно две дуги, которым приписаны числа 0 и 1. Далее, для любой функции $f_i \in F_P(S_n)$ найдется полный путь (от корня до концевой вершины) $\gamma = v_1, u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}$ такой, что вершине v_{r+1} приписана функция f_i и, если при $q = 1, \ldots, r$ вершине v_q приписан набор $\alpha_q \in \{0, 1\}^n$, а дуге u_q — число $\delta_q \in \{0, 1\}$, то функция f_i — единственная функция в $F_P(S_n)$, которая на наборах $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ принимает значения $\delta_1, \ldots, \delta_r$ соответственно.

Длина максимального пути называется *глубиной дерева решений* Y и обозначается через $h(Y)$.

Величина $h_P(S_n) = \min h(Y)$, где минимум берется по всем деревьям решений для схемы S_n, называется *минимальной глубиной дерева решений* для диагностики P-неисправностей схемы S_n (*минимальной глубиной дерева решений* для $\langle S_n, H_P(S_n)\rangle$).

1.3. Определения из теории функций алгебры логики. Приведем определения понятий и обозначений теории функций алгебры логики [7], которые широко используются в настоящей работе.

Пусть F — некоторое множество булевых функций, тогда через $[F]$ обозначается *замыкание* F относительно операции суперпозиции, а также введения и изъятия несущественных переменных. Если $F = [F]$, то F называется *замкнутым классом.*

Для произвольного замкнутого класса булевых функций Θ через $\Theta(\widetilde{x}_n)$ будем обозначать множество всех функций из Θ от переменных $\widetilde{x}_n$.

Булева функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ (функция $\bar{x}$ равна 1, если $x = 0$, и равна 0, если $x = 1$). Функция f называется *самодвойственной*, если $f^* = f$.

В дальнейшем иногда будем обозначать $\bar{x}$ через x^0, а x через x^1.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется α-*функцией*, если $f(x, \ldots, x) = x$, β-*функцией*, если $f(x, \ldots, x) = 1$, γ-*функцией*, если $f(x, \ldots, x) = 0$ и δ-*функцией*, если $f(x, \ldots, x) = \bar{x}$.

Отметим, что замыкание произвольного множества, состоящего из α-функций (соответственно, α- и β-функций и α- и γ-функций), содержит только α-функции (соответственно, только α- и β-функции и только α- и γ-функции).

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $\widetilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ из $\{0, 1\}^n$ таких, что $\sigma_1 \leqslant \delta_1, \ldots, \sigma_n \leqslant \delta_n$, имеет место соотношение $f(\widetilde{\sigma}) \leqslant f(\widetilde{\delta})$. Набор $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ называется *верхним нулем* (*нижней единицей*) монотонной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $f(\widetilde{\sigma}) = 0$ ($f(\widetilde{\sigma}) = 1$) и для любого набора $\widetilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ такого, что $\sigma_1 \leqslant \delta_1, \ldots, \sigma_n \leqslant \delta_n$ ($\sigma_1 \geqslant \delta_1, \ldots, \sigma_n \geqslant \delta_n$) и хотя бы при одном i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеет место $\sigma_i < \delta_i$ ($\sigma_i < \delta_i$), то $f(\widetilde{\delta}) = 1$ ($f(\widetilde{\delta}) = 0$).

Булева функция *удовлетворяет условию* $< a^\mu >$ ($< A^\mu >$), $\mu = 2, 3, \ldots$, если любые μ наборов, на которых функция равна 0 (1), имеют общую нулевую (единичную) компоненту. Булева функция *удовлетворяет условию* $< a^\infty >$ ($< A^\infty >$), если все наборы, на которых функция равна 0 (1), имеют общую нулевую (единичную) компоненту.

Обозначим через $\widetilde{\Theta}$ семейство всех замкнутых классов булевых функций, каждый из которых содержит: а) функцию, отличную от дизъюнкции и константы; б) функцию, отличную от конъюнкции и константы; в) функцию, отличную от линейной булевой функции. Из структуры замкнутых классов булевых функций [7] следует, что элементами $\widetilde{\Theta}$ являются следующие классы:

C_1 — множество всех булевых функций;
C_2 — множество всех α- и β-функций;
C_3 — множество всех α- и γ-функций;
C_4 — множество всех α-функций;
M_1 — множество всех монотонных булевых функций;
M_2 — множество всех моотонных α- и β-функций;
M_3 — множество всех монотонных α- и γ-функций;
M_4 — множество всех монотонных α-функций;
D_3 — множество всех самодвойственных булевых функций;
D_1 — множество всех самодвойственных α-функций;
D_2 — множество всех самодвойственных монотонных функций;

для $\mu = 2, 3, \ldots$

F_4^μ — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< a^\mu >$;
F_1^μ — множество всех α-функций, удовлетворяющих условию $< a^\mu >$;
F_3^μ — множество всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $< a^\mu >$;
F_2^μ — множество всех монотонных α-функций, удовлетворяющих условию $< a^\mu >$;
F_8^μ — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< A^\mu >$;
F_5^μ — множество всех α-функций, удовлетворяющих условию $< A^\mu >$;
F_7^μ — множество всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $< A^\mu >$;
F_6^μ — множество всех монотонных α-функций, удовлетворяющих условию $< a^\mu >$;
F_4^∞ — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< a^\infty >$;
F_1^∞ — множество всех α-функций, удовлетворяющих условию $< a^\infty >$;
F_3^∞ — множество всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $< a^\infty >$;
F_2^∞ — множество всех монотонных α-функций, удовлетворяющих условию $< a^\infty >$;
F_8^∞ — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< A^\infty >$;
F_5^∞ — множество всех α-функций, удовлетворяющих условию $< A^\infty >$;
F_7^∞ — множество всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $< A^\infty >$;
F_6^∞ — множество всех монотонных α-функций, удовлетворяющих условию $< A^\infty >$.

1.4. Основные утверждения.

Теорема 1. *Пусть S_n — схема, в которой n, $n \geqslant 1$, входов, один выход и имеется хотя бы один функциональный элемент. Пусть P — базис неисправностей. Тогда, если P содержит хотя бы один элемент, реализующий немонотонную булеву функцию и хотя бы один элемент, реализующий нелинейную булеву функцию, то*

$$2^{n-1} - 1 \leqslant h_P(S_n) \leqslant 2^n.$$

Теорема 2. *Пусть S_n — схема, в которой n, $n \geqslant 4$, входов, один выход и имеется хотя бы один функциональный элемент. Пусть P — базис неисправностей. Тогда, если все элементы P реализуют только монотонные булевы функции и при этом:*

— хотя бы один элемент реализует функцию, отличную от конъюнкции и константы,

— хотя бы один элемент реализует функцию, отличную от дизъюнкции и константы,

— хотя бы один элемент реализует функцию, отличную от самодвойственной монотонной функции,
то:

а) *если все элементы S_n реализуют только монотонные булевы функции, то*

$$\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2\rfloor} + \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2\rfloor + 1} \leqslant h_P(S_n) \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor + 1},$$

б) *если S_n содержит хотя бы один элемент, реализующий немонотонную функцию, то*

$$2^n - 2 \leqslant h_P(S_n) \leqslant 2^n.$$

Теорема 3. *Пусть S_n — схема, в которой n, $n \geqslant 4$, входов, один выход и имеется хотя бы один функциональный элемент. Пусть P — базис неисправностей. Тогда, если все элементы P реализуют только монотонные самодвойственные булевы функции и при этом хотя бы один элемент реализует функцию, отличную от тождественной, то*:

а) *если все элементы S_n реализуют только монотонные булевы функции, то*

$$\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2\rfloor} + \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2\rfloor + 1} \leqslant h_P(S_n) \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor + 1},$$

б) *если в S_n содержится только один элемент, реализующий немонотонную булеву функцию, то*

$$\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2\rfloor} + \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2\rfloor + 1} \leqslant h_P(S_n) \leqslant 2^n,$$

в) *если в S_n содержится хотя бы два элемента, реализующих немонотонные булевы функции, то*

$$2^{n-2} \leqslant h_P(S_n) \leqslant 2^n.$$

§ 2. Вспомогательные утверждения

Множество G, $G \subseteq F_P(S_n)$, различных функций будем называть П-*множеством* для схемы S_n относительно множества $H_P(S_n)$ или просто для пары $\langle S_n, H_P(S_n)\rangle$, если на любом двоичном наборе из $\{0, 1\}^n$ значения $|G|$ или $|G| - 1$ функций из G совпадают.

Подмножество $\Delta \subseteq \{0, 1\}^n$ двоичных наборов будем называть T-*множеством* или *тестом* для схемы S_n относительно множества $H_P(S_n)$ или просто для пары $\langle S_n, H_P(S_n)\rangle$, если для любой пары различных функций из $F_P(S_n)$ найдется набор из Δ, на котором они принимают разные значения.

Лемма 1. *Пусть G — П-множество для $\langle S_n, H_P(S_n)\rangle$. Тогда*

$$h_P(S_n) \geqslant |G| - 1.$$

Доказательство. Из определения П-множества следует, что для любого подмножества наборов $\{\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_r\} \subseteq \{0, 1\}^n$, где $r \leqslant |G| - 2$, найдутся по крайней мере две функции g, g' из G такие, что $g \neq g'$ и $g(\widetilde{\sigma}_i) = g'(\widetilde{\sigma}_i)$, $i = 1, \ldots, r$. Поэтому в любом дереве решений для схемы S_n найдется полный путь, концевой вершине которого приписана функция из G, а длина не меньше, чем $|G|-1$. Лемма 1 доказана.

Замечание 2. Очевидно, что в любом дереве решений для схемы S_n длина всех путей, концевым вершинам которых приписаны функции из П-множества G, не меньше, чем $|G|-1$.

Лемма 2. *Пусть подмножество наборов* $\Delta \subseteq \{0,1\}^n$ *является* T*-множеством для* $\langle S_n, H_P(S_n)\rangle$. *Тогда*

$$h_P(S_n) \leqslant |\Delta|.$$

Доказательство. Пусть $\Delta = \{\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_m\}$. Построим корневое ориентированное дерево Y следующим образом. Удалим из Δ все наборы, на которых все функции из $F_P(S_n)$ принимают одинаковые значения. В результате получим множество наборов $\Delta_0 = \{\widetilde{\sigma}_0^1, \ldots, \widetilde{\sigma}_0^{r_0}\}$, $1 \leqslant r_0 \leqslant m$. Строим нулевой ярус дерева Y. Берем вершину v_0, приписываем ей набор $\widetilde{\sigma}_0^1$ и сопоставляем ей множество функций $M_0 = F_P(S_n)$ и множество наборов Δ_0. Затем разбиваем множество M_0 на подмножества M_{00} и M_{01} такие, что все функции из M_{00} и M_{01} на наборе $\widetilde{\sigma}_0^1$ принимают значения 0 и 1 соответственно. Строим теперь вершины первого яруса дерева Y. Возьмем вершины v_{00}, v_{01} и проведем дуги (v_0, v_{00}) и (v_0, v_{01}), которым припишем числа соответственно 0 и 1. Если $|M_{00}| = 1$ ($|M_{01}| = 1$), то вершине v_{00} (v_{01}) приписываем функцию из M_{00} (M_{01}). Если $|M_{00}| > 1$ ($|M_{01}| > 1$), то вершине v_{00} (v_{01}) сопоставляем множество функций M_{00} (M_{01}), множество наборов $\Delta_{00} = \{\widetilde{\sigma}_{00}^1, \ldots, \widetilde{\sigma}_{00}^{r_0}\}$ ($\Delta_{01} = \{\widetilde{\sigma}_{01}^1, \ldots, \widetilde{\sigma}_{01}^{r_1}\}$), которое получается из Δ_0 удалением всех наборов, на которых все функциии из M_{00} (M_{01}) принимают одно и то же значение, и приписываем набор $\widetilde{\sigma}_{00}^1$ ($\widetilde{\sigma}_{01}^1$). Далее строим второй ярус дерева Y. Предположим, что построен l-й ярус дерева Y. Если всем концевым вершинам построенного дерева приписаны функции из $F_P(S_n)$, то на этом построение дерева Y завершается. Если каким-то вершинам l-го яруса приписаны наборы из Δ_0, то строим $(l+1)$-й ярус дерева Y. Пусть вершине $v_{0\delta_1\ldots\delta_l}$ приписан набор $\widetilde{\sigma}_{0\delta_1\ldots\delta_l}$ и сопоставлены множества $M_{0\delta_1\ldots\delta_l}$ и $\Delta_{0\delta_1\ldots\delta_l}$. Разбиваем множество $M_{0\delta_1\ldots\delta_l}$ на подмножества $M_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}$ и $M_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}$ такие, что все функции из $M_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}$ и $M_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}$ на наборе $\widetilde{\sigma}_{0\delta_1\ldots\delta_l}$ принимают значения 0 и 1 соответственно. Строим теперь вершины $(l+1)$-го яруса. Возьмем вершины $v_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}$ и $v_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}$, проведем дуги $(v_{0\delta_1\ldots\delta_l}, v_{0\delta_1\ldots\delta_l 0})$ и $(v_{0\delta_1\ldots\delta_l}, v_{0\delta_1\ldots\delta_l 1})$ и припишем им числа 0 и 1 соответственно. Если $|M_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}| = 1$ ($|M_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}| = 1$), то вершине $v_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}$ ($v_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}$) припишем функцию из $|M_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}|$ ($|M_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}|$). Если $|M_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}| \geqslant 1$ ($|M_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}| \geqslant 1$), то вершине $v_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}$ ($v_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}$) сопоставим множество функций $|M_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}|$ ($|M_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}|$), множество наборов $\Delta_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}$ ($\Delta_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}$), которое получается из $\Delta_{0\delta_1\ldots\delta_l}$ удалением всех наборов, на которых все функциии из $M_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}$ ($|M_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}|$) принимают одно и то же значение, и приписываем набор $\widetilde{\sigma}_{0\delta_1\ldots\delta_l 0}$ ($\widetilde{\sigma}_{0\delta_1\ldots\delta_l 1}$). И так далее, до тех пор, пока всем концевым вершинам не будут приписаны функции из $F_P(S_n)$. Можно проверить, что полученное таким образом дерево Y является деревом решений для схемы S_n, глубина которого $h(Y)$ не превосходит m. Лемма 2 доказана.

Пусть D — некоторое конечное множество функциональных элементов, $\Psi(D) = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ — множество различных булевых функций, реализуемых элементами из D, и пусть ψ_i^* — функция, двойственная функции ψ_i, $i=1,\ldots,k$. Тогда через D^* будем обозначать конечное множество функциональных элементов такое, что $\Psi(D^*)=\{\psi_1^*,\ldots,\psi_k^*\}$. Пусть Γ — некоторая схема в базисе D. Тогда через Γ^* будем обозначать схему в базисе D^*, которую можно получить из схемы Γ путем изменения функционирования ее функциональных элементов следующим образом: каждую функцию $\psi_i \in \Psi(D)$, реализуемую элементом схемы Γ, заменим на функцию $\psi_i^* \in \Psi(D^*)$.

Замечание 3. Если схема S реализует функцию f, то схема S^* реализует функцию f^*. Этот факт нетрудно проверить, используя определение функционирования схемы [2] и принцип двойственности [7].

Лемма 3. *Для произвольной схемы S_n справедливо равенство*

$$h_P(S_n)=h_{P^*}(S_n^*).$$

Доказательство. Пусть $F_P(S_n)=\{f_1,\ldots,f_m\}$. Рассмотрим множества схем $H_P(S_n)$ и $H_{P^*}(S_n^*)$. Очевидно, что для любой схемы $U\in H_P(S_n)$ ($V\in H_{P^*}(S_n^*)$) найдется схема $U^*\in H_{P^*}(S_n^*)$ ($V^*\in H_P(S_n)$) такая, что, если u (v) — функция, реализуемая схемой U (V), то функция, реализуемая схемой, U^* (V^*), равна u^* (v^*). Отсюда следует, что $F_{P^*}(S_n^*)=\{f_1^*,\ldots,f_{m^*}\}$.

Покажем теперь, что для любого дерева решений Y для диагностики P-неисправностей схемы S_n найдется такое дерево решений Y^* для диагностики P^*-неисправностей схемы S_n^*, что $h(Y^*)=h(Y)$. И наоборот, для любого дерева решений X для диагностики P^*-неисправностей схемы S_n^* найдется дерево решений X^* для диагностики P-неисправностей схемы S_n такое, что $h(X)=h(X^*)$.

Пусть Y (X) — произвольное дерево решений для $\langle S_n, H_P(S_n)\rangle$ ($\langle S_n^*, H_{P^*}(S_n^*)\rangle$). Заменим в Y (X) каждый набор $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in\{0,1\}^n$, приписанный вершинам Y (X), на набор $(\bar\sigma_1,\ldots,\bar\sigma_n)$, каждое число $\delta\in\{0,1\}$, приписанное дугам Y (X), на число $\bar\delta$, а функции $f_1,\ldots,f_m$ ($f_1^*,\ldots,f_m^*$), приписанные концевым вершинам Y (X), заменим на соответственно $f_1^*,\ldots,f_m^*$ ($f_1,\ldots,f_m$). Полученное дерево обозначим Y^* (X^*). Нетрудно проверить, что Y^* (X^*) является деревом решений для $\langle S_n^*, H_P(S_n^*)\rangle$ ($\langle S_n, H_P(S_n)\rangle$) и $h(Y)=h(Y^*)$ ($h(X)=h(X^*)$). Лемма 3 доказана.

Пусть D — некоторое конечное множество функциональных элементов. Тогда через $\bar D$ будем обозначать множество всех схем в базисе D, в каждой из которых все вершины соединены с выходом, через $\bar D(\widetilde{x}_n)$ — множество всех схем в базисе D с n входами, которым приписаны переменные $x_1,\ldots,x_n$, через $\Psi(\bar D)$ — множество различных функций, реализуемых схемами из $\bar D$, а через $\Psi(\bar D(\widetilde{x}_n))$ — множество различных функций, реализуемых схемами из $\bar D(\widetilde{x}_n)$. При этом будем предполагать, что, если базис D содержит элемент, который не имеет входов и реализует константу 0 (1), то $\bar D$ содержит схему, которая не имеет входов, состоит из одного элемента и реализует константу 0 (1). Множество всех схем из $\bar D$, число входов в которых не превосходит $k\geqslant 0$, будем обозначать через $\bar D_k$.

Лемма 4. 1) *Пусть b — некоторый функциональный элемент схемы S, имеющий $\tau>0$ входов, и пусть $\bar v=v_1,\ldots,v_k$ — последовательность вершин схемы S, обладающая следующими свойствами*:

а) *ни выход элемента b, ни выход схемы S не содержатся в $\bar v$*;

б) *к одной из вершин $\bar v$ присоединен i вход элемента b* ($1\leqslant i\leqslant\tau$);

в) *элемент b не соединен ни с одним функциональным элементом, выход которого содержится в $\bar v$.*

Пусть $V\in\bar P$ — некоторая схема с k входами. Встроим схему V в схему S следующим образом: отождествим («склеим») 1-й, ..., k-й вхо-

ды V с вершинами $v_1, \ldots, v_k$ соответственно, а i-й вход элемента b отсоединим от вершины из $\bar{v}$ и присоединим его к выходу V, при этом переменные, приписанные входам V, и метку, которой помечен выход V, удалим. Полученную схему обозначим через U. Тогда

$$U \in H_P(S).$$

2) *Пусть $\bar{v} = v_1, \ldots, v_k$ — некоторая последовательность вершин схемы S, содержащая выход S.*

Пусть $V \in \bar{P}$ — некоторая схема с k входами. Встроим схему V в схему S следующим образом: отождествим 1-й, ..., k-й входы V с вершинами $v_1, \ldots, v_k$ соответственно, переменные, приписанные входам V, и метку, которой помечен выход S, удалим. Полученную схему обозначим через Γ (выходом Γ является выход схемы V). Тогда

$$\Gamma \in H_P(S).$$

Доказательство. 1) Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — входы V, $k \geqslant 0$, а $e_{k+1}, \ldots, e_{k+K}$ — функциональные элементы схемы V, $K \geqslant 1$. При этом входы элемента e_{k+j} присоединены или к входам схемы V, или к выходам элементов $e_{k+1}, \ldots, e_{k+j-1}$, $1 \leqslant j \leqslant K$, а выход элемента e_{k+K} является выходом схемы V. Пусть i-й вход элемента b присоединен к s-вершине v_l из последовательности $\bar{v}$. Тогда введем в схему S последовательно элементы $e_{k+1}, \ldots, e_{k+K}$ следующим образом. Для $1 \leqslant j \leqslant K$ входы элемента e_{k+j} (если они есть) присоединяем к вершинам $v_1, \ldots, v_k$ и к выходам элементов $e_{k+1}, \ldots, e_{k+j-1}$ так, как они присоединены к входам $e_1, \ldots, e_k$ и к выходам элементов $e_{k+1}, \ldots, e_{k+j-1}$ в схеме V. При этом, если один из входов элемента e_{k+j} окажется присоединенным к вершине, к которой присоединен i-й вход элемента v_l, то i-й вход элемента v_l отсоединяем от этой вершины и присоединяем его к выходу элемента e_{k+j} (см. способы встраивания (C1) или (C3)). Если элемент e_{k+j} не имеет входов и его выход не является выходом схемы, то просто добавляем его к схеме (см. (C4)). Если же элемент e_{k+j} не имеет входов и его выход является выходом схемы, то добавляем его к схеме S, а к его выходу присоединяем i-й вход элемента v_l (способ встраивания (C6)). В полученной таким образом схеме $U \in H_P(S)$ встроенные элементы образуют подсхему из p-элементов, к выходу которой присоединен i-й вход элемента v_l и которая совпадает с максимальной подсхемой схемы V. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть как и в предыдущем случае $e_1, \ldots, e_k$ — входы V, $k \geqslant 0$, а $e_{k+1}, \ldots, e_{k+K}$ — функциональные элементы схемы V, $K \geqslant 1$. При этом входы элемента e_{k+j} присоединены или к входам схемы V, или к выходам элементов $e_{k+1}, \ldots, e_{k+j-1}$, $1 \leqslant j \leqslant K$, а выход элемента e_{k+K} является выходом схемы V.

Введем в схему U последовательно элементы $e_{k+1}, \ldots, e_{k+K}$ следующим образом. Для $1 \leqslant j \leqslant K$ входы элемента e_{k+j} (если они есть) присоединяем к вершинам $v_1, \ldots, v_k$ и к выходам элементов $e_{k+1}, \ldots, e_{k+j-1}$ так, как они присоединены к входам $e_1, \ldots, e_k$ и к выходам элементов $e_{k+1}, \ldots, e_{k+j-1}$ в схеме V. При этом, если один из входов элемента e_{k+j} окажется присоединенным к вершине v_{n+N}, то выход элемента e_{k+j} помечаем как выход схемы (см. способы встраивания (C1) или (C2)). Если элемент e_{k+j} не имеет входов и его выход не является выходом схемы, то просто добавляем его к схеме (см. способ встраивания (C4)). Если же элемент e_{k+j} не имеет входов и его выход является выходом схемы, то добавляем его к схеме U, а его выход помечаем как выход схемы (см. способ встраивания (С5)). В полученной таким образом схеме $\Gamma \in H_P(S)$ встроенные элементы образуют подсхему из p-элементов, выход которой является выходом схемы Γ и которая совпадает с максимальной подсхемой схемы V. Утверждение 2) доказано. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть базис неисправностей P таков, что множество функций $[\Psi(\bar{P})]$ содержит функцию g, равную константе $\delta \in \{0, 1\}$, а базис P не содержит элемента без входов, реализующего эту константу. Пусть e — функциональный элемент, который не имеет входов и реализует константу δ, и пусть $P' = P \cup \{e\}$. Тогда для произвольной схемы S*

$$F_P(S) = F_{P'}(S).$$

Доказательство. Очевидно, что $F_P(S) \subseteq F_{P'}(S)$. Покажем, что $F_{P'}(S) \subseteq F_P(S)$. Пусть $V \in \bar{P}$ — некоторая схема, имеющая один вход и реализующая функцию, равную константе δ. Произвольным образом возьмем схему U из $H_{P'}(S)$ и заменим каждый встроенный в нее элемент e на схему V, т. е. элемент e удаляем, а вместо него встраиваем схему V так, как это описано в лемме 4. В результате получаем схему из $H_P(S)$, которая реализует ту же функцию, что и схема U. Таким образом, $F_{P'}(S) \subseteq F_P$. Лемма 5 доказана.

Замечание 4. Ввиду утверждения леммы 5, в дальнейшем, если $\Psi(\bar{P})$ содержит функцию, равную константе δ, то, не умаляя общности и для удобства изложения, будем считать, что P содержит элемент, не имеющий входов и реализующий константу δ.

Замечание 5. Из структуры замкнутых классов булевых функций [7] следует, что, если базис неисправностей удовлетворяет свойствам, описанным в замечании 1, то множество функций $[\Psi(P)]$ представляет собой один из замкнутых классов семейства $\widetilde{\Theta}$, описание которого дано в п. 1.3.

Лемма 6. *Пусть D — некоторое конечное множество функциональных элементов, которое содержит*:

а) *хотя бы один элемент, реализующий функцию, отличную от дизъюнкции и константы,*

б) *хотя бы один элемент, реализующий функцию, отличную от конъюнкции и константы,*

в) *хотя бы один элемент, реализующий функцию, отличную от линейной булевой функции и*

г) *если замкнутый класс $[\Psi(D)]$ содержит константу 0 (1), то в D содержится элемент, не имеющий входов и реализующий константу 0 (1).*

Тогда

$$\Psi(\bar{D}) = [\Psi(D)].$$

Доказательство. Из определения функционирования схемы [2] следует, что $\Psi(\bar{D}) \subseteq [\Psi(D)]$. По условию леммы множество функций $[\Psi(D)]$ содержит: а) хотя бы одну функцию, отличную от дизъюнкции и константы, б) хотя бы одну функцию, отличную от конъюнкции и константы, в) хотя бы одну функцию, отличную от линейной булевой функции. В этом случае любую функцию из $[\Psi(D)]$, зависящую (существенно или несущественно) хотя бы от одной переменной, можно представить формулой в базисе $\Psi(D)$ [7], а по формуле легко определить схему в базисе D, реализующую ту же самую функцию. Из этого факта следует, что $[\Psi(D)] \subseteq \Psi(\bar{D})$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть S — произвольная схема, а базисы неисправностей P и P' такие, что* $\Psi(\bar{P}) \subseteq \Psi(\bar{P}')$. *Тогда*

$$F_P(S) \subseteq F_{P'}(S).$$

Доказательство. Произвольным образом возьмем схему S и схему U из $H_P(S)$. По условию леммы, для каждого элемента базиса P найдется схема в $\bar{P}'$, реализующая ту же самую функцию. Заменим в схеме U каждый p-элемент соответствующей схемой в базисе P', т. е. p-элемент удаляем, а вместо него встраиваем соответствующую ему схему из p'-элементов базиса P' так, как это описано в лемме 4. В результате получаем схему из множества $H_{P'}(S)$, которая реализует ту же функцию, что и схема U. Отсюда и из замечания 4 получаем $F_P(S) \subseteq F_{P'}(S)$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть S_n — произвольная схема с n, $n \geqslant 1$, входами, которым приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$, пусть b — некоторый элемент схемы S_n, $\varphi(\tilde{y}_\tau)$ — функция, реализуемая b, и P — базис неисправностей. Далее, пусть $g_0(X_0, y), g_1(X_1), \ldots, g_\tau(X_\tau)$ — некоторый набор функций из $[\Psi(P)]$, где $X_0, X_1, \ldots, X_\tau$ — последовательности переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда функция*

$$u(\tilde{x}_n) = g_0(X_0, \varphi(g_1(X_1), \ldots, g_\tau(X_\tau))$$

принадлежит $F_P(S_n)$.

Доказательство. Элементы базиса P удовлетворяют свойствам, описанным в замечании 1, поэтому в силу леммы 6 имеем $\Psi(\bar{P}) = [\Psi(P)]$.

Для $i = 0, \ldots, \tau$ пусть $X_i = x_1^i, \ldots, x_{q_i}^i$. Тогда в множестве $\bar{P}$ найдутся схемы $V_0, V_1, \ldots, V_\tau$, реализующие функции соответственно $v_0(X_0, y, z) = g_0(X_0, y)$, $v_1(X_1, y) = g_1(X_1)$, ..., $v_\tau(X_\tau, y) = g_\tau(X_\tau)$. Путем встраивания схем $V_0, V_1, \ldots, V_\tau$ в схему S_n так, как это делается при доказательстве леммы 4, можно показать, что найдется схема U из $H_P(S_n)$, в которой все p-элементы разбиваются на непересекающиеся подсхемы $V_0', V_1', \ldots, V_\tau'$. При этом, подсхема V_0' совпадает с максимальной подсхемой схемы V_0, выход V_0' является выходом U, а входами V_0' являются s-вершины, которым приписаны переменные $x_1^0, \ldots, x_{q_0}^0$, выход элемента b и s-вершина, являющаяся выходом схемы S_n. При $i = 1, \ldots, \tau$ подсхема V_i' совпадает с максимальной подсхемой схемы V_i, входами V_i' являются s-вершины, которым приписаны переменные $x_1^i, \ldots, x_{q_i}^i$, и s-вершина, к которой присоединен i-й вход элемента b в схеме S_n. К выходу подсхемы V_i' присоединен i-й вход элемента b. Нетрудно проверить, что реализуемая схемой U функция $u(\tilde{x}_n) = g_0(X_0, \varphi(g_1(X_1), \ldots, g_\tau(X_\tau))$ принадлежит $F_P(S_n)$. Лемма 8 доказана.

Следствие 1. *Для произвольной схемы S_n с n, $n \geqslant 1$, входами, которым приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$, и базиса неисправностей P, содержащего*:

а) *хотя бы один элемент, реализующий функцию, отличную от дизъюнкции и константы,*

б) *хотя бы один элемент, реализующий функцию, отличную от конъюнкции и константы,*

в) *хотя бы один элемент, реализующий функцию, отличную от линейной булевой функции, справедливо соотношение*

$$[\Psi(P)](\tilde{x}_n) \subseteq F_P(S_n).$$

Доказательство. Очевидно, что для любой функции $u(\tilde{x}_n)$ из $[\Psi(P)]$ найдется функция $v(\tilde{x}_n, y) \in [\Psi(P)]$ такая, что $v(\tilde{x}_n, y) = u(\tilde{x}_n)$. Пусть

f — функция, реализуемая схемой S_n. Тогда, в силу леммы 8, функция $v(\tilde{x}_n, f) = u(\tilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S_n)$. Таким образом $[\Psi(P)](\tilde{x}_n) \subseteq F_P(S_n)$.

Следствие 2. *Пусть S_n — произвольная схема с n, $n \geqslant 1$, входами, которым приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$, b — некоторый элемент схемы S_n, $\varphi(\tilde{y}_\tau)$ — функция, реализуемая b, и P — базис неисправностей такой, как и в следствии 1. Пусть S'_n — схема, в которой входам приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$, а элемент b является ее единственным функциональным элементом. Тогда*

$$F_P(S'_n) \subseteq F_P(S_n).$$

Доказательство. По определению множества $H_P(S'_n)$ произвольную функцию $u(\tilde{x}_n)$ из $F_P(S'_n)$ можно представить в следующем виде

$$u(\tilde{x}_n) = g_0(X_0, \varphi(g_1(X_1), \ldots, g_\tau(X_\tau)),$$

где $g_0(X_0, y), g_1(X_1), \ldots, g_\tau(X_\tau)$ — некоторая последовательность функций из $\Psi(\bar{P})$, а $X_0, X_1, \ldots, X_\tau$ — последовательности переменных из $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Отсюда и из леммы 8 получаем $F_P(S'_n) \subseteq F_P(S_n)$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть базис неисправностей P содержит хотя бы один элемент, реализующий немонотонную булеву функцию, и хотя бы один элемент, реализующий нелинейную булеву функцию. Тогда, учитывая замечание 1, имеем, что множество функций $[\Psi(P)]$ есть один из следующих замкнутых классов булевых функций [7]: C_1, C_2, C_3, C_4, D_3, D_1, F_4^μ, F_1^μ, F_8^μ, F_5^μ, $\mu = 2, 3, \ldots$, F_4^∞, F_1^∞, F_8^∞, F_5^∞.

Отметим, что имеют место следующие включения [7]:

$$F_4^\infty \subset \ldots \subset F_4^3 \subset F_4^2 \subset C_2 \subset C_1; \qquad F_1^\infty \subset \ldots \subset F_1^3 \subset F_1^2 \subset C_4 \subset C_2;$$
$$D_1 \subset D_3 \subset C_1, D_1 \subset C_4;$$
$$F_8^\infty \subset \ldots \subset F_8^3 \subset F_8^2 \subset C_3 \subset C_1; \qquad F_5^\infty \subset \ldots \subset F_5^3 \subset F_5^2 \subset C_4 \subset C_3.$$

Замечание 6. Для произвольных схемы S_n и базиса неисправностей P:

а) неравенство $h_P(S_n) \leqslant 2^n$ очевидно;

б) если множество $F_P(S_n)$ содержит только α- или β-функции (α- или γ-функции), то все функции из $F_P(S_n)$ на единичном (нулевом) наборе принимают значение единица (ноль) и, следовательно, $h_P(S_n) \leqslant 2^n - 1$;

в) если множество $F_P(S_n)$ содержит только α-функции, то все функции из $F_P(S_n)$ на единичном и нулевом наборах принимают значения соответственно единица и ноль, следовательно, $h_P(S_n) \leqslant 2^n - 2$;

г) если $F_P(S_n)$ содержит только самодвойственные булевы функции, то все функции из $F_P(S_n)$ на противоположных наборах принимают противоположные значения и очевидно, что $h_P(S_n) \leqslant 2^{n-1}$;

д) если $F_P(S_n)$ содержит только самодвойственные α-функции, то все функции из $F_P(S_n)$ на противоположных наборах принимают противоположные значения, а на нулевом и единичном наборах всегда принимают значения соответственно 0 и 1, следовательно, $h_P(S_n) \leqslant 2^{n-1} - 1$.

Пусть $u(\tilde{x}_n)$ — произвольная булева функция, $n \geqslant 0$, и $r_n = (r^1, \ldots, r^n)$ — произвольный двоичный набор, а $r'_n = (\bar{r}^1, \ldots, \bar{r}^n)$ — набор, противоположный набору r_n. Тогда через $u_{r_n}(\tilde{x}_n)$ ($u_{r_n, r'_n}(\tilde{x}_n)$) будем обозначать булеву функцию, которая отличается от функции $u(\widetilde{x}_n)$ только на наборе r_n (только на наборах r_n и r'_n).

Нулевой и единичный наборы из $\{0, 1\}^m$ иногда будем обозначать через 0^m и 1^m соответственно.

Обозначим через S'_n схему с n, $n \geqslant 1$, входами, которым приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$, в которой только один функциональный элемент, этот элемент реализует функцию $\varphi(\widetilde{y}_\tau)$, $\tau \geqslant 0$, и которая реализует функцию $f(\widetilde{x}_n) = \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\tau})$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_\tau \leqslant n$.

В леммах 9–18 содержатся доказательства теоремы 1 для схемы S'_n и базиса неисправностей P такого, что замкнутый класс $[\Psi(P)]$ есть или один из следующих замкнутых классов C_1, C_2, C_3, C_4, D_3, D_1, или $F_8^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq \subseteq F_8^2$, или $F_4^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_4^2$, или $F_5^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_5^2$, или $F_1^\infty \subseteq [\Psi(P) \subseteq F_1^2$.

Л е м м а 9. *Пусть* $[\Psi(P)] = C_1$, *тогда* $h_P(S'_n) = 2^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $F_P(S'_n) \subseteq C_1(\widetilde{x}_n)$. В силу следствия 1, $C_1(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S'_n)$. Таким образом, $F_P(S'_n) = C_1(\widetilde{x}_n)$,

Произвольным образом возьмем функцию $u \in C_1(\widetilde{x}_n)$ и рассмотрим множество функций $G = \{u\} \cup \{u_{r_n}\colon\ r_n \in \{0, 1\}^n\} \subseteq C_1(\widetilde{x}_n)$. Так как $C_1(\widetilde{x}_n) = F_P(S'_n)$, поэтому $G \subseteq F_P(S'_n)$. Легко проверить, что G является П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Из леммы 1 следует, что $h_P(S'_n) \geqslant |G| - 1 = 2^n$. Неравенство $h_P(S'_n) \leqslant 2^n$ очевидно. Лемма 9 доказана.

Л е м м а 10. *Пусть* $[\Psi(P)] = C_2$, *тогда*:

а) *если* φ — α- *или* β-*функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n - 1$;

б) *если* φ — γ- *или* δ-*функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть φ — α- или β-функция. Тогда все функции из $F_P(S'_n)$ являются α- или β-функциями, потому $F_P(S'_n) \subseteq C_2(\widetilde{x}_n)$. В силу следствия 1, $C_2(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S'_n)$. Таким образом, $F_P(S'_n) = C_2(\widetilde{x}_n)$.

Произвольным образом возьмем функцию $u \in C_2(\widetilde{x}_n)$ и рассмотрим множество функций $G = \{u\} \cup \{u_{r_n}\colon\ r_n \in \{0, 1\}^n \setminus \{1^n\}\}$, содержащееся в $C_2(\widetilde{x}_n)$, $C_2(\widetilde{x}_n) = F_P(S'_n)$, поэтому $G \subseteq F_P(S'_n)$. Нетрудно проверить, что G является П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Из леммы 1 следует, что $h_P(S'_n) \geqslant |G| - 1 = 2^n - 1$. В соответствии с замечанием 6, б) имеет место неравенство $h_P(S'_n) \leqslant 2^n - 1$. Утверждение а) доказано.

б) Пусть φ — γ- или δ-функция. В этом случае функция $\varphi(y, \ldots, y)$ равна или константе 0, или функции $\bar{y}$.

Очевидно, что $F_P(S'_n) \subseteq C_1(\widetilde{x}_n)$.

Нетрудно проверить, что для произвольной функции $u(\widetilde{x}_n)$ из C_1 найдется функция $v(\widetilde{x}_n, y)$ из C_2 такая, что $v(\widetilde{x}_n, \varphi(x_j, \ldots, x_j)) = u(\widetilde{x}_n)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Далее, возьмем из множества C_2 функцию $w(x, y) = x$ и рассмотрим функцию $v(\widetilde{x}_n, \varphi(w(x_j, x_{i_1}), \ldots, w(x_j, x_{i_\tau})))$, где $1 \leqslant j \leqslant n$. Легко проверить, что она равна $u(\widetilde{x}_n)$. Отсюда и из леммы 8 следует, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S'_n)$. Функция $u(\widetilde{x}_n)$ из класса C_1 выбрана произвольно, поэтому $C_1(\widetilde{x}_n) = F_P(S'_n)$. Далее доказательство проводится так же, как и доказательство леммы 9. Утверждение б) доказано. Лемма 10 доказана.

В силу двойственности классов C_2 и C_3 и лемм 3, 10 справедлива

Л е м м а 11. *Пусть* $[\Psi(P)] = C_3$, *тогда*:

а) *если* φ — α- *или* γ-*функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n - 1$;

б) *если* φ — β- *или* δ-*функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n$.

Л е м м а 12. *Пусть* $[\Psi(P)] = C_4$, *тогда*:

а) *если* φ — α-*функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n - 2$;

б) *если* φ — β- *или* γ-*функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n - 1$;

в) *если* φ — δ-*функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n$.

Доказательство. а) Пусть φ — α-функция. Тогда все функции из $F_P(S'_n)$ являются только α-функциями, поэтому $F_P(S'_n) \subseteq C_4(\widetilde{x}_n)$. В силу следствия 1, $C_4(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S'_n)$. Таким образом, $F_P(S'_n) = C_4(\widetilde{x}_n)$.

Произвольным образом возьмем функцию $u \in C_4(\widetilde{x}_n)$ и рассмотрим множество функций $G = \{u\} \cup \{u_{r_n}\colon r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\} \subseteq C_4(\widetilde{x}_n)$, $C_4(\widetilde{x}_n) = F_P(S'_n)$, поэтому $G \subseteq F_P(S'_n)$. Нетрудно убедиться, что G является П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 следует $h_P(S'_n) \geqslant |G| - 1 = 2^n - 2$, а в соответствии с замечанием 6, в) справедливо неравенство $h_P(S'_n) \leqslant 2^n - 2$. Утверждение а) доказано.

б) Пусть φ — β-(γ)-функция. Тогда $\varphi(y, \ldots, y) = 1$ ($\varphi(y, \ldots, y) = 0$). Кроме того, множество $F_P(S'_n)$ содержит только α- и β-(γ)-функции и, следовательно, $F_P(S'_n) \subseteq C_2(\widetilde{x}_n)$ ($F_P(S'_n) \subseteq C_3(\widetilde{x}_n)$).

Нетрудно проверить, что для произвольной функции $u(\widetilde{x}_n)$ из C_2 ($u(\widetilde{x}_n)$ из C_3) найдется функция $v(\widetilde{x}_n, y)$ из C_4 такая, что $v(\widetilde{x}_n, \varphi(y, \ldots, y) = u(\widetilde{x}_n)$.

Возьмем из множества C_2 (C_3) функцию $w(x, y) = x$ и рассмотрим функцию $v(\widetilde{x}_n, \varphi(w(x_j, x_{i_1}), \ldots, w(x_j, x_{i_r})))$, где $1 \leqslant j \leqslant n$. Легко проверить, что она равна $u(\widetilde{x}_n)$. Отсюда и из леммы 8 следует, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S_n)$. Функция $u(\widetilde{x}_n)$ выбрана произвольно из C_2 (C_3). Поэтому $C_2(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S'_n)$ ($C_2(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S'_n)$). Таким образом $C_2(\widetilde{x}_n) = F_P(S'_n)$ ($C_3(\widetilde{x}_n) = F_P(S'_n)$).

Далее см. доказательство утверждения а) леммы 9 (леммы 10). Утверждение б) доказано.

в) Пусть φ — δ-функция. В этом случае $\varphi(y, \ldots, y) = \bar{y}$. Включение $F_P(S'_n) \subseteq C_1(\widetilde{x}_n)$ очевидно.

Нетрудно проверить, что для произвольной функции $u(\widetilde{x}_n)$ из C_1 найдется функция $v(\widetilde{x}_n, y)$ из C_4 такая, что $v(\widetilde{x}_n, \varphi(x_j, \ldots, x_j)) = v(\widetilde{x}_n, \bar{x}_j) = u(\widetilde{x}_n)$, где $1 \leqslant j \leqslant n$.

Возьмем теперь из множества C_4 функцию $w(x, y) = x$ и рассмотрим функцию $v(\widetilde{x}_n, \varphi(w(x_j, x_{i_1}), \ldots, w(x_j, x_{i_r})))$. Легко проверить, что она равна $u(\widetilde{x}_n)$. Отсюда и из леммы 8 следует, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S'_n)$. Функция $u(\widetilde{x}_n)$ выбрана произвольно из C_1, поэтому $C_1(\widetilde{x}_n) = F_P(S'_n)$. Далее см. доказательство леммы 9. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Пусть* $[\Psi(P)] = D_3$, *тогда*:

а) *если* φ — *самодвойственная функция, то* $h_P(S'_n) = 2^{n-1}$;

б) *если* φ — *несамодвойственная функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n$.

Доказательство. а) Пусть φ — самодвойственная функция. Тогда $F_P(S'_n) \subseteq D_3(\widetilde{x}_n)$, а, в силу следствия 1, $D_3(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S'_n)$. Таким образом, $F_P(S'_n) = D_3(\widetilde{x}_n)$.

Пусть $\Delta \subset \{0,1\}^n$ — подмножество максимальной мощности, не содержащее противоположных наборов. Тогда нетрудно проверить, что для произвольных функции u из $D_3(\widetilde{x}_n)$ и набора r_n из Δ функция u_{r_n, r'_n} принадлежит $D_3(\widetilde{x}_n)$, а $D_3(\widetilde{x}_n) = F_P(S'_n)$. Поэтому множество функций $G = \{u\} \cup \{u_{r_n, r'_n}\colon r_n \in \Delta\}$ содержится в $F_P(S'_n)$. Легко проверить, что G является П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$.

В силу леммы 1 имеем $h_P(S'_n) \geqslant 2^{n-1}$, а в соответствии с замечанием 6, г) справедливо неравенство $h_P(S'_n) \leqslant 2^{n-1}$. Утверждение а) леммы доказано.

б) Пусть φ — β-(γ)-функция. Тогда $\varphi(y, \ldots, y) = 1$ ($\varphi(y, \ldots, y) = 0$). Включение $F_P(S'_n) \subseteq C_1(\widetilde{x}_n)$ очевидно.

Нетрудно проверить, что для произвольной функции $u(\widetilde{x}_n)$ из C_1 найдется функция $v(\widetilde{x}_n, y)$ из $[\Psi(P)]$ такая, что $v(\widetilde{x}_n, \varphi(y, \ldots, y)) = v(\widetilde{x}_n, 1) = u(\widetilde{x}_n)$ ($v(\widetilde{x}_n, \varphi(y, \ldots, y)) = v(\widetilde{x}_n, 0) = u(\widetilde{x}_n)$).

Возьмем из множества $[\Psi(P)]$ функцию $w(x, y) = x$ и рассмотрим функцию $v(\widetilde{x}_n, \varphi(w(x_j, x_{i_1}), \ldots, w(x_j, x_{i_\tau})))$, где $1 \leqslant j \leqslant n$. Легко проверить, что она равна $u(\widetilde{x}_n)$. Отсюда и из леммы 8 следует, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S_n')$. Таким образом, $F_P(S_n') = C_1(\widetilde{x}_n)$.

Далее см. доказательство леммы 9.

Пусть теперь φ — несамодвойственная α-(δ)-функция. Тогда найдется набор $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_\tau)$ из $\{0, 1\}^\tau \setminus \{0^\tau, 1^\tau\}\}$ такой, что $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_\tau) = \varphi(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_\tau)$. Пусть, например, $\sigma_1 = \ldots = \sigma_s = 0$, а $\sigma_{s+1} = \ldots = \sigma_\tau = 1$. Тогда функция

$$\varphi(\overbrace{x, \ldots, x}^{s}, \overbrace{y, \ldots, y}^{\tau - s})$$

равна $x \cdot y$ или $x \vee y$ ($\overline{x \cdot y}$ или $\overline{x \vee y}$). Пусть функции $w_1(\widetilde{x}_n)$, $w_2(\widetilde{x}_n)$ из D_3 таковы, что $w_2(\widetilde{x}_n) = \bar{w}_1(\widetilde{x}_n)$. Тогда

$$g(\widetilde{x}_n) = \varphi(\overbrace{w_1(\widetilde{x}_n), \ldots, w_1(\widetilde{x}_n)}^{s}, \overbrace{w_2(\widetilde{x}_n), \ldots, w_2(\widetilde{x}_n)}^{\tau - s}) = \delta, \ \ \delta \in \{0, 1\}.$$

Пусть $u(\widetilde{x}_n) \in C_1$ — произвольная функция, а функции $v(\widetilde{x}_n, y)$, $w_1'(\widetilde{x}_n, y)$, $w_2'(\widetilde{x}_n, y)$ из $[\Psi(P)]$ таковы, что $v(\widetilde{x}_n, \delta) = u(\widetilde{x}_n)$, $w_1'(\widetilde{x}_n, y) = w_1(\widetilde{x}_n)$, $w_2'(\widetilde{x}_n, y) = w_2(\widetilde{x}_n)$. Тогда

$$v(\widetilde{x}_n, \varphi(\overbrace{w_1'(\widetilde{x}_n, x_{i_1}), \ldots, w_1'(\widetilde{x}_n, x_{i_\tau})}^{s}, \overbrace{w_2'(\widetilde{x}_n, x_{i_1}), \ldots, w_2'(\widetilde{x}_n, x_{i_\tau})}^{\tau - s})) =$$
$$= v(\widetilde{x}_n, g(\widetilde{x}_n)) = v(\widetilde{x}_n, \delta) = u(\widetilde{x}_n).$$

Отсюда и из леммы 8 получаем, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S_n')$. Таким образом $F_P(S_n') = C_1(\widetilde{x}_n)$.

Далее см. доказательство леммы 9. Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Пусть* $[\Psi(P)] = D_1$, *тогда*:

а) *если* φ — *самодвойственная* α-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^{n-1} - 1$;

б) *если* φ — β- *или* γ-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^n - 1$;

в) *если* φ — *несамодвойственная* α-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^n - 2$;

г) *если* φ — *самодвойственная* δ-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^{n-1}$;

д) *если* φ — *несамодвойственная* δ-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^n - 1$.

Доказательство. а) Пусть φ — самодвойственная α-функция, т. е. $\varphi \in D_1$. В этом случае $F_P(S_n) \subseteq D_1(\widetilde{x}_n)$. В силу следствия 1 имеем $D_1(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S_n')$. Таким образом, $F_P(S_n') = D_1(\widetilde{x}_n)$.

Пусть $\Delta \subset \{0, 1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}$ — подмножество максимальной мощности, не содержащее противоположных наборов. Тогда нетрудно проверить, что для произвольных функции u из $D_1(\widetilde{x}_n)$ и набора r_n из Δ функция $u_{r_n, r_n'}$ принадлежит $D_1(\widetilde{x}_n)$, а $D_3(\widetilde{x}_n) = F_P(S_n')$. Поэтому $G = \{u\} \cup \{u_{r_n, r_n'}: r_n \in \Delta\} \subseteq F_P(S_n')$. Легко проверить, что G является П-множеством для $\langle S_n', H_P(S_n')\rangle$. Отсюда и из леммы 1 получаем $h_P(S_n') \geqslant 2^{n-1} - 1$, а в соответствии с замечанием 6, д) имеем $h_P(S_n') \leqslant 2^{n-1} - 1$. Утверждение а) доказано.

б) Пусть φ — β-(γ)-функция. Тогда $\varphi(y, \ldots, y) = 1$ ($\varphi(y, \ldots, y) = 0$). Очевидно, что $F_P(S_n') \subseteq C_2(\widetilde{x}_n)$ ($F_P(S_n) \subseteq C_3(\widetilde{x}_n)$).

Нетрудно проверить, что для произвольной функции $u(\widetilde{x}_n)$ из C_2 ($u(\widetilde{x}_n)$ из C_3) найдется функция $v(\widetilde{x}_n, y)$ из $D_1 = [\Psi(P)]$ такая, что $v(\widetilde{x}_n, \varphi(y, \ldots, y)) = v(\widetilde{x}_n, 1) = u(\widetilde{x}_n)$ ($v(\widetilde{x}_n, \varphi(y, \ldots, y)) = v(\widetilde{x}_n, 0) = u(\widetilde{x}_n)$).

Пусть функция $w(x, y)$ из D_1 такова, что $w(x, y) = x$. Тогда

$$v(\widetilde{x}_n, \varphi(w(x_j, x_{i_1}), \ldots, w(x_j, x_{i_\tau}))) = u(\widetilde{x}_n), \ \ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Отсюда, из леммы 8 и равенства $D_1=[\Psi(P)]$ следует, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S'_n)$. Таким образом $F_P(S'_n)=C_2(\widetilde{x}_n)$ $(F_P(S'_n)=C_3(\widetilde{x}_n))$.

Далее см. доказательство леммы 10, а), а также лемму 11, а). Утверждение б) доказано.

в) Пусть φ — несамодвойственная α-функция. Тогда $F_P(S'_n)\subseteq C_4$. Далее, найдется набор $\widetilde{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_\tau)$ из $\{0,1\}^\tau\setminus\{0^\tau,1^\tau\}\}$ такой, что $\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_\tau)=\varphi(\bar\sigma_1,\ldots,\bar\sigma_\tau)$. Пусть, например, $\sigma_1=\ldots=\sigma_s=0$, а $\sigma_{s+1}=\ldots=\sigma_\tau=1$. Тогда функция

$$\varphi(\overbrace{x,\ldots,x}^{s},\overbrace{y,\ldots,y}^{\tau-s})$$

равна $x\cdot y$ или $x\vee y$. Пусть функции $w_1(\widetilde{x}_n), w_2(\widetilde{x}_n)$ из D_1 таковы, что $w_2(\delta_1,\ldots,\delta_n)=\bar w_1(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ для любого набора $(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in$ $\in\{0,1\}^n\setminus\{0^n,1^n\}\}$. Тогда функция

$$g(\widetilde{x}_n)=\varphi(\overbrace{w_1(\widetilde{x}_n),\ldots,w_1(\widetilde{x}_n)}^{s},\overbrace{w_2(\widetilde{x}_n),\ldots,w_2(\widetilde{x}_n)}^{\tau-s})$$

равна $x_1\cdot\ldots\cdot x_n$ или $x_1\vee\ldots\vee x_n$.

Пусть функция $u(\widetilde{x}_n)$ из C_4 — произвольная, а функции $v(\widetilde{x}_n,y)$, $w'_1(\widetilde{x}_n,y)$, $w'_2(\widetilde{x}_n,y)$ из $[\Psi(P)]$ таковы, что $v(\widetilde{x}_n,g(\widetilde{x}_n))=u(\widetilde{x}_n)$, $w'_1(\widetilde{x}_n,y)=$ $=w_1(\widetilde{x}_n)$, $w'_2(\widetilde{x}_n,y)=w_2(\widetilde{x}_n)$. Тогда

$$v(\widetilde{x}_n,\varphi(\overbrace{w'_1(\widetilde{x}_n,x_{i_1}),\ldots,w'_1(\widetilde{x}_n,x_{i_\tau})}^{s},\overbrace{w'_2(\widetilde{x}_n,x_{i_1}),\ldots,w'_2(\widetilde{x}_n,x_{i_\tau})}^{\tau-s}))=$$
$$=v(\widetilde{x}_n,g(\widetilde{x}_n))=u(\widetilde{x}_n).$$

Отсюда и из леммы 8 следует, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S'_n)$. Таким образом, $F_P(S'_n)=C_4(\widetilde{x}_n)$.

Далее см. доказательство леммы 11, а). Утверждение в) доказано.

г) Пусть φ — самодвойственная δ-функция. Тогда $\varphi(y,\ldots,y)=\bar y$, а также $F_P(S'_n)\subseteq D_3$.

Для произвольной функции $u(\widetilde{x}_n)$ из D_3 найдется функция $v(\widetilde{x}_n,y)$ из $[\Psi(P)]$ такая, что $v(\widetilde{x}_n,\varphi(x_j,\ldots,x_j))=u(\widetilde{x}_n)$, где $1\leqslant j\leqslant n$.

Пусть $w(x,y)$ — такая функция из $[\Psi(P)]$, что $w(x,y)=x$. Тогда

$$v(\widetilde{x}_n,\varphi(w(x_j,x_{i_1}),\ldots,w(x_j,x_{i_\tau})))=u(\widetilde{x}_n).$$

Отсюда и из леммы 8 следует, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S'_n)$. Таким образом, $F_P(S'_n)=D_3(\widetilde{x}_n)$.

Далее см. доказательство леммы 13, а). Утверждение г) доказано.

д) Пусть φ — несамодвойственная δ-функция. Тогда в множестве наборов $\{0,1\}^\tau\setminus\{0^\tau,1^\tau\}\}$ найдется набор $\widetilde{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_\tau)$ такой, что $\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_\tau)=\varphi(\bar\sigma_1,\ldots,\bar\sigma_\tau)$. Пусть, например, $\sigma_1=\ldots\sigma_s=0$, а $\sigma_{s+1}=\ldots=\sigma_\tau=1$. Тогда функция

$$\varphi(\overbrace{x,\ldots,x}^{s},\overbrace{y,\ldots,y}^{\tau-s})$$

равна $\overline{x\cdot y}$ или $\overline{x\vee y}$. Пусть $w_1(\widetilde{x}_n), w_1(\widetilde{x}_n)$ такие функции из D_1, что $w_2(\delta_1,\ldots,\delta_n)=\bar w_1(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ для любого набора $(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ из $\{0,1\}^n\setminus\{0^n,1^n\}\}$. Тогда функция

$$g(\widetilde{x}_n)=\varphi(\overbrace{w_1(\widetilde{x}_n),\ldots,w_1(\widetilde{x}_n)}^{s},\overbrace{w_2(\widetilde{x}_n),\ldots,w_2(\widetilde{x}_n)}^{\tau-s}),$$

равна $\overline{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}$, или $\overline{x_1\vee\ldots\vee x_n}$.

Обозначим $C_4 \cup \{\bar{\psi}: \psi \in C_4\}$ через C_4'. Нетрудно проверить, что $F_P(S_n') \subseteq C_4'$.

Пусть $u(\widetilde{x}_n)$ — произвольная функция из C_4', и функции $v(\widetilde{x}_n, y)$, $w_1'(\widetilde{x}_n, y)$, $w_2'(\widetilde{x}_n, y)$ из $[\Psi(P)]$ таковы, что $v(\widetilde{x}_n, g(\widetilde{x}_n)) = u(\widetilde{x}_n)$, $w_1'(\widetilde{x}_n, y) = w_1(\widetilde{x}_n)$, $w_2'(\widetilde{x}_n, y) = w_2(\widetilde{x}_n)$. Тогда

$$v(\widetilde{x}_n, \varphi(\overbrace{w_1'(\widetilde{x}_n, x_{i_1}), \ldots, w_1'(\widetilde{x}_n, x_{i_r})}^{s}(\overbrace{w_2'(\widetilde{x}_n, x_{i_1}), \ldots, w_2'(\widetilde{x}_n, x_{i_r})}^{r-s}))) = \\ = v(\widetilde{x}_n, g(\widetilde{x}_n)) = u(\widetilde{x}_n).$$

Отсюда и из леммы 8 следует, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S_n')$. Таким образом, $F_P(S_n') = C_4'(\widetilde{x}_n)$. Множество функций $G = \{u\} \cup \{u_{0^n, 1^n}\} \cup \{u_{r_n}: r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}\}$, очевидно, является подмножеством $C_4'(\widetilde{x}_n)$ и подмножеством $F_P(S_n')$, так как $F_P(S_n') = C_4'(\widetilde{x}_n)$. Легко проверить, что G является П-множеством для $\langle S_n', H_P(S_n')\rangle$. Отсюда и из леммы 1 следует $h_P(S_n') \geqslant 2^n - 1$. Нетрудно показать, что $h_P(S_n') \leqslant 2^n - 1$.

Лемма 14 доказана.

Л е м м а 15. *Пусть* $F_8^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_8^2$, *тогда*:

а) *если* φ — β- *или* δ-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^n$;

б) *если* φ — α- *или* γ-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^n - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть φ — β-функция, тогда $\varphi(y, \ldots, y) = 1$. Очевидно, что $F_P(S_n') \subseteq C_1(\widetilde{x}_n)$.

Нетрудно проверить, что для произвольной функции $u(\widetilde{x}_n)$ из C_1 найдется функция $v(\widetilde{x}_n, y)$ из $[\Psi(P)]$ такая, что $v(\widetilde{x}_n, 1) = u(\widetilde{x}_n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Пусть $w(x, y)$ — функция из $[\Psi(P)]$ такая, что $w(x, y) = x$. Тогда

$$v(\widetilde{x}_n, \varphi(w(x_j, x_{i_1}), \ldots, w(x_j, x_{i_r}))) = u(\widetilde{x}_n).$$

Отсюда и из леммы 8 получаем, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S_n')$. Таким образом, $C_1(\widetilde{x}_n) = F_P(S_n')$. Далее см. доказательство леммы 9.

Пусть теперь φ — δ-функция, тогда $\varphi(y, \ldots, y) = \bar{y}$.

Как и в предыдущем случае, для произвольной функции $u(\widetilde{x}_n)$ из C_1 найдется функция $v(\widetilde{x}_n, y)$ из $\Psi(P)$ такая, что $v(\widetilde{x}_n, 1) = u(\widetilde{x}_n)$.

Заметим, что константа 0 принадлежит $[\Psi(P)]$ и

$$v(\widetilde{x}_n, \varphi(0, \ldots, 0)) = u(\widetilde{x}_n).$$

Отсюда и из леммы 8 следует, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S_n')$. Таким образом, $F_P(S_n') = C_1(\widetilde{x}_n)$.

Далее см. доказательство леммы 9. Утверждение а) доказано.

б) Пусть φ — α- или γ-функция, тогда $F_P(S_n')$ содержит только α- или γ-функции. Поэтому (см. замечание 6, б)) справедливо $h_P(S_n') \leqslant 2^n - 1$.

В силу следствия 1, $F_8^\infty(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S_n')$. Обозначим через $0(\widetilde{x}_n)$ функцию, тождественно равную константе 0. Используя определение класса $F_8^\infty(\widetilde{x}_n)$, нетрудно показать, что множество функций

$$G = \{0(\widetilde{x}_n)\} \cup \{0_{r_n}(\widetilde{x}_n): r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n\}\}$$

является подмножеством $F_8^\infty(\widetilde{x}_n)$ и, следовательно, подмножеством $F_P(S_n')$. Легко проверить, что G является П-множеством для $\langle S_n', H_P(S_n')\rangle$. Отсюда и из леммы 1 следует неравенство $h_P(S_n') \geqslant 2^n - 1$. Лемма 15 доказана.

В силу двойственности классов F_8^∞ и F_4^∞, F_8^μ и F_4^μ, $\mu = 2, 3, \ldots$ и лемм 3, 15 справедлива

Лемма 16. *Пусть* $F_4^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_4^2$, *тогда*:

а) *если* φ — γ- *или* δ-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^n$;

б) *если* φ — α- *или* β-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^n - 1$.

Лемма 17. *Пусть* $F_5^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_5^2$, *тогда*:

а) *если* φ — α-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^n - 2$;

б) *если* φ — β- *или* γ-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^n - 1$;

в) *если* φ — δ-*функция, то* $h_P(S_n') = 2^n$.

Доказательство. а) Пусть φ — α-функция. Тогда все функции из $F_P(S_n')$ являются α-функциями, поэтому $h_P(S_n') \leqslant 2^n - 2$ (см. замечание 6, в)).

В силу следствия 1, $F_5^\infty(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S_n')$. Обозначим через $g(\widetilde{x}_n)$ функцию, равную $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Используя определение класса $F_5^\infty(\widetilde{x}_n)$, нетрудно показать, что множество функций $G = \{g(\widetilde{x}_n)\} \cup \{0_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}\}$ является подмножеством $F_5^\infty(\widetilde{x}_n)$ и, следовательно, подмножеством $F_P(S_n')$. Легко проверить, что G является П-множеством для $\langle S_n', H_P(S_n')\rangle$. Отсюда и из леммы 1 следует неравенство $h_P(S_n') \geqslant 2^n - 2$.

Утверждение а) доказано.

б) Пусть φ — β-функция. Тогда $\varphi(x, \ldots, x) = 1$, а все функции из $F_P(S_n')$ являются α- или β-функциями. Поэтому $h_P(S_n') \leqslant 2^n - 1$ (см. замечание 6, б)).

Пусть $u(\widetilde{x}_n)$ — произвольная функция из C_2, а $v(\widetilde{x}_n, y)$, $w(x, y)$ — функции из $[\Psi(P)]$ такие, что $w(x, y) = x$, $v(\widetilde{x}_n, 1) = u(\widetilde{x}_n)$. Тогда для $1 \leqslant j \leqslant n$

$$v(\widetilde{x}_n, \varphi(w(x_j, x_{i_1}), \ldots, w(x_j, x_{i_r}))) = v(\widetilde{x}_n, \varphi(x_j, \ldots, x_j)) = v(\widetilde{x}_n, 1) = u(\widetilde{x}_n).$$

Отсюда и из леммы 8 следует, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S_n')$. Таким образом, $F_P(S_n') = C_2$. Далее см. доказательство леммы 10, а).

Пусть теперь φ — γ-функция. Тогда $\varphi(x, \ldots, x) = 0$, а все функции из $F_P(S_n')$ являются α- или γ-функциями. Поэтому $h_P(S_n') \leqslant 2^n - 1$ (см. замечание 6, б)).

В силу следствия 1, $F_5^\infty(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S_n')$. Обозначим функцию $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ через $g(\widetilde{x}_n)$. Используя определение класса F_5^∞, нетрудно доказать, что функция $g(\widetilde{x}_n)$ и функция $g_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ для любого набора $r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}$ принадлежат классу F_5^∞, который содержится в $F_P(S_n')$. Пусть функция $w(x, y)$ из $[\Psi(P)]$ такова, что $w(x, y) = x$. Тогда $\varphi(w(x_j, x_{i_1}), \ldots, w(x_j, x_{i_r})) = \varphi(x_j, \ldots$ $\ldots, x_j) = 0(\widetilde{x}_n) = 0$. Из леммы 8 следует, что $0(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S_n')$. Таким образом, $\{g, 0(\widetilde{x}_n)\} \cup \{g_{r_n}\colon r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}\} \subseteq F_P(S_n')$ и, очевидно, является П-множеством для $\langle S_n', H_P(S_n')\rangle$. Поэтому $h_P(S_n') \geqslant 2^n - 1$ (см. лемму 1). Утверждение б) доказано.

в) Пусть φ — δ-функция. Тогда $\varphi(x, \ldots, x) = \bar{x}$. Для функции $0(\widetilde{x}_n) = 0$ и любого набора r_n из $\{0,1\}^n$ в $F_5^\infty(\widetilde{x}_n)$ найдутся функции $g(x, y)$, $w(x, y)$, $v_{r_n}(\widetilde{x}_n, y)$ такие, что $g(x, y) = x \cdot y$, $w(x, y) = x$, $v_{r_n}(\widetilde{x}_n, \bar{x}_j) = 0_{r_n}(\widetilde{x}_n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Отметим, что $F_5^\infty(\widetilde{x}_n) \subseteq [\Psi(P)]$ Далее,

$$g(x_j, \varphi(w(x_j, x_{i_1}), \ldots, w(x_j, x_{i_r}))) = g(x_j, \varphi(x_j, \ldots, x_j)) = g(x_j, \bar{x}_j) = 0(\widetilde{x}_n),$$

$$v_{r_n}(\widetilde{x}_n, \varphi(w(x_j, x_{i_1}), \ldots, w(x_j, x_{i_r}))) = \\ = v_{r_n}(\widetilde{x}_n, \varphi(x_j, \ldots, x_j)) = v_{r_n}(\widetilde{x}_n, \bar{x}_j) = 0_{r_n}(\widetilde{x}_n),$$

поэтому, в силу леммы 8, множество функций $\{0(\widetilde{x}_n)\} \cup \{0_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon r_n \in \{0,1\}^n\}$ содержится в $F_P(S_n')$ и, очевидно, является П-множеством для $\langle S_n', H_P(S_n')\rangle$.

Отсюда и из леммы 1 следует $h_P(S_n) \geqslant 2^n$. Неравенство $h_P(S_n) \leqslant 2^n$ очевидно. Лемма 17 доказана.

В силу лемм 3, 17 и двойственности классов F_5^∞ и F_1^∞, F_5^μ и F_1^μ, $\mu = 2, 3, \ldots$ справедлива

Лемма 18. *Пусть* $F_1^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_1^2$, *тогда*:

а) *если* φ — α*-функция, то* $h_P(S_n') = 2^n - 2$;

б) *если* φ — β*- или* γ*-функция, то* $h_P(S_n') = 2^n - 1$;

в) *если* φ — δ*-функция, то* $h_P(S_n') = 2^n$.

Утверждение теоремы 1 следует из лемм 7, 9–18 и следствия 2.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Пусть все элементы базиса неисправностей P реализуют только монотонные булевы функции и при этом:

— хотя бы один элемент реализует функцию, отличную от конъюнкции и константы;

— хотя бы один элемент реализует функцию, отличную от дизъюнкции и константы;

— хотя бы один элемент реализует функцию, отличную от самодвойственной монотонной функции,

Тогда [7] множество функций $[\Psi(P)]$ есть один из следующих замкнутых классов: M_1, M_2, M_3, M_4, F_2^∞, F_3^∞, F_6^∞, F_7^∞ и F_2^μ, F_3^μ, F_6^μ, F_7^μ для $\mu = 2, 3, \ldots$.

Отметим, что имеют место следующие включения [7]:

$$F_3^\infty \subset \ldots F_3^3 \subset F_3^2 \subset M_2 \subset M_1; \qquad F_2^\infty \subset \ldots F_2^3 \subset F_2^2 \subset M_4 \subset M_2;$$

$$F_7^\infty \subset \ldots F_7^3 \subset F_7^2 \subset M_3 \subset M_1; \qquad F_6^\infty \subset \ldots F_6^3 \subset F_6^2 \subset M_4 \subset M_3.$$

Пусть $u(\widetilde{x}_n)$ — произвольная булева функция, $n \geqslant 0$, и $r_n = (r^1, \ldots, r^n)$ — произвольный двоичный набор, а $r_n' = (\bar{r}^1, \ldots, \bar{r}^n)$ — набор, противоположный набору r_n. Тогда через $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ ($u_{r_n, r_n'}(\widetilde{x}_n)$) будем обозначать булеву функцию, которая отличается от функции $u(\widetilde{x}_n)$ только на наборе r_n (только на наборах r_n и r_n').

Обозначим через S_n' схему с n, $n \geqslant 4$, входами, которым приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$, в которой только один функциональный элемент, этот элемент реализует функцию $\varphi(\widetilde{y}_\tau)$, $\tau \geqslant 0$, а схема S_n' реализует функцию $f(\widetilde{x}_n) = \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\tau})$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_\tau \leqslant n$.

В леммах 19–28 содержатся доказательства теоремы 2 для схемы S_n' и базиса неисправностей P такого, что $[\Psi(P)]$ есть либо один из замкнутых классов M_1, M_2, M_3, M_4, либо $F_2^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_3^2$, либо $F_6^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_7^2$.

Пусть $u(\widetilde{x}_n)$ — произвольная монотонная булева функция, тогда будем обозначать через $N_0(u(\widetilde{x}_n))$ и $N_1(u(\widetilde{x}_n))$ множества всех соответственно верхних нулей и нижних единиц функции $u(\widetilde{x}_n)$.

Лемма 19. *Пусть* $[\Psi(P)] = M_1$, *тогда*:

а) *если* φ — *монотонная булева функция, то*

$$h_P(S_n') = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1};$$

б) *если* φ — *немонотонная булева функция, то* $h_P(S_n') = 2^n$.

Доказательство. а) Пусть φ — монотонная булева функция. Тогда $F_P(S_n')$ содержит только монотонные булевы функции. Из алгоритма расшифровки монотонных булевых функций [8] получаем неравенство

$$h_P(S_n') \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

Пусть $u(\widetilde{x}_n)$ — такая функция из M_1, что

$$|N_0(u(\widetilde{x}_n))| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}, \quad |N_1(u(\widetilde{x}_n))| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

Очевидно, что $G=\{u\}\cup\{u_{r_n}: r_n \in N_0(u)\cup N_1(u)\}$ содержится в $M_1(\widetilde{x}_n)$ В силу следствия 1, имеем $M_1(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S'_n)$. Таким образом, $G \subseteq F_P(S'_n)$. Далее, нетрудно показать, что G является П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 следует

$$h_P(S'_n) \geqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

Утверждение а) доказано.

б) Пусть φ — немонотонная булева функция. Известно, что путем подстановки констант 0 и 1 и переменной x в функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ можно получить функцию $\bar{x}$. Пусть, например, $\varphi(0^{\tau-\nu-1}, x, 1^\nu) = \bar{x}$. Для произвольных функции $u(\widetilde{x}_n)$ из M_1 и набора $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n)$ из $\{0,1\}^n$, в котором $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_s} = 0$, а $r_n^{j_{s+1}} = \ldots = r_n^{j_n} = 1$, при $u(r_n) = 0$ пусть $v(x,y) = x \vee y$, $d(\widetilde{y}_{n-s}, z) = y_1 \vee \ldots \vee y_{n-s}$, и $k(\widetilde{y}_s, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_s \cdot z$. Тогда

$$\begin{aligned} v(u(\widetilde{x}_n), k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, \varphi(0^{\tau-\nu-1}, d(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_{\tau-\nu}}), 1^\nu))) = \\ = u(\widetilde{x}_n) \vee x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_s} \cdot \varphi(0^{\tau-\nu-1}, x_{j_{s+1}} \vee \ldots \vee x_{j_n}, 1^\nu) = \\ = u(\widetilde{x}_n) \vee x_1^{r_n^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n^n} = u_{r_n}(\widetilde{x}_n). \end{aligned}$$

При $u(r_n) = 1$ пусть $v(x,y) = x \cdot y$, $d(\widetilde{y}_{n-s}, z) = y_1 \vee \ldots \vee y_{n-s} \vee z$, и $k(\widetilde{y}_s, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_s \cdot z$. Тогда

$$\begin{aligned} v(u(\widetilde{x}_n), d(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, \varphi(0^{\tau-\nu-1}, k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, x_{i_{\tau-\nu}}), 1^\nu))) = \\ = u(\widetilde{x}_n) \cdot (x_{j_{s+1}} \vee \ldots \vee x_{j_n} \vee \varphi(0^{\tau-\nu-1}, x_{j_{s+1}} \cdot \ldots \cdot x_{j_n}, 1^\nu)) = \\ = u(\widetilde{x}_n) \cdot (x_1^{r_n^1} \vee \ldots x_n^{r_n^n}) = u_{r_n}(\widetilde{x}_n). \end{aligned}$$

Заметим, что функции $v(x,y)$, $d(\widetilde{y}_{n-s}, z)$, $k(\widetilde{y}_s, z)$ и константы 0 и 1 принадлежат классу M_1, поэтому, в силу леммы 8 и следствия 1, функции $u(\widetilde{x}_n)$, $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежат $F_P(S'_n)$.

Таким образом, множество функций $\{u\} \cup \{u_{r_n}: r_n \in \{0,1\}^n\}$ является подмножеством $F_P(S'_n)$ и, очевидно, П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 следует $h_P(S'_n) \geqslant 2^n$. Неравенство $h_P(S'_n) \leqslant 2^n$ очевидно. Лемма 19 доказана.

Лемма 20. *Пусть* $[\Psi(P)] = M_2$, *тогда*:

а) *если* φ — *монотонная булева функция, то*

$$h_P(S'_n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1};$$

б) *если* φ — *немонотонная* α- *или* β-*функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n - 1$;

в) *если* φ — *немонотонная* γ- *или* δ-*функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n$.

Доказательство. а) Пусть φ — монотонная булева функция. Тогда доказательство утверждения проводится так же, как и доказательство утверждения а) леммы 19.

б) Пусть φ — немонотонная α- или β-функция. Тогда $F_P(S'_n)$ содержит только α- или β-функции. Поэтому, учитывая замечание 6, б), имеем $h_P(S'_n) \leqslant 2^n - 1$.

Известно, что путем подстановки в функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ констант 0 и 1 и переменной x можно получить функцию $\bar{x}$. Пусть, например, $\varphi(0^\nu, x, 1^{\tau-\nu-1}) = \bar{x}$. Далее, пусть $d_p(\widetilde{y}_p) = y_1 \vee \ldots \vee y_p$, $k_p(\widetilde{y}_p) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p$, $k'_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p$ и

$$v(\widetilde{x}_{n+1}) = \varphi(\overbrace{k'_n(\widetilde{x}_n, x_{i_1}), \ldots, k'_n(\widetilde{x}_n, x_{i_\nu})}^{\nu}, x_{n+1}, 1^{\tau-\nu-1}).$$

Нетрудно проверить, что для любой α- или β-функции $g(\widetilde{x}_n)$ функция $v(\widetilde{x}_n, g(\widetilde{x}_n))$ равна $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee \bar{g}$.

Для произвольных функции $u(\widetilde{x}_n)$ из M_2 и набора $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n)$ из $\{0,1\}^n \setminus \{1^n\}$, в котором $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_s} = 0$, а $r_n^{j_{s+1}} = \ldots = r_n^{j_n} = 1$, при $u(r_n) = 0$, функция

$$d_2(u(\widetilde{x}_n), k_{n-s+1}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, v(\widetilde{x}_n, d_s(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})))) = u(\widetilde{x}_n) \vee x_1^{r_n^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n^n}$$

равна $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$. При $u(r_n) = 1$, функция

$$k_2(u(\widetilde{x}_n), d_{n-s+1}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, v(\widetilde{x}_n, k_s(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})))) = u(\widetilde{x}_n) \cdot (x_1^{r_n^1} \vee \ldots \vee x_n^{r_n^n})$$

равна $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$. Заметим, что функции $d_p(\widetilde{y}_p)$, $k_p(\widetilde{y}_p)$, $k'_p(\widetilde{y}_p, z)$ и константа 0 принадлежат M_2, поэтому, в силу леммы 8 и следствия 1, функции $v(\widetilde{x}_{n+1})$, $u(\widetilde{x}_n)$, $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежат $F_P(S'_n)$.

Таким образом, множество функций $\{u\} \cup \{u_{r_n} \colon r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{1^n\}$ содержится в $F_P(S'_n)$ и, очевидно, является П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. В силу леммы 1 имеем $h_P(S'_n) \geqslant 2^n - 1$. Утверждение б) доказано.

в) Пусть φ — немонотонная γ-функция. Известно, что путем подстановки констант 0 и 1 и переменной x в функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ можно получить функцию $\bar{x}$. Пусть, например, $\varphi(0^\nu, x, 1^{\tau-\nu-1}) = \bar{x}$. Так как φ — γ-функция, то $\varphi(x, \ldots x, 1^{\tau-\nu-1}) = \bar{x}$

Пусть $d_p(\widetilde{y}_p) = y_1 \vee \ldots \vee y_p$, $d'_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \vee \ldots \vee y_p$, $k_p(\widetilde{y}_p) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p$ и $k'_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p$. Тогда для произвольных функции $u(\widetilde{x}_n)$ из M_2 и набора $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n)$ из $\{0,1\}^n$, в котором $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_s} = 0$, а $r_n^{j_{s+1}} = \ldots = r_n^{j_n} = 1$, при $u(r_n) = 0$ функция

$$\begin{gathered} d_2(u(\widetilde{x}_n), k_{n-s+1}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, \varphi(d'_{s+1}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, x_{i_1}), \ldots, d'_{s+1}(x_{j_1}, \ldots \\ \ldots, x_{j_s}, x_{i_{\nu+1}}), 1^{\tau-\nu-1})))) = u(\widetilde{x}_n) \vee x_1^{r_n^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n^n} \end{gathered}$$

равна $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$. При $u(r_n) = 1$ функция

$$\begin{gathered} k_2(u(\widetilde{x}_n), d_{n-s+1}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, \varphi(k'_{s+1}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, x_{j_1}), \ldots, k'_{s+1}(x_{j_1}, \ldots \\ \ldots, x_{j_s}, x_{i_{\nu+1}}), 1^{\tau-\nu-1})))) = u(\widetilde{x}_n) \cdot (x_1^{r_n^1} \vee \ldots \vee x_n^{r_n^n}) \end{gathered}$$

равна $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$. Заметим, что функции $d_p(\widetilde{y}_p) = y_1 \vee \ldots \vee y_p$, $d'_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \vee \ldots \vee y_p$, $k_p(\widetilde{y}_p) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p$, $k'_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p$ и константа 1 принадлежат M_2. Поэтому, в силу леммы 8 и следствия 1, $u(\widetilde{x}_n)$, $u_{r_n}(\widetilde{x}_n) \in F_P(S'_n)$.

Таким образом, множество функций $\{u\} \cup \{u_{r_n} \colon r_n \in \{0,1\}^n\}$ содержится в $F_P(S'_n)$ и, очевидно, является П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 следует $h_P(S'_n) \geqslant 2^n$. Неравенство $h_P(S'_n) \leqslant 2^n$ очевидно.

Доказательство в случае, когда φ — δ-функция, проводится аналогичным образом. Лемма 20 доказана.

В силу двойственности классов M_2 и M_3 и лемм 3, 20 справедлива

Лемма 21. *Пусть* $[\Psi(P)]=M_3$, *тогда*:

а) *если* φ *— монотонная булева функция, то*

$$h_P(S'_n)=\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}+\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor+1};$$

б) *если* φ *— немонотонная* α*- или* γ*-функция, то* $h_P(S'_n)=2^n-1$;

в) *если* φ *— немонотонная* β*- или* δ*-функция, то* $h_P(S'_n)=2^n$.

Лемма 22. *Пусть* $[\Psi(P)]=M_4$, *тогда*:

а) *если* φ *— монотонная булева функция, то*

$$h_P(S'_n)=\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}+\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor+1};$$

б) *если* φ *— немонотонная* α*-функция, то* $h_P(S'_n)=2^n-2$;

в) *если* φ *— немонотонная* β*- или* γ*-функция, то* $h_P(S'_n)=2^n-1$;

г) *если* φ *—* δ*-функция, то* $h_P(S'_n)=2^n$.

Доказательство. а) Пусть φ — монотонная булева функция. В этом случае доказательство проводится так же, как и доказательство утверждения а) леммы 19.

б) Пусть φ — немонотонная α-функция. Тогда $F_P(S'_n)$ содержит только α-функции. Отсюда и из замечания 6, в) следует, что $h_P(S'_n)\leqslant 2^n-2$.

Известно, что путем подстановки в функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ констант 0 и 1 и переменной x можно получить функцию $\bar{x}$. Пусть, например, $\varphi(0^\nu, x, 1^{\tau-\nu-1})=\bar{x}$.

Далее, пусть $d_p(\widetilde{y}_p)=y_1\vee\ldots\vee y_p$, $k_p(\widetilde{y}_p)=y_1\cdot\ldots\cdot y_p$, $d'_p(\widetilde{y}_p, z)=y_1\vee\ldots\vee y_p$, $k'_p(\widetilde{y}_p, z)=y_1\cdot\ldots\cdot y_p$ и

$$v(\widetilde{x}_{n+1})=\varphi(\overbrace{k'_n(\widetilde{x}_n, x_{i_1}),\ldots,k'_n(\widetilde{x}_n, x_{i_\nu})}^{\nu}, x_{n+1}, \overbrace{d'_n(\widetilde{x}_n, x_{i_{\nu+1}}),\ldots,d'_n(\widetilde{x}_n, x_{i_\tau})}^{\tau-\nu-1}).$$

Нетрудно проверить, что для любой α-функции $g(\widetilde{x}_n)$ функция $v(\widetilde{x}_n, g(\widetilde{x}_n))$ равна $x_1\cdot\ldots\cdot x_n\vee\bar{g}(\widetilde{x}_n)\cdot(x_1\vee\ldots\vee x_n)$.

Для произвольных функции $u(\widetilde{x}_n)$ из M_4 и набора $r_n=(r_n^1,\ldots,r_n^n)$ из $\{0,1\}^n\setminus\{0^n,1^n\}$, в котором $r_n^{j_1}=\ldots=r_n^{j_s}=1$, а $r_n^{j_{s+1}}=\ldots=r_n^{j_n}=0$, при $u(r_n)=0$

$$\begin{aligned}&d_2(u(\widetilde{x}_n), k_{s+1}(x_{j_1},\ldots,x_{j_s}, v(\widetilde{x}_n, d'_{n-s}(x_{j_{s+1}},\ldots,x_{j_n}, x_{i_{\nu+1}}))))=\\&\quad=u(\widetilde{x}_n)\vee x_{j_1}\cdot\ldots\cdot x_{j_s}\cdot(x_1\cdot\ldots\cdot x_n\vee\overline{x_{j_{s+1}}\vee\ldots\vee x_{j_n}}\cdot(x_1\vee\ldots\vee x_n))=\\&\qquad\qquad=u(\widetilde{x}_n)\vee x_1^{r_n^1}\cdot\ldots\cdot x_n^{r_n^n}=u_{r_n}(\widetilde{x}_n).\end{aligned}$$

При $u(r_n)=1$

$$\begin{aligned}&k_2(u(\widetilde{x}_n), d_{s+1}(x_{j_1},\ldots,x_{j_s}, v(\widetilde{x}_n, k'_{n-s}(x_{j_{s+1}},\ldots,x_{j_n}, x_{i_{\nu+1}}))))=\\&\quad=u(\widetilde{x}_n)\cdot(x_{j_1}\vee\ldots\vee x_{j_s}\vee(x_1\cdot\ldots\cdot x_n\vee\overline{x_{j_{s+1}}\cdot\ldots\cdot x_{j_n}}\cdot(x_1\vee\ldots\vee x_n))=\\&\qquad\qquad=u(\widetilde{x}_n)\cdot(x_1^{r_n^1}\vee\ldots\vee x_n^{r_n^n})=u_{r_n}(\widetilde{x}_n).\end{aligned}$$

Функции $d_p(\widetilde{y}_p)$, $k_p(\widetilde{y}_p)$, $d'_p(\widetilde{y}_p, z)$, и $k'_p(\widetilde{y}_p, z)$ принадлежат M_4, поэтому, в силу леммы 8 и следствия 1, функции $v(\widetilde{x}_{n+1})$, $u(\widetilde{x}_n)$ и $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежат $F_P(S'_n)$.

Таким образом, множество функций $\{u\} \cup \{u_{r_n}\colon r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}\}$ является и подмножеством $F_P(S'_n)$, и, очевидно, П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 8 следует $h_P(S'_n) \geqslant 2^n - 2$. Утверждение б) доказано.

в) Пусть φ — немонотонная γ-функция. Тогда $F_P(S'_n)$ содержит только α- и γ-функции. Поэтому, учитывая замечание 6, б), имеем неравенство $h_P(S'_n) \leqslant 2^n - 1$.

Известно, что путем подстановки в функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ констант 0 и 1 и переменной x можно получить функцию $\bar{x}$. Пусть, например, $\varphi(0^\nu, x, 1^{\tau-\nu-1}) = \bar{x}$. Нетрудно проверить, что

$$\varphi(\overbrace{x, x, \ldots, x}^{\nu+1}, 1^{\tau-\nu-1}) = \bar{x}.$$

Пусть $d_p(\widetilde{y}_p) = y_1 \vee \ldots \vee y_p$, $k_p(\widetilde{y}_p) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p$, $d'_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \vee \ldots \vee y_p$, $k'_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p$, $w(x, y) = x$ и

$$v(\widetilde{x}_{n+1}) = \varphi(w(x_{n+1}, x_{i_1}), \ldots, w(x_{n+1}, x_{i_{\nu+1}}), d'_n(\widetilde{x}_n, x_{i_{\nu+2}}), \ldots, d'_n(\widetilde{x}_n, x_{i_\tau}))).$$

Нетрудно проверить, что для любой α- или γ-функции $g(\widetilde{x}_n)$ функция $v(\widetilde{x}_n, g(\widetilde{x}_n))$ равна $\bar{g}(\widetilde{x}_n) \cdot (x_1 \vee \ldots \vee x_n)$.

Для произвольных функции $u(\widetilde{x}_n)$ из M_4 и набора $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n)$ из $\{0,1\}^n \setminus \{0^n\}$, в котором $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_s} = 1$, а $r_n^{j_{s+1}} = \ldots = r_n^{j_n} = 0$, при $u(r_n) = 0$

$$\begin{aligned} &d_2(u(\widetilde{x}_n), k_{s+1}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, v(\widetilde{x}_n, d_{n-s}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n})))) = \\ &\quad = u(\widetilde{x}_n) \vee x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_s} \cdot \overline{x_{j_{s+1}} \vee \ldots \vee x_{j_n}} \cdot (x_1 \vee \ldots \vee x_n) = \\ &\qquad\qquad = u(\widetilde{x}_n) \vee x_1^{r_n^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n^n} = u_{r_n}(\widetilde{x}_n). \end{aligned}$$

При $u(r_n) = 1$

$$\begin{aligned} &k_2(u(\widetilde{x}_n), d_{s+1}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, v(\widetilde{x}_n, k_{n-s}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n})))) = \\ &\quad = u(\widetilde{x}_n) \cdot (x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_s} \vee \overline{x_{j_{s+1}} \cdot \ldots \cdot x_{j_n}} \cdot (x_1 \vee \ldots \vee x_n)) = \\ &\qquad\qquad = u(\widetilde{x}_n) \cdot (x_1^{r_n^1} \vee \ldots \vee x_n^{r_n^n}) = u_{r_n}(\widetilde{x}_n). \end{aligned}$$

Заметим, что функции $d_p(\widetilde{y}_p)$, $k_p(\widetilde{y}_p)$, $d'_p(\widetilde{y}_p, z)$, $k'_p(\widetilde{y}_p, z)$ и $w(x, y) = x$ принадлежат M_4. Отсюда и из леммы 8 и следствия 1 следует, что функции $v(\widetilde{x}_{n+1})$, $u(\widetilde{x}_n)$, $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежат $F_P(S'_n)$.

Таким образом, множество функций $\{u\} \cup \{u_{r_n}\colon r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n\}\}$ является подмножеством $F_P(S'_n)$, а также П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 имеем $h_P(S'_n) \geqslant 2^n - 1$. Утверждение б) в случае, когда φ — немонотонная γ-функция, доказано.

Пусть теперь φ — немонотонная β-функция. Тогда $F_P(S'_n)$ содержит только α- и β-функции. Из замечания 6, б) следует, что $h_P(S'_n) \leqslant 2^n - 1$.

Путем подстановки констант 0 и 1 и переменной x в функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ можно получить функцию $\bar{x}$. Пусть, например, $\varphi(0^\nu, x, 1^{\tau-\nu-1}) = \bar{x}$, тогда легко проверить, что

$$\varphi(0^\nu, x, x, \ldots, x) = \bar{x}.$$

Пусть $d_p(\widetilde{y}_p)$, $k_p(\widetilde{y}_p)$, $d'_p(\widetilde{y}_p, z)$, $k'_p(\widetilde{y}_p, z)$ и $w(x, y)$ — функции, определенные выше, а

$$v(\widetilde{x}_{n+1}) = \varphi(k'_n(\widetilde{x}_n, x_{i_1}), \ldots, k'_n(\widetilde{x}_n, x_{i_\nu})), w(x_{n+1}, x_{i_{\nu+1}}), \ldots, w(x_{n+1}, x_{i_\tau})).$$

Нетрудно проверить, что для любой α- или β-функции $g(\widetilde{x}_n)$ имеем $v(\widetilde{x}_n, g(\widetilde{x}_n)) = \bar{g}(\widetilde{x}_n) \vee x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$.

Для произвольных функции $u(\widetilde{x}_n)$ из M_4 и набора $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n)$ из $\{0, 1\}^n \setminus \{1^n\}$, в котором $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_s} = 1$, а $r_n^{j_{s+1}} = \ldots = r_n^{j_n} = 0$, при $u(r_n) = 0$

$$d_2(u(\widetilde{x}_n), k_{s+1}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, v(\widetilde{x}_n, d'_{n-s}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n})) =$$
$$= u(\widetilde{x}_n) \vee x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_s} \cdot \overline{x_{j_{s+1}} \vee \ldots \vee x_{j_n}} \vee x_1 \cdot \ldots \cdot x_n =$$
$$= u(\widetilde{x}_n) \vee x_1^{r_n^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n^n} = u_{r_n}(\widetilde{x}_n).$$

При $u(r_n) = 1$

$$k_2(u(\widetilde{x}_n), d_{s+1}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, v(\widetilde{x}_n, k_{n-s}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n})))) =$$
$$= u(\widetilde{x}_n) \cdot (x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_s} \vee \overline{x_{j_{s+1}} \cdot \ldots \cdot x_{j_n}} \vee x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) =$$
$$= u(\widetilde{x}_n) \cdot (x_1^{r_n^1} \vee \ldots \vee x_n^{r_n^n}) = u_{r_n}(\widetilde{x}_n).$$

Далее доказательство проводится так же, как и в предыдущем случае. Утверждение в) доказано.

г) Пусть φ — δ-функция. Тогда $\varphi(x, x, \ldots, x) = \bar{x}$. Определим функции $d_p(\widetilde{y}_p, z)$, $k_p(\widetilde{y}_p, z)$, $d'_p(\widetilde{y}_p)$, $k'_p(\widetilde{y}_p)$ и $w(x, y)$ так же, как и в п. в). Для произвольных функции $u(\widetilde{x}_n)$ из M_4 и набора $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n)$ из $\{0, 1\}^n$, в котором $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_s} = 1$, а $r_n^{j_{s+1}} = \ldots = r_n^{j_n} = 0$, при $u(r_n) = 0$ имеем $0 \leqslant s < n$ и

$$d_2(u(\widetilde{x}_n), k_{s+1}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, \varphi(d'_{n-s}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_1}), \ldots$$
$$\ldots, d'_{n-s}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_r})))) = u(\widetilde{x}_n) \vee x_1^{r_n^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n^n} = u_{r_n}(\widetilde{x}_n).$$

При $u(r_n) = 1$ имеем $0 < s \leqslant n$ и

$$k_2(u(\widetilde{x}_n), d_{s+1}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, \varphi(k'_{n-s+1}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_1}), \ldots$$
$$\ldots, k'_{n-s+1}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_r})))) = u(\widetilde{x}_n) \cdot (x_1^{r_n^1} \vee \ldots \vee x_n^{r_n^n}) = u_{r_n}(\widetilde{x}_n).$$

Используя доказательство п. в) настоящей леммы, нетрудно доказать, что множество функций $\{u\} \cup \{u_{r_n}\colon r_n \in \{0, 1\}^n\}$ является подмножеством $F_P(S'_n)$, а также П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 следует $h_P(S'_n) \geqslant 2^n$. Неравенство $h_P(S'_n) \leqslant 2^n$ очевидно. Лемма 22 доказана.

Лемма 23. а) *Если $F_6^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_7^\infty$ и $\varphi \in F_7^\infty$, то*

$$\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} + \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1} \leqslant h_P(S'_n) \leqslant$$
$$\leqslant \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} + \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1} + n.$$

б) *Если $F_6^2 \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_7^2$ и $\varphi \in F_7^2$, то*

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 2} \leqslant h_P(S'_n) \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

в) *Если $F_6^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_7^2$, а функция φ является константой* 1, *то*

$$h_P(S'_n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

г) *Если* $F_6^2 \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_7^2$, *а* $\varphi = x \vee y$, *то*

$$h_P(S'_n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

д) *Если* $F_6^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_7^\infty$, *а* $\varphi(\widetilde{x}_\tau) = x_1 \vee \ldots \vee x_\tau$, *то при* $\tau \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - \left(\binom{n-\tau}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n-\tau}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}\right) \leqslant h_P(S'_n) \leqslant$$
$$\leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1};$$

при $\tau \geqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1$

$$h_P(S'_n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

Доказательство. а) Пусть $F_6^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_7^\infty$. Очевидно, что $F_P(S'_n) \subseteq F_7^\infty(\widetilde{x}_n)$. Известно, что любую булеву функцию $u(\widetilde{x}_n)$ из F_7^∞ можно представить в виде $u(\widetilde{x}_n) = x_i \cdot u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, где $u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ — монотонная функция [7]. Таким образом, для определения функции $u(\widetilde{x}_n)$ достаточно определить переменную x_i и монотонную функцию $u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ от $n-1$ переменных. Очевидно это можно сделать, используя множество наборов $\{(01^{n-1}), (101^{n-2}), \ldots, (1^{n-1}0)\}$ и алгоритм расшифровки монотонных булевых функций [8]. Отсюда получаем правое неравенство утверждения а).

Докажем теперь левое неравенство. В силу следствия 1 имеем включение $F_6^\infty(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S'_n)$. Пусть функция $u(\widetilde{x}_n) \in F_6^\infty$ такова, что

$$u(\widetilde{x}_n) = x_i \cdot u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

$$|N_0(u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n))| = \binom{(n-1)}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor},$$

$$|N_1(u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n))| = \binom{(n-1)}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1}.$$

Тогда нетрудно показать, что множество

$$G = \{u(\widetilde{x}_n)\} \cup \{u_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon r_n \in N_0(u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)) \cup$$
$$\cup N_1(u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n))\}$$

является подмножеством класса $F_6^\infty(\widetilde{x}_n)$, который, в свою очередь, является подмножеством $F_P(S'_n)$. Таким образом, G содержится в $F_P(S'_n)$ и, очевидно, представляет собой П-множество для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 получаем левое неравенство. Утверждение а) доказано.

б) Пусть $F_6^2 \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_7^2$ и $\varphi \in F_7^2$. Очевидно $F_P(S'_n) \subseteq F_7^2$, а $F_7^2 \subseteq M_1$. Отсюда и из леммы 19, а) получаем правое неравенство.

Докажем теперь левое. Заметим, что $F_6^2(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S'_n)$ (см. следствие 1). Пусть $u(\widetilde{x}_n)$ из F_6^2 — такая функция, что

$$|N_0(u(\widetilde{x}_n))| = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\colon \sum_1^n \sigma_i = \lfloor n/2 \rfloor + 1\},$$

$$|N_1(u(\widetilde{x}_n))| = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\colon \sum_1^n \sigma_i = \lfloor n/2 \rfloor + 2\}.$$

Тогда, очевидно, множество функций

$$\{u(\widetilde{x}_n)\} \cup \{u_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon\ r_n \in N_0(u(\widetilde{x}_n)) \cup N_1(u(\widetilde{x}_n))$$

является подмножеством F_6^2, а значит подмножеством $F_P(S_n')$ и, таким образом, П-множеством для $\langle S_n', H_P(S_n')\rangle$. Отсюда и из леммы 1 получаем левое неравенство. Утверждение б) доказано.

в) Пусть $F_6^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_7^2$, а функция φ является константой 1. Очевидно $F_P(S_n') \subseteq M_1$. Нетрудно проверить, что для произвольной функции $u(\widetilde{x}_n)$ из M_2 найдется функция $v(\widetilde{x}_n, y)$ из $F_6^\infty(\widetilde{x}_n)$ такая, что $v(\widetilde{x}_n, 1) = u(\widetilde{x}_n)$. В силу леммы 8, $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S_n')$. Таким образом, $M_2 \subseteq F_P(S_n')$. Далее см. доказательства лемм 19, а) и 20, а). Утверждение в) доказано.

г) Пусть $F_6^2 \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_7^2$, а $\varphi = x \vee y$. Правое неравенство следует из включения $F_P(S_n') \subseteq M_1$ и из леммы 19, а).

Докажем теперь левое неравенство. Заметим, что $F_6^2(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S_n')$ (см. следствие 1). Пусть $u(\widetilde{x}_n)$ из F_6^2 — такая функция, что

$$|N_0(u(\widetilde{x}_n))| = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\colon\ \sum_1^n \sigma_i = \lfloor n/2 \rfloor\},$$

$$|N_1(u(\widetilde{x}_n))| = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\colon\ \sum_1^n \sigma_i = \lfloor n/2 \rfloor + 1\}.$$

Нетрудно убедиться, что для любого набора r_n из $N_1(u(\widetilde{x}_n))$ функция $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_6^2(\widetilde{x}_n)$, а, следовательно, и $F_P(S_n')$.

Возьмем теперь произвольным образом набор $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n)$ из $N_0(u(\widetilde{x}_n))$. Пусть $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_\nu} = 1$, где $\nu = \lfloor n/2 \rfloor$. Далее, пусть $v(\widetilde{x}_n, y)$ и $k_\nu(\widetilde{y}_\nu, z)$ — такие функции из $[\Psi(P)]$, что $v(\widetilde{x}_n, y) = u(\widetilde{x}_n)$, а $k_\nu(\widetilde{y}_\nu, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_\nu$. Тогда $\varphi(k_\nu(x_{j_1}, \ldots, x_{j_\nu}, x_{i_1}), v(\widetilde{x}_n, x_{i_1})) = x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_\nu} \vee u(\widetilde{x}_n) = u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$. Из леммы 8 следует, что $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S_n')$. Таким образом, множество функций $\{u(\widetilde{x}_n)\} \cup \{u_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon\ r_n \in N_0(u(\widetilde{x}_n)) \cup N_1(u(\widetilde{x}_n))\}$ содержится в $F_P(S_n)$ и, очевидно, является П-множеством для $\langle S_n', H_P(S_n')\rangle$. Отсюда и из леммы 1 получаем левое неравенство. Утверждение г) доказано.

д) Пусть $F_6^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_7^\infty$, $\varphi(\widetilde{x}_\tau) = x_1 \vee \ldots \vee x_\tau$.

Пусть $\tau \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Правое неравенство получаем из включения $F_P(S_n') \subseteq M_1$ и из леммы 19, а).

Докажем теперь левое неравенство. Заметим, что $F_6^\infty(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S_n')$ (см. следствие 1). Пусть функция $u(\widetilde{x}_n)$ из $F_6^\infty(\widetilde{x}_n)$ такова, что

$$|N_0(u(\widetilde{x}_n))| = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\colon\ \sum_1^n \sigma_i = \lfloor n/2 \rfloor\},$$

$$|N_1(u(\widetilde{x}_n))| = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\colon\ \sum_1^n \sigma_i = \lfloor n/2 \rfloor + 1\}.$$

Возьмем из класса $F_6^\infty(\widetilde{x}_{n+1})$ функцию $v(\widetilde{x}_{n+1})$, такую, что $v(\widetilde{x}_n, 1) = u(\widetilde{x}_n)$ и $v(\widetilde{x}_n, 0) = 0$. Заметим, что $N_0(v(\widetilde{x}_{n+1})) = \{(1^n 0)\} \cup \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, 1)\colon (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in N_0(u(\widetilde{x}_n))\}$, а $N_1(v(\widetilde{x}_{n+1})) = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, 1)\colon\ (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in N_1(u(\widetilde{x}_n))\}$. Нетрудно проверить, что $v_{(r_n, 1)}(\widetilde{x}_{n+1})$ принадлежит F_6^∞ для любого набора r_n из $N_0(u(\widetilde{x}_n)) \cup N_1(u(\widetilde{x}_n))$ функция $v_{(r_n, 1)}(\widetilde{x}_{n+1}) \in F_6^\infty \subseteq [\Psi(P)]$.

Далее, пусть $w(\widetilde{x}_n) = v(\widetilde{x}_n, \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\tau}))$, а множество наборов есть $\Delta = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\colon (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in N_0(u(\widetilde{x}_n)) \cup N_1(u(\widetilde{x}_n)), \sigma_{i_1} \vee \ldots \vee \sigma_{i_\tau} = 1\}$. Тогда для любого набора r_n из Δ верно $v_{(r_n,1)}(\widetilde{x}_n, \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\tau})) = w_{r_n}(\widetilde{x}_n)$. В силу леммы 8 функции $w(\widetilde{x}_n)$, $w_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежат $F_P(S'_n)$. Таким образом, множество функций $\{w(\widetilde{x}_n)\} \cup \{w_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon r_n \in \Delta\}$ является подмножеством $F_P(S'_n)$ и, очевидно, П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 получаем левое неравенство. Утверждение д) при $\tau \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ доказано, а из него следует утверждение д) при $\tau \geqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Лемма 23 доказана.

В силу двойственности классов F_6^∞ и F_2^∞, F_6^2 и F_2^2, F_7^∞ и F_3^∞ F_7^2 и F_3^2 и лемм 3, 23 справедлива

Лемма 24. а) *Если $F_2^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_2^\infty$ и $\varphi \in F_3^\infty$, то*

$$\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} + \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1} \leqslant h_P(S'_n)) \leqslant \leqslant \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} + \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1} + n.$$

б) *Если $F_2^2 \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_3^2$ и $\varphi \in F_3^2$ то*

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 2} \leqslant h_P(S'_n)) \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

в) *Если $F_2^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_3^2$, а функция φ является константой 0, то*

$$h_P(S'_n)) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

г) *Если $F_2^2 \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_3^2$, а $\varphi = x \cdot y$, то*

$$h_P(S'_n)) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

д) *Если $F_2^\infty \subseteq [\Psi(P)] \subseteq F_3^\infty$, а $\varphi(\widetilde{x}_\tau) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_\tau$, то при $\tau \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$*

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - \left(\binom{n-\tau}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n-\tau}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}\right) \leqslant h_P(S'_n)) \leqslant \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1};$$

при $\tau \geqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1$

$$h_P(S'_n)) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

Лемма 25. *Пусть $[\Psi(P)] = F_7^\infty$, тогда:*

а) *если φ — δ-функция, то $2^n - 1 \leqslant h_P(S'_n) \leqslant 2^n$,*
б) *если φ — немонотонная α-функция, то $h_P(S'_n) = 2^n - 1$,*
в) *если φ — немонотонная β-функция, то $2^n - 1 \leqslant h_P(S'_n) \leqslant 2^n$,*
г) *если φ — немонотонная γ-функция, то $h_P(S'_n) = 2^n - 1$.*

Доказательство. Пусть $[\Psi(P)] = F_7^\infty$ и пусть $0(\widetilde{x}_n) = 0$, тогда $0(\widetilde{x}_n) \in F_P(S'_n)$ (так как класс $F_7^\infty(\widetilde{x}_n)$ содержит константу 0 и в силу следствия 1 имеем включение $F_7^\infty(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S'_n)$).

а) Пусть φ — δ-функция. Тогда $\varphi(x, x, \ldots, x) = \bar{x}$.

Возьмем произвольный набор $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n) \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n\}$. Пусть $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_s} = 1$, а $r_n^{j_{s+1}} = \ldots = r_n^{j_n} = 0$. Далее, возьмем из $[\Psi(P)]$ функции $d_p(z_1, \widetilde{y}_p, z_2) = z_1 \cdot (y_1 \vee \ldots \vee y_p)$ и $k_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p \cdot z$. Нетрудно проверить, что справедлива следующая последовательность равенств

$$k_s(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, \varphi(d_{n-s}(x_{j_1}, x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_1}), \ldots, d_{n-s}(x_{j_1}, x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_\tau}))) = = x_{j_1}^{r_n^{j_1}} \cdot \ldots \cdot x_{j_s}^{r_n^{j_s}} \cdot x_{j_1} \cdot \overline{x_{j_{s+1}} \vee \ldots \vee x_{j_n}} = x_1^{r_n^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n^n} = 0_{r_n}(\widetilde{x}_n).$$

В силу леммы 8 функция $0_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S'_n)$. Таким образом множество функций $\{0(\widetilde{x}_n)\}\cup\{0_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon r_n\in\{0,1\}^n\setminus\{0^n\}\}$ является подмножеством $F_P(S'_n)$ и, очевидно, П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 получаем $h_P(S'_n)\geqslant 2^n-1$. Неравенство $h_P(S'_n)\leqslant 2^n$ очевидно. Утверждение а) доказано.

б) Пусть φ — немонотонная α-функция. Тогда $F_P(S'_n)$ содержит только α- и γ-функции. Поэтому $h_P(S'_n)\leqslant 2^n-1$ (см. замечание 6, б)).

Известно, что путем подстановки в функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ констант 0 и 1 и переменной x можно получить функцию $\bar{x}$. Пусть, например, $\varphi(0^\nu, x, 1^{\tau-\nu-1})=\bar{x}$. Тогда нетрудно проверить, что $\varphi(0^\nu, x\cdot y, x, \ldots, x)=x\bar{y}$.

Возьмем произвольный набор $r_n=(r_n^1,\ldots,r_n^n)$ из $\{0,1\}^n\setminus\{0^n\}$. Пусть $r_n^{j_1}=\ldots=r_n^{j_s}=1$, $r_n^{j_{s+1}}=\ldots=r_n^{j_n}=0$. Далее, возьмем из $[\Psi(P)]$ константу 0 и функции $d_p(z_1,\widetilde{y}_p,z_2)=z_1\cdot(y_1\vee\ldots\vee y_p)$, $k_p(\widetilde{y}_p,z)=y_1\cdot\ldots\cdot y_p\cdot z$, $w(x,y)=x$. Нетрудно проверить следующую последовательность равенств

$$k_s(x_{j_1},\ldots,x_{j_s},\varphi(0^\nu, d_{n-s}(x_{j_1},x_{j_{s+1}},\ldots,x_{j_n},x_{i_{\nu+1}}), w(x_{j_1},x_{i_{\nu+2}}),\ldots$$
$$\ldots, w(x_{j_1},x_{i_\tau})))=x_{j_1}^{r_n^{j_1}}\cdot\ldots\cdot x_{j_s}^{r_n^{j_s}}\cdot x_{j_1}\cdot\overline{x_{j_{s+1}}\vee\ldots\vee x_{j_n}}=x_1^{r_n^1}\cdot\ldots\cdot x_n^{r_n^n}=0_{r_n}(\widetilde{x}_n).$$

В силу леммы 8, $0_{r_n}(\widetilde{x}_n)\in F_P(S'_n)$. Таким образом, $\{0(\widetilde{x}_n)\}\cup\{0_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon r_n\in\{0,1\}^n\setminus\{0^n\}\}$ есть П-множество для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 получаем $h_P(S_n)\geqslant 2^n-1$. Утверждение б) доказано.

в) Пусть φ — немонотонная β-функция.

Известно, что путем подстановки в функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ констант 0 и 1 и переменной x можно получить функцию $\bar{x}$. Пусть, например, $\varphi(0^\nu, x, 1^{\tau-\nu-1})=\bar{x}$. Тогда нетрудно проверить, что $\varphi(0^\nu, x, x, \ldots, x)=\bar{x}$.

Возьмем набор $r_n=(r_n^1,\ldots,r_n^n)$ из $\{0,1\}^n\setminus\{0^n\}$. Пусть $r_n^{j_1}=\ldots=r_n^{j_s}=1$, $r_n^{j_{s+1}}=\ldots=r_n^{j_n}=0$. Далее, возьмем из $[\Psi(P)]$ константу 0, функции $d_p(z_1,\widetilde{y}_p,z_2)=z_1\cdot(y_1\vee\ldots\vee y_p)$ и $k_p(\widetilde{y}_p,z)=y_1\cdot\ldots\cdot y_p\cdot z$. Нетрудно проверить следующую последовательность равенств:

$$k_s(x_{j_1},\ldots,x_{j_s},\varphi(0^\nu, d_{n-s}(x_{j_1},x_{j_{s+1}},\ldots,x_{j_n},x_{i_{\nu+1}}),\ldots, d_{n-s}(x_{j_1},x_{j_{s+1}},\ldots$$
$$\ldots, x_{j_n},x_{i_\tau})))=x_{j_1}^{r_n^{j_1}}\cdot\ldots\cdot x_{j_s}^{r_n^{j_s}}\cdot x_{j_1}\cdot\overline{x_{j_{s+1}}\vee\ldots\vee x_{j_n}}=x_1^{r_n^1}\cdot\ldots\cdot x_n^{r_n^n}=0_{r_n}(\widetilde{x}_n).$$

В силу леммы 8 функция $0_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S'_n)$. Таким образом множество функций $\{0(\widetilde{x}_n)\}\cup\{0_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon r_n\in\{0,1\}^n\setminus\{0^n\}\}$ есть П-множество для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 следует $h_P(S'_n)\geqslant 2^n-1$. Неравенство $h_P(S'_n)\leqslant 2^n$ очевидно. Утверждение в) доказано.

Доказательство утверждения г) совпадает с доказательством утверждения б). Лемма 25 доказана.

В силу двойственности классов F_7^∞ и F_3^∞ и лемм 3, 25 справедлива

Лемма 26. *Пусть $[\Psi(P)]=F_3^\infty$, и φ — немонотонная функция, тогда*:

а) *если φ — δ-функция, то $2^n-1\leqslant h_P(S'_n)\leqslant 2^n$,*

б) *если φ — немонотонная α-функция, то $h_P(S'_n)=2^n-1$,*

в) *если φ — немонотонная γ-функция, то $2^n-1\leqslant h_P(S'_n)\leqslant 2^n$,*

г) *если φ — немонотонная β-функция, то $h_P(S'_n)=2^n-1$.*

Лемма 27. *Пусть $[\Psi(P)]=F_6^\infty$, тогда*:

а) *если φ — δ-функция, то $2^n-1\leqslant h_P(S'_n)\leqslant 2^n$,*

б) *если φ — немонотонная α-функция, то $h_P(S'_n)=2^n-2$,*

в) *если φ — немонотонная β-функция, то $2^n-2\leqslant h_P(S'_n)\leqslant 2^n-1$,*

г) *если φ — немонотонная γ-функция, то $h_P(S'_n)=2^n-1$.*

Доказательство. а) Пусть φ — δ-функция. Тогда $\varphi(x, x, \ldots, x) = \bar{x}$. Возьмем набор $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n)$ из $\{0,1\}^n \setminus \{0^n\}$. Пусть $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_s} = 1$, $r_n^{j_{s+1}} = \ldots = r_n^{j_n} = 0$. Далее, возьмем из $[\Psi(P)]$ функции $d_p(z_1, \widetilde{y}_p, z_2) = z_1 \cdot (y_1 \vee \ldots \vee y_p)$ и $k_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p \cdot z$. Нетрудно проверить следующие последовательности равенств:

$$k_1(x_n, \varphi(d_0(x_n, x_{i_1}), \ldots, d_0(x_n, x_{i_\tau}))) = x_n \cdot \varphi(x_n, \ldots, x_n) = 0(\widetilde{x}_n)$$

и

$$k_s(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, \varphi(d_{n-s}(x_{j_1}, x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_1}), \ldots, d_{n-s}(x_{j_1}, x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_\tau})) =$$
$$= x_{j_1}^{r_n^{j_1}} \cdot \ldots \cdot x_{j_s}^{r_n^{j_s}} \cdot x_{j_1} \cdot \overline{x_{j_{s+1}} \vee \ldots \vee x_{j_n}} = x_1^{r_n^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n^n} = 0_{r_n}(\widetilde{x}_n).$$

В силу леммы 8 функции $0(\widetilde{x}_n), 0_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежат $F_P(S_n')$. Таким образом, множество функций $\{0(\widetilde{x}_n)\} \cup \{0_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n\}\}$ является П-множеством для $\langle S_n', H_P(S_n')\rangle$. Из этого факта и из леммы 1 получаем $h_P(S_n') \geqslant 2^n - 1$. Неравенство $h_P(S_n') \leqslant 2^n$ очевидно. Утверждение а) доказано.

б) Пусть φ — немонотонная α-функция. Так как $F_P(S_n')$ содержит только α-функции, то в соответствии с замечанием 6, в) имеем $h_P(S_n') \leqslant 2^n - 2$.

Известно, что путем подстановки в функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ констант 0, 1 и переменной x можно получить функцию $\bar{x}$. Пусть, например, $\varphi(0^\nu, x, 1^{\tau-\nu-1}) = \bar{x}$. Тогда нетрудно проверить, что $\varphi(0^\nu, x \cdot y, x, \ldots, x) = x\bar{y}$.

Возьмем набор $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n)$ из $\{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}$. Пусть $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_s} = 1$, $r_n^{j_{s+1}} = \ldots = r_n^{j_n} = 0$. Далее, возьмем из $[\Psi(P)]$ функции $d_p(z_1, \widetilde{y}_p, z_2) = z_1 \cdot (y_1 \vee \ldots \vee y_p)$, $k_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p \cdot z$, $v(\widetilde{x}_n, y) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = u(\widetilde{x}_n)$ и $g(x, y) = x$. Нетрудно проверить следующую последовательность равенств.

$$k_s(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, \varphi(v(\widetilde{x}_n, x_{i_1}), \ldots, v(\widetilde{x}_n, x_{i_\nu}), d_{n-s}(x_{j_1}, x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_{\nu+1}}),$$
$$g(x_{j_1}, x_{i_{\nu+2}}), \ldots, g(x_{j_1}, x_{i_\tau}))) =$$
$$= x_{j_1}^{r_n^{j_1}} \cdot \ldots \cdot x_{j_s}^{r_n^{j_s}} \cdot (u(\widetilde{x}_n) \vee x_{j_1} \cdot \overline{x_{j_{s+1}} \vee \ldots \vee x_{j_n}}) = u(\widetilde{x}_n) \vee x_1^{r_n^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n^n} = u_{r_n}(\widetilde{x}_n).$$

В силу леммы 8 функции $u(\widetilde{x}_n), u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежат $F_P(S_n')$. Таким образом, множество функций $\{u(\widetilde{x}_n)\} \cup \{u_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}\}$ является П-множеством для $\langle S_n', H_P(S_n')\rangle$. Отсюда и из леммы 1 получаем $h_P(S_n') \geqslant 2^n - 2$. Утверждение б) доказано.

в) Пусть φ — немонотонная β-функция. Тогда $F_P(S_n')$ содержит только α- и β-функции и, в соответствии с замечанием 6, б), имеем $h_P(S_n') \leqslant 2^n - 1$.

Известно, что путем подстановки в функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ констант 0, 1 и переменной x можно получить функцию $\bar{x}$. Пусть, например, $\varphi(0^\nu, x, 1^{\tau-\nu-1}) = \bar{x}$. Тогда нетрудно проверить, что $\varphi(0^\nu, x, x, \ldots, x) = x\bar{y}$.

Возьмем набор $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n)$ из $\{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}$. Пусть $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_s} = 1$, $r_n^{j_{s+1}} = \ldots = r_n^{j_n} = 0$. Далее, возьмем из $[\Psi(P)]$ функции $d_p(\widetilde{y}_p, z) = z_1 \cdot (y_1 \vee \ldots \vee y_p)$, $k_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p \cdot z$ и $v(\widetilde{x}_n, y) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = u(\widetilde{x}_n)$. Нетрудно проверить следующую последовательность равенств

$$k_s(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, \varphi(v(\widetilde{x}_n, x_{i_1}), \ldots, v(\widetilde{x}_n, x_{i_\nu}), d_{n-s}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_{\nu+1}}), \ldots$$
$$\ldots, d_{n-s}(x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_\tau}))) = x_{j_1}^{r_n^{j_1}} \cdot \ldots \cdot x_{j_s}^{r_n^{j_s}} \cdot (u(\widetilde{x}_n) \vee \overline{x_{j_{s+1}} \vee \ldots \vee x_{j_n}}) =$$
$$= u(\widetilde{x}_n) \vee x_1^{r_n^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n^n} = u_{r_n}(\widetilde{x}_n).$$

В силу леммы 8 функции $u(\widetilde{x}_n), u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежат $F_P(S'_n)$. Таким образом, множество функций $\{u(\widetilde{x}_n)\} \cup \{u_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon\ r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}\}$ является П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 получаем $h_P(S'_n) \geqslant 2^n-2$. Утверждение в) доказано.

г) Пусть φ — немонотонная γ-функция. Тогда $F_P(S'_n)$ содержит только α- и γ-функции. Поэтому, учитывая замечание 6, б), $h_P(S'_n) \leqslant 2^n-1$.

Известно, что путем подстановки в функцию $\varphi(\widetilde{x}_\tau)$ констант 0 и 1 и переменной x можно получить функцию $\bar{x}$. Пусть, например, $\varphi(0^\nu, x, 1^{\tau-\nu-1}) = \bar{x}$. Тогда нетрудно проверить, что $\varphi(0^\nu, x\cdot y, x, \ldots, x) = x\bar{y}$.

Возьмем набор $r_n = (r_n^1, \ldots, r_n^n)$ из $\{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}$. Пусть $r_n^{j_1} = \ldots = r_n^{j_s} = 1$, $r_n^{j_{s+1}} = \ldots = r_n^{j_n} = 0$. Далее, возьмем из $[\Psi(P)]$ функции $d_p(z_1, \widetilde{y}_p, z_2) = z_1 \cdot (y_1 \vee \ldots \vee y_p)$, $k_p(\widetilde{y}_p, z) = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p \cdot z$, $v(\widetilde{x}_n, y) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = u(\widetilde{x}_n)$, $g(x,y) = x$. Нетрудно проверить следующую последовательность равенств

$$k_s(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, \varphi(v(\widetilde{x}_n, x_{i_1}), \ldots, v(\widetilde{x}_n, x_{i_\nu}), d_{n-s}(x_{j_1}, x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_n}, x_{i_{\nu+1}}),$$
$$g(x_{j_1}, x_{i_{\nu+2}}), \ldots, g(x_{j_1}, x_{i_\tau}))) = x_{j_1}^{r_n^{j_1}} \cdot \ldots \cdot x_{j_s}^{r_n^{j_s}} \cdot (u \vee x_{j_1} \cdot \overline{x_{j_{s+1}} \vee \ldots \vee x_{j_n}}) =$$
$$= u(\widetilde{x}_n) \vee x_1^{r_n^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n^n} = u_{r_n}(\widetilde{x}_n);$$

Функция $\varphi(g(x_{j_1}, x_{i_1}), \ldots, g(x_{j_1}, x_{i_\tau}))$ равна константе 0, обозначим ее через $0(\widetilde{x}_n)$.

В силу леммы 8 функции $u(\widetilde{x}_n), u_{r_n}(\widetilde{x}_n), 0(\widetilde{x}_n)$ принадлежат $F_P(S'_n)$. Тогда множество функций $\{0(\widetilde{x}_n), u(\widetilde{x}_n)\} \cup \{u_{r_n}(\widetilde{x}_n)\colon\ r_n \in \{0,1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}\}$ является П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 следует $h_P(S'_n) \geqslant 2^n - 1$. Лемма 27 доказана.

В силу двойственности классов F_6^∞ и F_2^∞ и лемм 3, 27 справедлива

Лемма 28. *Если* $[\Psi(P)] = F_2^\infty$, *то*:

а) *если* φ — δ*-функция, то* $2^n-1 \leqslant h_P(S'_n) \leqslant 2^n$,

б) *если* φ — *немонотонная* α*-функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n-2$,

в) *если* φ — *немонотонная* γ*-функция, то* $2^n-2 \leqslant h_P(S'_n) \leqslant 2^n-1$,

г) *если* φ — *немонотонная* β*-функция, то* $h_P(S'_n) = 2^n-1$.

Замечание 7. Известно, что если функция не удовлетворяет свойству $< A^2 >$ ($< a^2 >$), то из нее путем отождествления переменных может быть получена функция $x \vee y$ ($x \cdot y$) [1].

Доказательство утверждения а) теоремы следует из лемм 7, 19, а), 20, а), 21, а), 22, а), 23, 24, следствия 2 и замечания 7.

Доказательство утверждения б) теоремы следует из лемм 7, 19, б), 20, б), в), 21, б), в), 22, б), в), г), 25–28 и следствия 2.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Пусть все элементы базиса неисправностей P реализуют только монотонные самодвойственные булевы функции и хотя бы один элемент реализует нетождественную функцию. Тогда $[\Psi(P)] = D_2$. Заметим, что имеет место включение $D_2 \subset M_4$.

Пусть $u(\widetilde{x}_n)$ — произвольная булева функция, $n \geqslant 0$, и $r_n = (r^1, \ldots, r^n)$ — произвольный двоичный набор, а $r'_n = (\bar{r}^1, \ldots, \bar{r}^n)$ — набор, противоположный набору r_n. Тогда через $u_{r_n}(\widetilde{x}_n)$ ($u_{r_n, r'_n}(\widetilde{x}_n)$) будем обозначать булеву функцию, которая отличается от функции $u(\widetilde{x}_n)$ только на наборе r_n (только на наборах r_n и r'_n).

Пусть $u(\widetilde{x}_n)$ — произвольная монотонная булева функция, тогда через $N_0(u(\widetilde{x}_n))$ и $N_1(u(\widetilde{x}_n))$ будем обозначать множества всех соответственно верхних нулей и нижних единиц функции $u(\widetilde{x}_n)$.

Через S'_n будем обозначать следующую схему с n, $n \geqslant 4$, входами:

— входам S'_n приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$,

— S'_n содержит только один функциональный элемент, и этот элемент реализует функцию $\varphi(\widetilde{y}_\tau)$, $\tau \geqslant 0$,

— S'_n реализует функцию $f(\widetilde{x}_n) = \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\tau})$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_\tau \leqslant n$.

В леммах 29–31 содержатся доказательства теоремы 3, а), б) для схемы S'_n.

Обозначим через $\varphi'(\widetilde{y}_\tau)$, $\tau > 1$, немонотонную булеву функцию, обладающую следующим свойством: для любого набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\tau-1})$ из $\{0, 1\}^{\tau-1}$ такого, что $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, x, \sigma_\nu, \ldots, \sigma_{\tau-1}) = \bar{x}$, имеет место

$$\varphi'(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_{\nu-1}, x, \bar{\sigma}_\nu, \ldots, \bar{\sigma}_{\tau-1}) = x.$$

Через S''_n будем обозначать следующую схему с n, $n \geqslant 4$, входами:

— входам S'_n приписаны переменные $x_1, \ldots, x_n$,

— S''_n содержит только два функциональных элемента, и каждый из них реализует функцию $\varphi'(\widetilde{y}_\tau)$, $\tau > 1$,

— S''_n реализует функцию $f(\widetilde{x}_n) = \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\tau})$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_\tau \leqslant n$.

В лемме 32 содержится доказательство теоремы 3, в) для схемы S''_n.

Лемма 29. *Пусть* $[\Psi(P)] = D_2$, *тогда*:

а) *если* φ — *монотонная самодвойственная функция, то*

$$h_P(S'_n) = \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} + \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1};$$

б) *если* φ — *константа* 0 *или* 1, *то*

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 2} \leqslant h_P(S'_n) \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1};$$

в) *если* $\varphi(\widetilde{x}_\tau) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_\tau$, *то*

при $\tau \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 2$

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 2} - \left(\binom{n-\tau}{\lfloor n/2 \rfloor + 1 - \tau} + \binom{n-\tau}{\lfloor n/2 \rfloor + 2 - \tau}\right) \leqslant$$
$$\leqslant h_P(S'_n) \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1},$$

при $\tau > \lfloor n/2 \rfloor + 2$

$$h_P(S'_n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1};$$

г) *если* $\varphi(\widetilde{x}_\tau) = x_1 \vee \ldots \vee x_\tau$, *то*

при $\tau < \lfloor n/2 \rfloor + 1$

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - \left(\binom{n-\tau}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n-\tau}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant h_P(S'_n) \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1},$$

при $\tau \geqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1$

$$h_P(S'_n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}.$$

Доказательство. а) Пусть φ — монотонная самодвойственная функция. Тогда $F_P(S'_n) \subseteq D_2$, а в силу следствия 1 имеем $D_2(\widetilde{x}_n) \subseteq F_P(S'_n)$. Таким образом, $F_P(S'_n) = D_2(\widetilde{x}_n)$. Известно, что для произвольной монотонной самодвойственной булевой функции $u(\widetilde{x}_n)$ справедливо равенство $u(\widetilde{x}_n) = x_n \cdot u(\widetilde{x}_{n-1}, 1)$, где $u(\widetilde{x}_{n-1}, 1)$ — монотонная булева функция от $n-1$ переменных. Отсюда и леммы 19, а) получаем утверждение а) леммы.

б) Пусть функция φ — константа 0 (1). Тогда из структуры замкнутых классов булевых функций [7] следует, что $F_P(S'_n) \subseteq F_7^2$ $(F_P(S'_n) \subseteq F_3^2)$.

Заметим, что для произвольной функции $u(\widetilde{x}_n)$ из F_7^2 ($u(\widetilde{x}_n)$ из F_3^2) найдется функции $v(\widetilde{x}_n, y)$ из D_2 такая, что $v(\widetilde{x}_n, 0) = u(\widetilde{x}_n)$ $(v(\widetilde{x}_n, 1) = u(\widetilde{x}_n))$. В силу леммы 8, $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S'_n)$. Таким образом, $F_P(S'_n) = F_7^2(\widetilde{x}_n)$ $(F_P(S'_n) = F_3^2(\widetilde{x}_n))$. Далее см. лемму 23, б) (лемму 24, б)). Утверждение б) доказано.

в) Рассмотрим случай $\tau \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 2$. Пусть $\varphi(\widetilde{x}_\tau) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_\tau$, $\tau \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда из структуры замкнутых классов булевых функций [7] имеем следующую цепочку включений $F_P(S'_n) \subseteq F_6^2 \subseteq M_1$. Отсюда и из леммы 19, а) получаем правое неравенство.

Докажем теперь левое неравенство. Введем обозначения

$$\Delta_0 = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\colon (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{0, 1\}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \lfloor n/2 \rfloor + 1,\ \sum_{\nu=1}^{\tau} \sigma_{i_\nu} < \tau\},$$

$$\Delta_1 = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\colon (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{0, 1\}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \lfloor n/2 \rfloor + 2,\ \sum_{\nu=1}^{\tau} \sigma_{i_\nu} < \tau\}.$$

Возьмем теперь функцию $v(\widetilde{x}_{n+1})$ из D_2 такую, что

$$\{(\widetilde{\sigma}, 0)\colon \widetilde{\sigma} \in \Delta_0\} \subseteq N_0(v(\widetilde{x}_{n+1}))\},\ \ \{(\widetilde{\sigma}, 1)\colon \widetilde{\sigma} \in \Delta_1\} \subseteq N_1(v(\widetilde{x}_{n+1}))\}.$$

Пусть $u(\widetilde{x}_n) = v(\widetilde{x}_n, \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\tau}))$. Нетрудно проверить, что

$$\Delta_0 \subseteq N_0(u(\widetilde{x}_n)),\ \Delta_1 \subseteq N_1(u(\widetilde{x}_n)).$$

Из леммы 8 следует, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S'_n)$.

Очевидно, что для произвольного набора r_n из $N_0(u(\widetilde{x}_n)) \cup N_1(u(\widetilde{x}_n))$ функция $v_{(r_n, 0), (r'_n, 1)}(\widetilde{x}_{n+1})$ принадлежит D_2. Нетрудно установить, что

$$v_{(r_n, 0), (r'_n, 1)}(\widetilde{x}_n, \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\tau})) = u_{r_n}(\widetilde{x}_n),$$

Из леммы 8 следует, что $u_{r_n, r'_n}(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S'_n)$. Таким образом, множество функций $\{u(\widetilde{x}_n\}) \cup \{u_{r_n, r'_n}(\widetilde{x}_n\})\colon r_n \in \Delta_0 \cup \Delta_1\}$ является П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Отсюда и из леммы 1 получаем левое неравенство.

Утверждение в) при $\tau \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 2$ доказано, а из него следует утверждение в) при $\tau > \lfloor n/2 \rfloor + 2$.

Утверждение г) следует из двойственности конъюнкции и дизъюнкции, самодвойственности функций из D_2, леммы 3 и утверждения в) настоящей леммы. Лемма 29 доказана.

Замечание 8. Пусть $g(\widetilde{x}_m)$ — монотонная несамодвойственная функция. Тогда найдется набор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ из $\{0, 1\}^m \setminus \{0^m, 1^m\}$, такой, что $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = g(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_m)$. Пусть, например, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = (0^\nu, 1^{m-\nu})$. Тогда можно проверить, что функция

$$g(\overbrace{x, \ldots, x}^{\nu}, y, \ldots, y)$$

равна или $x \vee y$, или $x \cdot y$.

Лемма 30. *Пусть* $[\Psi(P)] = D_2$ *и* φ — δ*-функция. Тогда*

$$2^{n-2} \leqslant h_P(S'_n) \leqslant 2^n.$$

Доказательство. Правое неравенство очевидно. Докажем левое. Возьмем из D_2 функции

$$\eta_k(\widetilde{x}_k) = x_k \cdot (x_1 \vee \ldots \vee x_{k-1}) \vee x_1 \cdot \ldots \cdot x_{k-1}, \quad \xi(x, y, z) = (x \vee y) \cdot z \vee x \cdot y,$$
$$g(\widetilde{y}_{p+2}) = \xi(y_{p+1}, \eta_{p+1}(\widetilde{y}_{p+1}), y_{p+2}).$$

Произвольно выберем набор $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2})$ из $\{0, 1\}^{n-2} \setminus \{0^{n-2}, 1^{n-2}\}$. Пусть $\sigma_{l_1} = \ldots = \sigma_{l_p} = 1$, $\sigma_{m_1} = \ldots = \sigma_{m_q} = 0$, $p + q = n - 2$.

Рассмотрим функции

$$\omega_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n) =$$
$$= g(x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}, x_n, \varphi(\eta_{q+1}(x_{m_1}, \ldots, x_{m_q}, x_{n-1}), \ldots, \eta_{q+1}(x_{m_1}, \ldots, x_{m_q}, x_{n-1}))),$$

$$w_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n) = \xi(x_{n-1}, x_n, \omega_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n)).$$

С помощью леммы 8 можно показать, что они принадлежат $F_P(S'_n)$.

Рассмотрим теперь функции

$$w_{0^{n-2}} = \xi(x_{n-1}, x_{n-1}, \varphi(\eta_{n-1}(\widetilde{x}_{n-1}), \ldots, \eta_{n-1}(\widetilde{x}_{n-1}))),$$
$$w_{1^{n-2}} = \xi(x_{n-1}, x_{n-1}, \eta_{n-2}(\widetilde{x}_{n-2}), x_n))).$$

С помощью леммы 8 нетрудно показать, что они принадлежат $F_P(S'_n)$.

Далее заметим, что

$$w_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_{n-2}, 0, 0) = 0, \quad w_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_{n-2}, 1, 1) = 1,$$
$$w_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_{n-2}, 0, 1) = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{n-2}^{\sigma_{n-2}}, \quad w_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_{n-2}, 1, 0) = x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_{n-2}^{\sigma_{n-2}}.$$

Возьмем из D_2 функцию $v(x, y) = x$. Очевидно, что $v(x_n, f(\widetilde{x}_n)) = x_n$, где f — функция, реализуемая схемой S'_n. Пусть $u(\widetilde{x}_n) = x_n$. Отметим, что $u(\widetilde{x}_n)$ принадлежит $F_P(S'_n)$ (см. лемму 8).

Нетрудно проверить, что для $r_{n-2} \in \{0, 1\}^{n-2}$ функция $w_{r_{n-2}}(\widetilde{x}_n)$ равна

$$u_{(r_{n-2}, 0, 1), (r_{n-2}, 1, 0)}(\widetilde{x}_n).$$

Таким образом, множество функций $\{u\} \cup \{u_{(r_{n-2}, 0, 1), (r_{n-2}, 1, 0)}\colon r_{n-2} \in \{0, 1\}^n\}$ является П-множеством для $\langle S'_n, H_P(S'_n)\rangle$. Поэтому $h_P(S'_n) \geqslant 2^{n-2}$.

Лемма 30 доказана.

Лемма 31. *Пусть* $[\Psi(P)] = D_2$ *и* φ *— немонотонная или* α*-, или* β*-, или* γ*-функция, обладающая следующим свойством: найдется набор* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\tau-2}) \in \{0, 1\}^{\tau-1}$ *такой, что* $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}, x, \sigma_\nu, \ldots, \sigma_{\tau-1}) = \bar{x}$, *а функция* $\varphi(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_{\nu-1}, x, \bar{\sigma}_\nu, \ldots, \bar{\sigma}_{\tau-1})$ *равна или* $\bar{x}$, *или* 0, *или* 1. *Тогда*

$$2^{n-2} \leqslant h_P(S'_n) \leqslant 2^n.$$

Доказательство. Правое неравенство очевидно. Докажем левое. Пусть функции η_k, ξ, g и набор $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2})$ из $\{0, 1\}^{n-2} \setminus \{0^{n-2}, 1^{n-2}\}$

такие же, как и в доказательстве леммы 30. Пусть $\varphi(1^\nu, x, 0^{\tau-\nu}) = \bar{x}$. Определим функции $\omega_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n)$, $w_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n)$, $w_{0^{n-2}}(\widetilde{x}_n)$, $w_{1^{n-2}}(\widetilde{x}_n)$ следующим образом:

$$\omega_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n) = g(x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}, x_n, \varphi(\overbrace{x_{n-1}, \ldots, x_{n-1}}^{\nu-1}, x_n, \eta_{q+1}(x_{m_1}, \ldots$$
$$\ldots, x_{m_q}, x_{n-1}), x_n, \ldots, x_n))),$$
$$w_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n) = \xi(x_{n-1}, x_n, \omega_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n)),$$
$$w_{0^{n-2}}(\widetilde{x}_n) = \xi(x_{n-1}, x_n, \varphi(\overbrace{x_{n-1}, \ldots, x_{n-1}}^{\nu-1}, \eta_{n-1}(\widetilde{x}_{n-1}), x_n, \ldots, x_n)),$$
$$w_{1^{n-2}}(\widetilde{x}_n) = \xi(x_{n-1}, x_n, \eta_{n-1}(\widetilde{x}_{n-2}, x_n)).$$

Далее доказательство проводится так же, как и в лемме 30.

При $\varphi(1^\nu, x, 0^{\tau-\nu}) = 0$ доказательство леммы проводится так же, как и в предыдущем случае. Отметим только, что для $\widetilde{\sigma} \in \{0, 1\}^{n-2} \setminus \{0^{n-2}, 1^{n-2}\}$ имеем $w_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_{n-2}, 1, 0) = 0$, $w_{1^{n-2}}(\widetilde{x}_{n-2}, 1, 0) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-2}$.

Пусть $\varphi(1^\nu, x, 0^{\tau-\nu}) = 1$. Определим следующие функции:

$$\omega_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n) =$$
$$= g(x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}, x_n, \varphi(\overbrace{x_n, \ldots, x_n}^{\nu-1}, x_n, \eta_{q+1}(x_{m_1}, \ldots, x_{m_q}, x_{n-1}), x_{n-1}, \ldots, x_{n-1})),$$
$$w_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n) = \xi(x_{n-1}, x_n, \omega_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n)),$$
$$w_{0^{n-2}} = \xi(x_{n-1}, x_n, \varphi(\overbrace{x_{n-1}, \ldots, x_{n-1}}^{\nu-1}, \eta_{n-1}(\widetilde{x}_{n-1}), x_{n-1}, \ldots, x_{n-1})),$$
$$w_{1^{n-2}} = \xi(x_{n-1}, x_n, \eta_{n-1}(\widetilde{x}_{n-2}, x_n)).$$

Далее доказательство проводится так же, как и в лемме 30. Отметим только, что для $\widetilde{\sigma} \in \{0, 1\}^{n-2} \setminus \{1^{n-2}\}$ функция $w_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_{n-2}, 0, 1)$ равна единице, а $w_{1^{n-2}}(\widetilde{x}_{n-2}, 0, 1) = x_1 \vee \ldots \vee x_{n-2}$.

Лемма 31 доказана.

Л е м м а 32. *Пусть* $[\Psi(P)] = D_2$. *Тогда*

$$2^{n-2} \leqslant h_P(S_n'') \leqslant 2^n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правое неравенство очевидно. Докажем левое. Пусть $\varphi'(0^\nu, x, 1^{\tau-\nu}) = \bar{x}$, а функции η_k, ξ, g и набор $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2})$ из $\{0, 1\}^{n-2} \setminus \{0^{n-2}, 1^{n-2}\}$ такие же, как и в доказательстве леммы 30. Определим следующие функции:

$$\omega_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n) = g(x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}, x_n, \varphi(\overbrace{x_{n-1}, \ldots, x_{n-1}}^{\nu-1}, \varphi(\overbrace{x_n, \ldots, x_n}^{\nu}, \eta_{q+1}(x_{m_1}, \ldots$$
$$\ldots, x_{m_q}, x_{n-1}), x_{n-1}, \ldots, x_{n-1}), x_n, \ldots, x_n)),$$
$$w_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n) = \xi(x_{n-1}, x_n, \omega_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}_n)),$$
$$w_{0^{n-2}} = \xi(x_{n-1}, x_n, \varphi(\overbrace{x_{n-1}, \ldots, x_{n-1}}^{\nu-1}, \varphi(\overbrace{x_n, \ldots, x_n}^{\nu-1}, \eta_{n-1}(\widetilde{x}_{n-1}), x_{n-1}, \ldots$$
$$\ldots, x_{n-1}), x_n, \ldots, x_n)),$$
$$w_{1^{n-2}} = \xi(x_{n-1}, x_n, \eta_{n-1}(\widetilde{x}_{n-2}, x_n)).$$

Далее доказательство проводится так же, как и в лемме 30.

Лемма 32 доказана.

Утверждение а) теоремы следует из лемм 7, 29, следствия 2 и замечания 8.

Утверждение б) теоремы следует из лемм 7, 29–31 и следствия 2.

Утверждение в) теоремы следует из лемм 7, 32 и следствия 2.

§ 6. Сложность диагностики k функционально различимых неисправностей

Пусть S — некоторая схема, P — базис неисправностей и пусть $F_P(S)=\{f_1,\ldots,f_m\}$ — множество всех различных булевых функций, реализуемых схемами из $H_P(S)$. Разобъем множество $H_P(S)$ на подмножества $H_P^1(S), H_P^2(S),\ldots, H_P^m(S)$ такие, что все схемы, принадлежащие подмножеству $H_P^i(S)$, реализуют функцию f_i, $1\leqslant i\leqslant m$.

Сформулируем *задачу диагностики схемы S относительно множества* $H_P^{i_1,\ldots,i_k}(S)=H_P^{i_1}(S)\cup\ldots\cup H_P^{i_k}(S)$. Задана схема U из $H_P^{i_1,\ldots,i_k}(S)$, требуется определить, к какому из k подмножеств она принадлежит. В дальнейшем эту задачу иногда будем обозначать через $\langle S, H_P^{i_1,\ldots,i_k}(S)\rangle$.

Заметим, что задача $\langle S, H_P^{1,\ldots,m}(S)\rangle$ совпадает с задачей $\langle S, H_P(S)\rangle$.

Дерево решений, глубина дерева решений, минимальная глубина дерева решений для задачи $\langle S, H_P^{i_1,\ldots,i_k}(S)\rangle$ определяются так же, как и для задачи $\langle S, H_P(S)\rangle$.

Пусть $h_P^{i_1,\ldots,i_k}(S)$ — минимальная глубина дерева решений для $\langle S, H_P^{i_1,\ldots,i_k}(S)\rangle$

В работе изучалась величина $h_P^k(S_n)=\max h_P^{i_1,\ldots,i_k}(S_n)$, где максимум берется по всем наборам $\{(i_1,\ldots,i_k)\colon 1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant m\}$.

Используя леммы 1 и 2, нетрудно доказать соответственно следующие леммы 33 и 34.

Лемма 33. *Пусть G — П-множество для $\langle S, H_P(S)\rangle$. Тогда*

$$h_P^k(S)\geqslant \min\{|G|-1,\ k-1\}.$$

Лемма 34. *Пусть Δ есть T-множество для $\langle S, H_P(S)\rangle$. Тогда*

$$h_P^k(S_n)\leqslant \min\{|\Delta|,\ k-1\}.$$

Введем обозначения:

$$\alpha_n^k=\min\{\lambda_n,\ k-1\},\quad \beta_{n,q}^k=\min\{2^n-q,\ k-1\},$$

где $n\geqslant 1$, $k\geqslant 2$, а

$$\lambda(n)=\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}+\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor+1}.$$

С помощью лемм 33 и 34, а также, используя доказательства теорем 1–3, можно убедиться в справедливости следующих теорем 4, 5, 6.

Теорема 4. *Пусть S_n — схема, в которой n, $n\geqslant 1$, входов, один выход и имеется хотя бы один функциональный элемент. Пусть P — базис неисправностей. Тогда, если P содержит хотя бы один элемент, реализующий немонотонную булеву функцию и хотя бы один элемент, реализующий нелинейную булеву функцию, то*

$$\beta_{n-1,1}^k\leqslant h_P^k(S_n)\leqslant \beta_{n,0}^k.$$

Теорема 5. *Пусть S_n — схема, в которой n, $n\geqslant 4$, входов, один выход и имеется хотя бы один функциональный элемент. Пусть P — базис неисправностей. Тогда, если все элементы P реализуют только монотонные булевы функции и при этом:*

— хотя бы один элемент реализует функцию, отличную от конъюнкции и константы;

— хотя бы один элемент реализует функцию, отличную от дизъюнкции и константы;

— хотя бы один элемент реализует функцию, отличную от самодвойственной монотонной функции,
то:

а) *если все элементы S_n реализуют только монотонные булевы функции, то*

$$\alpha_{n-1}^k \leqslant h_P^k(S_n) \leqslant \alpha_n^k;$$

б) *если S_n содержит хотя бы один элемент, реализующий немонотонную функцию, то*

$$\beta_{n,2}^k \leqslant h_P^k(S_n) \leqslant \beta_{n,0}^k.$$

Теорема 6. *Пусть S_n — схема, в которой n, $n \geqslant 4$, входов, один выход и имеется хотя бы один функциональный элемент. Пусть P — базис неисправностей. Тогда, если все элементы P реализуют только монотонные самодвойственные отличные от тождественной булевы функции, то*:

а) *если все элементы S_n реализуют только монотонные булевы функции, то*

$$\alpha_{n-1}^k \leqslant h_P^k(S_n) \leqslant \alpha_n^k;$$

б) *если в S_n содержится только один элемент, реализующий немонотонную булеву функцию, то или*

$$\beta_{n-2,0}^k \leqslant h_P^k(S_n) \leqslant \beta_{n,0}^k,$$

или

$$\alpha_{n-1}^k \leqslant h_P^k(S_n) \leqslant \beta_{n,0}^k;$$

в) *если в S_n содержится хотя бы два элемента, реализующих немонотонные булевы функции, то*

$$\beta_{n-2,0}^k \leqslant h_P^k(S_n) \leqslant \beta_{n,0}^k.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаврилов Г. П. Индуктивные представления булевых функций и конечная порождаемость классов Поста // Алгебра и логика. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. — Т. 23, № 1. — С. 3–26.
2. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Мошков М. Ю. Условные тесты // Проблемы кибернетики. Вып. 40. — М.: Наука, 1983. — С. 131–170.
4. Мошков М. Ю. Деревья решений. Теория и приложения. — Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1994.
5. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Тр. Матем. ин-та АН СССР. Т. 51. — 1958. — С. 270–360.
6. Яблонский С. В., Чегис И. А. О тестах для электрических схем // УМН. Т. 10, Вып. 4. — 1955. — С. 182–184.
7. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
8. Hansel G. Sur le nombre des fonctions Booléennes monotones de n variables // C. R. Acad. Sci. Paris. — V. 262, № 20. — 1966. — P. 1088–1090. [Русский перевод: Ансель Ж. О числе монотонных булевых функций n переменных // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 5. — М.: Мир, 1968. — С. 53–67.]

Поступило в редакцию 27 VIII 2001